

Российская академия наук  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ  
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
(ИВМ РАН)

УДК 551.46, 519.6

№ госрегистрации 01201062798

от 15.10.2010

Инв.№ 1

УТВЕРЖДАЮ

Директор ИВМ РАН,

д.ф.-м.н, чл.-корр. РАН

\_\_\_\_\_ Е.Е. Тыртышников

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2012г.

ОТЧЕТ  
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

В рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы

по Государственному контракту от 20 сентября 2010 г. № 14.740.11.0358

Шифр заявки «2010-1.1-113-130-043»

по теме:

ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫЕ ИНФОРМАЦИОННО-  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ  
ГЕОИНФОРМАТИКИ

Наименование этапа: «Обобщение и оценка результатов исследований»  
(заключительный, этап № 5)

Руководитель НИР, д.ф.-м.н., проф.

В.Б. Залесный

\_\_\_\_\_

подпись, дата

Москва 2012

## СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель темы, д-р физ.-мат. наук, проф.	<hr/>	В. Б. Залесный (введение, разделы 2.1-2.4, 5)
	подпись, дата	
Ответственный исполнитель темы, д-р физ.-мат. наук, проф.	<hr/>	В. И. Агошков (разделы 4.1-4.2, 4.4, заключение)
	подпись, дата	
Исполнители темы:		
д-р физ.-мат. наук	<hr/>	Н. А. Дианский (разделы 3.1-3.3)
	подпись, дата	
д-р физ.-мат. наук	<hr/>	А. С. Грицун (раздел 2.3)
	подпись, дата	
к.ф.-м.н.	<hr/>	А.В. Гусев (раздел 4.3)
	подпись, дата	
к.ф.-м.н.	<hr/>	С.Н. Мошонкин (раздел 4.6)
	подпись, дата	
Аспирант	<hr/>	Н.Б. Захарова (раздел 2.2)
	подпись, дата	
Студент	<hr/>	В.В. Фомин (раздел 3.1-3.3)
	подпись, дата	
Студент	<hr/>	С.Ю. Чернобай (раздел 4.5)
	подпись, дата	
Нормоконтролер	<hr/>	А.В. Гусев
	подпись, дата	

## РЕФЕРАТ

Отчет 122 с., 1 ч., 52 рис., 2 табл., 93 источника, 1 прил.

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ГЕОФИЗИЧЕСКАЯ ГИДРОДИНАМИКА, ИНФОРМАЦИОННО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ, ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ, ДИНАМИКА ОКЕАНА, СОПРЯЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Объектом исследования являются численные методы, информационно-вычислительные технологии моделирования и анализа процессов геофизической гидродинамики и крупномасштабной гидротермодинамики океана.

Цель работы – разработка высокопроизводительных информационно-вычислительных технологий решения сложных задач геоинформатики; создание комплекса программ для решения прикладных задач глобальных изменений гидросферы Земли в национальных и стратегических интересах России.

Проведенные на пятом этапе НИР работы включали:

1. Обобщение результатов предыдущих этапов работ. Оценку полноты решения задач и эффективности полученных результатов.
2. Проведение дополнительных исследований. Оценку возможности создания конкурентоспособной продукции и услуг.
3. Завершение разработки научно-методических материалов к учебному пособию по курсу «Сопряженные уравнения и методы оптимального управления в задачах математической физики».
4. Разработку программы внедрения результатов НИР в образовательный процесс.

В целом, методология исследования состоит в разработке эффективных методов решения прямых и сопряженных задач геофизической гидродинамики, создании численных моделей глобальной и региональной динамики океана, алгоритмов обработки данных наблюдений и численного моделирования, проведении и анализе результатов вычислительных экспериментов.

Основными научными результатами пятого этапа НИР являются:

- обобщение предыдущих результатов НИР с оценкой полноты решения задач и эффективности полученных результатов;
- оценка возможности создания конкурентоспособной продукции и услуг;
- разработка научно-методических материалов к учебному пособию по курсу «Сопряженные уравнения и методы оптимального управления в задачах математической физики»;
- программа внедрения результатов НИР в образовательный процесс.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>1</b>	<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>ОБОБЩЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЕДЫДУЩИХ ЭТАПОВ РАБОТ. ОЦЕНКА ПОЛНОТЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ И ЭФФЕКТИВНОСТИ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ</b> .....	<b>6</b>
2.1	Обобщение результатов исследований по моделированию общей циркуляции океана и ассимиляции данных наблюдений .....	6
2.2	Постановка задачи моделирования циркуляции Мирового океана с ассимиляцией данных наблюдений Арго.....	9
2.3	Оценка эффективности полноты решения задачи и эффективности полученных результатов .....	14
2.4	Выводы.....	39
<b>3</b>	<b>ПРОВЕДЕНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ. ОЦЕНКА ВОЗМОЖНОСТИ СОЗДАНИЯ КОНКУРЕНТОСПОСОБНОЙ ПРОДУКЦИИ И УСЛУГ</b>	<b>40</b>
3.1	Проведение дополнительных исследований. Задача динамики Черного моря .....	40
3.2	Результаты численных экспериментов по расчету циркуляции Черного и Азовского морей.....	42
3.3	Выводы.....	53
<b>4</b>	<b>НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО КУРСУ «СОПРЯЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ И МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»</b> .....	<b>55</b>
4.1	Введение. Математические модели и методы геофизической гидродинамики.....	55
4.2	Метод вариационной ассимиляции данных наблюдений .....	55
4.3	Метод расщепления, как методологическая основа построения сложных моделей и численного решения прямых и сопряженных задач .....	57
4.4	Метод сопряженных уравнений для решения и анализа прямых и обратных задач геофизической гидродинамики .....	68
4.5	Численное решение уравнений мелкой воды .....	75
Данный параграф является примером постановки и решения задачи геофизической гидродинамики в рамках дипломной студенческой работы. ....		
4.6	Метод расщепления для решения уравнений турбулентного обмена в океане .....	84
<b>5</b>	<b>ПРОГРАММА ВНЕДРЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ НИР В ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ПРОЦЕСС</b> .....	<b>92</b>
<b>6</b>	<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b> .....	<b>94</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ.</b> .....		<b>96</b>
<b>ОПИСАНИЕ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА ДЛЯ РАСЧЁТА ЦИРКУЛЯЦИИ ОКЕАНОВ И МОРЕЙ</b> .....		<b>96</b>
6.1	Структура модели и ее компиляция.....	96
6.2	Запуск модели .....	100
6.3	Подготовка данных.....	108
6.3.1	Подготовка исходных данных в z-координатах .....	108
6.3.2	Создание температурной маски расчетной области .....	111
6.3.3	Подготовка данных для задания условий на жидких границах .....	112
6.3.4	Особенности настройки модели и подготовки данных для глобального океана .....	112
6.4	Схема работы модели .....	113
<b>7</b>	<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ</b> .....	<b>116</b>

## 1 ВВЕДЕНИЕ

Основной целью научно-исследовательской работы «Высокопроизводительные информационно-вычислительные технологии решения задач геоинформатики» является разработка математических методов и вычислительных технологий решения сложных задач геофизической гидродинамики, а также создание комплекса программ для решения прикладных задач глобальных изменений гидросферы Земли в национальных и стратегических интересах России.

Исследования лежат в русле современных работ в области математического моделирования динамики Мирового океана и двух его крупных акваторий, представляющих стратегический интерес для России. Это - Северная Атлантика – Северный Ледовитый океан – Берингово море - акватория, прилегающая к берегам России, а также Индийский океан - акватория уникальной муссонной изменчивости гидрофизических полей.

Методология проводимых в рамках НИР исследований основывается на разработке эффективных методов решения прямых и сопряженных задач геофизической гидродинамики, создании численных моделей глобальной и региональной динамики океана, перспективных алгоритмов обработки данных наблюдений и численного моделирования, проведении широкой серии тестовых расчетов и вычислительных экспериментов.

Пятый этап НИР был посвящен обобщению и оценке результатов комплекса исследований, проведенных по заявленной теме.

Он включал следующие разделы.

1. Обобщение результатов предыдущих этапов работ. Оценка полноты решения задач и эффективности полученных результатов.
2. Проведение дополнительных исследований. Оценка возможности создания конкурентоспособной продукции и услуг.
3. Завершение разработки научно-методических материалов к учебному пособию по курсу «Сопряженные уравнения и методы оптимального управления в задачах математической физики».
4. Разработку программы внедрения результатов НИР в образовательный процесс.

Основными научными результатами второго этапа НИР являются: обобщение предыдущих результатов НИР с оценкой полноты решения задач и эффективности полученных результатов; оценка возможности создания конкурентоспособной продукции и услуг; разработка научно-методических материалов к учебному пособию по курсу «Сопряженные уравнения и методы оптимального управления в задачах математической физики»; программа внедрения результатов НИР в образовательный процесс.

## 2 ОБОБЩЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЕДЫДУЩИХ ЭТАПОВ РАБОТ. ОЦЕНКА ПОЛНОТЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ И ЭФФЕКТИВНОСТИ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

### 2.1 Обобщение результатов исследований по моделированию общей циркуляции океана и ассимиляции данных наблюдений

Основная особенность проведенной НИР состоит в том, что выполненные разработки в области информатики, включая разработку новых вычислительных методов и технологий, были применены к практическому созданию численных математических моделей геоинформатики нового поколения. Это - физически полные численные модели динамики океанов и морей, способные адекватно воспроизводить реальные гидродинамические процессы и ассимилировать данные натурных наблюдений. Модели могут реализовываться на многопроцессорных вычислительных системах и эффективно обрабатывать большие массивы расчетных данных и данных геофизических наблюдений.

Разработка этих моделей представляет собой междисциплинарную проблему, к исследованию которой привлечено внимание многих стран и международных организаций. Развитие моделей, описывающих динамику гидросферы земли, особенно интенсивно происходит в течение последних 20-30 лет в физическом, математическом и информационном аспектах [1-89]. Для информационного обеспечения решения этой проблемы создаются новые вычислительные методы и технологии получения и обработки данных наблюдений: спутниковая альтиметрия, международная система плавающих буев ARGO и др.

Разработка численных моделей динамики океанов и морей нового поколения требует исследования ряда проблем в области вычислительных и информационных технологий. Эти проблемы связаны, в первую очередь, с разработкой новых алгоритмов решения задач для сложных математических моделей в областях сложной формы, аппроксимирующих реальные морские акватории. Методы должны быть устойчивыми и обладать высокими порядками аппроксимации, базироваться на достижениях современной вычислительной математики.

Разработка эффективных вычислительных технологий решения сложных многомерных прикладных задач геофизической гидродинамики, имеющих важное практическое значение, связана также с проблемой обработки данных наблюдений. С их помощью проводится

тестирование и верификация расчетных алгоритмов, и оценка адекватности разработанных моделей. На предыдущих этапах исследований в рамках настоящей НИР разработана и апробирована в практических расчетах модель динамики Мирового океана и его крупных акваторий. Полученные результаты показали высокую информационно-вычислительную способность модели, а также ее адекватность воспроизведения процессов крупномасштабной циркуляции.

На заключительном, пятом этапе НИР, рассмотрим обобщение ранее полученных результатов, применив разработанную информационно-вычислительную технологию для решения актуальной задачи мониторинга Мирового океана. Задача связана с воспроизведением общей циркуляции Мирового океана с учетом данных наблюдений с международной системы плавающих буев ARGO. Решение задачи осуществляется с помощью разработанных авторами модели динамики Мирового океана [2, 3, 5, 6, 71, 72] и метода вариационной ассимиляции данных наблюдений [1, 4, 7, 22-33, 36-41, 76, 78, 84]. Перед тем, как перейти к результатам нового численного эксперимента, отметим еще раз основные особенности нашей разработки.

**Специфика разработанной прогностической модели общей циркуляции Мирового океана.** В предыдущих отчетах НИР достаточно подробно описана постановка задачи общей циркуляции океана и методы ее решения. Определим место модели ИВМ РАН в кругу лучших современных моделей динамики Мирового океана.

К настоящему времени создано около 10 прогностических моделей динамики океана высокого пространственного разрешения. Под прогностическими моделями, понимаются модели, способные воспроизводить (в пространстве и времени) динамику океанических процессов по заданному начальному условию и известному внешнему воздействию на поверхности моря. Отметим, прежде всего, три глобальные американские модели НУСОМ, POP и MIT, общеевропейскую модель NEMO, разработанную на базе французской модели OPA, глобальную интернациональную модель OFES/MOM для Симулятора Земли, а также модель, разработанную в ИВМ РАН (Marchuk et al., 2005, 2006). Все модели – конечно-разностные, с сеточным разрешением около 10 км, расчеты проведены на срок 10-100 лет. Наряду с использованием моделей в «автономном режиме» – для моделирования динамики морей и океанов, они включаются в качестве блоков совместных климатических и земных систем атмосфера – океан – льды – материки. Например, разработанная участниками НИР модель термохалинной циркуляции Мирового океана ИВМ РАН, является составной частью российской климатической модели, развиваемой в рамках Международной Программы по изменению климата (Володин, Дианский, 2006).

В ближайшие годы в ведущих странах мира ставится новая задача - создание моделей Мирового океана, способных эффективно рассчитывать гидродинамические поля на срок 100-200 и более лет. В перспективе они имеют тройное предназначение: а) в интересах развития знания и процесса обучения; б) для торгового и экономического развития мировых экономик; в) для целей военно-морского флота. В русле данного направления выполнена и наша работа.

Основной особенностью модели ИВМ РАН является то, что технология ее решения основана на методах расщепления и методе сопряженных уравнений. Метод расщепления позволяет повысить вычислительную эффективность модели и устойчивость ее решения. Его применение позволило создать единственную в настоящее время в мире модель динамики Мирового океана, уравнения которой записаны в криволинейной сигма-системе координат. Метод сопряженных уравнений в сочетании с методом расщепления позволил построить эффективную вычислительную технологию решения задач динамики океана с вариационной ассимиляцией данных наблюдений. Разработанная технология также уникальна - она не имеет аналогов среди современных моделей динамики морей и океанов.

**Метод вариационной ассимиляции данных наблюдений.** Математические методы ассимиляции данных широко применяются в науках о Земле. Наибольшие приложения они получили в метеорологии и океанографии, где наблюдения атмосферы и океана ассимилируются в математические численные модели с целью получения начальных условий (или других параметров модели) для дальнейшего моделирования и прогноза. Последние годы характеризуются наличием существенного технического прогресса, приводящего к качественным изменениям измерительных систем. Прежде всего, это связано со спутниковыми системами и плавающими в океане дрейфтерами и буями. Мировое научное сообщество получает все больше и больше измерений различных характеристик геосистемы. Поэтому разработка систем вариационной ассимиляции данных наблюдений, основанных на современных подходах и учитывающих последние достижения в этом направлении, является актуальной проблемой. Наиболее универсальным методом ассимиляции данных является аппарат 4-х мерного вариационного усвоения, основанный на теории сопряженных уравнений и оптимального управления.

Значительным прорывом в решении задач усвоения данных было применение вариационных методов и, в частности, методов оптимального управления. Очень плодотворной оказалась идея минимизировать некоторый функционал, связанный с данными наблюдений, на решениях рассматриваемой модели. Тем самым, задача об усвоении данных формулируется как задача оптимального управления.

При решении вариационных задач возникает необходимость вычислять градиент исходного функционала. Важным шагом в этом направлении было использование теории сопряженных уравнений (Марчук, 1964; Лионс, 1968). При использовании вариационного подхода наиболее сложные задачи возникают в случае так называемого 4-х мерного усвоения данных. В этом случае данные наблюдений ассимилируются на некотором заданном временном интервале. Это приводит к необходимости решать связанные системы прямых и сопряженных уравнений, в прямом и обратном времени, чрезвычайно усложняя численные алгоритмы. Можно отметить, что по сравнению с задачей Коши (или задачей прогноза) задача 4-х мерного усвоения данных на два порядка сложнее. Во-первых, для исходной нелинейной задачи сопряженная к ней имеет более сложный вид. Во-вторых, при решении сопряженной задачи требуется хранить в машинной памяти 4-х мерный массив вектор-решения прямой задачи. В-третьих, при решении задачи 4-х мерного усвоения данных, как правило, используют итерационный процесс, сходимость которого во многих случаях является проблемой. Опыт первых экспериментов в этой области показывает, что решение задачи вариационной ассимиляции, примерно в 100 раз требует больших затрат машинного времени и то, если объем обрабатываемой информации можно разместить в оперативной памяти.

В нашей технологии эффективность метода оптимального управления связана с тем, что строится сопряженный оператор не к исходной прямой численной модели, а к ее расщепленному аналогу. Это позволяет более просто построить сопряженные блоки модели. Вначале с помощью метода расщепления модель разбивается на совокупность более простых блоков, а затем к каждому блоку строится его сопряженный аналог. Таким образом, сопряженная модель, так же как и прямая, состоит из совокупности «элементарных» модулей. Вообще говоря, данная технология несколько уменьшает точность решения вариационной задачи, однако позволяет существенно повысить устойчивость алгоритмов. Численные эксперименты показывают, что при решении геофизических задач, развитая технология обладает приемлемой точностью и высокой эффективностью. Разработанная технология не имеет аналогов среди современных моделей геофизической гидродинамики.

## 2.2 Постановка задачи моделирования циркуляции Мирового океана с ассимиляцией данных наблюдений Арго

Запишем уравнения крупномасштабной циркуляции Мирового океана в сигма-системе координат, в традиционных приближениях Буссинеска, гидростатики и несжимаемости морской воды. Постановка задач динамики океана, включая формулировку начальных и

краевых условий, связанных с данными наблюдений и внешними источниками, методы их численного решения и анализ результатов расчетов основывается на работах [2-6, 71-72]. Симметризованная форма уравнений, описывающая крупномасштабную термохалинную динамику Мирового океана, в приближении  $H \gg \zeta$ ,  $D = H - \zeta \approx H(x, y)$  имеет вид (см. отчеты за 1-й - 3-й этапы НИР)

$$D \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{r_y r_x} \frac{\partial}{\partial x} (D u r_y u) + \frac{D u}{r_x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r_x r_y} \frac{\partial}{\partial y} (D v r_x u) + \frac{D v}{r_y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\omega u) + \omega \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right\} -$$

$$- D \left\{ l + \frac{1}{r_x r_y} \left[ \frac{\partial r_y}{\partial x} \cdot v - \frac{\partial r_x}{\partial y} \cdot u \right] \right\} v = - \frac{D}{\rho_0 r_x} \frac{\partial}{\partial x} \left( p - \frac{g}{2} \rho Z \right) + \frac{g D}{2 \rho_0 r_x} \left( \rho \frac{\partial Z}{\partial x} - Z \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \Lambda_u u; \quad (2.1)$$

$$D \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{r_y r_x} \frac{\partial}{\partial x} (D u r_y v) + \frac{D u}{r_x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r_x r_y} \frac{\partial}{\partial y} (D v r_x v) + \frac{D v}{r_y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\omega v) + \omega \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right\} +$$

$$+ D \left\{ l + \frac{1}{r_x r_y} \left[ \frac{\partial r_y}{\partial x} \cdot v - \frac{\partial r_x}{\partial y} \cdot u \right] \right\} u = - \frac{D}{\rho_0 r_y} \frac{\partial}{\partial y} \left( p - \frac{g}{2} \rho Z \right) + \frac{g D}{2 \rho_0 r_y} \left( \rho \frac{\partial Z}{\partial y} - Z \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \Lambda_v v; \quad (2.2)$$

$$0 = - \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( p - \frac{g}{2} \rho Z \right) + \frac{g}{2} \left( \rho \frac{\partial Z}{\partial \sigma} - Z \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \right); \quad (2.3)$$

$$- \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{r_x r_y} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (D r_y u) + \frac{\partial}{\partial y} (D r_x v) \right] + \frac{\partial \omega}{\partial \sigma} = 0; \quad (2.4)$$

$$D \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{r_y r_x} \frac{\partial}{\partial x} (D u r_y T) + \frac{D u}{r_x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{r_x r_y} \frac{\partial}{\partial y} (D v r_x T) + \frac{D v}{r_y} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\omega T) + \omega \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right\} = \Lambda T \quad (2.5)$$

$$D \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{r_y r_x} \frac{\partial}{\partial x} (D u r_y S) + \frac{D u}{r_x} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{r_x r_y} \frac{\partial}{\partial y} (D v r_x S) + \frac{D v}{r_y} \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\omega S) + \omega \frac{\partial S}{\partial \sigma} \right\} = \Lambda S \quad (2.6)$$

$$\rho = \rho(T, S, Z). \quad (2.7)$$

Граничные и начальные условия для системы уравнений (2.1) - (2.7) имеют вид.

На свободной поверхности  $\sigma = 0$ :

$$\frac{v_u}{Z_\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma} = - \frac{\tau_x}{\rho_0}, \quad \frac{v_v}{Z_\sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma} = - \frac{\tau_y}{\rho_0}, \quad \omega = 0, \quad p = p_{atm},$$

$$(D_T T, n) = -Q_T^0, \quad (D_S S, n) = -Q_S^0. \quad (2.8)$$

На дне  $\sigma = 1$ :

$$\frac{v_u}{Z_\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma} = R_u, \quad \frac{v_v}{Z_\sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma} = R_v, \quad \omega = 0$$

$$(D_T T, n) = 0, (D_S S, n) = 0. \quad (2.9)$$

На цилиндрической береговой поверхности  $\Sigma$

$$(\vec{u}, n_\Sigma) = 0, (\nabla_u u, n_\Sigma) = 0, (\nabla_u v, n_\Sigma) = 0, (\nabla_T T, n_\Sigma) = 0, (\nabla_S S, n_\Sigma) = 0. \quad (2.10)$$

$$\text{Здесь } \nabla_u = \mu_u \left( \frac{1}{r_x} \frac{\partial}{\partial x} i_1 + \frac{1}{r_y} \frac{\partial}{\partial y} i_2 \right), \quad (2.11)$$

$$\nabla_T = \mu_T \left[ \frac{1}{r_x} \left( \frac{\partial Z}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) i_1 + \frac{1}{r_y} \left( \frac{\partial Z}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) i_2 \right], \quad (2.12)$$

$$\nabla_S = \mu_S \left[ \frac{1}{r_x} \left( \frac{\partial Z}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) i_1 + \frac{1}{r_y} \left( \frac{\partial Z}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) i_2 \right] \quad (2.13)$$

$n$  - модифицированный вектор нормали в новой системе координат (см. отчет за 2-й этап НИР).

Начальные условия для задачи (2.1) - (2.13) имеют вид:

при  $t = 0$

$$u = u^0, v = v^0, \zeta = \zeta^0, \quad (2.14)$$

$$T = T^0, S = S^0. \quad (2.15)$$

При решении прогностических задач термохалинной динамики океана требуется задание начального условия для горизонтальных компонент скорости, уровня моря, температуры и солёности. То есть необходимо задать функции  $u^0, v^0, \zeta^0, T^0, S^0$ . Таких данных наблюдений для всех прогностических функций в один момент времени в 3-х мерной акватории Мирового океана нет. Возникает задача построения начальных полей в океане на основе комбинации измерений и модельных расчетов. Универсальным методом решения задачи инициализации является метод сопряженных уравнений или вариационной ассимиляции данных наблюдений (Marchuk et al., 1996; Marchuk et al., 2001; Агошков, 2003; Wenzel et al., 2001; Zalesny, Rusakov, 2007; Агошков и др., 2008; Agoshkov et al., 2008). Метод состоит в минимизации функционала стоимости, описывающего отклонение модельного решения от данных наблюдений на заданном интервале времени, где имеются наблюдения – интервале усвоения.

Для акватории Мирового океана в настоящее время на основе данных наблюдений построены климатические массивы полей температуры и солёности, которые можно использовать для целей инициализации. Имеются также текущие спутниковые наблюдения уровня моря, данные буев АРГО по температуре и солёности и др. Все эти данные имеют

различную природу, точность и информационную полноту по времени и пространству. Задача состоит в следующем. На основе комбинации расчетных модельных полей и данных наблюдений температуры и солёности построить динамически согласованные гидрофизические поля на заданном интервале по времени в Мировом океане. В качестве наблюдений будем использовать среднемесячные климатические характеристики полей температуры и солёности (Levitus et al., 1998), заданные в каждой точке области.

Основу системы вариационной ассимиляции данных будет составлять модуль переноса – диффузии полей температуры и солёности линейризованный на расчетной модельной траектории. Алгоритм решения модельных уравнений переноса – диффузии основан на методе расщепления по геометрическим переменным и в качестве одного из этапов выделяется перенос тепла и соли по вертикали (Zalesny, Rusakov, 2007). Поэтому, для простоты, рассмотрение задачи вариационной ассимиляции проведем на примере одномерной задачи по вертикали. Отметим, что при численном решении прямая и сопряженная задачи дополняются дополнительными этапами расщепления по горизонтальным переменным. Сформулируем математическую постановку задачи вариационной инициализации.

Найти минимум функционала  $J$

$$J = \frac{1}{2 \cdot mesh(\Sigma)} \int_{\Sigma} \left\{ \frac{1}{(t_1 - t_0)} \int_{t_0}^{t_1} [\alpha_T (T - \hat{T})^2 + \alpha_S (S - \hat{S})^2] dt + [\alpha_T^0 (T^0 - \hat{T}^0)^2 + \alpha_S^0 (S^0 - \hat{S}^0)^2] \right\} d\Sigma \quad (2.16)$$

на множестве решений следующей системы уравнений

$$\rho - \rho_{pot}(T, S) = 0, \quad (2.17)$$

$$v - v \left( \frac{\partial \rho_{pot}}{\partial \sigma} \right) = 0, \quad (2.18)$$

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial DT}{\partial t} + D \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\omega T) + \omega \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right] = \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial \sigma} v \frac{\partial T}{\partial \sigma}, \quad (2.19)$$

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial DS}{\partial t} + D \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\omega S) + \omega \frac{\partial S}{\partial \sigma} \right] = \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial \sigma} v \frac{\partial S}{\partial \sigma}, \quad 0 < \sigma < 1 \quad (2.20)$$

$$\frac{v}{H} \frac{\partial T}{\partial \sigma} = -Q_T, \quad \frac{v}{H} \frac{\partial S}{\partial \sigma} = -Q_S, \quad \sigma = 0 \quad (2.21)$$

$$\frac{v}{H} \frac{\partial T}{\partial \sigma} = 0, \quad \frac{v}{H} \frac{\partial S}{\partial \sigma} = 0, \quad \sigma = 1. \quad (2.22)$$

Здесь  $\hat{T}$ ,  $\hat{S}$  - данные наблюдений,  $\alpha_T$ ,  $\alpha_S$ , - заданные весовые функции. Уравнения (2.17) – (2.22) рассматриваются в 3-х мерной области  $\Sigma$ , на интервале усвоения  $(t_0, t_1)$  при произвольных начальных полях температуры и солёности.

Решение задачи вариационной ассимиляции обычным образом сводится к решению системы оптимальности, построенной из необходимого условия экстремума функционала (2.16). Система сопряженных уравнений имеет вид

$$\rho^* - \frac{\partial}{\partial \sigma} (v' \cdot v^*) = 0, \quad (2.23)$$

$$v^* - \frac{1}{D} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \frac{\partial T^*}{\partial \sigma} = 0, \quad (2.24)$$

$$-\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial DT^*}{\partial t} + D \frac{\partial T^*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\omega T^*) + \omega \frac{\partial T^*}{\partial \sigma} \right] + \alpha_T (T - \hat{T}) = \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial \sigma} v \frac{\partial T^*}{\partial \sigma} + \frac{\partial \rho}{\partial T} \cdot \rho^*, \quad (2.25)$$

$$-\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial DS^*}{\partial t} + D \frac{\partial S^*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\omega S^*) + \omega \frac{\partial S^*}{\partial \sigma} \right] + \alpha_S (S - \hat{S}) = \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial \sigma} v \frac{\partial S^*}{\partial \sigma} + \frac{\partial \rho}{\partial S} \cdot \rho^*, \quad (2.26)$$

$$\frac{v}{H} \frac{\partial T^*}{\partial \sigma} = 0, \quad \frac{v}{H} \frac{\partial S^*}{\partial \sigma} = 0 \quad \sigma = 0, \quad \sigma = 1, \quad (2.27)$$

$v'$  - производная по аргументу.

Краевые условия по времени для уравнений (2.17) – (2.27) будут

$$T^* = S^* = 0 \quad \text{при} \quad t = t_1$$

$$DT^* + \alpha_T^0 (T^0 - \hat{T}^0) = 0, \quad DS^* + \alpha_S^0 (S^0 - \hat{S}^0) = 0 \quad \text{при} \quad t = t_0. \quad (2.28)$$

Решение задачи вариационной инициализации в данном случае заключается в нахождении  $T^0$ ,  $S^0$ , при которых выполняются уравнения оптимальности (2.17) – (2.28) и достигается минимум функционала (2.16). В численных расчетах минимизация функционала ошибки проводилась при помощи процедуры M1QN3 (Gilbert, Lemarechal, 1995).

Описанный алгоритм решения системы оптимальности является основным блоком более полного расчета начального условия для горизонтальных компонент скорости, уровня моря, температуры и солености. Полный расчет всех указанных функций осуществляется итерационно на интервале усвоения (равном в данном эксперименте 5-и суткам) по следующей схеме.

Шаг 1. Решение системы оптимальности (2.17) – (2.28) при заданных на интервале усвоения всех входных функций (4-х мерных массивов  $u$ ,  $v$ ,  $\omega$ ,  $v$ ,  $\zeta$ ). В качестве решения получаем новое начальное условие для  $T$ ,  $S$ . Вычисление значения минимизируемого функционала ошибки (2.16).

Шаг 2. Решение полной прямой модели с новым начальным условием для  $T, S$  на интервале усвоения. В качестве решения получаем новые значения функций ( $u$ ,  $v$ ,  $\omega$ ,  $v$ ,  $\zeta$ ).

Шаг 3. 2-я итерация. Решение системы оптимальности (2.17) – (2.28) с новыми значениями входных функций ( $u$ ,  $v$ ,  $\omega$ ,  $\nu$ ,  $\zeta$ ) – повторение шага 1. Вычисление значения минимизируемого функционала ошибки (2.16).

Шаг 4. Если функционал (2.16) меньше его предыдущего значения, то переход на шаг 2, иначе завершение процедуры инициализации и переход на шаг 5.

Шаг 5. Расчет с новым начальным условием прямой модели на текущий месяц в режиме прогноза.

### 2.3 Оценка эффективности полноты решения задачи и эффективности полученных результатов

Численные эксперименты состояли из двух этапов: расчета прямой модели и решения задачи в режиме инициализация - прогноз. На первом этапе проведены расчеты прямой модели циркуляции Мирового океана на 350 лет. Уравнения модели формулировались в системе координат на сфере со сдвинутым на материк северным полюсом. Полюс располагался в точке с координатами ( $60^\circ$  в.д.,  $60,5^\circ$  с.ш.). В качестве начальных условий для температуры и солености использовались данные из климатического массива за январь, скорость и уровень океана были положены равными нулю. На поверхности океана задавался климатический атмосферный форсинг, построенный по осредненным данным CORE за период 1958 - 2004 гг. с 6-и часовой дискретностью. Цель эксперимента заключалась в расчете сезонного хода динамически согласованных полей течений, температуры и солености в области, аппроксимирующей акваторию Мирового океана. Расчет проведен на 350 лет, в течение которого произошло установление некоторого модельного режима гидрофизических характеристик.

