

# Об эволюции спектров волн на воде

В. В. Геогджаев

*Волны на воде представляют собой ту область географии,  
где математика добивается наибольших успехов  
(В.Е.Захаров)*

Ветровое волнение на воде представляет собой существенную часть взаимодействия океана и атмосферы. Кроме того, волнение оказывает непосредственное влияние на судоходство. Современные математические методы позволяют провести исследования волнения на воде и построить его модели.

Волнение на воде представляет собой спектр волн различных частот, взаимодействующих друг с другом из-за нелинейности уравнений движения. Развитие волнения определяется этим взаимодействием.

Взаимодействие между волнами может быть описано кинетическим уравнением (уравнением Хассельманна). Взаимодействие мало по сравнению с энергией волн, такая ситуация называется слабой турбулентностью. (Этим поверхностное волнение на воде существенно отличается от волн в атмосфере)

Уравнение Хассельманна:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial t} = & \pi g^2 \int_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4} (T(\mathbf{k}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4))^2 \times \\ & \times (NN_3N_4 + N_2N_3N_4 - NN_2N_3 - NN_2N_4) \times \\ & \times \delta(\omega + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4 \end{aligned}$$

Взаимодействие является резонансным. Чтобы волны могли обмениваться энергией, они должны находиться в резонансе по времени и по пространству.

Трёхволновой резонанс невозможен. Таким образом, мы должны рассматривать резонанс четвёртого порядка, что ведёт к сложности формул. Взаимодействуют волны, удовлетворяющие резонансным соотношениям:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 &= \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 \\ \omega_1 + \omega_2 &= \omega_3 + \omega_4 \end{aligned}$$

Существенную роль в эволюции волнения на воде играют колмгоровские спектры. Спектры вида  $N \sim k^{-4}$  и  $N \sim k^{-23/6}$  сохраняют свою форму, но вместе с тем первый из них даёт поток энергии в сторону высоких частот, а второй — поток "числа волн" в сторону низких частот

(т.н. обратный каскад). Наличие обратного каскада ведёт к развитию крупномасштабного волнения.

Каждый из квадруплетов взаимодействующих волн может быть рассмотрен независимо. Пространство квадруплетов в целом может быть рассмотрено как многообразие, по которому можно проводить интегрирование для получения полного взаимодействия. При этом, различные квадруплеты ведут себя по-разному из-за различия их формы. Существует область в пространстве квадруплетов, которая вносит наибольший вклад во взаимодействие.

Интеграл по квадруплетам может быть взят численно. При этом пространство квадруплетов трёхмерно, ещё два измерения имеет волновой спектр. Таким образом, речь идёт о пятимерном интеграле. Тем не менее, можно построить такую сетку квадруплетов, которая даёт приемлемые результаты при не слишком большом числе точек. Построенная автором сетка приведена на рисунке.

Квадруплетная форма кинетического уравнения для ветрового волнения и её интегрирование по квадруплетам могут стать основой для новых моделей ветрового волнения.