На втором этапе численных экспериментов вместе с решением прямой задачи включалась процедура вариационной инициализации полей температуры и солености. Расчетный интервал по времени в данном случае был равен 1 году, в качестве начального условия выбиралось решение, полученное на первом этапе - на 1 января 301-го расчетного года. Расчет проводился на каждый месяц года, в режиме инициализация – прогноз, с пересчетом начального условия в период 1- 5 число каждого месяца.

В результате инициализации пересчитывались поля течений, уровня, температуры и солености по описанному выше алгоритму. Затем расчет повторялся с измененными полями с данного момента времени на интервале усвоения (без процедуры ассимиляции) и продолжался до конца каждого месяца года. В качестве ассимилируемых данных

наблюдений использовались наблюдаемые среднемесячные поля температуры и солёности по данным буев АРГО за 2008 г.

В качестве алгоритма ассимиляции был выбран одномерный нелинейный алгоритм. Это означает, что на шаге вариационной ассимиляции данных буев Арго, решалась система прямых и сопряженных уравнений (2.17) – (2.28).

Отметим, что с точки зрения моделирования общей циркуляции океана, данная постановка эксперимента, включающая наряду с расчетом прогностической задачи решение вариационной задачи четырехмерного усвоения данных наблюдений Арго, является весьма полной. Она обладает большей полнотой, чем обычная прямая задача моделирования, включая в расчетное решение данные натуральных наблюдений. В настоящее время это наиболее полная задача моделирования термохалинной динамики Мирового океана.

Результаты расчетов показывают, что максимальное уменьшение ошибки в результате решения вариационной задачи произошло в 1-й расчетный месяц, ошибка уменьшилась в 177 раз. Это связано с тем, что модельное решение значительно отклоняется от данных наблюдений. Отклонение от данных есть результат невысокого пространственного разрешения модели, вязкого характера модельного решения, неточности подсеточных параметризаций и т.д. Процедура вариационного усвоения данных наблюдений сразу же уменьшает модельную ошибку на два порядка. Далее в течение каждого расчетного месяца, при решении прогностической задачи отклонение от данных наблюдений растет, примерно в 15-20 раз до следующего включения процедуры инициализации. Далее, в результате вариационной ассимиляции данных ошибка опять уменьшается, примерно, до значения 0.017.

Анализ пространственного распределения термохалинных полей показывает, что в результате ассимиляции данных наблюдений происходит заметное изменение расчетных характеристик. Модельные поля температуры и солёности приближаются к наблюдениям, решение лучше отражает наблюдаемую структуру природных полей (Рис. 1 -30).

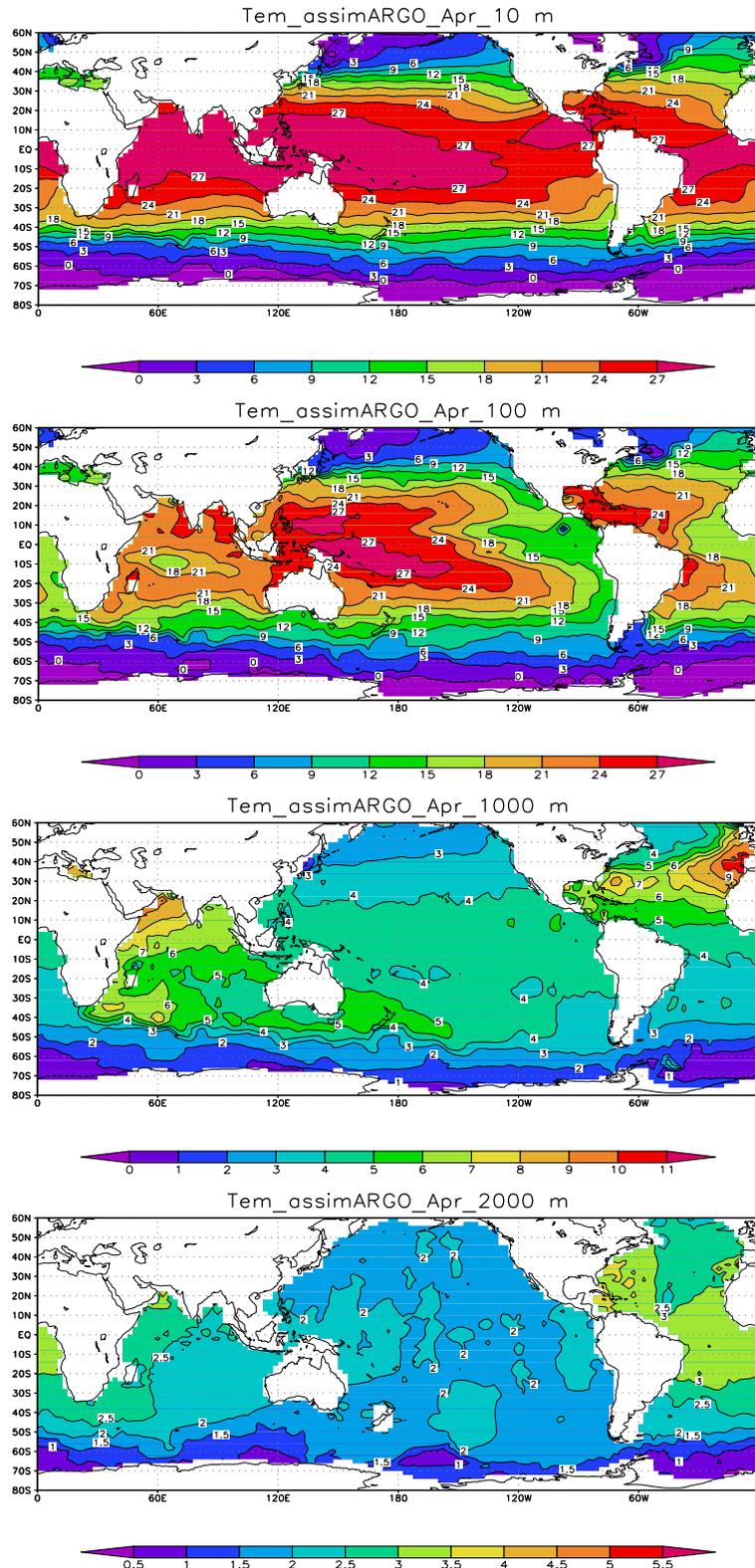


Рис 1. Поле температуры по результатам расчета в режиме «инициализация - прогноз», 15 апреля 2008 г., глубина 10, 100, 1000 м и 2000 м.

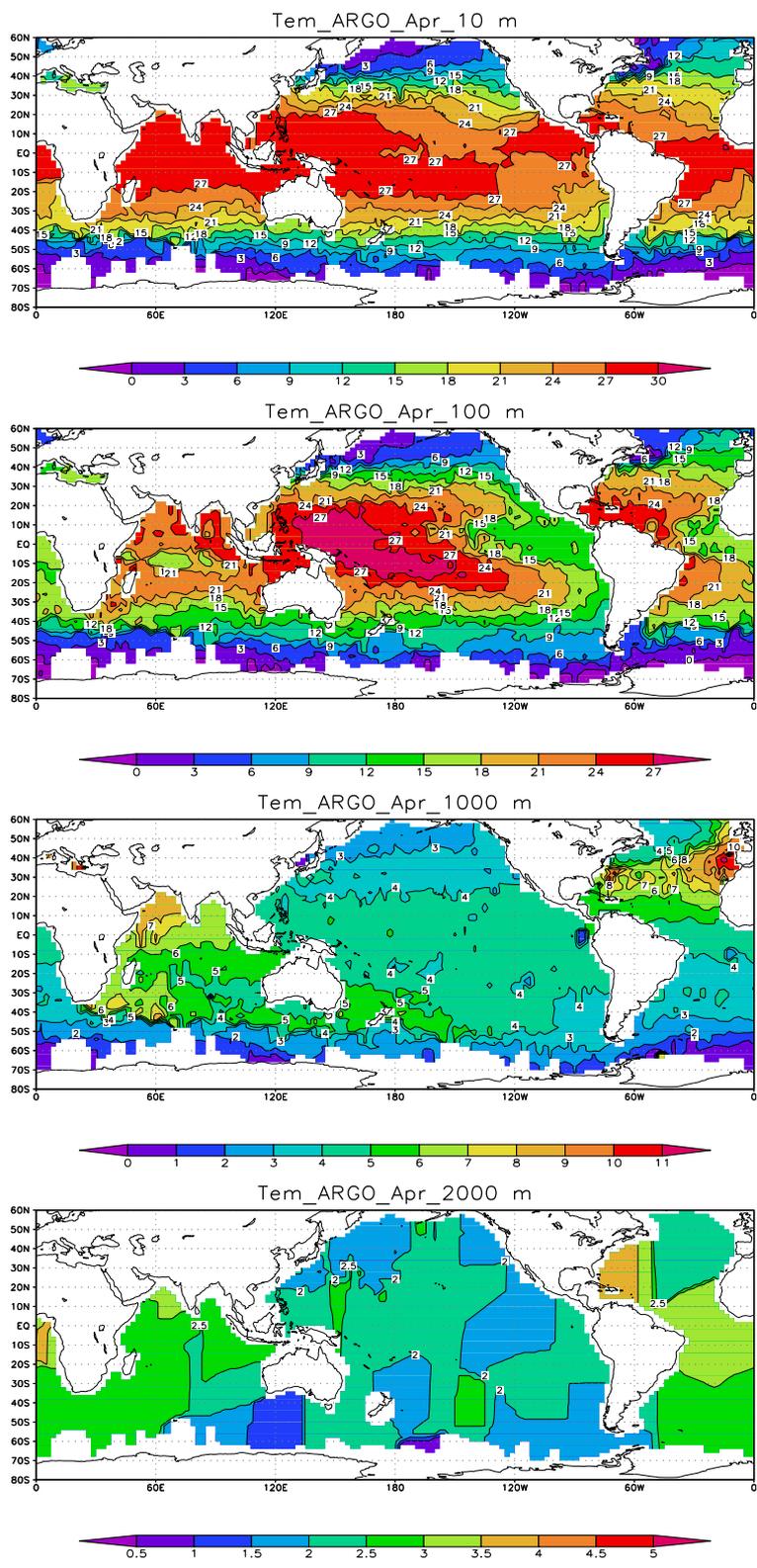


Рис 2. Поле температуры (среднее за месяц) по данным наблюдений за 2008 г. апрель, глубина 10, 100, 1000 м и 2000 м.

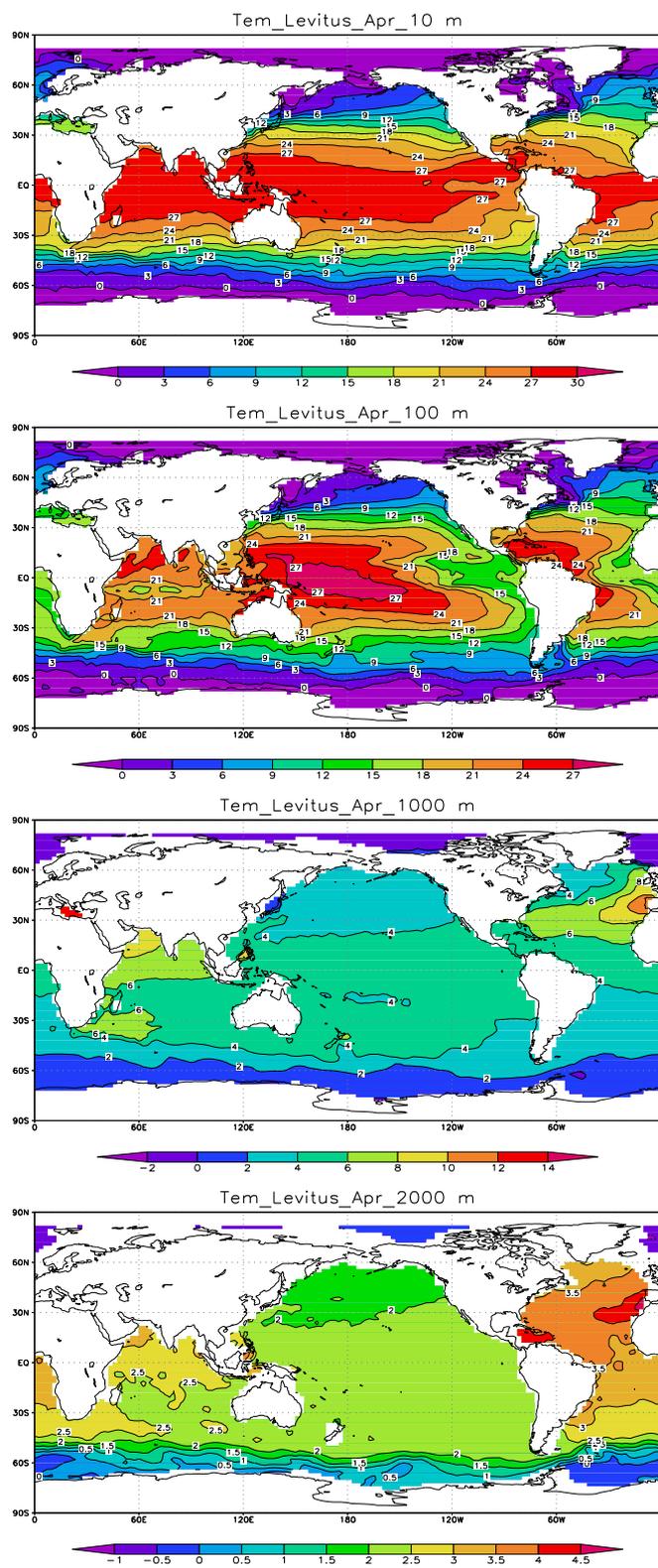


Рис 3. Поле температуры (среднее за месяц) по климатическим данным (Levitus et al., 1998), апрель, глубина 10, 100, 1000 м и 2000 м.

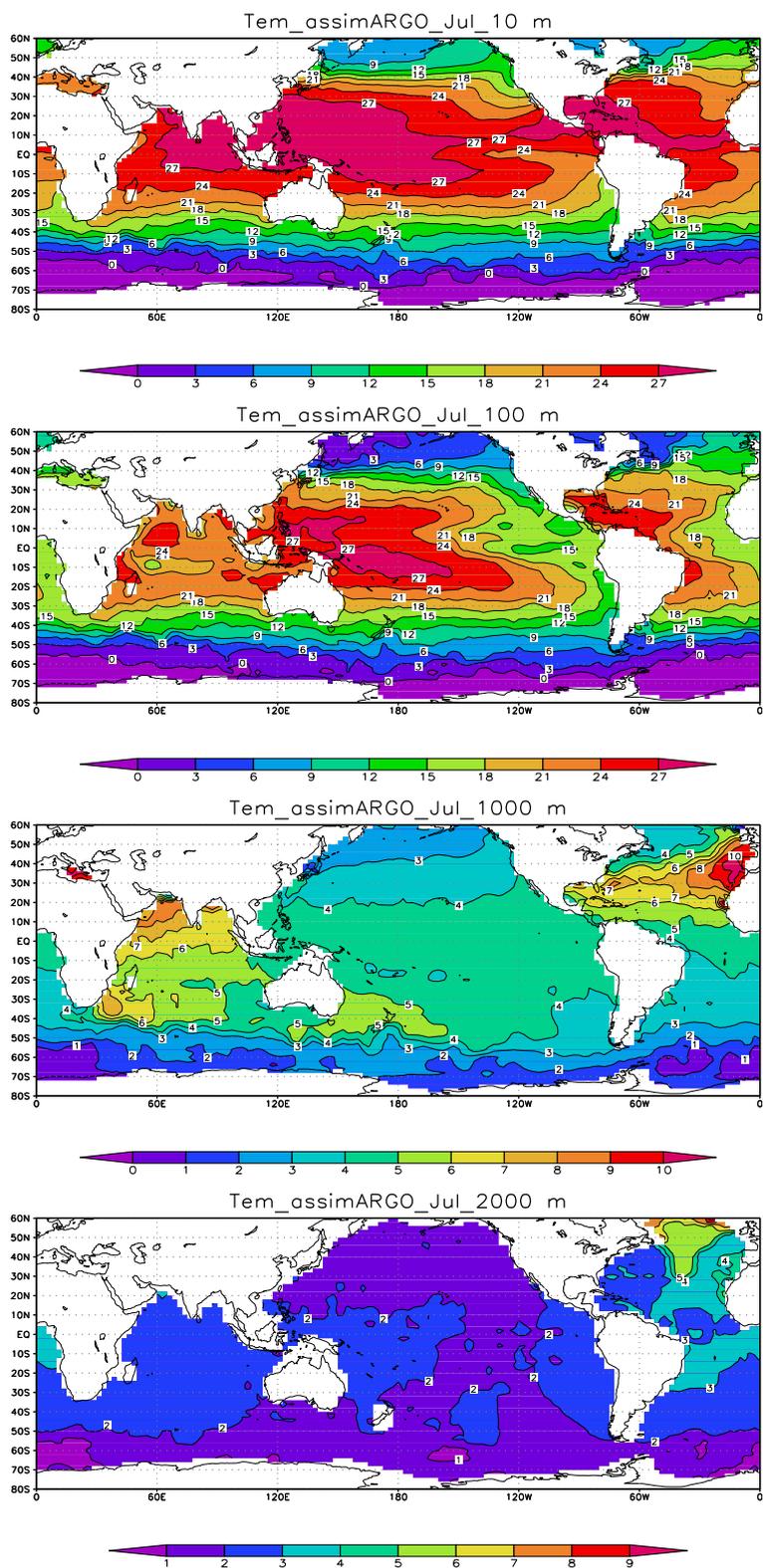


Рис 4. Поле температуры по результатам расчета в режиме «инициализация - прогноз», 15 июля 2008 г., глубина 10, 100, 1000 м и 2000 м.

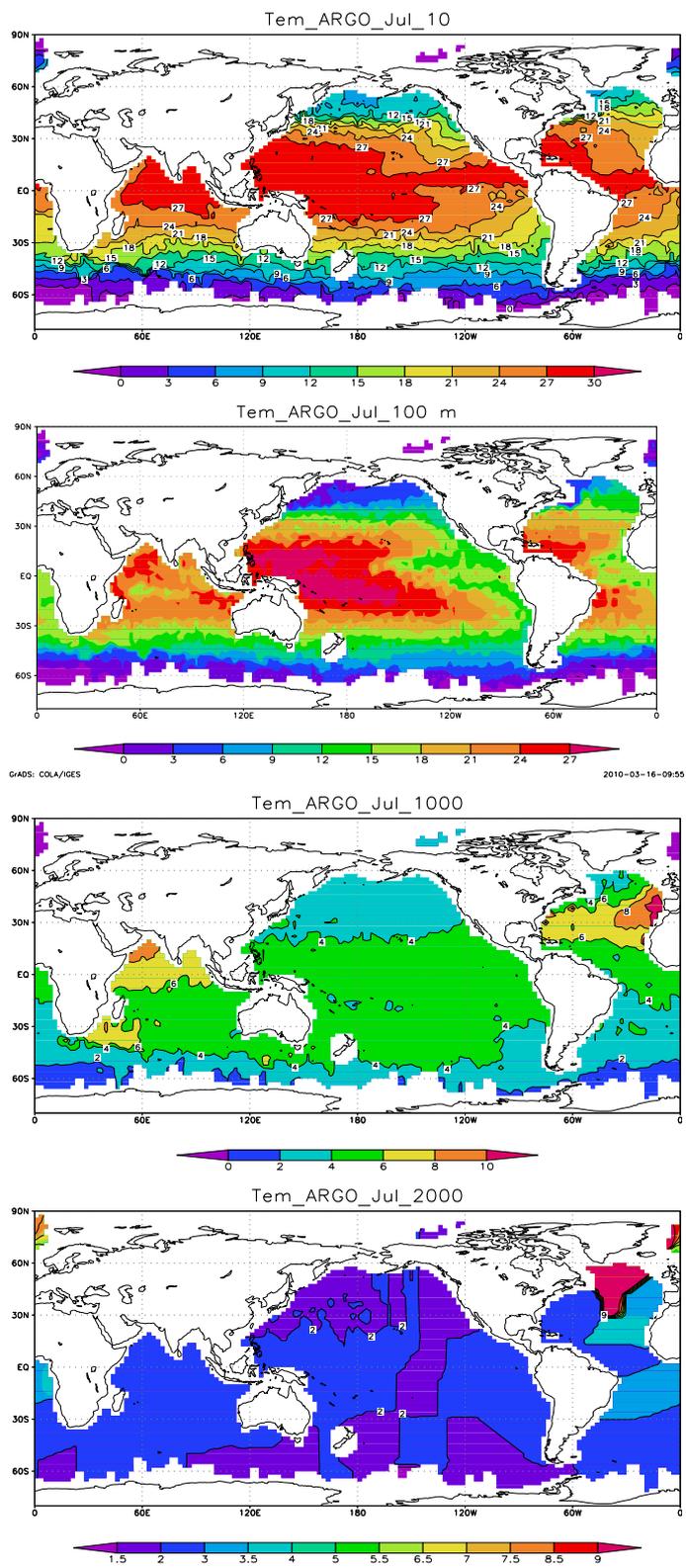


Рис 5. Поле температуры (среднее за месяц) по данным наблюдений за 2008 г. , июль, глубина 10, 100, 1000 м и 2000 м.

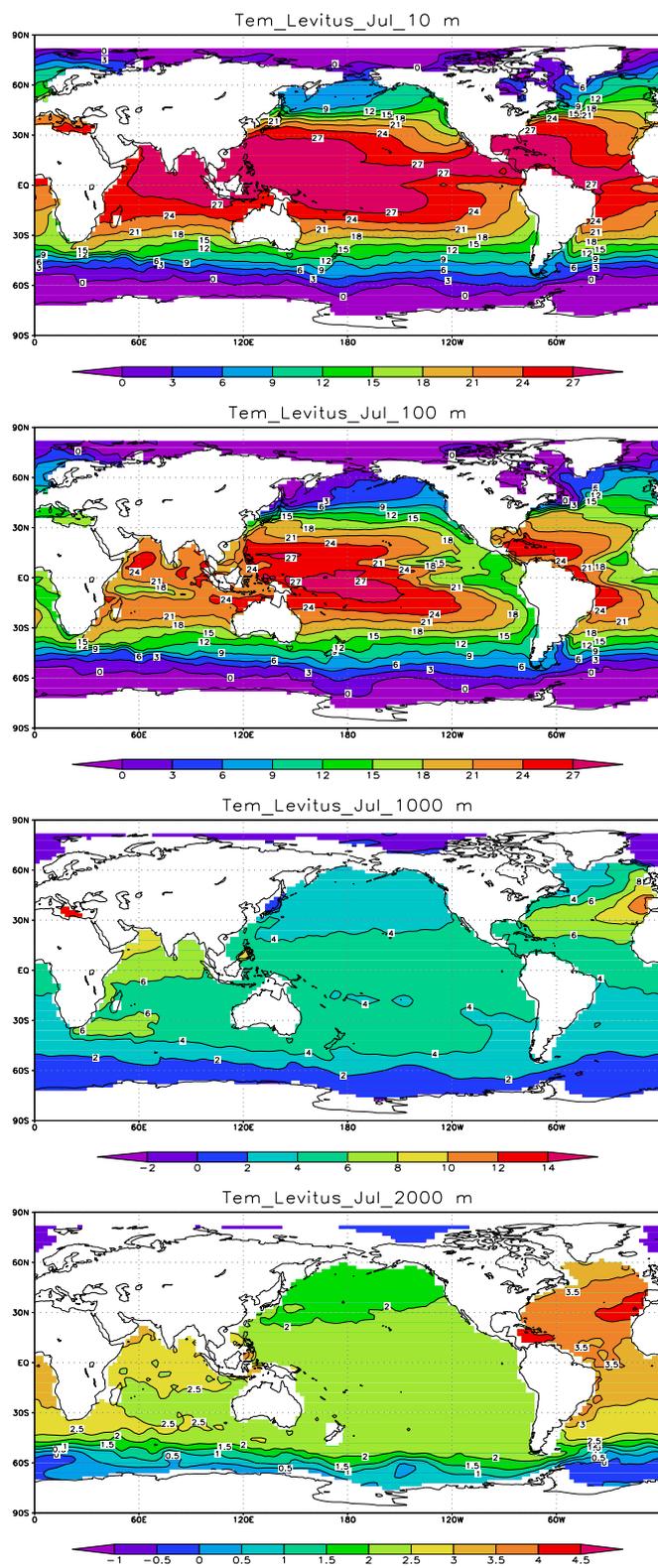


Рис 6. Поле температуры (среднее за месяц) по климатическим данным (Levitus et al., 1998), июль, глубина 10, 100, 1000 м и 2000 м.

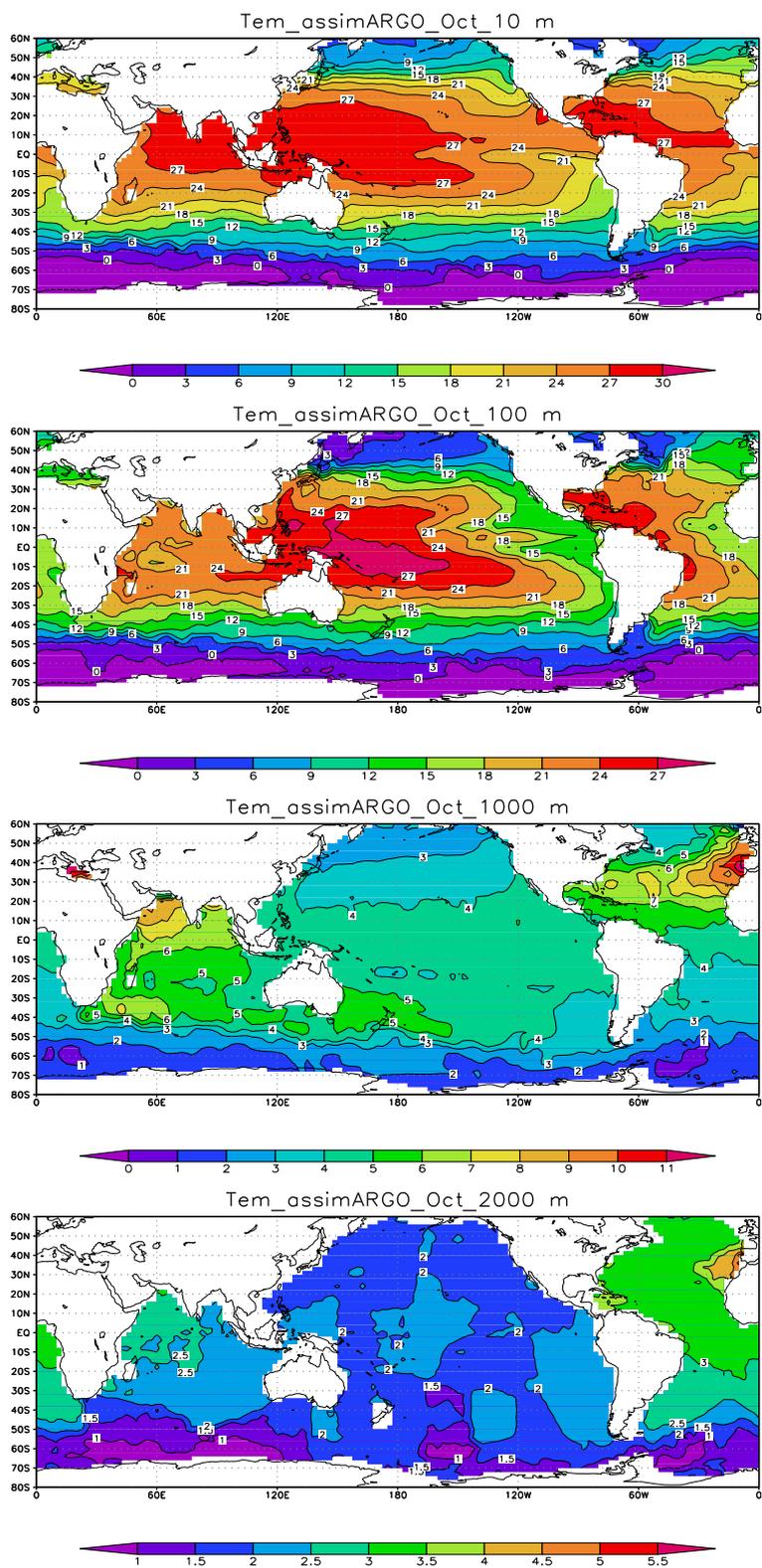


Рис 7. Поле температуры по результатам расчета в режиме «инициализация - прогноз», 15 октября 2008 г., глубина 10, 100, 1000 м и 2000 м.

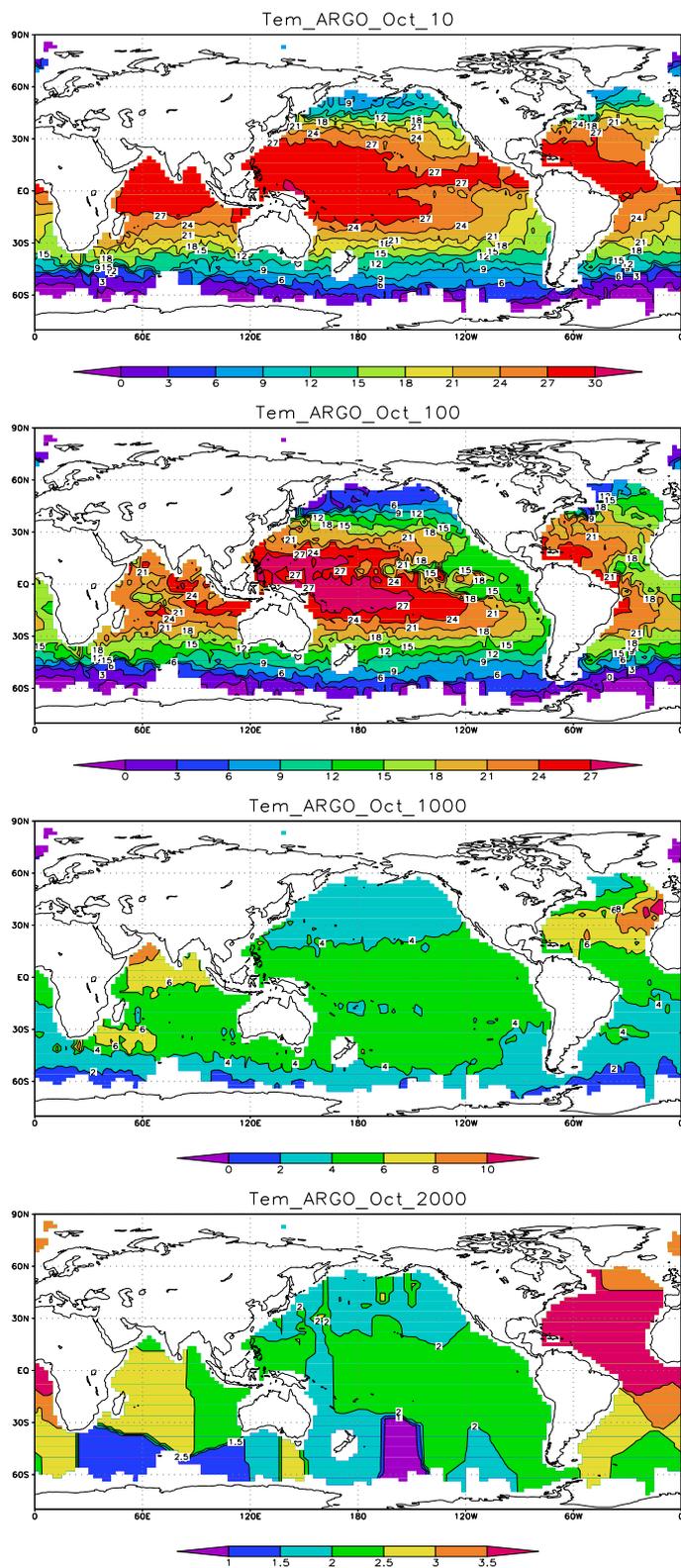


Рис 8. Поле температуры (среднее за месяц) по данным наблюдений за 2008 г., октябрь, глубина 10, 100, 1000 м и 2000 м.

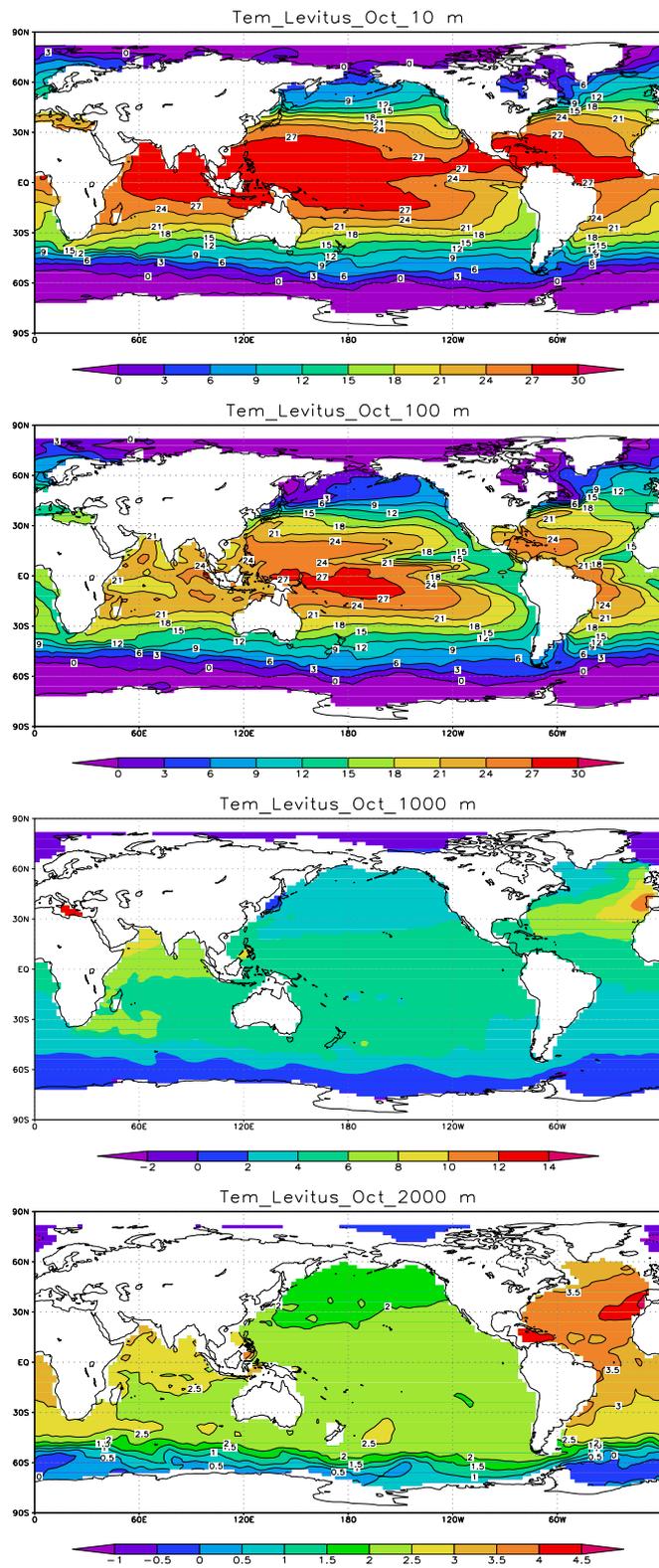


Рис 9. Поле температуры (среднее за месяц) по климатическим данным (Levitus et al., 1998), октябрь, глубина 10, 100, 1000 м и 2000 м.

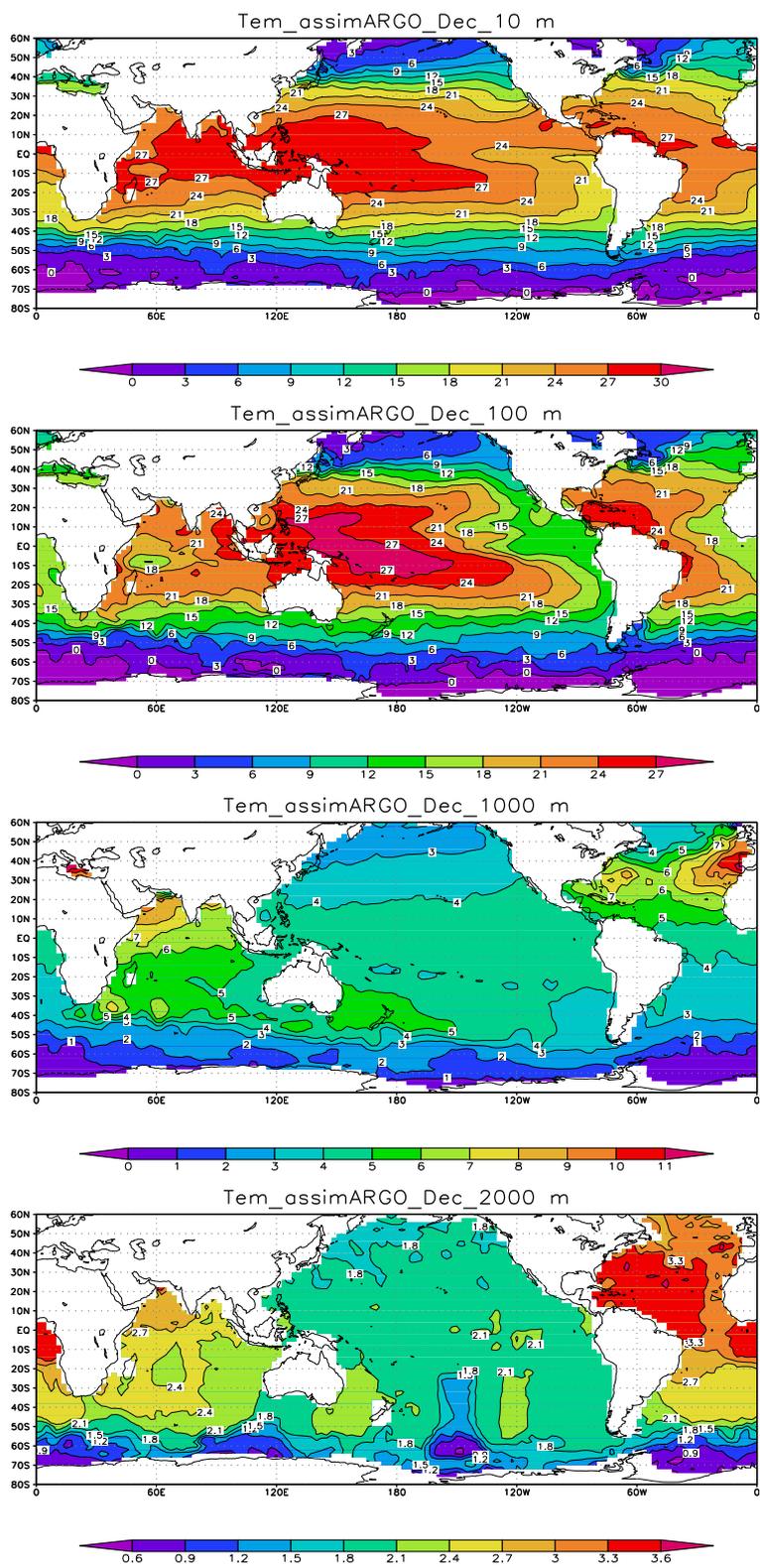


Рис 10. Поле температуры по результатам расчета в режиме «инициализация - прогноз», 15 декабря 2008 г., глубина 10, 100, 1000 м и 2000 м.

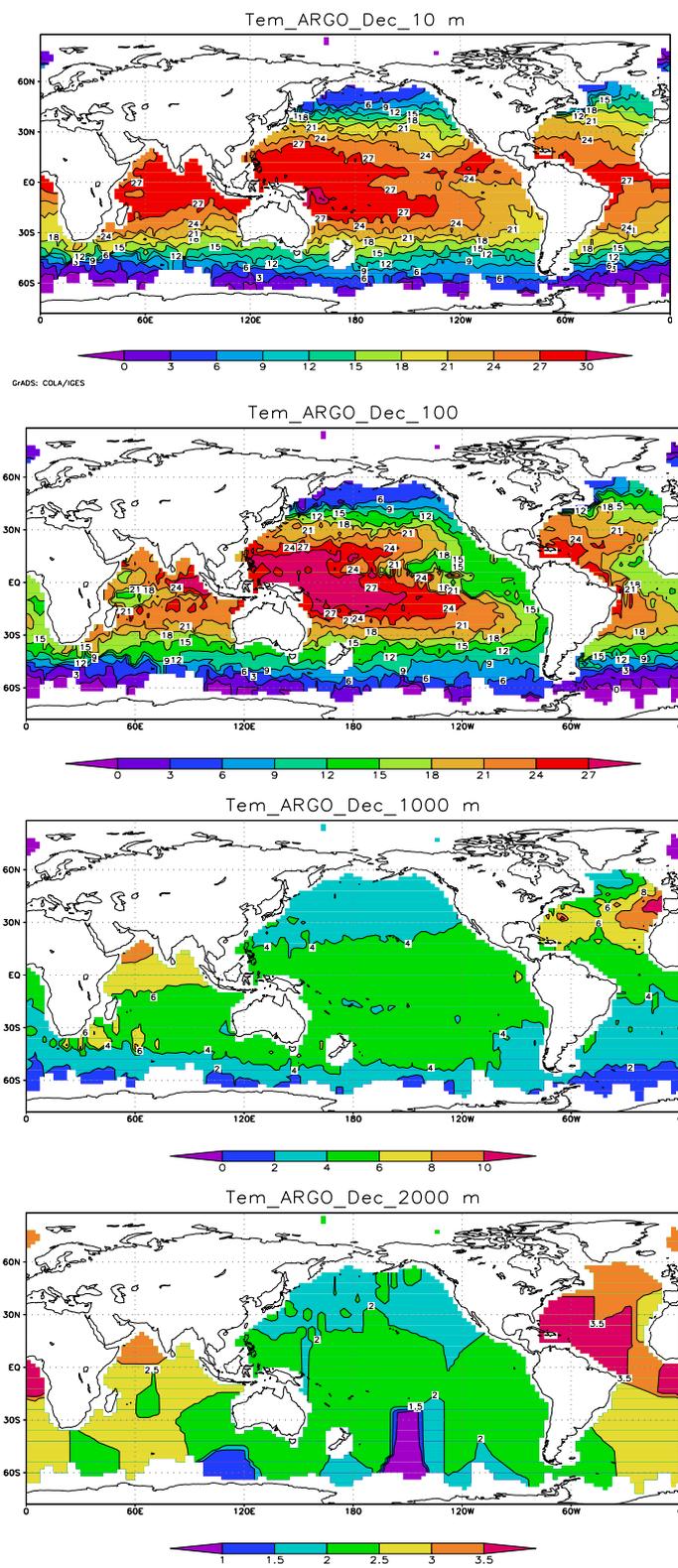


Рис 11. Поле температуры (среднее за месяц) по данным наблюдений за 2008 г., декабрь, глубина 10, 100, 1000 м и 2000 м.

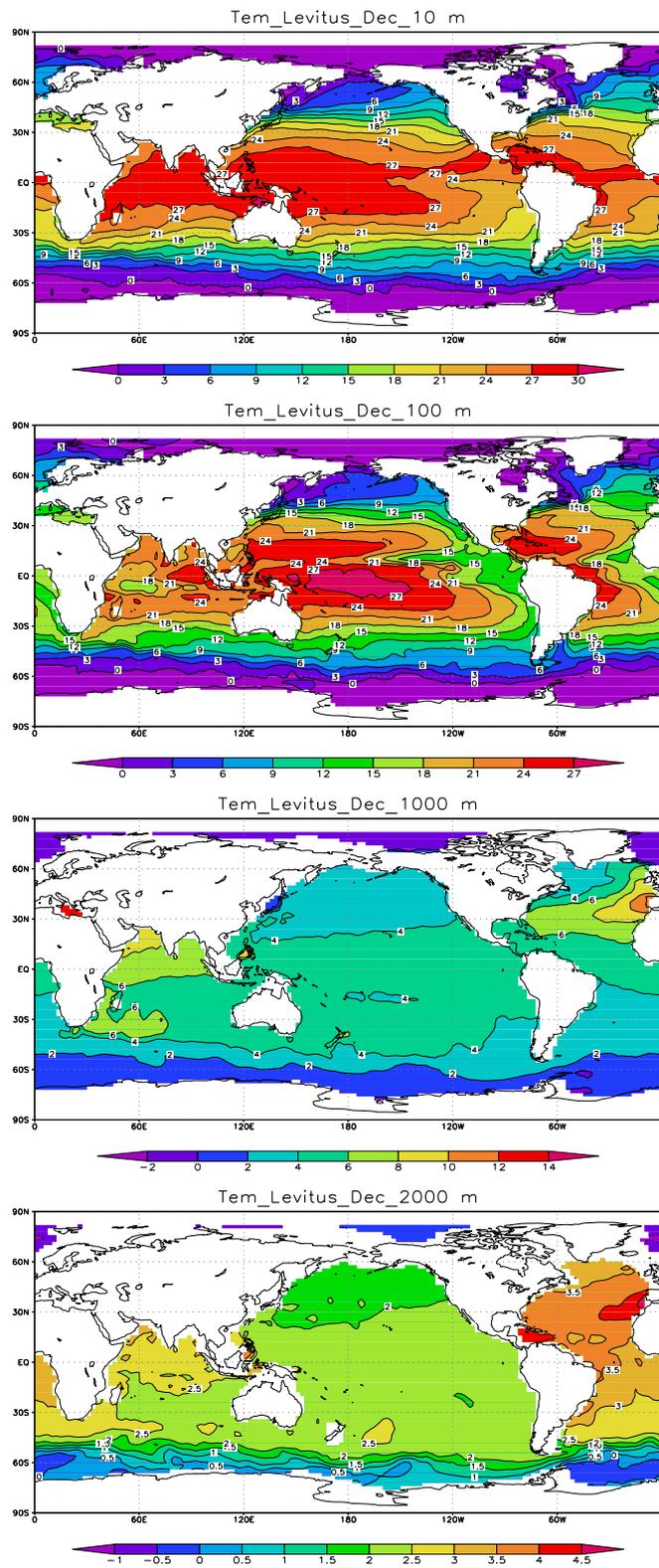


Рис 12. Поле температуры (среднее за месяц) по климатическим данным (Levitus et al., 1998), декабрь, глубина 10, 100, 1000 м и 2000 м.

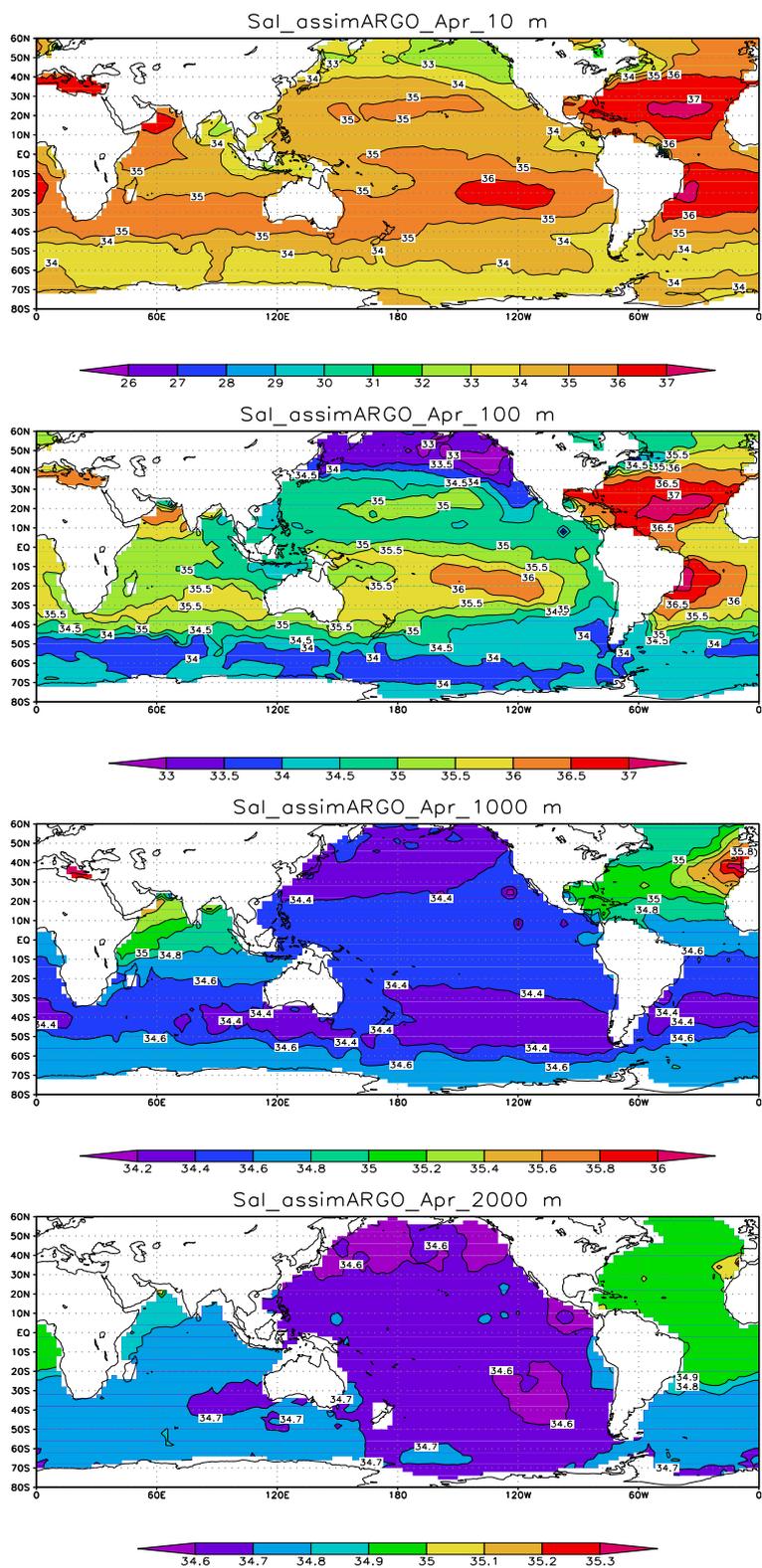


Рис 13. Поле солёности по результатам расчета в режиме «инициализация - прогноз», 15 апреля 2008 г., глубина 10, 100, 1000 м и 2000 м.

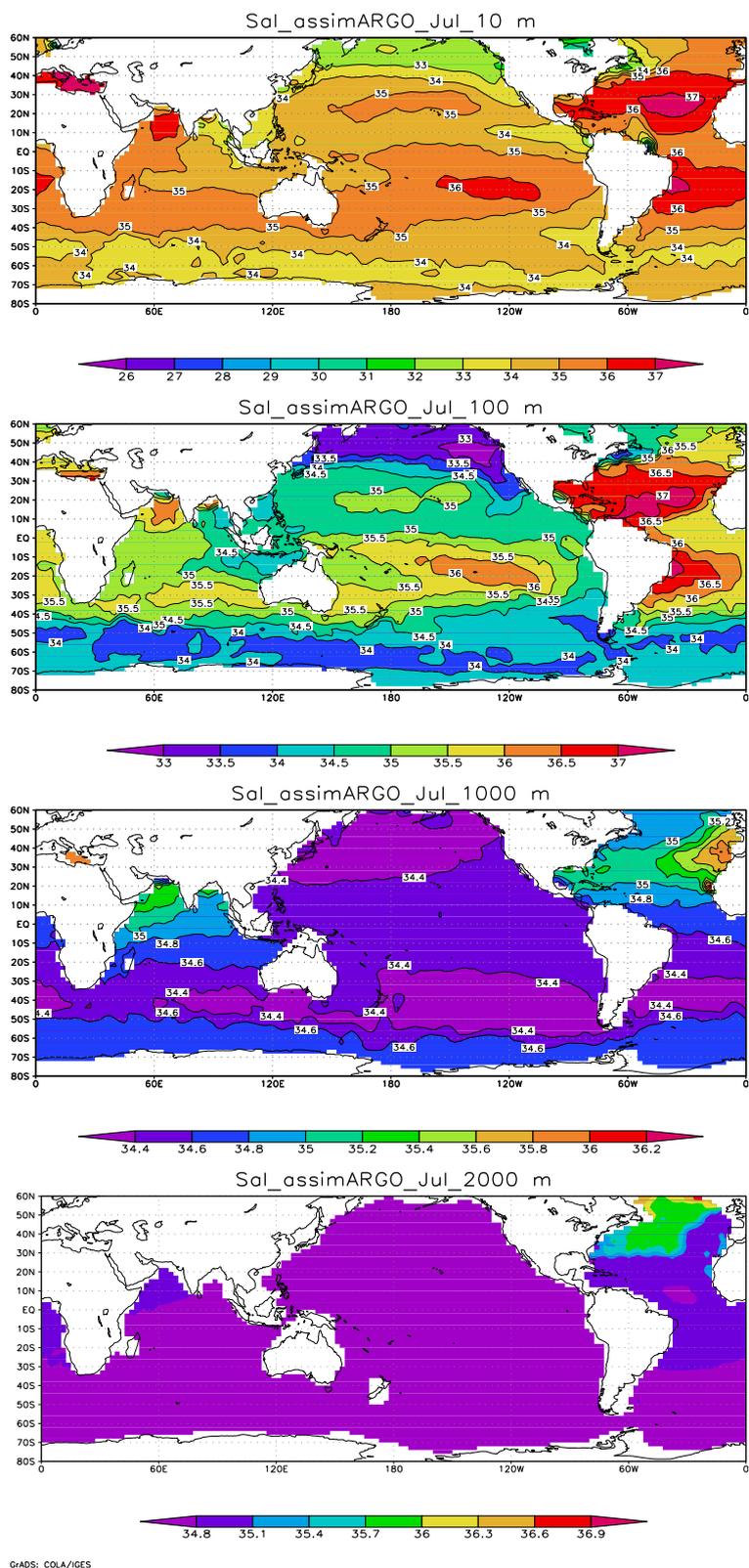


Рис 14. Поле солёности по результатам расчета в режиме «инициализация - прогноз», 15 июля 2008 г., глубина 10, 100, 1000 м и 2000 м.

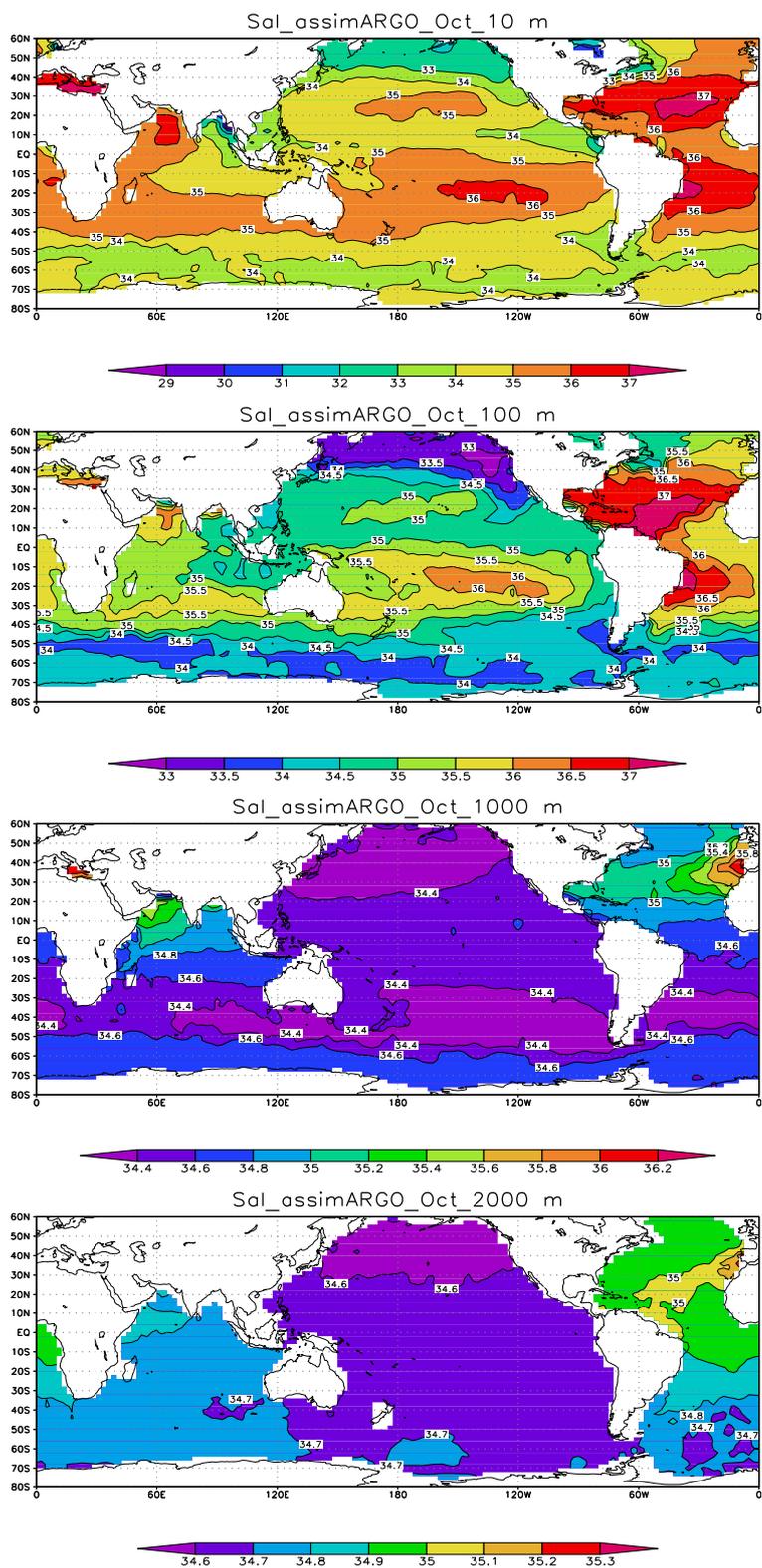


Рис 15. Поле солёности по результатам расчета в режиме «инициализация - прогноз», 15 октября 2008 г., глубина 10, 100, 1000 м и 2000 м.

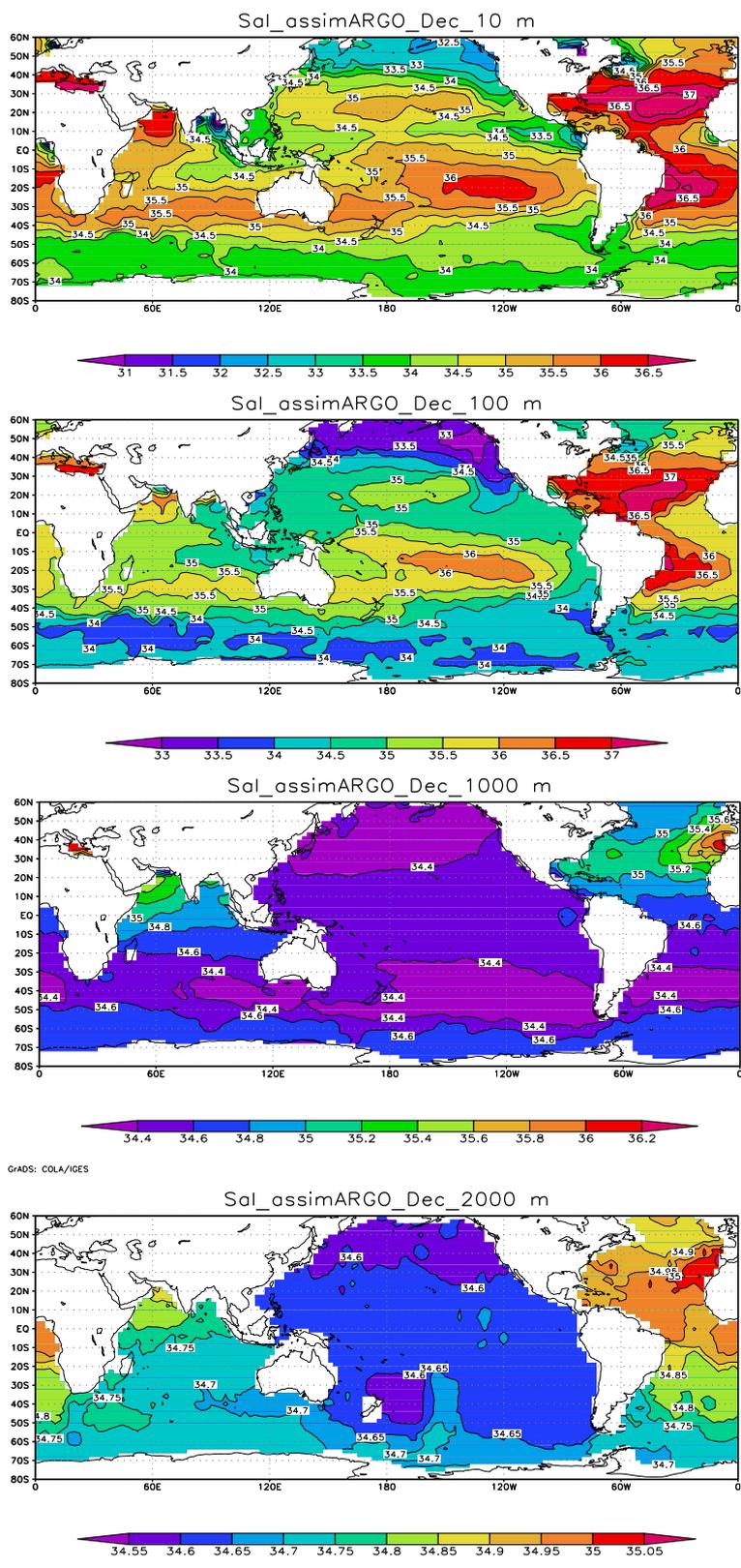


Рис 16. Поле солёности по результатам расчета в режиме «инициализация - прогноз», 15 декабря 2008 г., глубина 10, 100, 1000 м и 2000 м.

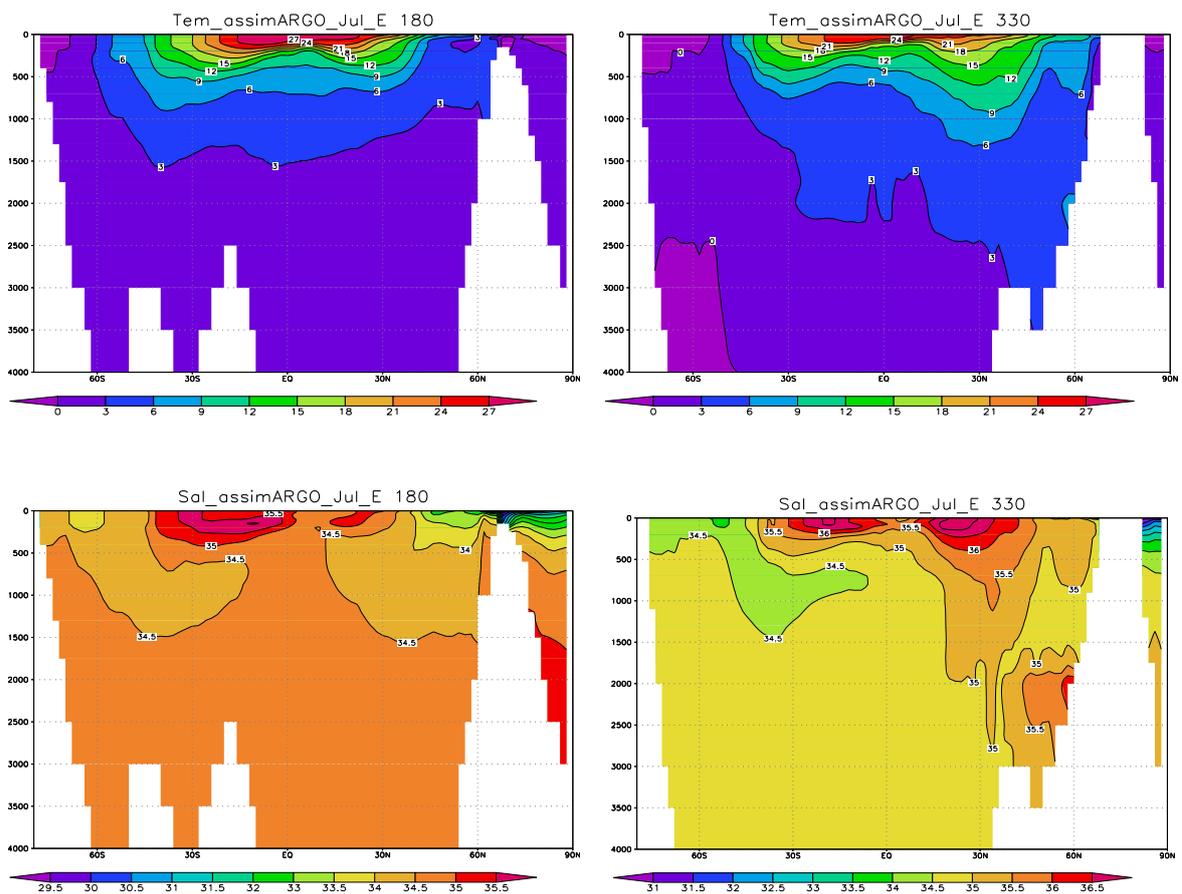


Рис. 17. Поле температуры и солёности по результатам расчета в режиме «инициализация - прогноз», 15 июля 2008 г., на меридиональном разрезе 180 в.д. и 330 в.д.

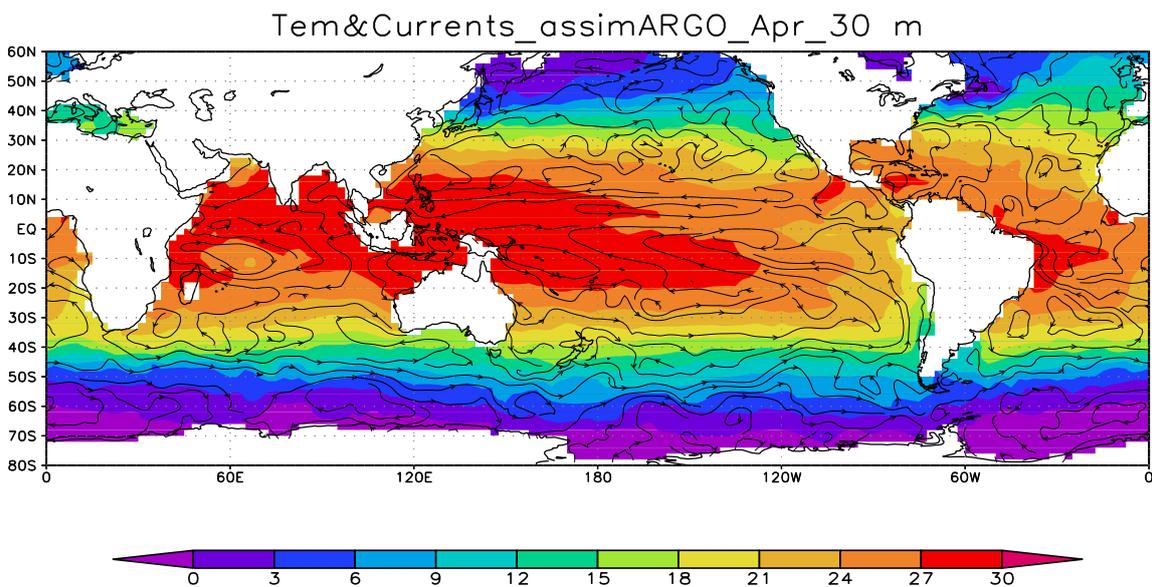


Рис 18. Поле температуры и течений по результатам расчета в режиме «инициализация - прогноз», 15 апреля 2008 г., глубина 30 м.

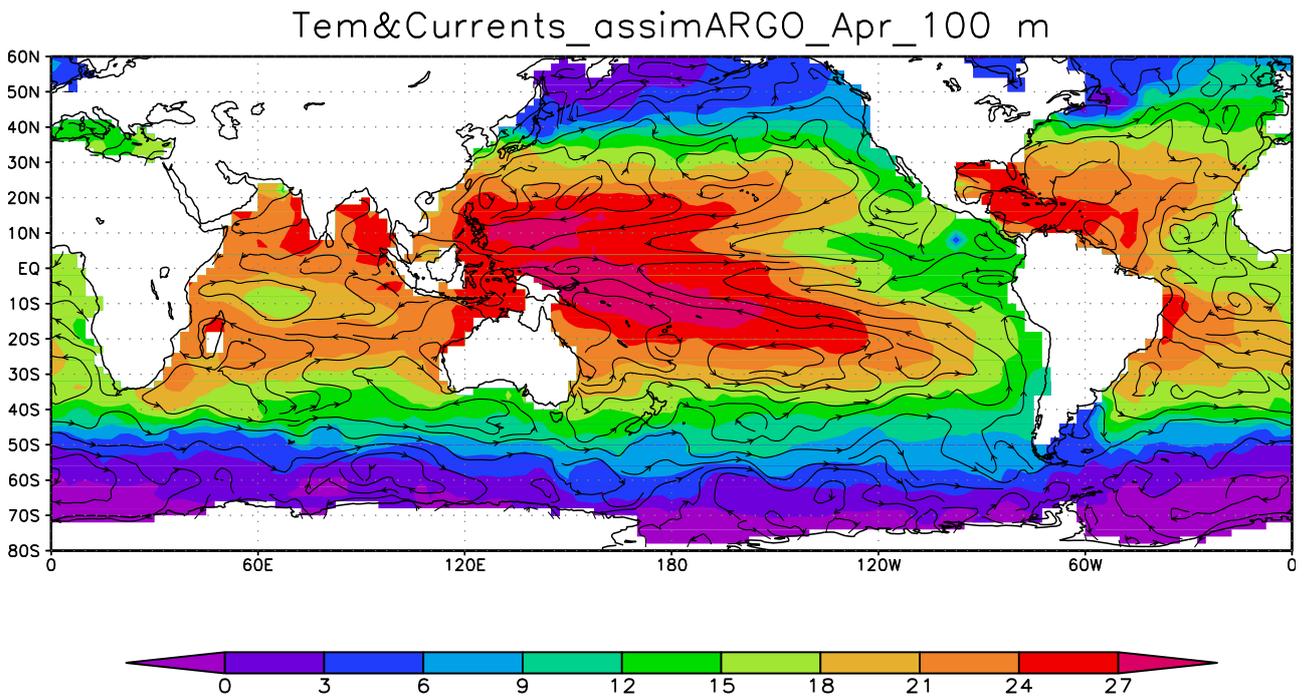


Рис 19. Поле температуры и течений по результатам расчета в режиме «инициализация - прогноз», 15 апреля 2008 г., глубина 100 м.

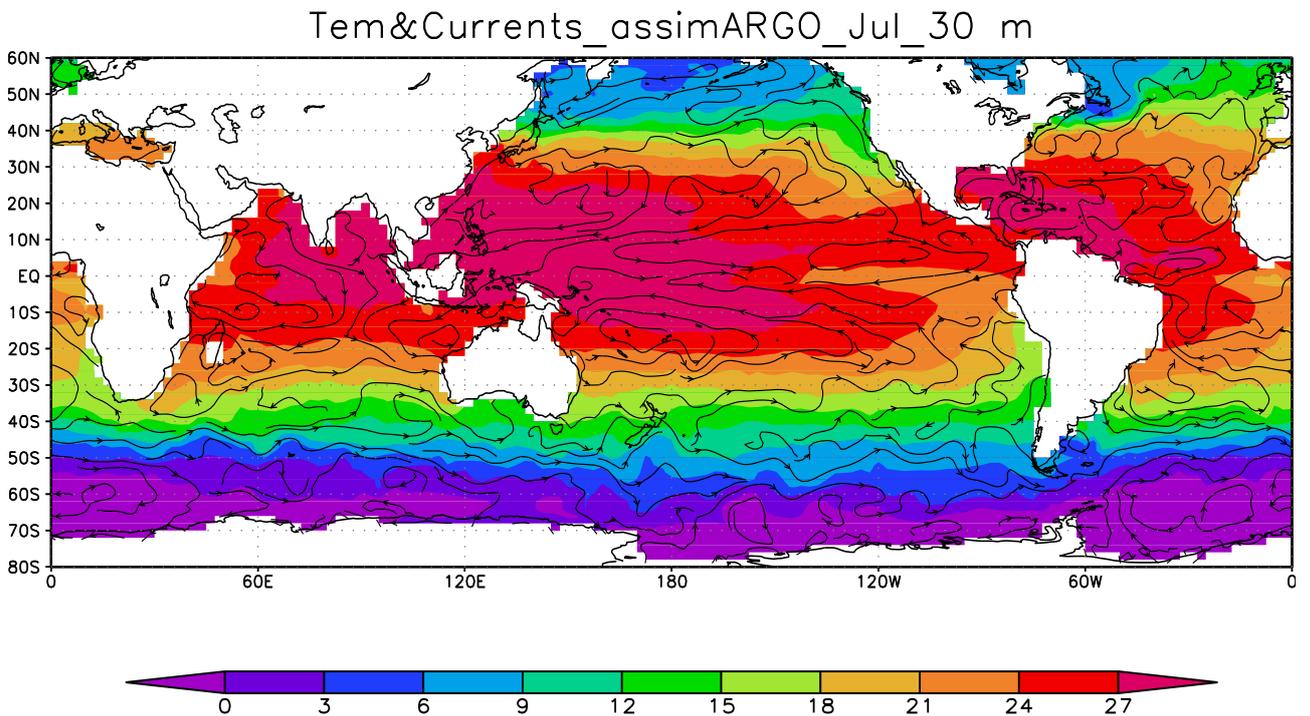


Рис 20. Поле температуры и течений по результатам расчета в режиме «инициализация - прогноз», 15 июля 2008 г., глубина 30 м.

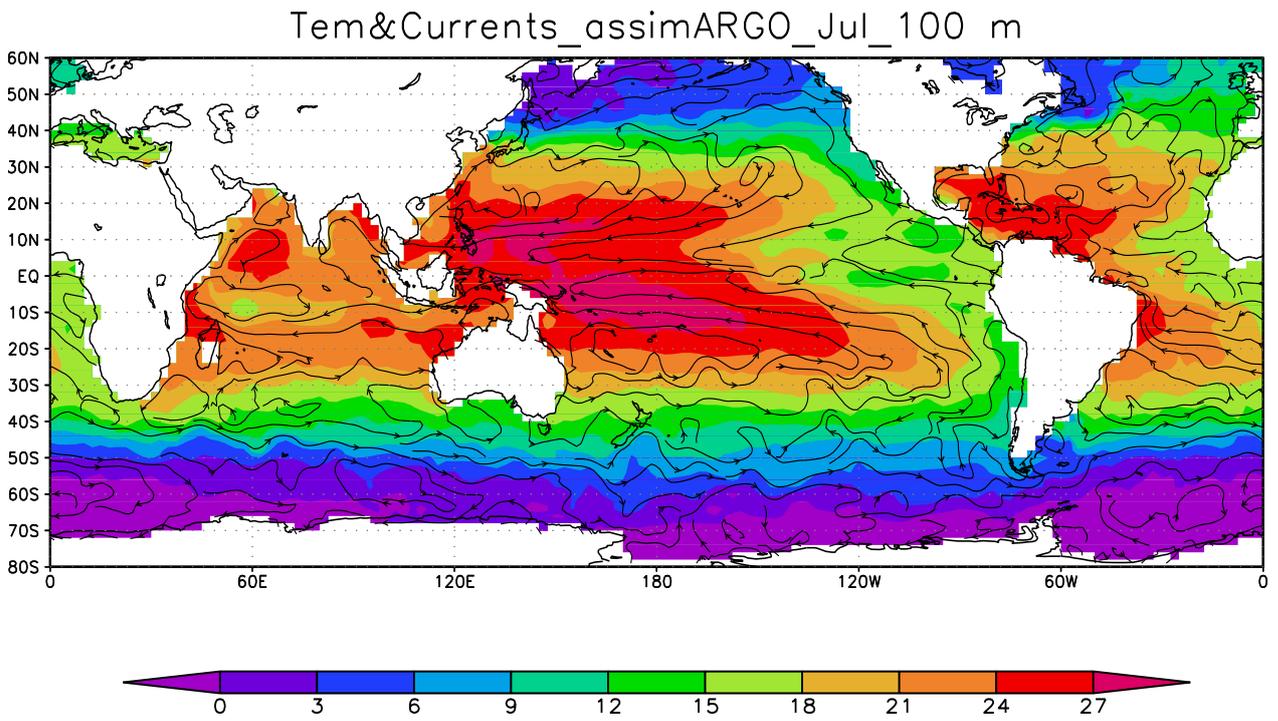


Рис 21. Поле температуры и течений по результатам расчета в режиме «инициализация - прогноз», 15 июля 2008 г., глубина 100 м.

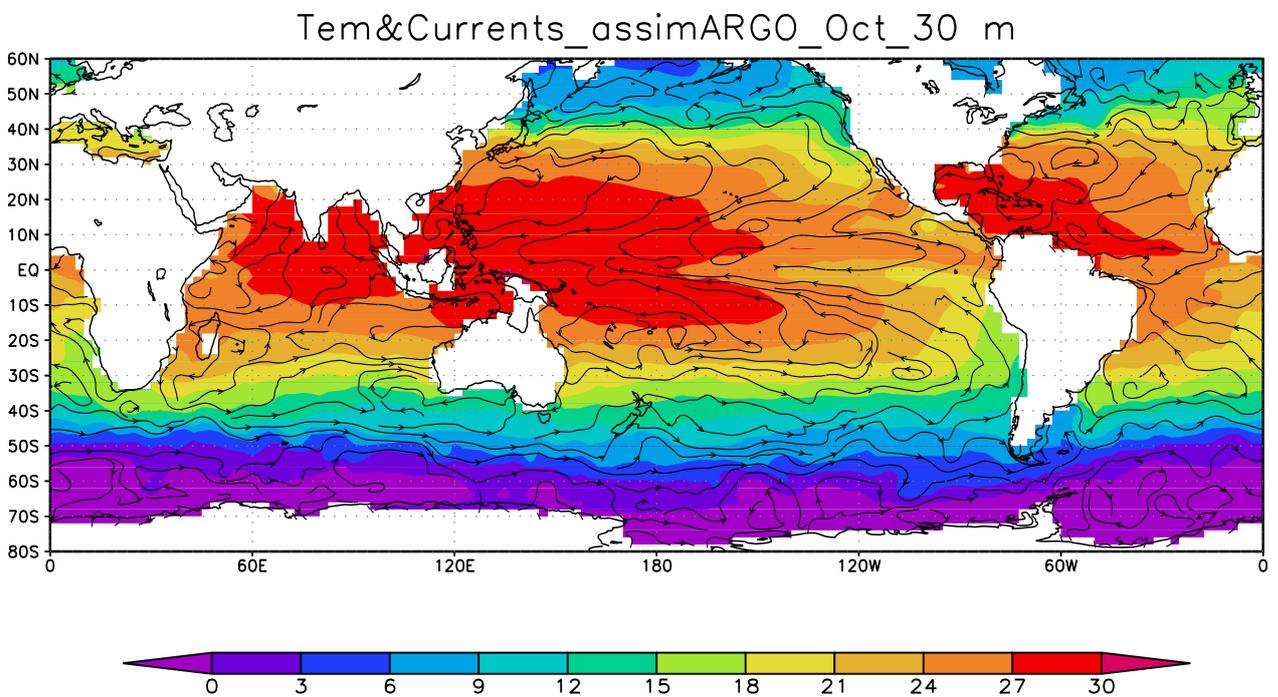


Рис 22. Поле температуры и течений по результатам расчета в режиме «инициализация - прогноз», 15 октября 2008 г., глубина 30 м.

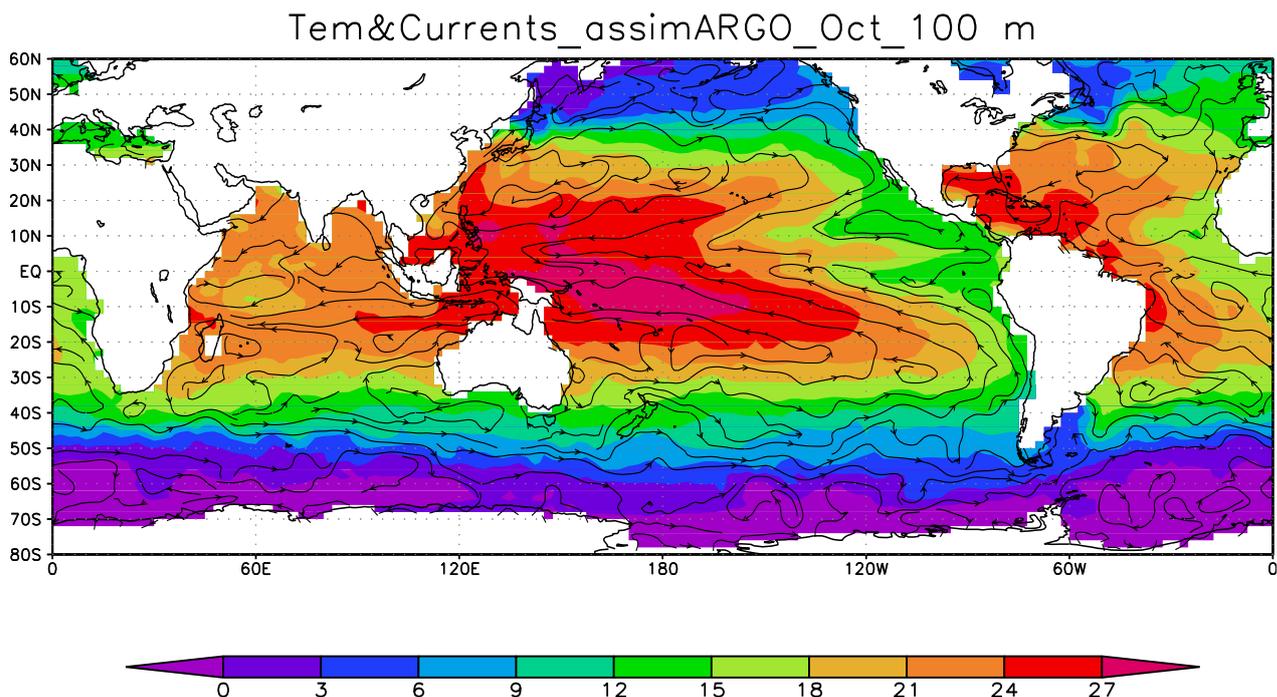


Рис 23. Поле температуры и течений по результатам расчета в режиме «инициализация - прогноз», 15 октября 2008 г., глубина 100 м.

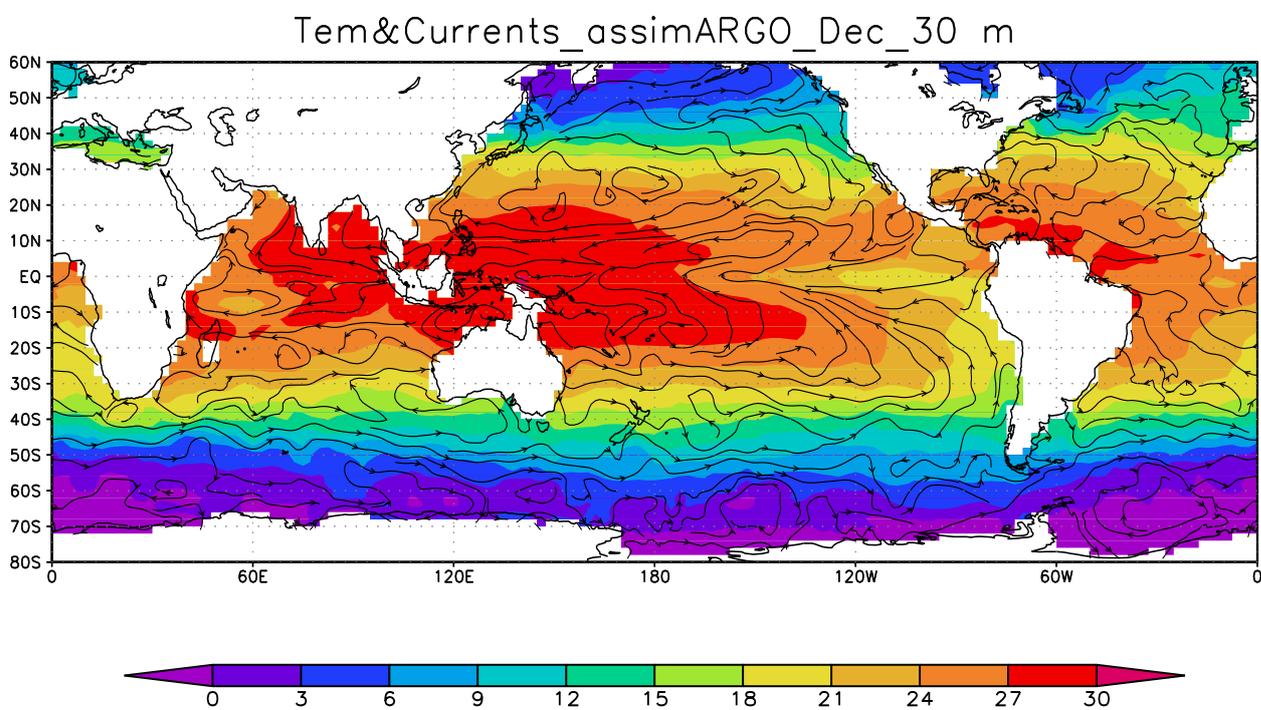


Рис 24. Поле температуры и течений по результатам расчета в режиме «инициализация - прогноз», 15 декабря 2008 г., глубина 30 м.

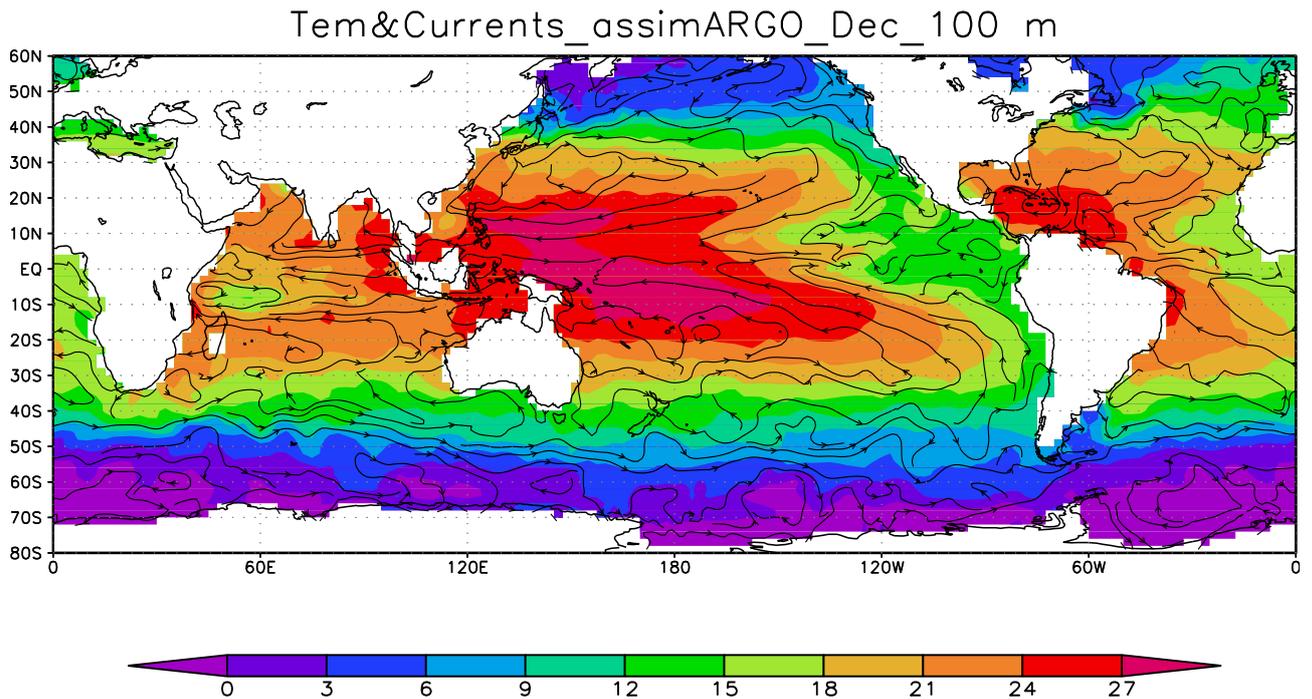


Рис 25. Поле температуры и течений по результатам расчета в режиме «инициализация - прогноз», 15 декабря 2008 г., глубина 100 м.

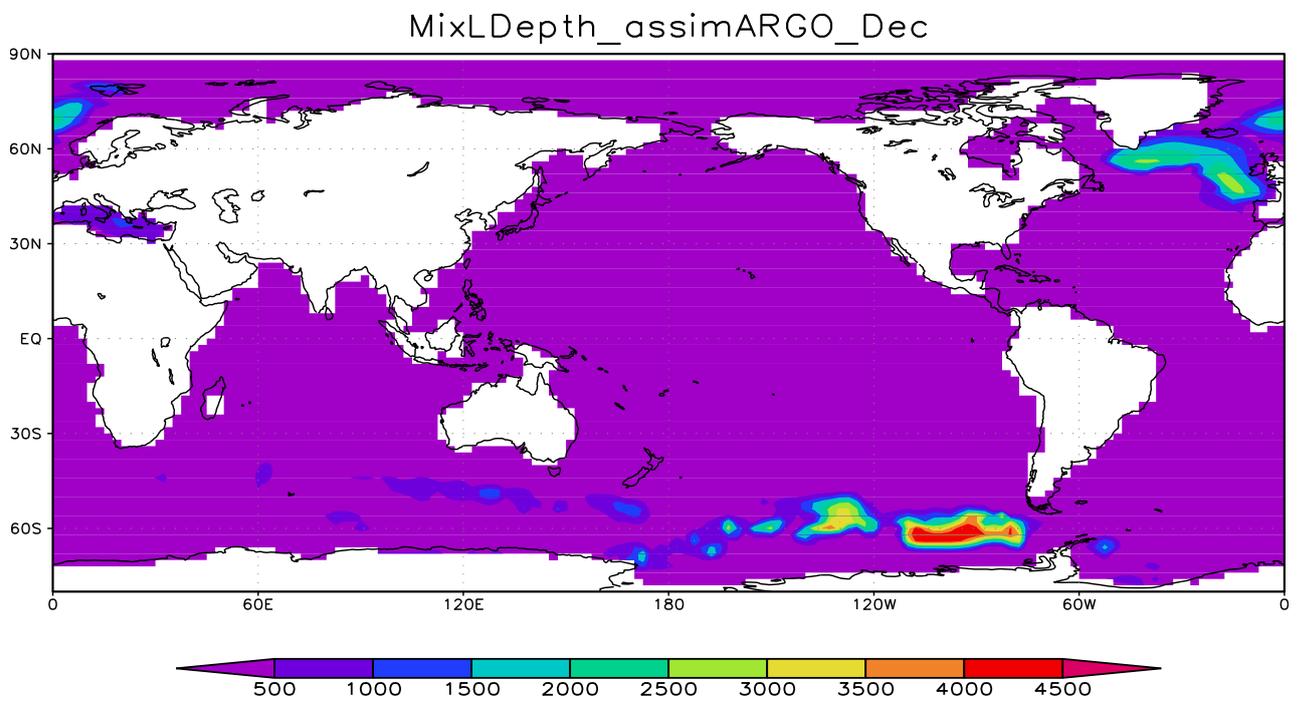


Рис 26. Глубина конвективного перемешивания по результатам расчета в режиме «инициализация - прогноз», 15 декабря 2008 г

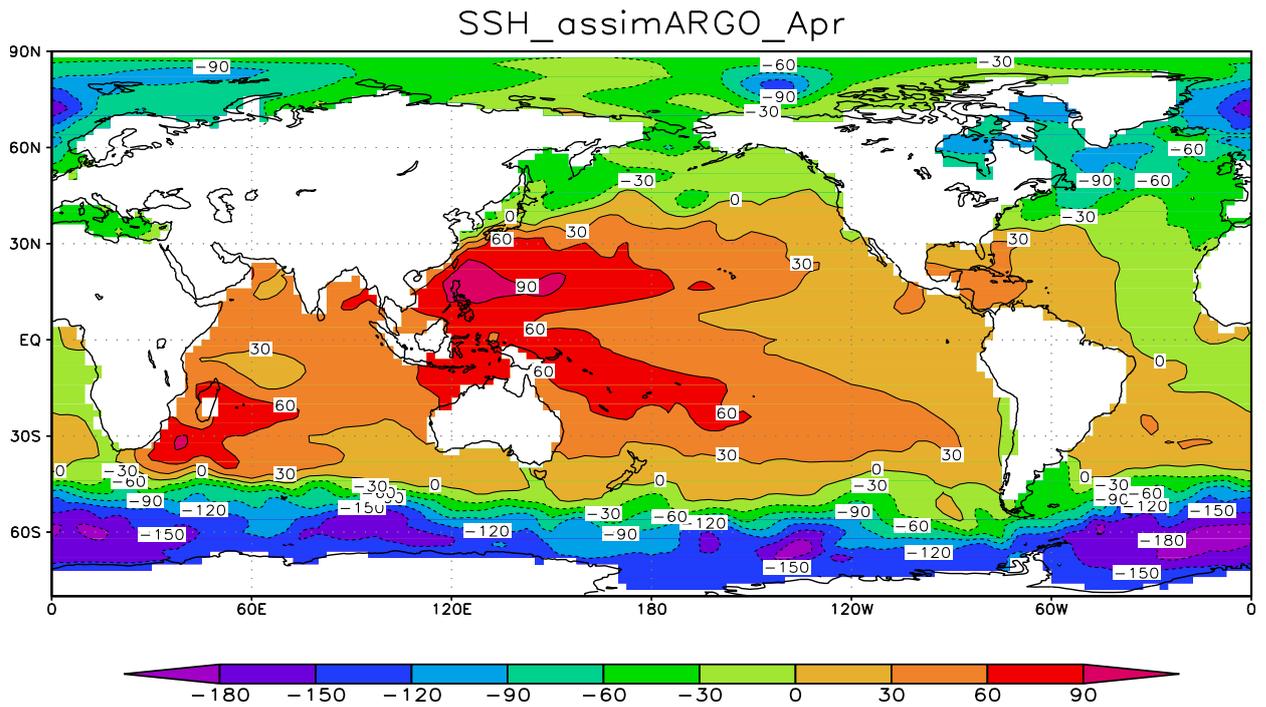


Рис 27. Уровень моря по результатам расчета в режиме «инициализация - прогноз», 15 апреля 2008 г.

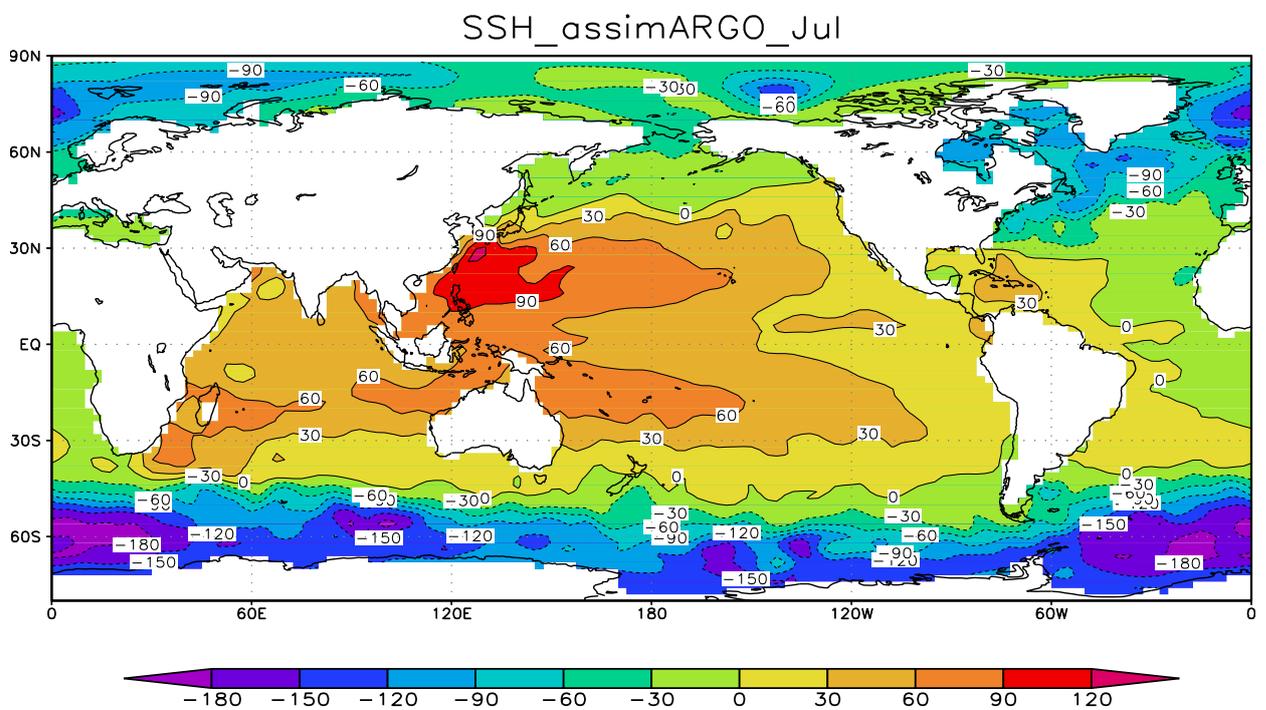


Рис 28. Уровень моря по результатам расчета в режиме «инициализация - прогноз», 15 июля 2008 г.

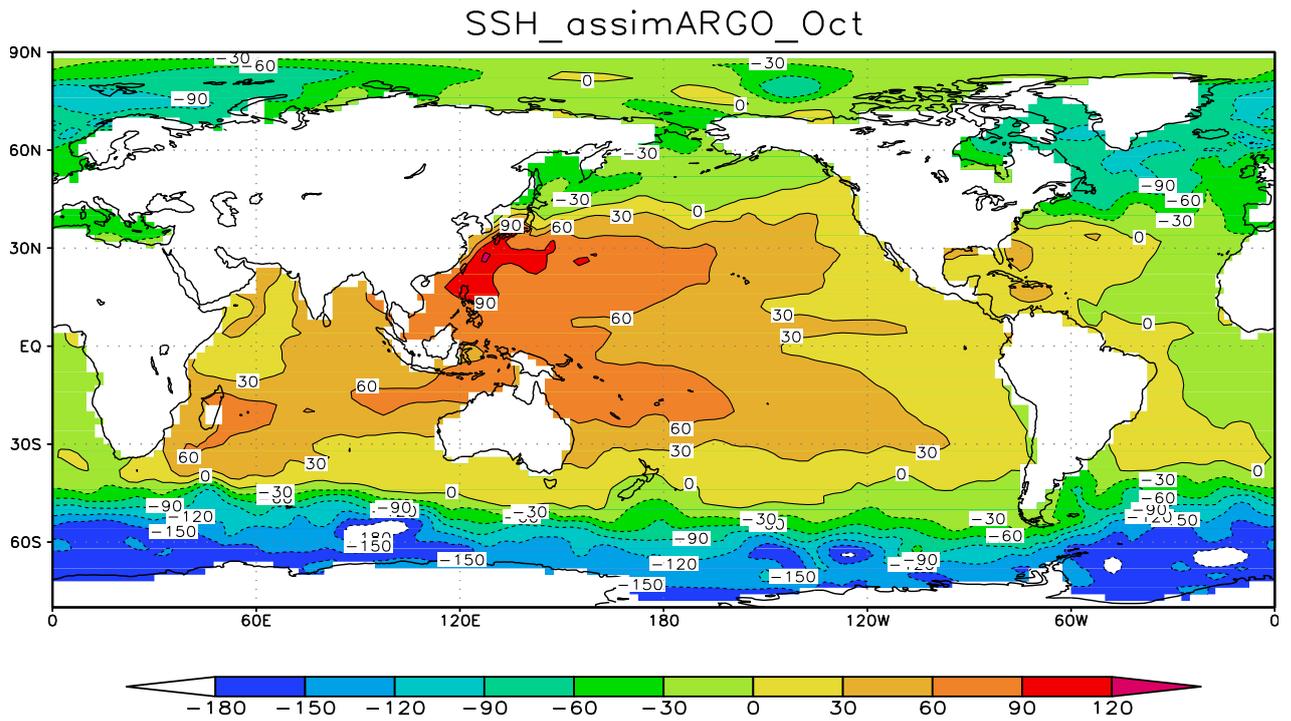


Рис 29. Уровень моря по результатам расчета в режиме «инициализация - прогноз», 15 октября 2008 г.

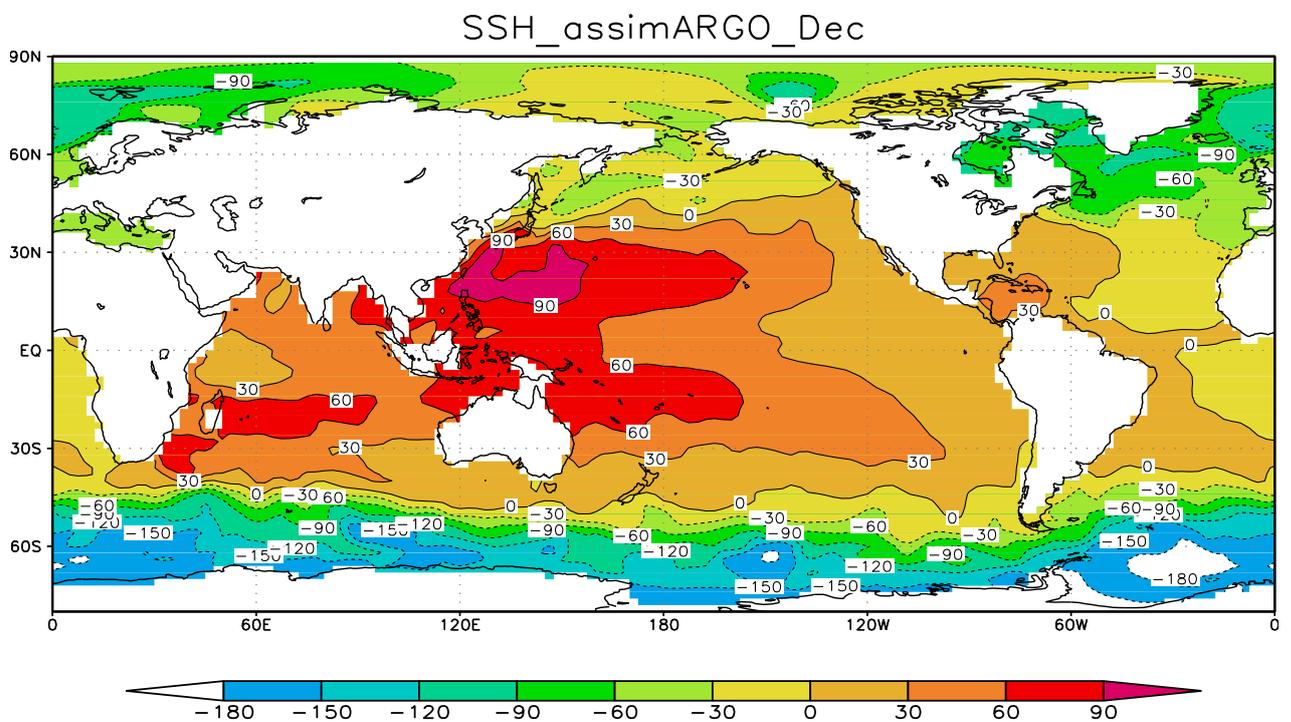


Рис 30. Уровень моря по результатам расчета в режиме «инициализация - прогноз», 15 декабря 2008 г.

## 2.4 Выводы

Суммируя полученные результаты, можно сделать следующие выводы.

1. Разработана эффективная технология моделирования динамики Мирового океана с 4-х мерной вариационной ассимиляцией данных наблюдений. Численный алгоритм решения задачи основан на комбинации метода многокомпонентного расщепления и метода сопряженных уравнений. Система сопряженных уравнений строится как сопряженная к расщепленной системе прямых уравнений. Она состоит из набора соответствующих сопряженных подсистем, каждая из которых имеет достаточно простую структуру.
2. Разработанная технология включает наряду с расчетом прогностической задачи решение системы сопряженных уравнений, решаемых в обратном времени. Технология обладает большей полнотой по сравнению с решением обычной прямой задачи, включая в расчетное решение учет данных натуральных наблюдений. В настоящее время это наиболее полная задача моделирования термохалинной динамики Мирового океана.
3. Система сопряженных уравнений строится как сопряженная к расщепленной системе прямых уравнений. Она состоит из набора соответствующих сопряженных подсистем, каждая из которых имеет достаточно простую структуру. Каждая подсистема решается с помощью неявного метода. Неявные алгоритмы решения по времени прямой и сопряженной задачи демонстрируют высокую эффективность и устойчивость расчетов.
4. Выполнены численные эксперименты по расчету годового хода с 4-х мерной вариационной ассимиляцией данных буев Арго. Результаты экспериментов показывают, что модельные поля адекватно отражают их наблюдаемую структуру. Включение процедуры вариационной ассимиляции дает возможность контролировать погрешность отклонения модельных полей от данных наблюдений в течение всего годового цикла. Относительное среднеквадратическое отклонение расчетных полей от данных наблюдений лежит в пределах 1 – 2 %.

### 3 ПРОВЕДЕНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ. ОЦЕНКА ВОЗМОЖНОСТИ СОЗДАНИЯ КОНКУРЕНТОСПОСОБНОЙ ПРОДУКЦИИ И УСЛУГ

#### 3.1 Проведение дополнительных исследований. Задача динамики Черного моря

В качестве дополнительных исследований по тематике НИР была рассмотрена задача приложения разработанной технологии к моделированию гидрофизических полей Черного моря. Задача динамики Черного моря имеет высокую актуальность в настоящее время, как с теоретической, так и с практической точки зрения. В НИР мы использовали ее решение для того, чтобы практически применить разработанную нами вычислительную технологию и оценить ее конкурентоспособность. Оценка конкурентной способности основана на сравнении результатов расчетов с моделью Морского гидрофизического института Национальной академии наук Украины (МГИ НАНУ). На основе модели МГИ НАНУ в настоящее время ведется прогноз характеристик Черного моря в рамках Европейской системы прогнозов динамики морей и океанов [85]. Отметим, что в отличие от модели МГИ НАНУ в нашей модели ведется расчет не только динамики Черного моря, но и динамики Азовского моря.

Для расчета циркуляции Черного и Азовского морей использована модель, разработанная авторами НОЦ в ИВМ РАН. Она имеет пространственное разрешение по долготе и широте  $0^{\circ}3'$  и  $0^{\circ}2'24''$  соответственно, что составляет  $\sim 4$  км. По вертикали было задано 40 неравномерно распределенных уровней. Для расчета атмосферного воздействия использовался архив реанализа атмосферной циркуляции Era-Interim из Европейского Центра Среднесрочных Прогнозов Погоды (European Centre for Medium-Range Weather Forecasts - ECMWF). Эти данные имеют пространственное разрешение  $1.5^{\circ} \times 1.5^{\circ}$  по широте и долготе.

Для калибровки и верификации модели была проведена серия экспериментов, в ходе которых были найдены оптимальные значения коэффициентов физических параметризаций турбулентной диффузии и вязкости.

Для анализа результатов численного моделирования было проведено несколько экспериментов в периоды с 2005 по 2008 года, результаты которых сравнивались с данными, полученными в МГИ НАНУ. Результаты сравнения приводятся для акватории Черного моря.

Анализ результатов показал, что холодный промежуточный слой (ХПС), являющийся отличительной особенностью циркуляции Черного моря, воспроизводится моделью ИВМ РАН в течение двух лет. В циркуляции Черного моря отчетливо проявляется вихревая структура хорошо известная по наблюдениям. Хорошо воспроизводится Основное

Черноморское течение (ОЧТ), которое характеризует общую циклоническую циркуляцию по всему периметру Черного моря, образуя два заметных кольца. Батумский антициклон воспроизводится недостаточно отчетливо, что связано с пространственной грубостью задания атмосферного форсинга.

Уравнения модели, приведены ранее (2.1) – (2.15). Они записаны в обобщенной сигма-системе координат.

В качестве граничных условий на поверхности моря для скорости задаются поток импульса от напряжения трения ветра. Для температуры и солёности задаются нормированные потоки тепла и соли. Поток тепла рассчитывается с учетом потоков явного и скрытого тепла, длинноволновой и коротковолновой радиации и потока, вызванного наличием льда, а поток соли учитывает баланс пресной воды, обусловленный осадками, испарением, стоком рек и образованием или таянием льда.

На боковой поверхности для скорости задаются условия непротекания и свободного скольжения. На твердых участках боковой границы и на дне для температуры и солёности ставятся условия изоляции. На жидких участках боковой границы задаются температура и солёность, взятые из наблюдений.

Модельная область охватывает акваторию Черного моря, включая бассейн Азовского моря. Модельная область расположена от 27°26'60" в.д. до 41°45'00" в.д. и от 40°54'36" с.ш. до 47°16'12" с.ш с пространственным разрешением (0° 3')×( 0°2'24") по долготе и широте соответственно. Сеточная область в горизонтальной плоскости содержит 287×160 узлов. По вертикали задано 40 неравномерно распределенных по глубине сигма-уровней. Шаг по времени равен 5 мин. Топография дна, используемая в модели, представлена на рис. 31.

Для построения начальных условий на поверхности океана, а также для построения распределения начальных данных по глубинам, были использованы данные наблюдений.

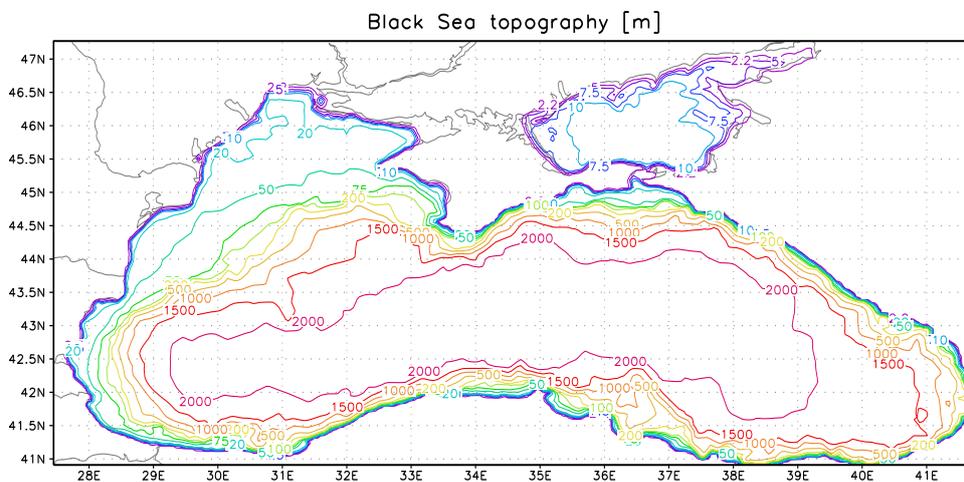


Рис. 31. Топография Черного моря (м)

### 3.2 Результаты численных экспериментов по расчету циркуляции Черного и Азовского морей

Для верификации модели была проведена серия предварительных расчетов за период с 1 января 2007 года по 31 декабря 2008 года. В качестве параметров по атмосферному воздействию использовались данные Era-Interim. Он подготовлен на основе массивов характеристик Европейского Центра Среднесрочных Прогнозов Погоды (European Centre for Medium-Range Weather Forecasts - ECMWF). База данных ERA-Interim доступна на сайте [http://data-portal.ecmwf.int/data/d/interim\\_daily/](http://data-portal.ecmwf.int/data/d/interim_daily/).

Эксперименты показали, что результаты расчетов, особенно воспроизведение "ХПС" в данных температуры, существенно зависят от коэффициентов вязкости и диффузии, как горизонтальной, так и вертикальной. После серии экспериментов были выбраны оптимальные параметры модели, включая коэффициенты турбулентного обмена. Далее с выбранными модельными параметрами был поведен прогностический численный расчет, результаты которого приведены ниже.

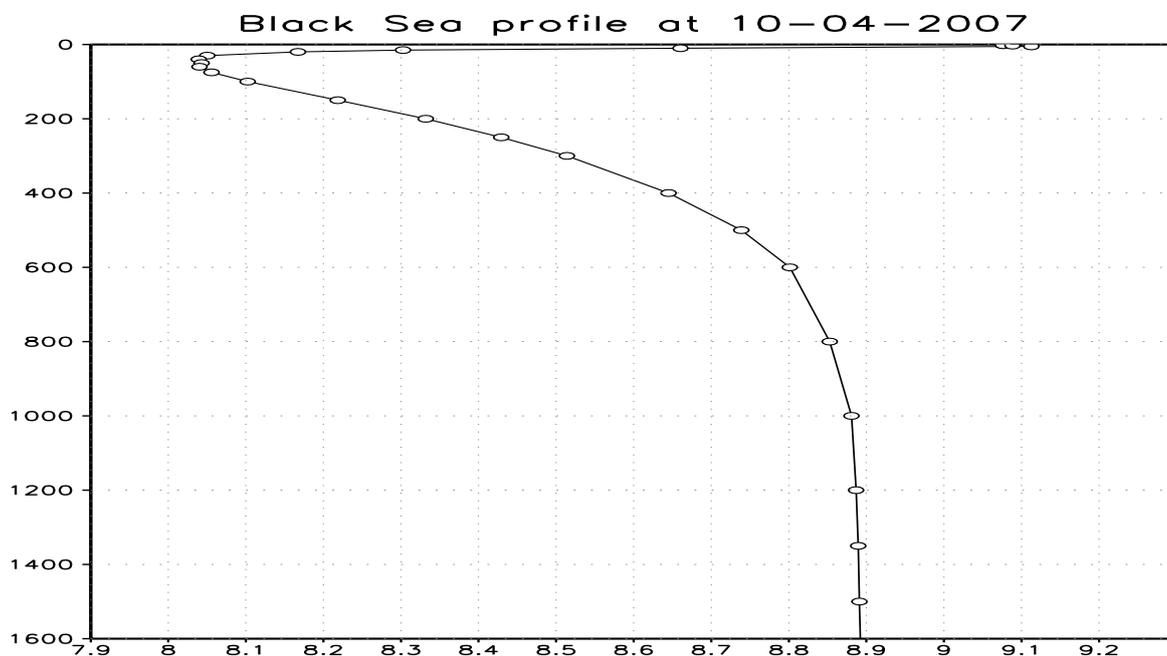


Рис. 32. Профиль температуры Черного моря на 10 апреля 2007 года. Координаты выбранной точки (37.025,42.01).

Black Sea temperature on 50 m at 15MAR2007

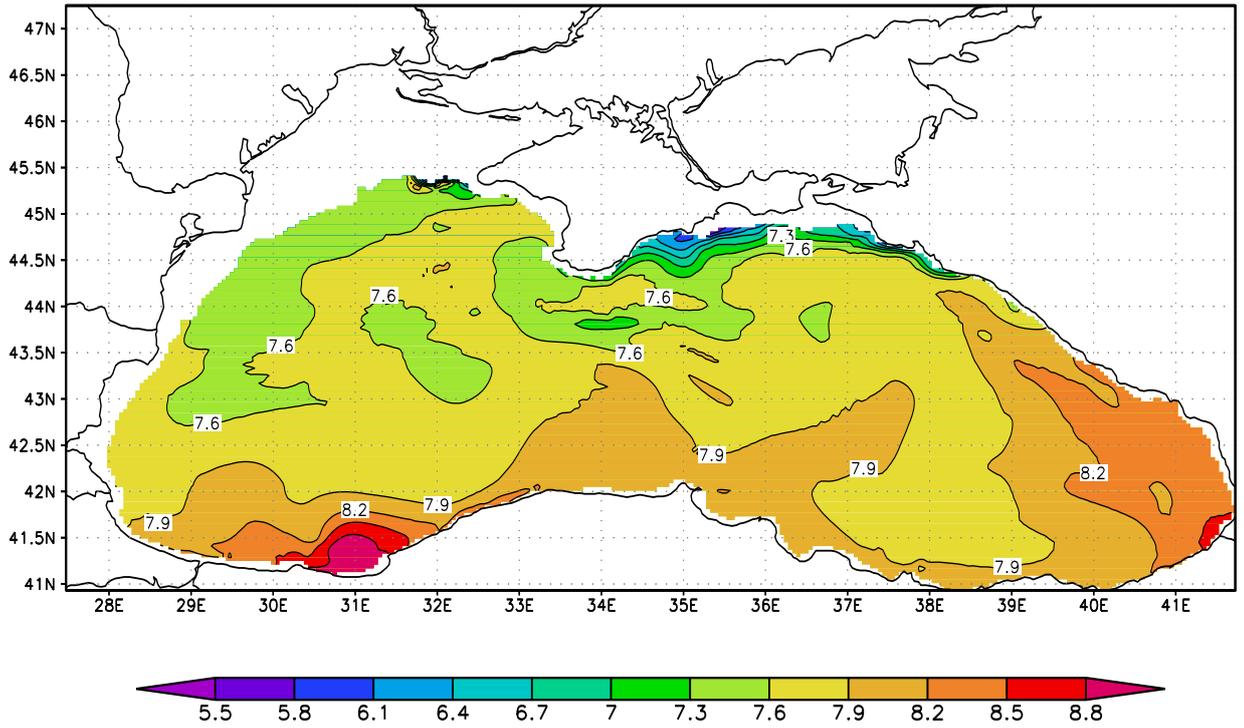


Рис. 33. Температура Черного моря на глубине 50 м 15 марта 2007 года.

Black Sea temperature on 1 m at 10SEP2007

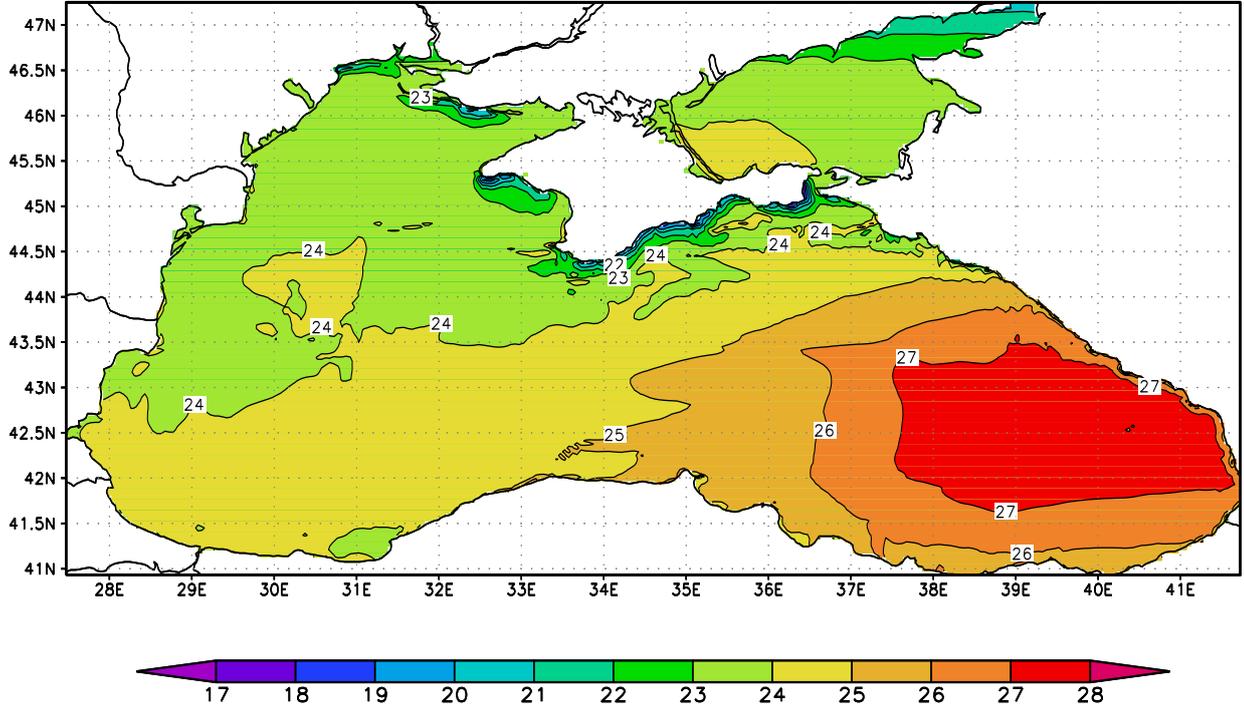


Рис. 34. Температура Черного моря на глубине 1 м 10 сентября 2007 года.

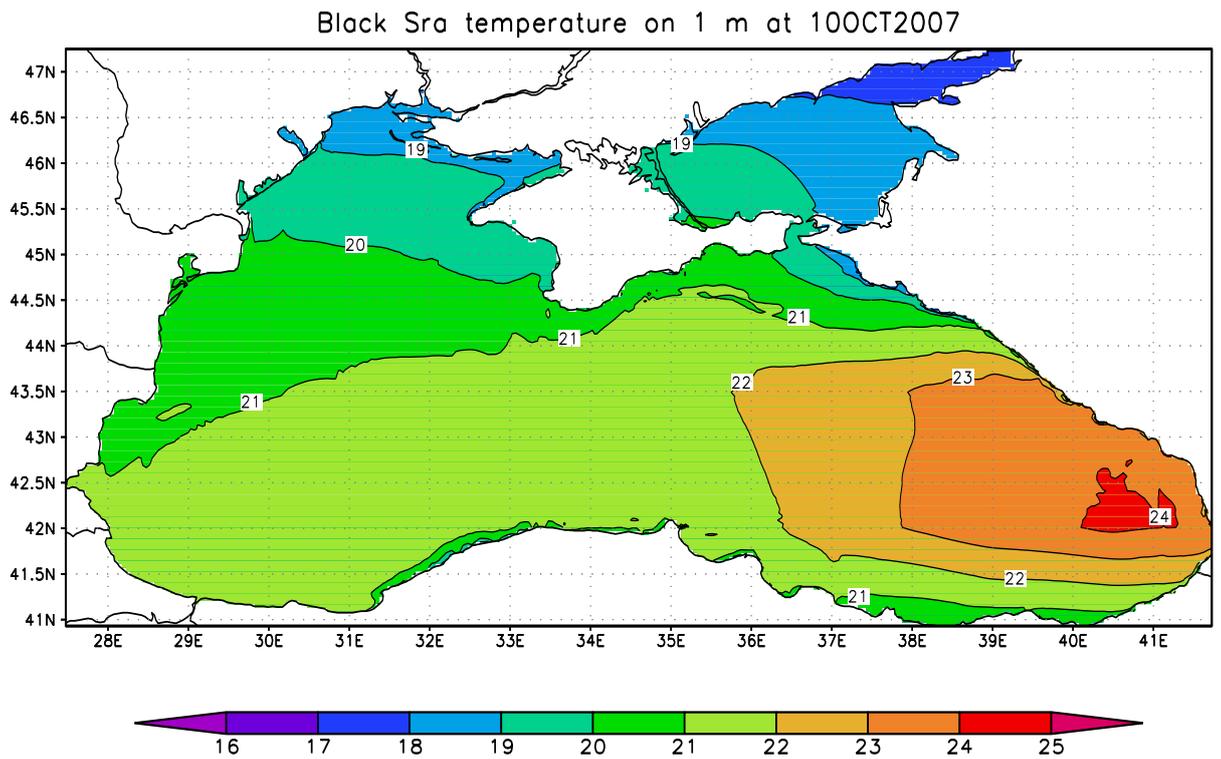


Рис. 35. Температура Черного моря на глубине 1 м 10 октября 2007 года.

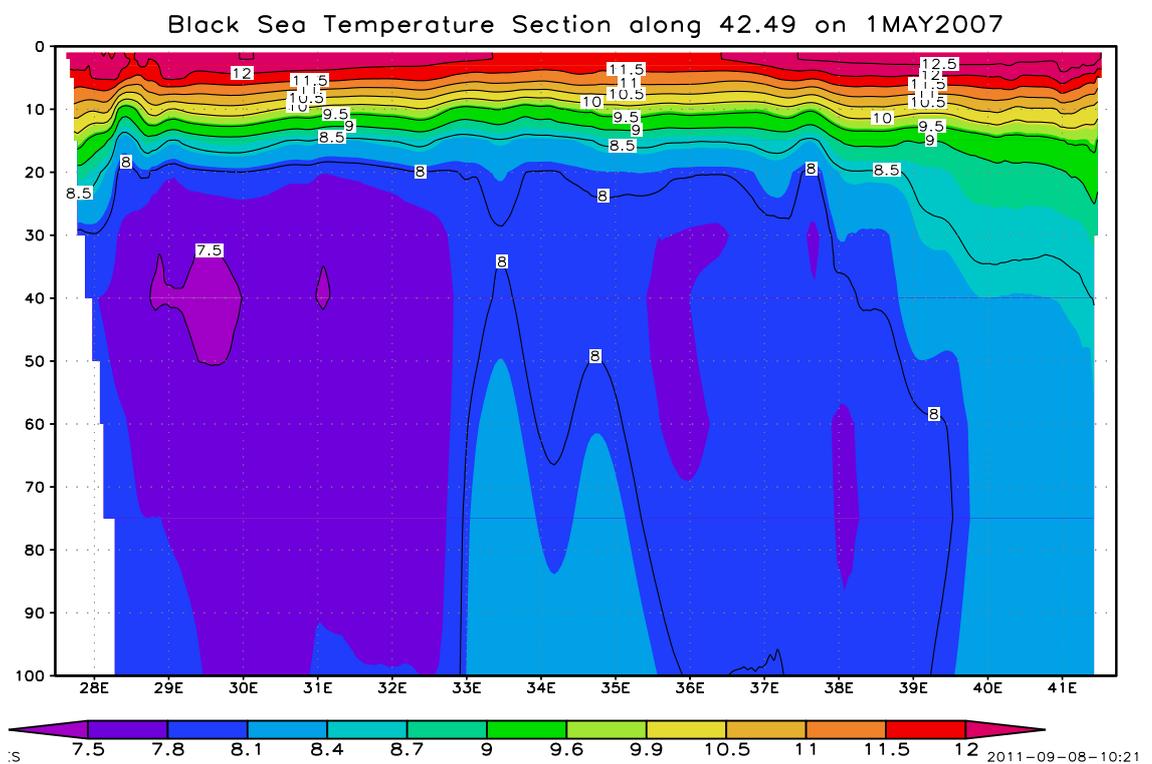


Рис. 36. Температурный разрез по 42.49 С. Ш. на глубинах от 0 до 100 м 1 мая 2007 года.

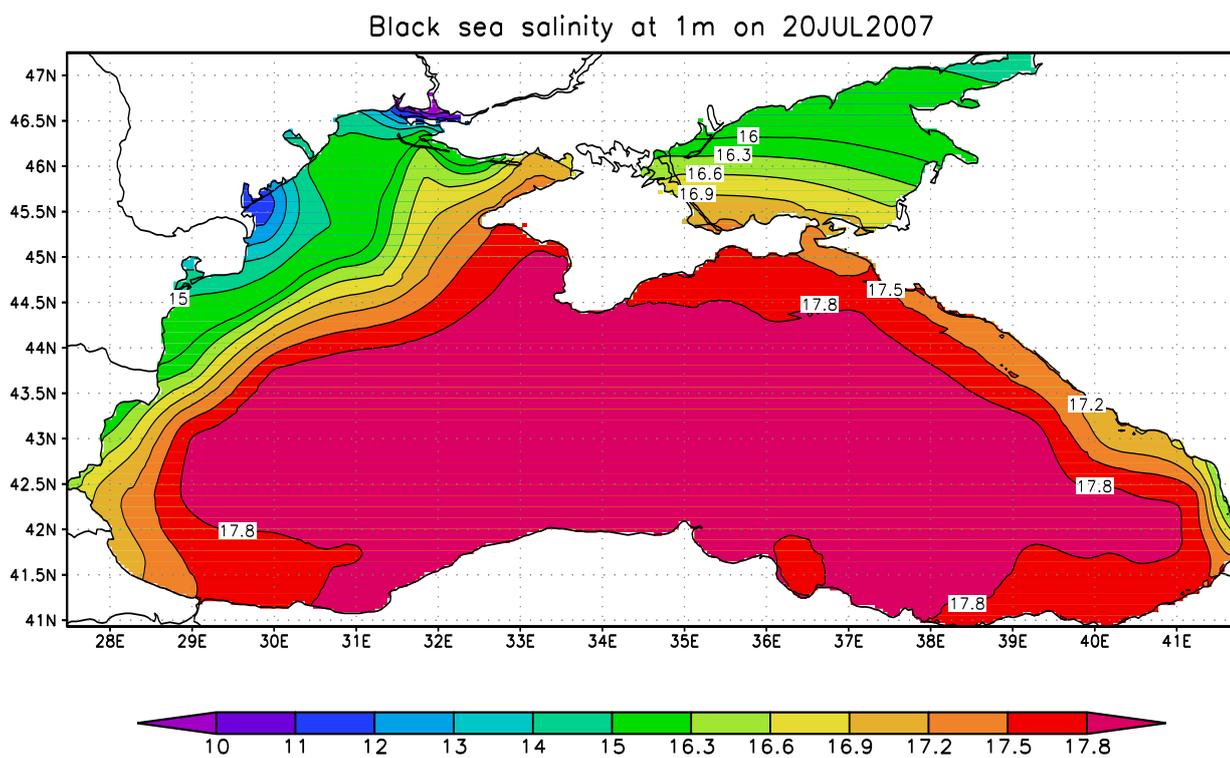


Рис. 37. Поверхностная соленость Черного и Азовского морей согласно расчетам на 20 июля 2007 года.

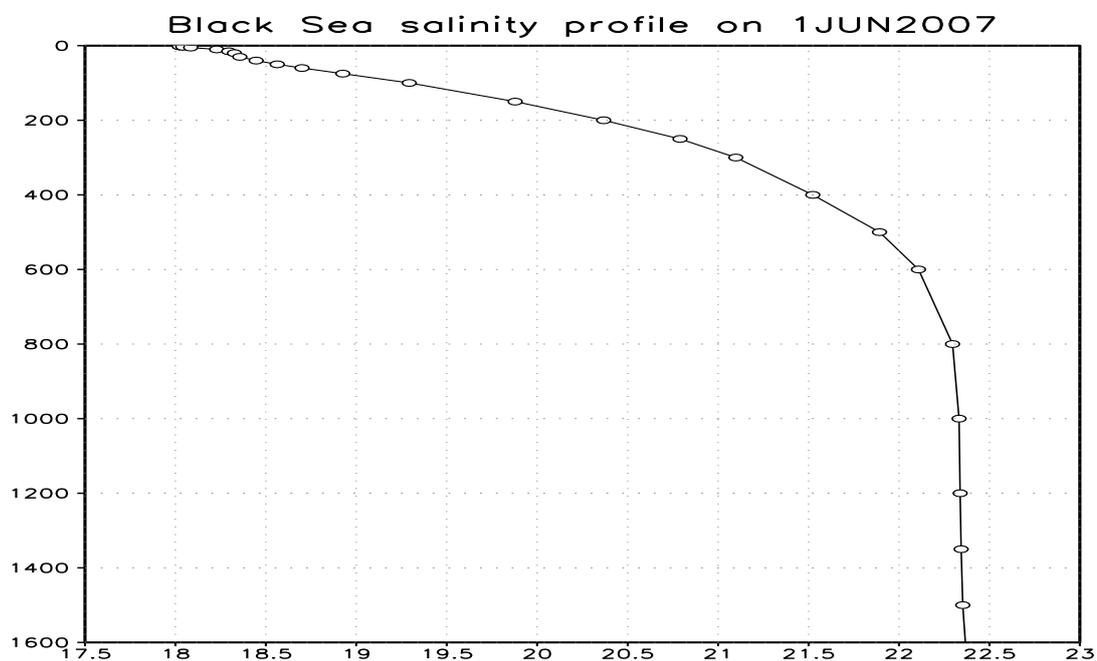


Рис. 38. Профиль солености Черного моря на 1 июня 2007 года. Координаты выбранной точки (39.025,42.01).

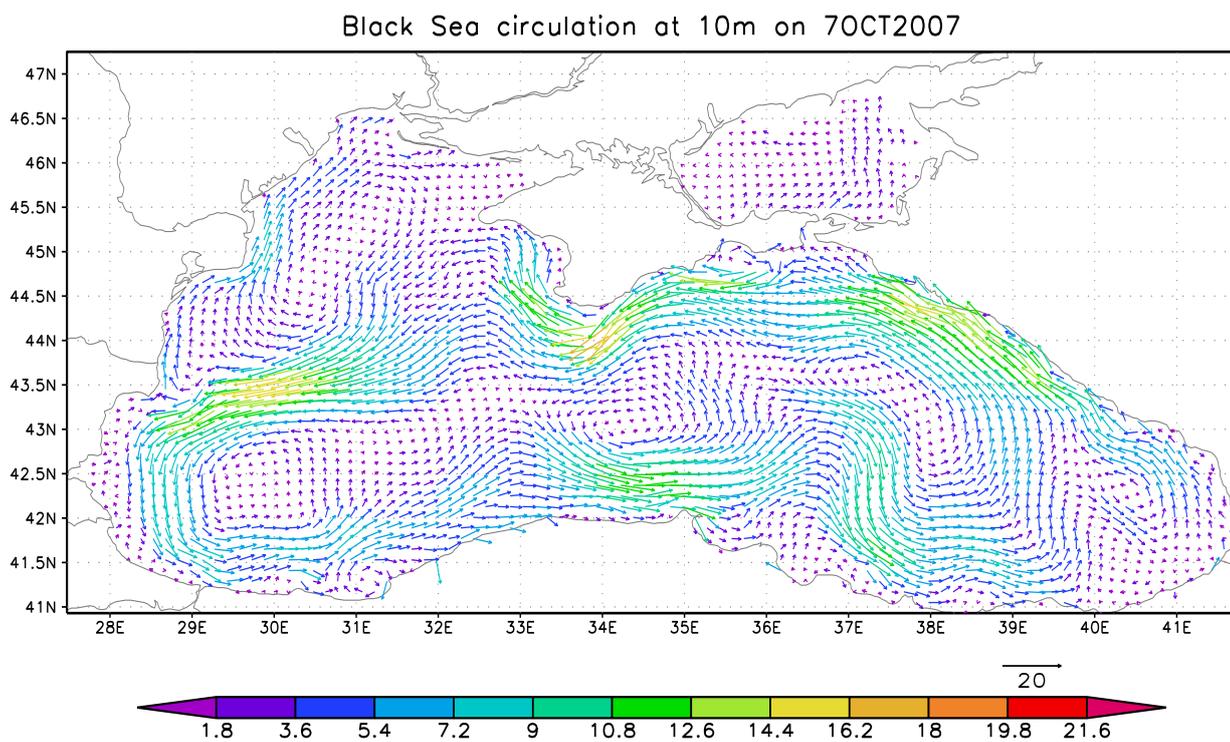


Рис. 39. Поле течений Черного моря на глубине 10 м 7 октября 2007 года. Стрелки показаны для каждой третьей точки расчетной сетки. Их масштаб указан под рисунком.

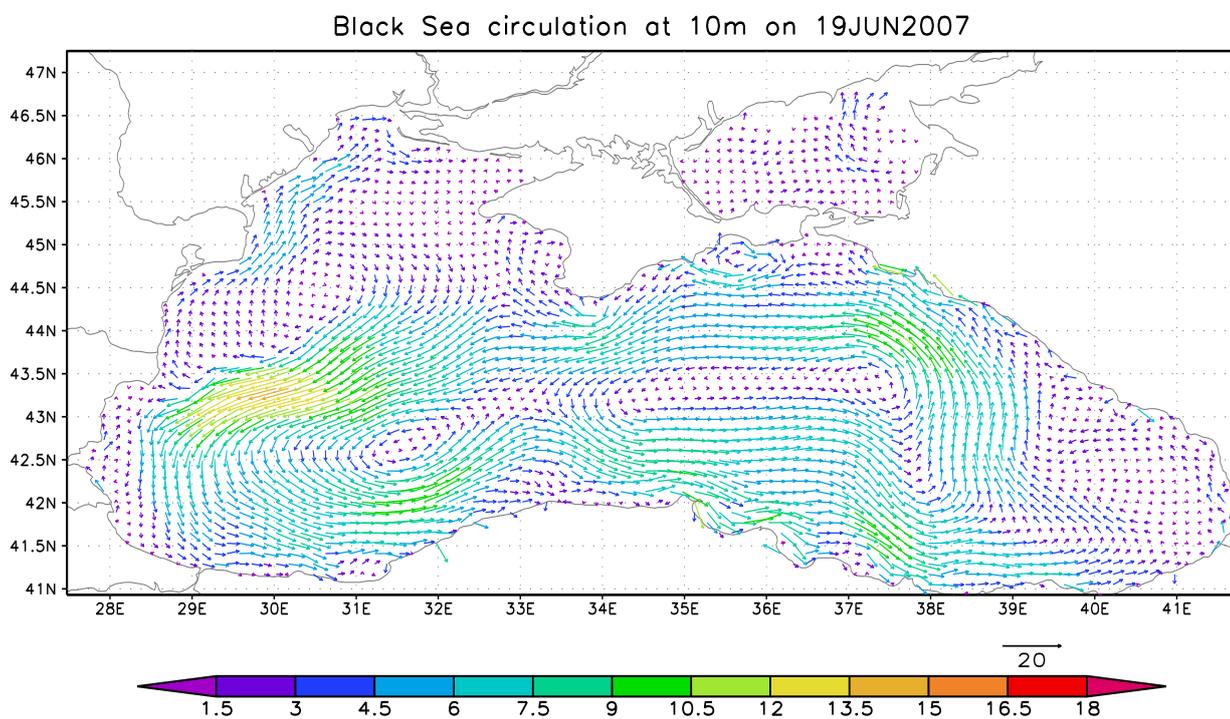


Рис. 40. Поле течений Черного моря на глубине 10 м 19 июня 2007 года. Стрелки показаны для каждой третьей точки расчетной сетки. Их масштаб указан под рисунком.

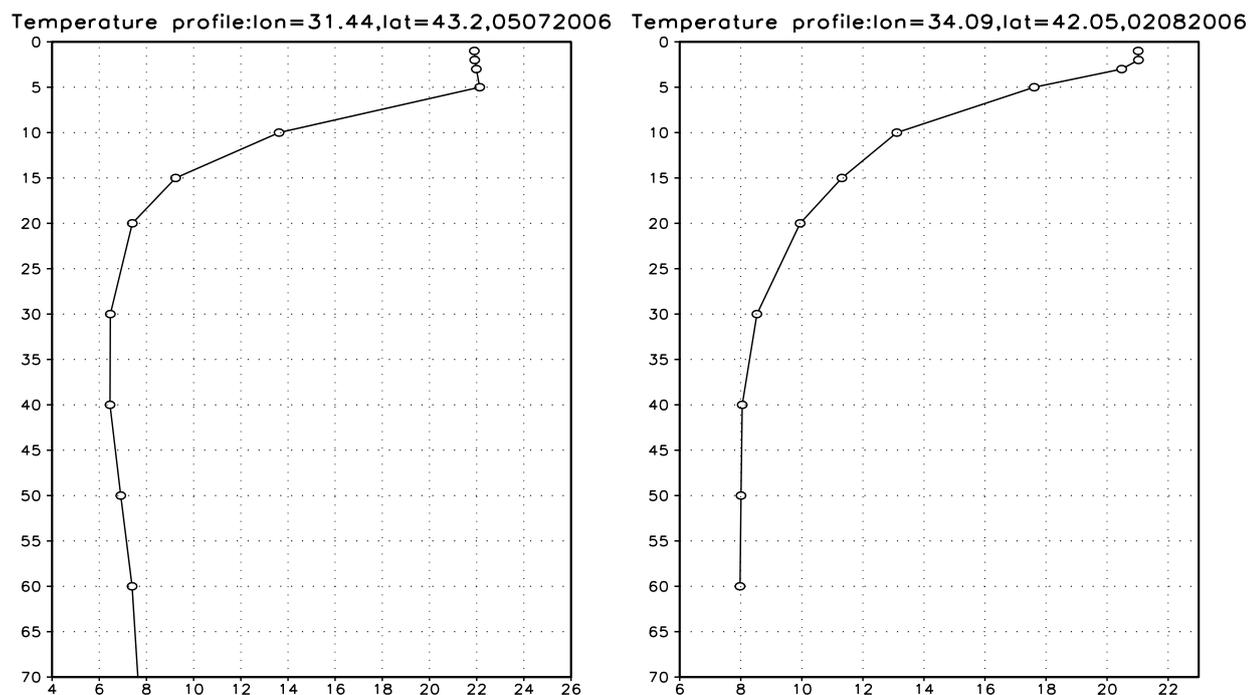
На рис. 32 изображен температурный профиль на 10 апреля 2007 года. Из рисунка отчетливо видно сохранение профиля ХПС на второй год расчета в локальной точке сеточной обласит с координатами (37.025°E,42.01°N). На рис. 33 показана температура Черного моря на глубине 50 м. На рис. 34 и 35 показана температура Черного моря в приповерхностном слое по состоянию на 10 сентября и 10 октября 2007 года. Из рисунков видно, что происходит постепенное охлаждение вод Черного моря.

На рис. 36 показан температурный разрез по 42.49 С. Ш. на глубинах от 0 до 100 м 1 мая 2007 года. Отчетливо видна стратификация температуры по глубине. По всему разрезу прослеживается ХПС с минимумом температуры на глубине около 40 м, что соответствует наблюдениям. Из этого разреза видно, что ХПС в восточной части моря более отчетливо выражен, чем в западной.

На рис 37 показана поверхностная соленость Черного и Азовского морей согласно расчетам на 20 июля 2007 года, где наблюдается спад солености в местах впадения в Черное море рек, таких как Дунай и Днепр. На рис 38 показан профиль солености на 1 июня 2007 года.

На рис. 39, 40 показано поле течений на глубине 10 м. Хорошо выделяется ОЧТ, вихревая структура циркуляция Черного моря занижена вследствие большого коэффициента вязкости второго порядка в данном эксперименте.

Проведем сравнительный анализ рассчитанной циркуляции Черного моря с данными МГИ НАНУ.



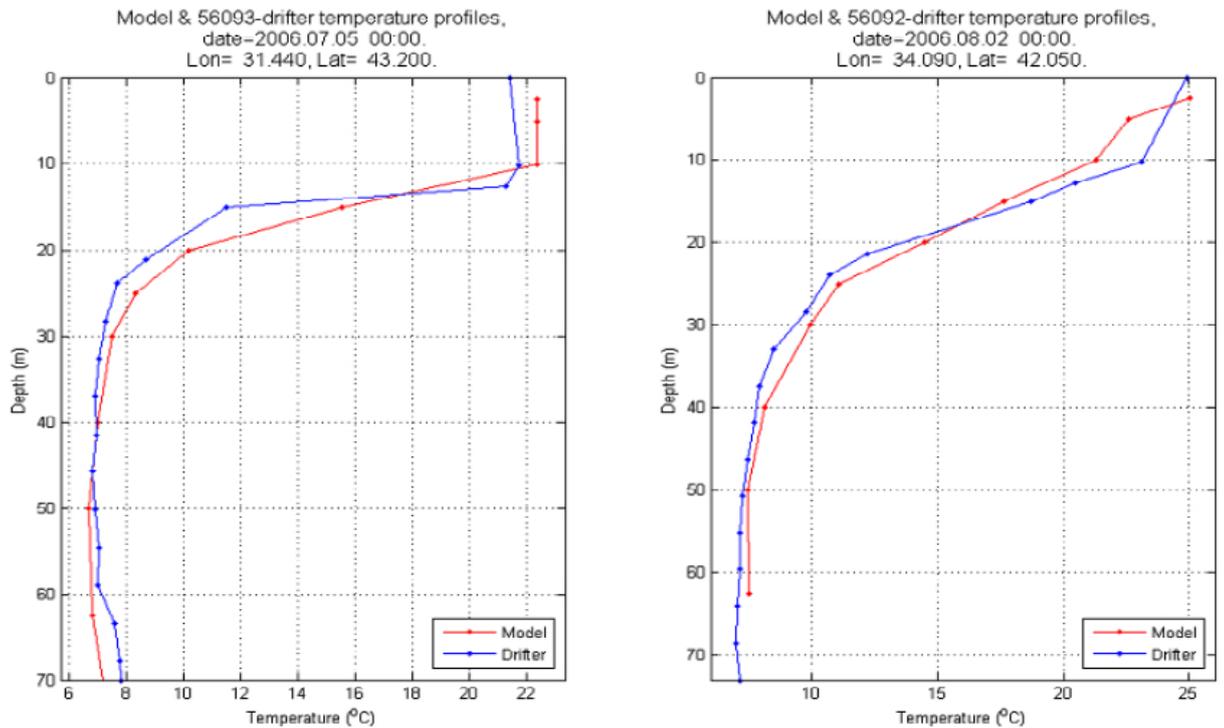


Рис. 41. Сравнение расчетными и наблюдаемыми температурными профилями в точке (31.44°E;43.2°N) – слева и (31.09°E;43.05°N) – справа. Расчеты по модели ИВМ РАН – сверху, данные наблюдений показаны внизу красным цветом. Результаты расчета по модели МГИ (показаны на нижних рисунках синим цветом).

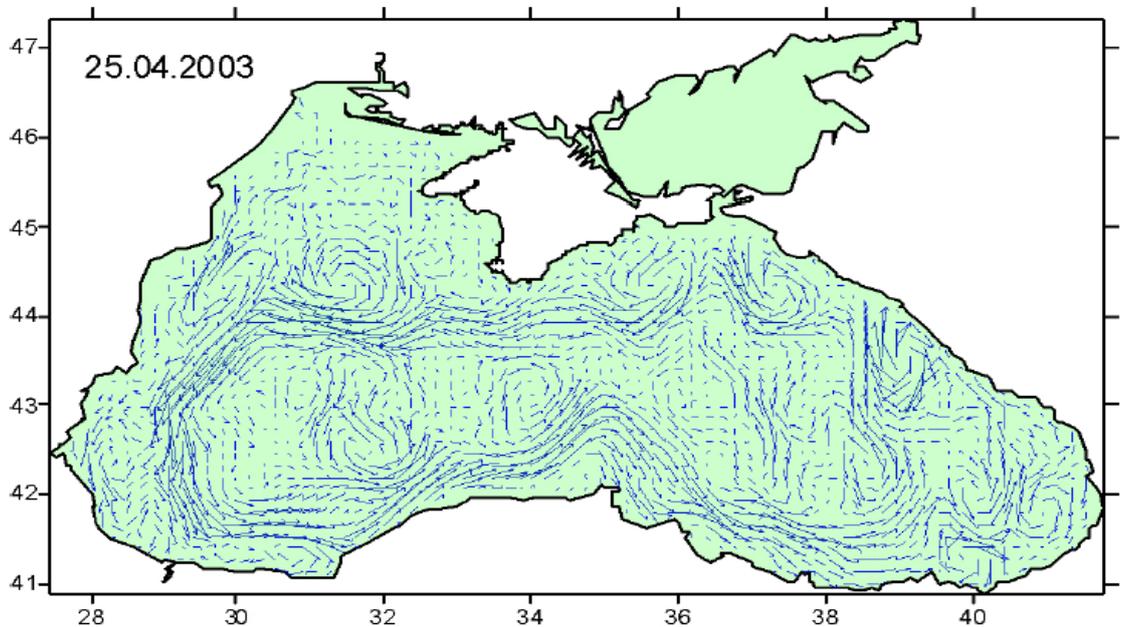


Рис. 42. Поверхностная циркуляция Черного моря, рассчитанная по модели МГИ НАНУ с усвоением данных наблюдений (см. <http://www.ocean-sci-discuss.net/8/917/2011/osd-8-917-2011-discussion.html>).

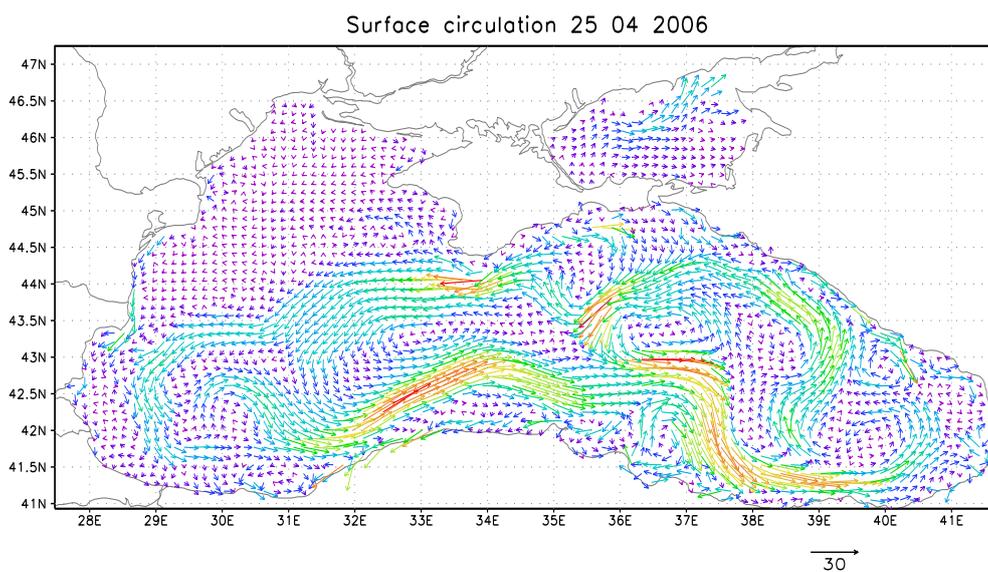
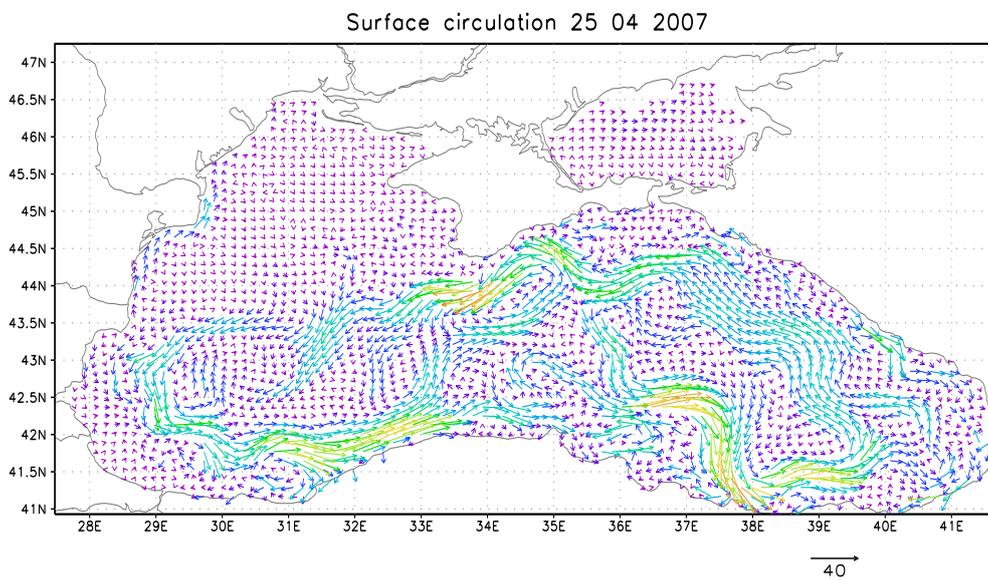
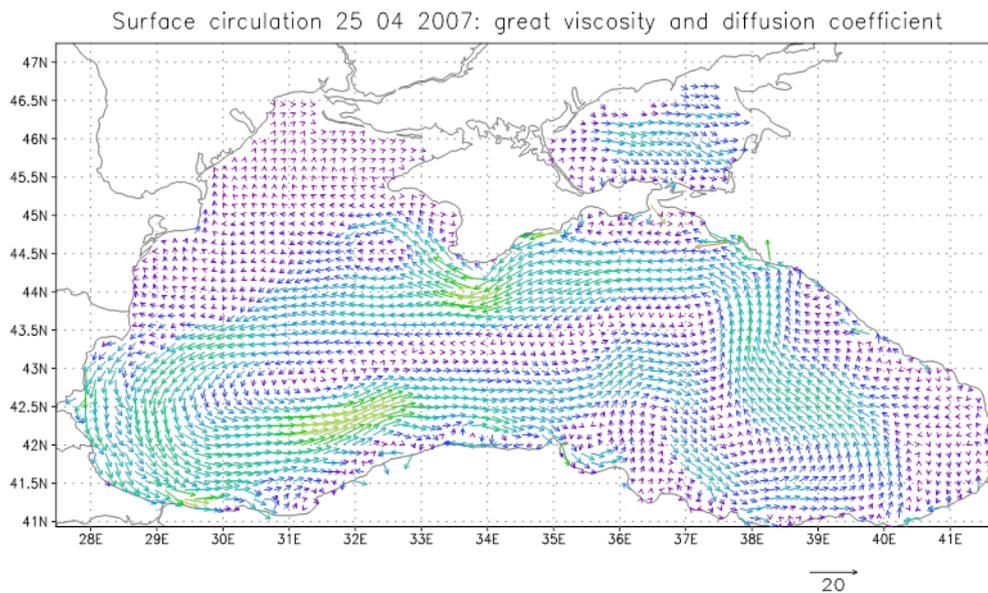


Рис. 43. Течения в верхнем слое на 25 апреля 2006 и 2007 г. (внизу). Вверху - расчет с дополнительной боковой вязкостью второго порядка с коэффициентом  $10^6 \text{ см}^2/\text{с}$ .

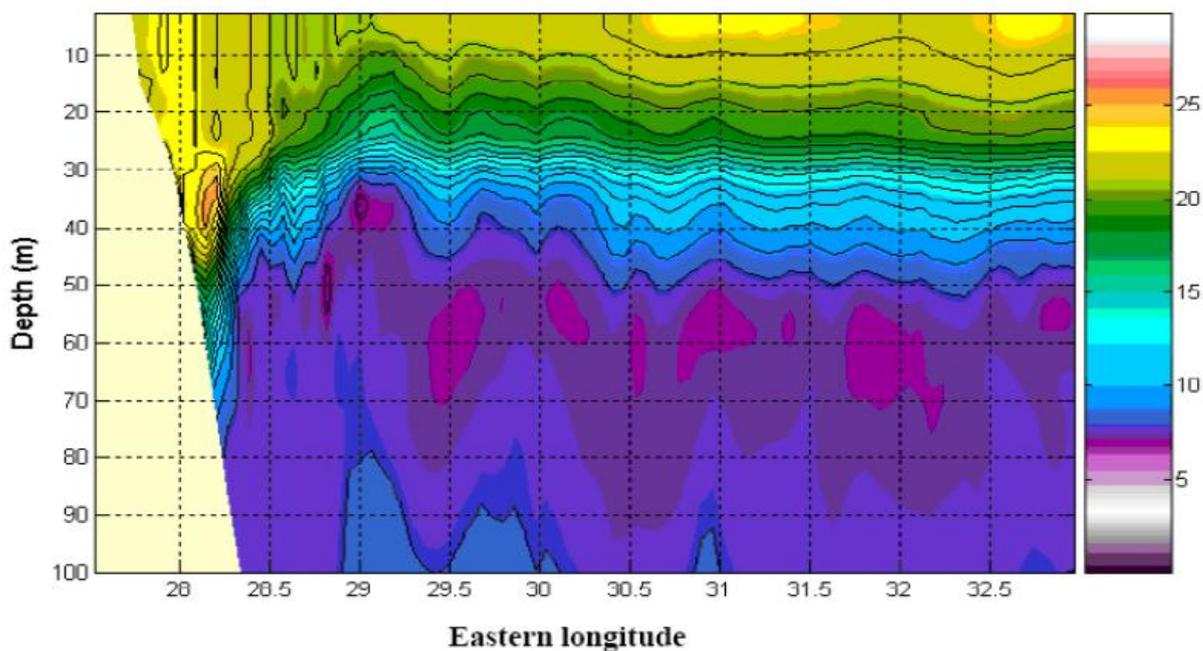
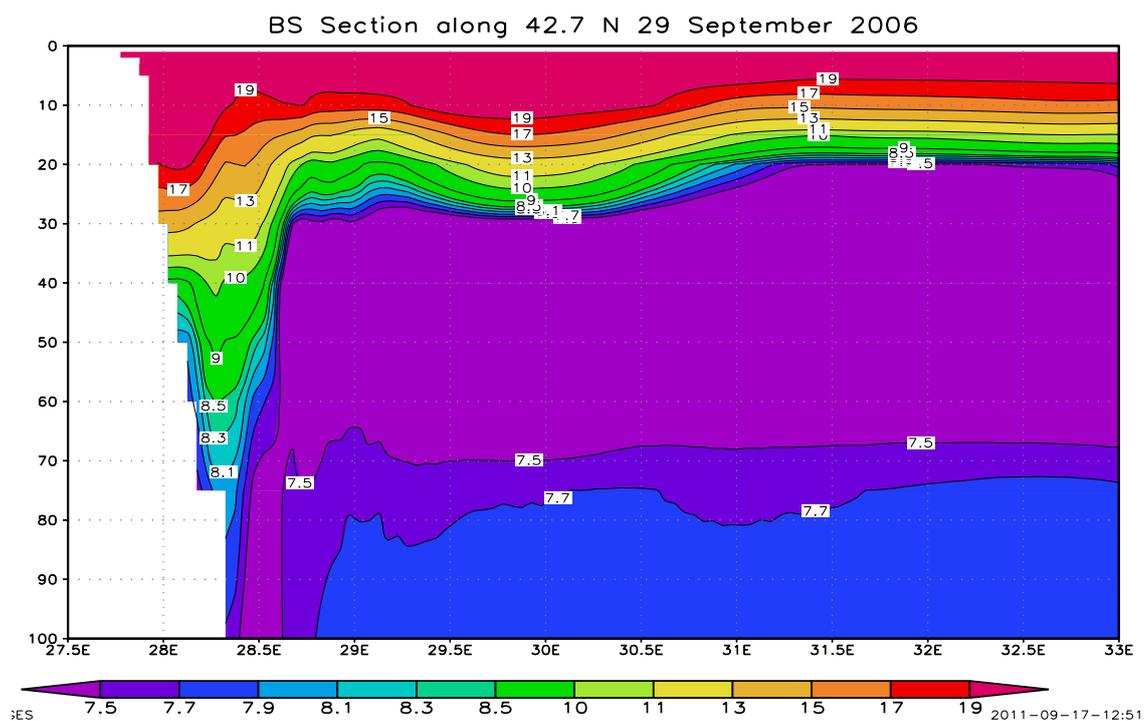


Рис. 44. Температурный разрез вдоль 42.7°N с поверхности до глубины 100м. Значения цветов и изолиний в °C. Вверху – по результатам модели на 29 сентября 2006, внизу – согласно расчетам по модели МГИ НАНУ с усвоением данных наблюдений (см. <http://www.ocean-sci-discuss.net/8/917/2011/osd-8-917-2011-discussion.html>).

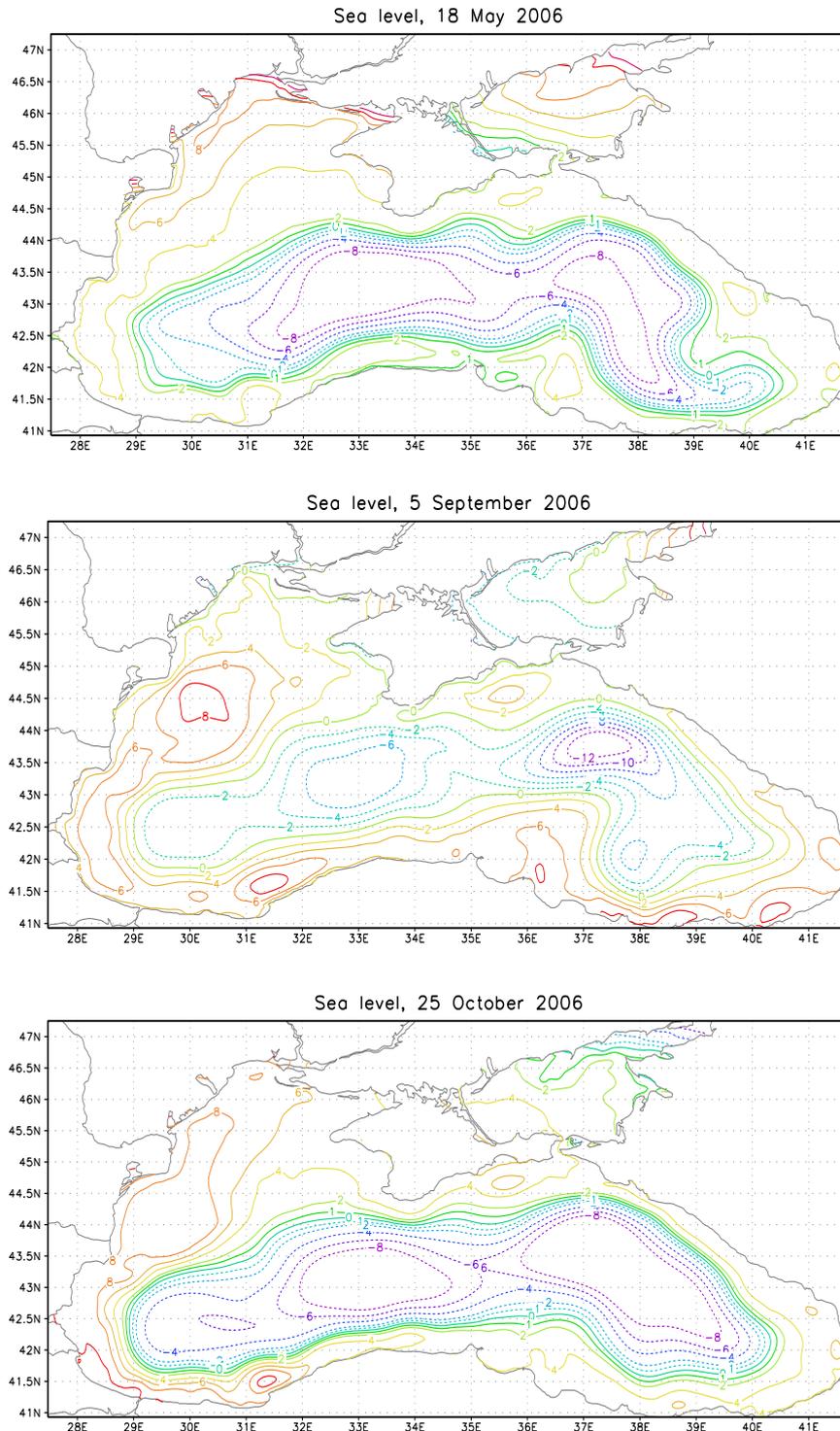


Рис. 45. Поля изменения отклонений уровня моря от невозмущенного состояния для 4-х моментов времени 2006 г.: 8 апреля, 18 мая, 05 сентября и 25 октября.

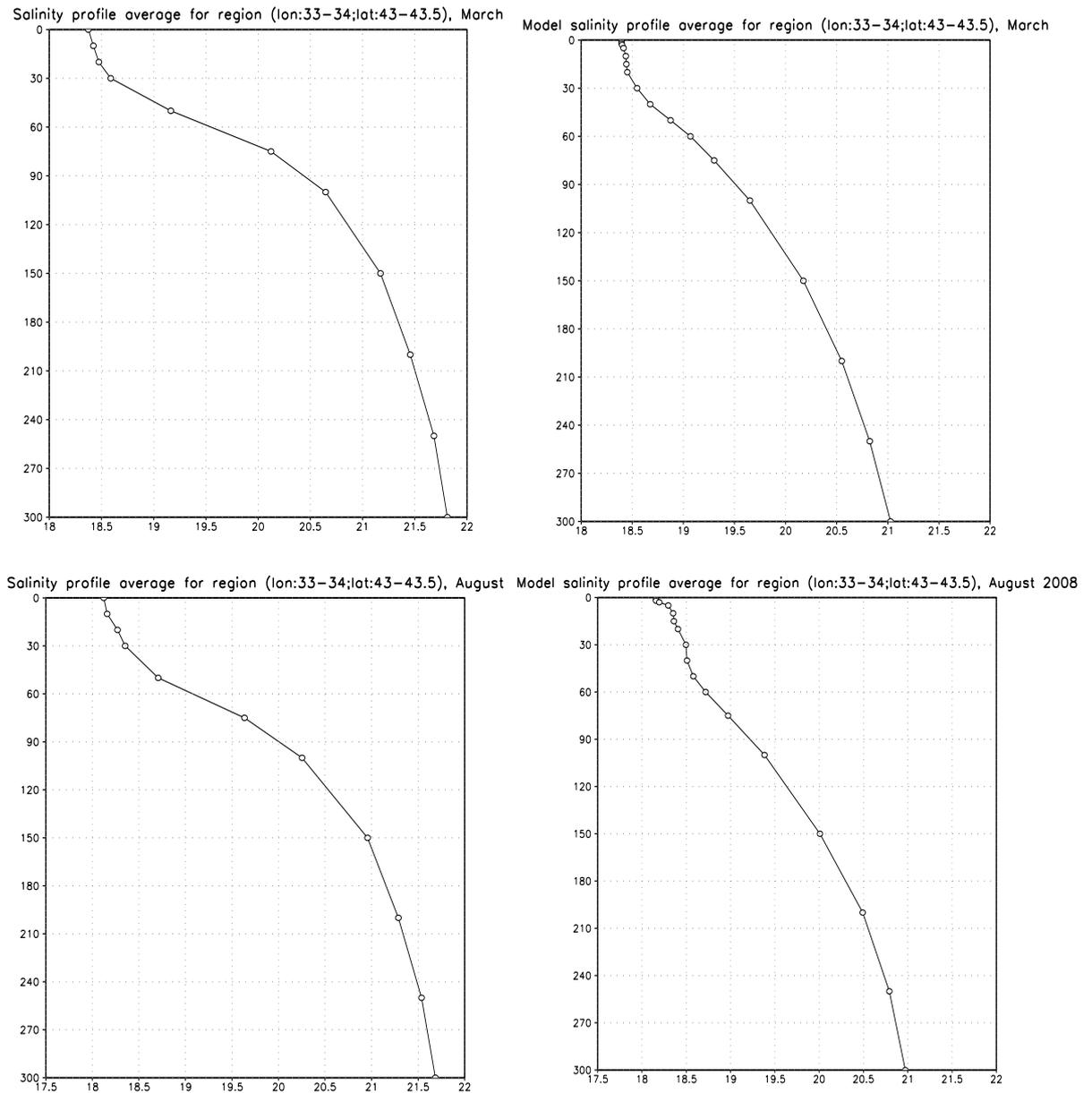


Рис. 46. Сравнение между расчетными и наблюдаемыми профилями солёности, осредненными в области 33 – 24°E и 43 – 43.5°N. На рисунках слева – данные климатических полей, а справа для результатов модели. На верхних рисунках средние за март, а на нижних – средние за август. При этом для модели берутся результаты за 2006 г.

На рис. 41 приведено сравнение результатов моделирования с результатами моделирования в МГИ НАНУ, а также с данными наблюдений. Приведенные результаты показывают, что модель хорошо воспроизводит вертикальное распределение температуры, но в модели занижается глубина верхнего перемешиваемого слоя, что говорит о необходимости усовершенствования параметризации вертикального перемешивания.

На рис. 42 показана поверхностная циркуляция Черного моря, рассчитанная по модели МГИ НАНУ с усвоением данных наблюдений в тот же срок, что и на рис. 43, только в другие года. По результатам хорошо видно, что общий характер циркуляции в Черном море в данное время года прослеживается на всех 4-х рисунках.

На рис. 43 показаны примеры рассчитанных полей скорости в приповерхностном слое на 25 апреля 2006 при различных коэффициентах боковой вязкости. Показано, что при добавлении к коэффициенту вязкости 4-ого порядка большого коэффициента вязкости 2-ого порядка  $10^6 \text{ см}^2/\text{с}$ , исчезает вихревая структура циркуляции Черного моря. Во всех проведенных экспериментах выделяется ОЧТ, так же на нижних рисунках видны "очки Книповича", что согласуется с данными наблюдений.

На рис. 44 показано сравнение температурных разрезов по результатам от модели INMOM и модели МГИ НАНУ с усвоением данных наблюдений. Результаты показывают хорошее соответствие. Результаты модели INMOM показывают сохранение ХПС на 21 месяце расчета.

На рис. 45 показано годовое изменение отклонения уровня от невозмущенного состояния. По результатам видна достаточно сильная изменчивость отклонения уровня в течение года, видны "очки Книповича". Батумский антициклон воспроизводится недостаточно отчетливо, что связано с пространственной грубостью задания атмосферного форсинга из Era-Interim.

На рис. 46 проведено сравнение рассчитанных полей солености с наблюдаемыми полями, осредненными по региону в верхних слоях, глубиной до 300 м. Показано хорошее соответствие наблюдаемых данных и данных расчетов по модели ИВМ РАН.

### 3.3 Выводы

1. Результаты расчетов показали эффективность разработанной авторами НОЦ вычислительной технологии. Технология позволила создать численную модель динамики Черного и Азовского морей, адекватно воспроизводящую наблюдаемые процессы.
2. Для анализа результатов численного моделирования было проведено несколько экспериментов в периоды с 2005 по 2008 года, результаты которых сравнивались с расчетными данными, полученными в МГИ НАНУ.
3. Анализ результатов показал, что холодный промежуточный слой, являющийся отличительной особенностью циркуляции Черного моря, воспроизводится в течение двух лет. В циркуляции Черного моря отчетливо проявляется вихревая структура

хорошо известная по наблюдениям. Хорошо воспроизводится Основное Черноморское течение, которое характеризует общую циклоническую циркуляцию по всему периметру Черного моря.

4. Результаты численного моделирования показали хорошее соответствие наблюдаемым данным, а так же данным, полученным по модели Черного моря МГИ НАНУ.
5. Разработанная технология может послужить основой создания современной системы мониторинга и оперативного прогноза циркуляции вод Черного и Азовского морей.

## 4 НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО КУРСУ «СОПРЯЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ И МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»

### 4.1 Введение. Математические модели и методы геофизической гидродинамики

Разработка математических моделей геофизической гидродинамики представляет собой междисциплинарную проблему, к исследованию которой привлечено внимание многих стран и международных организаций. Для информационного обеспечения решения этой проблемы создаются новые технологии получения и обработки данных наблюдений, включая спутники, дрейфтеры, профилирующие буи ARGO и др.

Разработка численных моделей динамики океанов и морей нового поколения требует исследования ряда проблем в области вычислительных и информационных технологий.

Эти проблемы связаны, в первую очередь, с разработкой новых вычислительных методов решения задач для сложных математических моделей, описываемых системами нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных в областях сложной формы. Методы должны быть устойчивыми и обладать высокими порядками аппроксимации, базироваться на достижениях современной вычислительной математики.

Разработка эффективных вычислительных технологий решения сложных многомерных прикладных задач геофизической гидродинамики, имеющих важное практическое значение, связана также с проблемой обработки данных наблюдений.

### 4.2 Метод вариационной ассимиляции данных наблюдений

Методы ассимиляции данных наблюдений широко применяются в науках о Земле. Наибольшие приложения они получили в метеорологии и океанографии, где наблюдения атмосферы и океана ассимилируются в математические численные модели с целью получения начальных условий или других параметров модели для дальнейшего моделирования и прогноза.

Универсальным методом ассимиляции данных является вариационный метод, основанный на теории оптимального управления и сопряженных уравнений. Задача ассимиляции данных в этом случае формулируется как задача оптимального управления. Она

состоит в минимизации функционала ценности, описывающего разность между решением математической модели и данными наблюдений.

При решении вариационной задачи возникает необходимость вычислять градиент минимизируемого функционала. Важным шагом в этом направлении является использование теории сопряженных уравнений.

При использовании вариационного подхода наиболее сложные задачи возникают в случае так называемого 4-х мерного усвоения данных. В этом случае данные наблюдений ассимилируются на некотором временном интервале. Это приводит к необходимости решать связанные системы прямых и сопряженных уравнений, в прямом и обратном времени, чрезвычайно усложняя численные алгоритмы.

**Постановка задачи 4-х мерной вариационной ассимиляции данных.** Рассмотрим эволюционную задачу, с некоторым заданным оператором  $A$ , на временном интервале  $(0, \bar{t})$ .

Имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi - f = 0$$

$$\varphi(0) \equiv \varphi^0 = ? \tag{4.1}$$

Отметим, что информация о начальном условии  $\varphi^0$  отсутствует. Предположим, что вместо начального условия у нас имеются данные наблюдений о поведении решения на интервале  $(0, \bar{t})$ . Тогда задачу о нахождении начального условия, с помощью ассимиляции данных наблюдений можно сформулировать таким образом. Среди всех возможных, зависящих от произвольного начального условия, найти такое решение (4.1), которое на интервале  $(0, \bar{t})$  минимальным образом отклоняется от данных наблюдений.

С математической точки зрения задачу можно сформулировать, как задачу нахождения условного минимума некоторого целевого функционала, или функции ценности. Эта задача имеет вид:

- среди всех возможных решений (4.1), описываемых множеством  $\Phi$ , найти минимум функционала

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\bar{t}} (\varphi - \bar{\varphi})^2 dt \rightarrow \min,$$

$$\varphi \in \Phi. \tag{4.2}$$

Заметим, что множество  $\Phi$  составлено из решений уравнения (4.1), зависящих от произвольного начального условия.

### 4.3 Метод расщепления, как методологическая основа построения сложных моделей и численного решения прямых и сопряженных задач

Методы расщепления представляют собой некоторое семейство схем численного интегрирования эволюционных дифференциальных задач по времени. Их построение основано на общем подходе, который можно проиллюстрировать на простейших примерах.

**Пример 1.** Метод расщепления по физическим процессам.

Пусть нужно решить следующую задачу

$$\frac{\partial \varphi_{xx}}{\partial t} + \varepsilon_{-1} \varphi_x + \varepsilon_1 \varphi_{xxx} - \varepsilon_0 \varphi_{xx} + \varepsilon_2 \varphi_{xxxx} = 0, \quad (4.3)$$

$$x \in (-\infty, +\infty),$$

$$\varphi = g \quad \text{при } t = 0, \quad (4.4)$$

$$\varepsilon_i = \text{const}, \quad i = -1, \dots, 2.$$

С физической точки зрения задача (4.3) – (4.4) описывает три различных процесса. Первый - это перенос субстанции  $\varphi_{xx}$  вдоль оси  $x$  со скоростью  $\varepsilon_1$ ; второй - волновое распространение  $\varphi$  со скоростью пропорциональной  $\varepsilon_{-1}$  и третий - поглощение и диффузия соответственно с параметрами  $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ .

Если предположить, что в начальный момент времени функция  $g$  в (4.4) представима в виде ряда

$$g = \sum_k g(k) e^{ikx}, \quad k \neq 0, \quad (4.5)$$

то точное решение (4.3) - (4.4) будет иметь вид

$$\varphi = \sum_k g(k) \exp \left\{ i \left[ kx - \left( \varepsilon_1 k + \frac{\varepsilon_{-1}}{k} \right) t \right] - (\varepsilon_0 + \varepsilon_2 k^2) t \right\}. \quad (4.6)$$

Опишем теперь процесс нахождения решения задачи, основанный на методе расщепления. С этой целью рассмотрим временной интервал  $0 < t \leq \tau$  и найдем решение на его правом конце - в точке  $t = \tau$ , учитывая начальное условие (4.4).

В соответствии с физическим смыслом описываемого процесса, объединим перенос сигнала вдоль траектории с его волновым распространением, и нахождение решения задачи представим в виде двух этапов: переноса и диффузии с поглощением.

На первом, - этапе переноса, решим уравнение

$$\frac{\partial \varphi^{(1)}_{xx}}{\partial t} + \varepsilon_{-1} \varphi^{(1)}_x + \varepsilon_1 \varphi^{(1)}_{xxx} = 0 \quad (4.7)$$

с начальным условием (4.4).

На втором, - этапе поглощения - диффузии, решим уравнение

$$\frac{\partial \varphi^{(2)}_{xx}}{\partial t} - \varepsilon_0 \varphi^{(2)}_{xx} + \varepsilon_2 \varphi^{(2)}_{xxxx} = 0 \quad (4.8)$$

В качестве начального условия при этом используем решение, полученное на предыдущем этапе, т.е. положим

$$\varphi^2(0) = \varphi^{(1)}(\tau). \quad (4.9)$$

Решение (4.7) - (4.4) имеет вид

$$\varphi^{(1)} = \sum_k g(k) \exp \left\{ i \left[ kx - \left( \varepsilon_1 k + \frac{\varepsilon_{-1}}{k} \right) t \right] \right\} \quad (4.10)$$

Решение (4.8) дает

$$\varphi^{(2)} = \sum_k C(k) \exp \left\{ ikx - \left( \varepsilon_0 + \varepsilon_2 k^2 \right) t \right\} \quad (4.11)$$

Подчиняя его начальному условию (4.9), найдем значения  $C(k)$ :

$$C(k) = g(k) \exp \left\{ - \left( \varepsilon_1 k + \frac{\varepsilon_{-1}}{k} \right) \tau \right\} \quad (4.12)$$

Тогда решение в точке  $t = \tau$  примет вид

$$\varphi^{(2)} = \sum_k C(k) \exp \left\{ ikx - \left( \varepsilon_0 + \varepsilon_2 k^2 \right) t \right\} \quad (4.13)$$

Видно, что полученное после второго этапа решение задачи совпадает при  $t = \tau$  с точным решением (4.6)! Таким образом, вместо того, чтобы решать полное уравнение, мы расщепили его на два, решили последовательно две задачи и получили решение, совпадающее с точным. В этом и состоит суть метода расщепления.

В данном случае, поскольку разбиение задачи на 2 части выполнено на основе физических соображений, метод называют "расщеплением по физическим процессам". Нетрудно заметить, что расщепленные задачи имеют более простую структуру и решить их проще, чем исходную. Так, например, можно понизить порядок уравнения, решаемого на втором этапе расщепления, если сделать замену

$$\varphi_{xx} = y.$$

**Пример 2.** Расщепление уравнения переноса по координатам.

Пусть требуется решить уравнение переноса некоторой субстанции  $\varphi$  на плоскости, в поле постоянной скорости. Имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \varphi_x + v \varphi_y = 0$$

$$(x, y) \in (-\infty, +\infty) \quad (4.14)$$

$$\varphi = g \equiv xy \quad \text{при } t = 0 \quad (4.15)$$

Решение сформулированной задачи будет

$$\varphi = (x - ut)(y - vt)$$

Найдем решение в момент времени  $t = \tau$  при помощи метода расщепления. В данном случае задачу можно расщепить на две, по координатам  $x$  и  $y$ . Схема расщепления на временном интервале  $0 < t \leq \tau$  приводит к решению двух задач. На первом этапе имеем:

$$\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial t} + u \varphi_x^{(1)} = 0 \quad (4.16)$$

$$\varphi^{(1)} = xy \quad \text{при } t = 0 \quad (4.17)$$

На втором:

$$\frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial t} + u \varphi_y^{(2)} = 0 \quad (4.18)$$

$$\varphi^{(2)} = \varphi^{(1)}(\tau) \quad \text{при } t = 0 \quad (4.19)$$

Общее решение первой задачи (4.16) – (4.17) будет произвольной функцией от  $(x - ut)$

и  $y$ :

$$\varphi^{(1)} = \varphi^{(1)}((x - ut), y).$$

Подчинение его начальному условию дает

$$\varphi^{(1)} = (x - ut)y.$$

Для решения второй задачи (4.18) - (4.19), аналогично получим

$$\varphi^{(2)} = \varphi^{(2)}(x, (y - vt)).$$

После удовлетворения начальному условию имеем

$$\varphi^{(2)}(0) \equiv \varphi^{(2)}(x, y) = (x - u\tau)y$$

и, таким образом, получим в точке  $t = \tau$

$$\varphi^{(2)}(\tau) = (x - u\tau)(y - vt).$$

Как и в предыдущем примере, получаем точное решение задачи.

**Пример 3.** Расщепление уравнения переноса-диффузии по физическим процессам.

Рассмотрим еще один пример иллюстрирующий применение метода расщепления для решения задачи переноса-диффузии пассивной примеси. Пусть требуется решить задачу:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial u \varphi}{\partial x} + \frac{\partial v \varphi}{\partial y} - \mu \Delta \varphi + r \varphi = f \quad (4.20)$$

$$\varphi = g \quad \text{для } t = 0, \quad r \geq 0; \quad \mu \geq 0. \quad (4.21)$$

Предположим для простоты, что решение (4.20) - (4.21) ищется на всей плоскости  $(x, y)$ , и функции  $(u, v)$  удовлетворяют уравнению неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (4.22)$$

Так же как и ранее, можно отметить, что с физической точки зрения задача описывает два разных процесса. Первый – перенос субстанции вдоль траектории

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial u \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial v \varphi_1}{\partial y} = 0, \quad (4.23)$$

$$\varphi_1 = g_1 \text{ для } t = 0. \quad (4.24)$$

Второй – диффузия и поглощение субстанции

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \mu \Delta \varphi_2 + r \varphi_2 = f, \quad (4.25)$$

$$\varphi_2 = g_2 \text{ для } t = 0. \quad (4.26)$$

Указанные процессы являются предельными переходами задачи (4.20) – (4.21). В самом деле, полагая в (4.20) – (4.21)  $\sigma = 0$ ,  $\mu = 0$ , приходим к задаче (4.23) - (4.24), а принимая  $u = 0, v = 0$ , к задаче (4.25) - (4.26).

Свяжем теперь задачи (4.23) - (4.24) и (4.25) - (4.26) в одну, рассматривая их в виде последовательности двух этапов расщепления исходной задачи (4.20) - (4.21). Это можно сделать на основе аддитивности процессов переноса и диффузии. Предполагая, что  $u, v$  постоянны,  $f = 0$ , и что  $g(x, y)$  убывают на бесконечности так быстро, что справедливы следующие представления

$$\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(m, n, t) e^{imx+iny} dm dn, \quad (4.27)$$

$$g = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(m, n) e^{imx+iny} dm dn.$$

Точное решение исходной задачи (4.20) - (4.21) имеет вид

$$\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(m, n) \exp \left\{ im(x - ut) + in(y - vt) - \left[ r + \mu(m^2 + n^2) \right] t \right\} dm dn. \quad (4.28)$$

Перейдем теперь к расщеплению задачи на две. Для этого рассмотрим временной интервал  $0 < t \leq \tau$ , на котором последовательно решим две задачи: сначала (4.23) - (4.24) с начальным условием  $\varphi_1 = g$ , а потом (4.25) - (4.26) – с начальным условием  $\varphi_2 = \varphi_1$ . Для Фурье-компонент решения задачи (4.23) – (4.24) имеем:

$$\Phi_1 = A \exp\{- (imu + in\nu) t\}, \quad (4.29)$$

а для задачи (4.25) – (4.26):

$$\Phi_2(t) = \Phi_1(\tau) \exp\{- [r + \mu(m^2 + n^2)] t\} \quad (4.30)$$

Полагая в (4.29)  $t = \tau$  и подставляя  $\Phi_1(\tau)$  в (4.30) получим

$$\Phi_2(\tau) = A \exp\{- (imu + in\nu)\tau - [r + \mu(m^2 + n^2)] \tau\}, \quad (4.31)$$

откуда

$$\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(m, n) \exp\{im(x - ut) + in(y - vt) - [r + \mu(m^2 + n^2)] t\} dm dn. \quad (4.32)$$

Таким образом, решение, полученное методом расщепления при  $t = \tau$ , тождественно совпадает с решением исходной задачи (4.20) - (4.21).

Рассмотренные в примерах факты могут быть положены в основу метода расщепления. Отметим, что в реальных условиях коэффициенты уравнений, например скорости  $u, v$  не являются постоянными и алгоритм расщепления не дает точного решения при  $t = t_j$ , ( $j = 1, 2, \dots$ ). В этом случае временные интервалы следует брать достаточно малыми, чтобы обеспечить необходимую аппроксимацию при большой изменчивости коэффициентов  $u, v$ .

Отметим некоторые характеристики алгоритма расщепления, как методологии решения больших задач математической физики и построения численных моделей сложных физических процессов.

- Метод расщепления применяется для решения больших задач эволюционного типа – их интегрирования по времени. Метод основан на идее расщепления сложных операторов на более простые и сведения процесса интегрирования исходного уравнения (или исходной системы уравнений) к интегрированию нескольких уравнений (или нескольких систем) более простой структуры.
- Метод расщепления включает поиск целесообразного разбиения оператора полной задачи на составные части – возможного представления сложной исходной системы в виде цепочки простых подсистем. Иногда отдельные системы могут вытекать из исходной в результате некоторых предельных переходов.
- На отдельном этапе расщепления может выбираться индивидуальная схема интегрирования по времени, обладающая заданными свойствами, например, - абсолютно устойчивая по времени. Это расширяет возможности модели, позволяет выбирать эффективную реализацию вычислений, проводить экономичные расчеты на длительные временные интервалы.

- Отдельный модуль может иметь индивидуальную аппроксимацию по пространственным переменным, разного типа и точности. Например, можно комбинировать метод конечных разностей и конечных элементов, использовать схемы высокого порядка точности на некоторых этапах расщепления.
- Программной реализации метода расщепления естественным образом присущ модульный принцип: отдельная задача – отдельный модуль. Это делает модель гибкой, способной к развитию за счет модернизации численных алгоритмов для имеющихся модулей и включения новых модулей, обогащающих описание физического процесса.

Перейдем к рассмотрению некоторых схем из семейства методов расщепления.

### Две основные конструкции метода расщепления.

Пусть требуется решить следующее уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} + A\varphi &= f, \quad t > 0 \\ \varphi &= g, \quad \text{при } t = 0. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Предположим, что  $A$  - матрица, полученная в результате аппроксимации некоторого дифференциального оператора, такая что  $A \geq 0$ . Пусть имеют место представления

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_I, \quad A_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, I, \quad f = f_1 + f_2 + \dots + f_I.$$

Для простоты положим  $I = 2$  и рассмотрим решение задачи на временном интервале  $t_j < t \leq t_{j+1}$ . Можно использовать две формы представления метода расщепления.

**Первая форма метода расщепления.** Разделим указанный временной интервал на две части:

$$t_j < t \leq t_{j+1/2} \quad \text{и} \quad t_{j+1/2} < t \leq t_{j+1}$$

и представим процесс решения задачи в виде двух последовательных шагов (или этапов). На первом шаге на подинтервале  $t_j < t \leq t_{j+1/2}$  решим задачу

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d\varphi_1}{dt} + A_1\varphi_1 &= f_1, \\ \varphi_1 &= \varphi(t_j), \quad \text{при } t = t_j. \end{aligned} \quad (4.34)$$

а на втором, – на подинтервале  $t_{j+1/2} < t \leq t_{j+1}$  – задачу

$$\frac{1}{2} \frac{d\varphi_2}{dt} + A_2\varphi_2 = f_2,$$

$$\varphi_2 = \varphi_1(t_{j+1/2}), \quad \text{при } t = t_{j+1/2}. \quad (4.35)$$

Видно, что первая форма метода расщепления основана на разбиении основного временного интервала  $t_j < t \leq t_{j+1}$  на несколько подинтервалов. Их число, как правило, равно  $I$  – числу частичных операторов  $A_i$  в разложении полного оператора задачи  $A$ . Иногда в литературе в этой связи метод расщепления называют методом дробных шагов. В том случае, когда  $A$  и, соответственно,  $A_i$  – дифференциальные операторы, его называют методом слабой аппроксимации.

### Вторая форма метода расщепления.

На полном интервале  $t_j < t \leq t_{j+1}$  решим две задачи. Первая задача имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d\varphi_1}{dt} + A_1 \varphi_1 &= f_1, \\ \varphi_1 &= \varphi(t_j), \quad \text{при } t = t_j. \end{aligned} \quad (4.36)$$

а вторая – вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d\varphi_2}{dt} + A_2 \varphi_2 &= f_2, \\ \varphi_2 &= \varphi_1(t_{j+1}), \quad \text{при } t = t_j. \end{aligned} \quad (4.37)$$

### Метод расщепления, основанный на неявной аппроксимации.

Пусть требуется решить задачу:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} + A\varphi &= f, \quad 0 < t \leq T \\ \varphi &= g, \quad \text{при } t = 0. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Будем предполагать, что  $A$  – независимая от времени матрица, такая, что  $A \geq 0$ , причем  $A = \sum_{i=1}^I A_i$ ,  $A_i \geq 0$ . Пусть  $\varphi$ ,  $f$ ,  $g$  – векторы соответствующей размерности из гильбертовых пространств  $\Phi$ ,  $F$ ,  $G$ . Нормы векторов определим как  $\|\varphi\| = (\varphi, \varphi)^{1/2}$ ,  $\|f\| = (f, f)^{1/2}$ ,  $\|g\| = (g, g)^{1/2}$ . Далее, где это возможно, подстрочный индекс у норм – опущен. Будем предполагать, что  $g$  и  $f$  – ограничены, т.е.  $\|g\| < M_g$ ,  $\|f\| < M_f$ .

Для решения (4.38) применим схему расщепления с неявной аппроксимацией по времени на каждом этапе. Имеем

$$\frac{\varphi^{j+1/n} - \varphi^j}{\tau} + A_1 \varphi^{j+1/n} = 0,$$

$$\frac{\varphi^{j+1} - \varphi^{j+(n-1)/n}}{\tau} + A_n \varphi^{j+1} = f^j, \quad (4.39)$$

$$j = 0, 1, \dots, T/\tau; \quad \varphi^0 = g.$$

Здесь  $\tau = t_{j+1} - t_j > 0$  - шаг по времени. Рассмотрим вопросы об устойчивости и аппроксимации для неявной схемы расщепления (4.39).

Аппроксимация. Перепишем (4.39) в виде

$$\begin{aligned} (E + \tau A_1) \varphi^{j+1/n} &= \varphi^j, \\ (E + \tau A_n) \varphi^{j+1} &= \varphi^{j+(n-1)/n} + \tau f^j, \\ j = 0, 1, \dots, T/\tau; \quad \varphi^0 &= g. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Исключая значения вектора  $\varphi$  на промежуточных этапах расщепления, т.е.  $\varphi$  с дробными индексами, получим

$$(E + \tau A_1)(E + \tau A_1) \dots (E + \tau A_1) \varphi^{j+1} = \varphi^j + \tau f^j, \quad (4.41)$$

или

$$\frac{\varphi^{j+1} - \varphi^j}{\tau} + A \varphi^{j+1} + \tau [(A_1 A_2 + A_1 A_3 + \dots + A_1 A_n) + (A_2 A_3 + \dots + A_2 A_n) + \dots + A_{n-1} A_n] \varphi^{j+1} + O(\tau^2) = f^j. \quad (4.42)$$

Предполагая, что вектор-функция  $\varphi$  достаточно гладкая и разлагая  $\varphi^j$ ,  $\varphi^{j+1}$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $t_j$ , нетрудно убедиться, что неявная схема расщепления (4.39) аппроксимирует исходное уравнение (4.38) с первым порядком точности по  $\tau$ .

Устойчивость. Из (4.41), с учетом того, что матрицы  $(E + \tau A_i)$  имеют обратные, следует

$$\varphi^{j+1} = (E + \tau A_n)^{-1} \dots (E + \tau A_1)^{-1} [\varphi^j + \tau f^j] \quad (4.43)$$

Умножим обе части уравнения (4.43) скалярно на вектор  $\varphi^{j+1}$ . Получим

$$(\varphi^{j+1}, \varphi^{j+1}) = ((E + \tau A_n)^{-1} \dots (E + \tau A_1)^{-1} (\varphi^j + \tau f^j), \varphi^{j+1}). \quad (4.44)$$

Поскольку  $A_i \geq 0$ ,  $\tau > 0$ , не трудно показать, что  $\|(E + \tau A_i)^{-1}\| \leq 1$ . Отсюда следует, что

$$\|\varphi^{j+1}\|^2 \leq \|\varphi^j\| \cdot \|\varphi^{j+1}\| + \tau \|f^j\| \cdot \|\varphi^{j+1}\|, \quad (4.45)$$

и после сокращения на  $\|\varphi^{j+1}\|$

$$\|\varphi^{j+1}\| \leq \|\varphi^j\| + \tau \|f^j\|. \quad (4.46)$$

Из (4.46) вытекает абсолютная устойчивость неявной схемы расщепления. Более того, с учетом начального условия  $\varphi^0 = g$ , можно получить следующую оценку

$$\|\varphi^{j+1}\| \leq \|g\| + j\tau \max_j \|f^j\| < M_g + TM_f \quad (4.47)$$

### Метод расщепления на основе аппроксимации Кранка-Николсон.

Оставаясь в рамках сделанных предположений, рассмотрим для решения задачи (4.38) схему расщепления на основе аппроксимации Кранка-Николсон. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\varphi^{j+1/n} - \varphi^j}{\tau} + A_1 \frac{\varphi^j + \varphi^{j+1/n}}{2} &= f_1, \\ \frac{\varphi^{j+1} - \varphi^{j+(n-1)/n}}{\tau} + A_n \frac{\varphi^{j+(n-1)/n} + \varphi^{j+1}}{2} &= f_n, \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$j = 0, 1, \dots, T/\tau; \quad \varphi^0 = g.$$

Здесь  $f_i = B_i f$ , сумма матриц  $B_i$  аппроксимирует единичную матрицу  $E$ . Рассмотрим вопрос устойчивости и аппроксимации для схемы (4.48). Для простоты, рассмотрение вопросов аппроксимации и устойчивости проведем для случая  $n = 2$ .

Аппроксимация. Из (4.48) имеем

$$\begin{aligned} (E + \frac{\tau}{2} A_1) \varphi^{j+1/2} &= (E - \frac{\tau}{2} A_1) \varphi^j + \mathcal{F}_1 \\ (E + \frac{\tau}{2} A_2) \varphi^{j+1} &= (E - \frac{\tau}{2} A_2) \varphi^{j+1/2} + \mathcal{F}_2 \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$j = 0, 1, \dots, T/\tau; \quad \varphi^0 = g.$$

Как и ранее, преобразуем (4.49), исключая значения  $\varphi$  на промежуточном шаге  $(j + \frac{1}{2})$ . Получим

$$(E + \frac{\tau}{2} A_2) \varphi^{j+1} = (E - \frac{\tau}{2} A_2) (E + \frac{\tau}{2} A_1)^{-1} (E - \frac{\tau}{2} A_1) \varphi^j + \tau (E - \frac{\tau}{2} A_2) (E + \frac{\tau}{2} A_1)^{-1} f_1 + \mathcal{F}_2. \quad (4.50)$$

Рассмотрим 2 случая. Во-первых, предположим, что матрицы  $A_1, A_2$  - перестановочны, т.е.  $A_1 A_2 = A_2 A_1$ . Тогда будут перестановочны и их обратные и их линейные комбинации. Поэтому из (4.50) имеем

$$(E + \frac{\tau}{2} A_1) (E + \frac{\tau}{2} A_2) \varphi^{j+1} = (E - \frac{\tau}{2} A_2) (E - \frac{\tau}{2} A_1) \varphi^j + \tau (E - \frac{\tau}{2} A_2) f_1 + \tau (E + \frac{\tau}{2} A_1) f_2. \quad (4.51)$$

Отсюда следует

$$(E + \frac{\tau^2}{4} A_1 A_2) \frac{\varphi^{j+1} - \varphi^j}{\tau} + A \frac{\varphi^{j+1} + \varphi^j}{2} = (E - \frac{\tau}{2} A_2) f_1 + (E + \frac{\tau}{2} A_1) f_2 \quad (4.52)$$

Вспомним, что  $f_i = B_i f$ , а матрица  $B_1 + B_2$  аппроксимирует единичную матрицу  $E$ .

Тогда выбрав, например,  $B_1 = 0$ ,  $B_2 = (E + \frac{\tau}{2} A_1)^{-1}$ , получим, что схема (4.51) аппроксимирует исходную задачу со вторым порядком точности по  $\tau$ .

Откажемся теперь от предположения о перестановочности матриц. В этом случае для оценки точности метода расщепления на основе схемы Кранка-Николсон нам придется предположить, что выполняется следующее соотношение

$$\frac{\tau}{2} \|A_1\| < 1.$$

При этом для матрицы  $(E + \frac{\tau}{2} A_1)^{-1}$  имеет место разложение

$$(E + \frac{\tau}{2} A_1)^{-1} = E - \frac{\tau}{2} A_1 + \frac{\tau^2}{4} A_1^2 + O(\tau^3) \quad (4.53)$$

Подставляя (4.53) в (4.50), имеем

$$\begin{aligned} (E + \frac{\tau}{2} A_2) \varphi^{j+1} &= (E - \frac{\tau}{2} A_2) (E - \frac{\tau}{2} A_1 + \frac{\tau^2}{4} A_1^2 + O(\tau^3)) (E - \frac{\tau}{2} A_1) \varphi^j + \\ &+ \tau (E - \frac{\tau}{2} A_2) (E - \frac{\tau}{2} A_1 + \frac{\tau^2}{4} A_1^2 + O(\tau^3)) f_1 + \mathcal{F}_2. \end{aligned} \quad (4.54)$$

После преобразований получим

$$\frac{\varphi^{j+1} - \varphi^j}{\tau} + A \frac{\varphi^{j+1} + \varphi^j}{2} = (E - \frac{\tau}{2} A) f_1 + f_2 + \frac{\tau}{2} A_1 \frac{\varphi^{j+1} - \varphi^j}{\tau} + \frac{\tau}{2} (A_1^2 + A_2 A_1) \varphi^j + O(\tau^2) \quad (4.55)$$

Отсюда видно, что схема аппроксимирует исходное уравнение с первым порядком точности по  $\tau$ . Представление правой части выбрать довольно просто: например, можно

положить  $B_1 = B_2 = \frac{1}{2} E$ .

**Устойчивость.** Устойчивость схемы (4.48) можно доказать аналогично тому, как это было сделано для неявной схемы расщепления. Исключая значения вектора  $\varphi$  на промежуточных этапах расщепления, ( $\varphi$  с дробным индексом), получим

$$\varphi^{j+1} = (E + \tau A_2)^{-1} \left\{ (E - \tau A_2) \left[ (E + \tau A_1)^{-1} (E - \tau A_1) \varphi^j + \mathcal{F}_1 \right] + \mathcal{F}_2 \right\}. \quad (4.56)$$

Отсюда следует неравенство:

$$\begin{aligned} \|\varphi^{j+1}\| &= \|(E + \tau A_2)^{-1}(E - \tau A_2)\| \cdot \|(E + \tau A_1)^{-1}(E - \tau A_1)\| \cdot \|\varphi^j\| \\ &+ \tau \left\{ \|(E + \tau A_2)^{-1}(E - \tau A_2)\| \cdot \|f_1\| + \|(E + \tau A_2)^{-1}\| \cdot \|f_2\| \right\} \end{aligned} \quad (4.57)$$

Откуда следует

$$\|\varphi^{j+1}\| \leq \|\varphi^j\| + \tau(\|f_1\| + \|f_2\|) \quad (4.58)$$

Из (4.58) вытекает абсолютная устойчивость схемы расщепления на основе аппроксимации Кранка-Николсон.

### Метод двуциклического расщепления.

Метод расщепления на основе аппроксимации Кранка--Николсон в случае некоммутирующих матриц имеет 1-й порядок точности. Рассмотрим теперь для решения задачи (4.38) метод двуциклического расщепления, который имеет более высокий порядок точности. Для простоты предположим, что  $A = A_1 + A_2$ ,  $f = 0$ . Запишем следующую схему двуциклического расщепления (4.59):

$$\begin{aligned} \frac{\varphi^{j+1/4} - \varphi^j}{\tau} + \frac{1}{2} A_1 \frac{\varphi^{j+1/4} + \varphi^j}{2} &= 0, \\ \frac{\varphi^{j+2/4} - \varphi^{j+1/4}}{\tau} + \frac{1}{2} A_2 \frac{\varphi^{j+3/4} + \varphi^{j+1/4}}{2} &= 0, \\ \frac{\varphi^{j+3/4} - \varphi^{j+2/4}}{\tau} + \frac{1}{2} A_2 \frac{\varphi^{j+3/4} + \varphi^{j+2/4}}{2} &= 0, \\ \frac{\varphi^{j+1} - \varphi^{j+3/4}}{\tau} + \frac{1}{2} A_1 \frac{\varphi^{j+1} + \varphi^{j+3/4}}{2} &= 0, \\ j = 0, 1, \dots, T/\tau; \quad \varphi^0 &= g. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Аппроксимация. Исключая из (4.59) промежуточные значения искомого решения, получим

$$\left(E - \frac{\tau}{4} A_2\right)^{-1} \left(E + \frac{\tau}{4} A_2\right) \left(E - \frac{\tau}{4} A_1\right)^{-1} \left(E + \frac{\tau}{4} A_1\right) \varphi^{j+1} = \left(E + \frac{\tau}{4} A_2\right)^{-1} \left(E - \frac{\tau}{4} A_2\right) \left(E + \frac{\tau}{4} A_1\right)^{-1} \left(E - \frac{\tau}{4} A_1\right) \varphi^j \quad (4.60)$$

Отсюда, предполагая выполнение неравенств

$$\frac{\tau}{4} \|A_i\| < 1, \quad i = 1, 2 \quad (4.61)$$

и представляя в виде рядов,

$$\left(E - \frac{\tau}{4} A_i\right)^{-1} = E + \frac{\tau}{4} A_i + \frac{\tau^2}{16} A_i^2 + O(\tau^3)$$

$$(E + \frac{\tau}{4} A_i)^{-1} = E - \frac{\tau}{4} A_i + \frac{\tau^2}{16} A_i^2 + O(\tau^3) \quad (4.62)$$

Получим

$$\frac{\varphi^{j+1} - \varphi^j}{\tau} + A \frac{\varphi^{j+1} + \varphi^j}{2} + \frac{\tau^2}{8} A^2 \frac{\varphi^{j+1} - \varphi^j}{\tau} + O(\tau^2) \quad (4.63)$$

Отсюда видно, что метод расщепления на основе аппроксимации Кранка—Николсон аппроксимирует решение исходной задачи (4.38) со вторым порядком точности.

Устойчивость. Абсолютную устойчивость схемы (4.59) нетрудно получить из уравнения (4.60), разрешенного относительно  $\varphi^{j+1}$  и леммы Келлога.

#### 4.4 Метод сопряженных уравнений для решения и анализа прямых и обратных задач геофизической гидродинамики

Рассмотрим приложение метода сопряженных уравнений к решению типичных вариационных задач, возникающих в геофизической гидродинамике. В качестве таких задач мы выделим следующие две:

- задачу апостериорного анализа решения, основанную на оценке функционалов от решения матричных (алгебраических) и линейных дифференциальных уравнений
- задачу ассимиляции данных наблюдений, которая состоит в управлении решением поставленной задачи: восстановлением начального условия и правой части.

Первая задача будет проиллюстрирована достаточно кратко. Второй задаче мы уделим большее внимание, изложив способы ее формулировки и решения на основе вариационных методов типа множителей Лагранжа. Прежде всего, рассмотрим несколько задач по оценке функционала от решения и усвоения данных наблюдений на конкретных примерах.

**Пример 1.** Метод оценки функционала от решения, основанный на теории сопряженных уравнений.

Рассмотрим следующую задачу

$$A \varphi(x) = f(x), \quad (4.64)$$

где  $A$  – линейный оператор,  $\varphi(x)$  – принадлежит множеству функций  $D(A)$  с областью определения  $\Omega \in R^n$ ,  $n \geq 1$ . В задаче (4.64), в частном случае, оператор  $A$  может быть матрицей, а  $\varphi(x)$ ,  $f(x)$  – векторами. В том случае, если задача (4.64) – дифференциальная будем предполагать, что она рассматривается в гильбертовом пространстве  $H$ , а функции

$\varphi(x), f(x)$  являются квадратично суммируемыми. Под скалярным произведением, как обычно, будем понимать следующее выражение

$$(g, h) = \int_{\Omega} g(x)h(x)dx (g, h) . \quad (4.65)$$

Наряду с оператором  $A$  введем сопряженный к нему оператор  $A^*$ , определяемый тождеством Лагранжа

$$(Ag, h) = (h, A^* g), \quad (4.66)$$

где  $g$  и  $h$  – произвольные функции, принадлежащие соответственно множествам  $D(A)$  и  $D(A^*)$ .

Предположим теперь, что мы интересуемся не самим решением задачи  $\varphi(x)$ , а некоторой "информацией" о нем – одним или несколькими линейными функционалами

$$J_p[\varphi] = (p, \varphi) \equiv \int_{\Omega} p(x)\varphi(x)dx \quad (4.67)$$

Другими словами, вместо непрерывного распределения – функции, заданной в каждой точке ее области определения  $\Omega$ , нам нужно лишь одно число – значение функционала  $J_p$ .

Как решить поставленную задачу? Для этого можно использовать два метода: прямой и метод, основанный на решении сопряженной задачи.

Прямой метод. Решаем уравнение

$$A\varphi(x) = f(x), \quad (4.68)$$

Подсчитываем значение функционала

$$J_p[\varphi] = \int_{\Omega} p(x)\varphi(x)dx . \quad (4.69)$$

Метод сопряженных уравнений. Решаем сопряженное уравнение

$$A^* \varphi_p^*(x) = p(x). \quad (4.70)$$

Подсчитываем значение функционала

$$J_p^1[\varphi] = (\varphi_p^*, f) \equiv \int_{\Omega} \varphi_p^*(x)f(x)dx \quad (4.71)$$

Покажем, что  $J_p^1[\varphi] = J_p(\varphi_p^*, f)$ , то есть обоснуем второй метод решения поставленной задачи. Для этого вместе с прямым уравнением

$$A\varphi(x) = f(x),$$

рассмотрим сопряженное уравнение

$$A^* \varphi_p^*(x) = p(x).$$

Тогда

$$(\varphi_p^*, f) = (\varphi_p^*, A\varphi) = (A^* \varphi_p^*, \varphi) = (p, \varphi) = (\varphi, p),$$

что и требовалось доказать.

Предположим теперь, что наша задача состоит в оценке значений функционала  $J_p[\varphi]$  при различных правых частях  $f_1, f_2, f_3, \dots$  и т.д. В этом случае при использовании прямого метода расчета мы для каждой правой части должны решить прямое уравнение (4.68) и затем подсчитать значение функционала согласно (4.69). Если же использовать второй метод оценки функционала, основанный на решении сопряженного уравнения, то уравнение (4.70) следует решить только один раз, а затем лишь рассчитывать значение функционала. Видно, что метод сопряженных уравнений в данном случае приводит к большому выигрышу.

**Пример 2.** Краевая задача с пограничным слоем. Функция ценности информации или функция чувствительности.

Рассмотрим краевую задачу с пограничным слоем:

$$-\varepsilon\varphi'' - \varphi' = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (4.72)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = 1. \quad (4.73)$$

Предположим, что нам нужно оценить величину площади под кривой решения задачи (4.72)-(4.73) в зависимости от вариации правой части в точках интервала ее определения  $0 < x < 1$ . Выявить наличие точки, изменение в которой величины правой части вызывает максимальное изменение функционала. Итак, нам нужно оценить величину функционала  $J_p$  от решения (4.72)-(4.73) следующего вида:

$$J_p[\varphi] = \int_{\Omega} p(x)\varphi(x)dx, \quad p(x) = 1. \quad (4.74)$$

Для этой оценки воспользуемся второй формулой, вытекающей из тождества Лагранжа

$$J_p = (f, \varphi^*). \quad (4.75)$$

Здесь  $\varphi^*$  - является решением следующей сопряженной к (4.72)-(4.73) задачи:

$$-\varepsilon\varphi^{*''} + \varphi^{*'} = 1, \quad 0 < x < 1, \quad (4.76)$$

$$\varphi^* = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = 1. \quad (4.77)$$

Решением (4.76)-(4.77) будет:

$$\varphi^* \left[ x + \frac{e^{x/\varepsilon} - 1}{e^{1/\varepsilon} - 1} \right]. \quad (4.78)$$

Рассмотрим теперь значение  $J_p$  при изменении правой части исходного уравнения (4.72) предполагая, что в точке  $x_0$  помещен "источник единичной мощности". То есть правая часть имеет вид

$$f(x) = \delta(x - x_0). \quad (4.79)$$

Тогда для значения функционала  $J_p$  получим

$$J_p = (\delta(x - x_0), \varphi^*) \equiv \varphi^*(x_0). \quad (4.80)$$

Из этого выражения для  $J_p$  виден "физический смысл" решения сопряженной задачи.

Значение сопряженной функции в точке  $x_0$  дает оценку вклада этой точки в возможное изменение исследуемого функционала. Поэтому функцию  $\varphi^*$  называют "ценностью информации" или "функцией чувствительности" по отношению к заданному функционалу. Заметим, что в сопряженной задаче (4.76) - (4.77) правая часть  $p(x)$  равна весовой функции, стоящей в исследуемом функционале  $J_p$ .

Подставляя в (4.80) выражение для решения сопряженной задачи из (4.78), можно найти точку  $x_p$ , в которой значение  $J_p$  достигает максимума – т.е. точку, изменение в которой правой части прямой задачи  $f$  приведет к наибольшему изменению функционала  $J_p$ .

Имеем

$$x_p = \varepsilon[\ln \varepsilon + \ln(\varepsilon^{1/\varepsilon} - 1)], \quad (4.81)$$

или, приближенно, при  $\varepsilon \ll 1$

$$x_p \sim 1 + \varepsilon \ln \varepsilon. \quad (4.82)$$

Из (4.82) видно, что зона максимальной чувствительности  $J_p$  к вариациям правой части лежит в окрестности точки  $x=1$ . Вспомним, что если в прямой задаче положить  $f(x)=const$ , то ее решение имеет пограничный слой шириной  $\delta$ ,  $\delta \sim \varepsilon \ln \varepsilon^{-1}$ , который расположен на противоположном(!) конце интервала  $0 < x < 1$ , в окрестности точки  $x=0$ .

Метод сопряжённых уравнений. Пусть мы имеем задачу  $Lu=q$ , в  $D$ .  $L$  – линейный оператор,  $u$  – решение. Предположим, мы интересуемся не самим решением  $u$ , а некоторой "информацией" о нём – функционалом или несколькими функционалами

$$J_p[u] = (u, p) \equiv \int_D up dD$$

Замечание. Вместо непрерывного решения (т.е. функции  $u$  заданной в каждой точке  $D$ ), нам нужен лишь ряд чисел (значения функционалов).

Замечание. Что такое здесь функция  $p$  и каков смысл функционала  $J_p$  – ? Один из примеров:  $p$  – некая характеристическая функция (или весовая) области  $D$ . Тогда смысл

функционала - интеграл ( суммарное значение) решения в выделенной подобласти  $D' \subset D$ , где  $p|_{D'} \equiv 1$ , а  $p|_{D \setminus D'} \equiv 0$ .

Наряду с оценкой чувствительности решения (точнее, функционала от решения) по отношению к изменению правой части и начальных условий, можно сформулировать и задачу оценки отклонения функционала решения  $J$  по отношению к малым изменениям (возмущению) оператора:

$$L \rightarrow L + dL.$$

Имеем

$$dJ = \int u_p^* dL u' dD \quad (4.83)$$

Изучение чувствительности решения (функционала от решения) к изменению правой части. Имеем

$$\begin{cases} Lu = f, & \text{в } D_i \\ f \in H : \{f_1, f_2, \dots, f_I\} \\ J_p[u_i] = ? \\ i = 1, \dots, I \end{cases}$$

Решение.

$$L^* u_p^* = p, \quad J_p[u_i] = (u_p^*, f_i), \quad i = \overline{1, I}$$

Смысл этой задачи состоит в том, что мы находим функцию ценности  $u_p^*$  - вклад каждой точки области  $D$  в значение функционала, если известна функция характеристики подобласти  $p$ . Задавая

$$p = \begin{cases} 1 & \text{в } D' \\ 0 & \text{в } D \setminus D' \end{cases}$$

находим  $u_p^*(D)$  - как долю вклада отдельной точки  $D$  на заданном промежутке времени

$$T \rightarrow J_p = \int_0^T \int_D (u_p^*, f_i) dD dt. \text{ Докажем равенство (4.83). Имеем } L' = L + \delta L,$$

при этом изменится решение  $u$  и значение функционала  $J_p[u]$ :

$$u(x) \rightarrow u'(x), \quad J_p[u] \rightarrow J'_p = J_p + \delta J_p$$

Установим связь между изменением оператора  $\delta L$  и изменением функционала  $\delta J_p$ .

Возмущённая система описывается уравнением

$$L'u' \equiv (L + \delta L)u' = q | u_p^* \quad (4.84)$$

Сопряжённая функция невозмущённой системы, соответствующая функционалу  $\delta J_p$  описывается уравнением

$$L^* u_p^* = p | u' \quad (4.85)$$

Умножим скалярно (4.84) на  $u_p^*$ , (4.85) на  $u'$  и вычтем одно из другого, получим слева  $(u_p^*, L'u') - (u', L^* u_p^*) = (u_p^*, \delta L u')$ , а справа

$$(u_p^*, q) - (u', p) = J_p[u] - J_p[u'] = -\delta J_p$$

$$(u_p^*, q) = (u, p) \equiv J_p[u]$$

$$\delta J_p = -(u_p^*, \delta L u') \quad (4.86)$$

То есть если вместо (4.84), (4.85) рассмотреть возмущённое сопряженное уравнение  $(L^* + \delta L^*) u_p^* = p$  и невозмущённое – основное уравнение, то можно получить  $\delta J_p = -(u, \delta L^* u_p^*)$ , это эквивалентно (4.86). Что и требовалось доказать.

### Классический метод минимизации функционала.

Пусть  $J(x)$  дифференцируемый во всех точках  $x$  пространства  $E^n$  функционал. Тогда точками экстремума  $J(x)$  на  $E^n$  могут быть лишь те точки  $\bar{x}$ , в которых  $J'(x)=0$ , или точки, где

$$\frac{\partial J}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Все такие точки называются стационарными. После нахождения стационарных точек можно выбрать точки минимума и максимума. (Для этого нужно исследовать  $J''$ ). Исследование  $J''$  сводится к определённости квадратичной формы

$$\langle J''(\bar{x})h, h \rangle > 0 \quad \forall h \neq 0 \rightarrow \min$$

$$\langle J''(\bar{x})h, h \rangle < 0 \quad \forall h \neq 0 \rightarrow \max$$

Пример. Пусть в  $E^n$  даны  $m$  точек  $u_i = (u_i^1, \dots, u_i^m)$ ,  $i = \overline{1, m}$  и требуется найти точку  $u \in E^n$ , сумма квадратов расстояния от которой до этих точек минимальна. То есть минимизировать функционал

$$J(u) = \sum_{i=1}^m |u - u_i|^2 \quad \text{на } E^n.$$

Задача на безусловный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Пусть требуется найти экстремум  $J(u) \rightarrow \min$  при ограничениях

$$g_1(u) = 0, \dots, g_s(u) = 0 \quad (4.87)$$

предполагают, что  $J(u)$ ,  $g_i(u)$  определены и имеют непрерывные частные производные 1-го порядка на всём пространстве  $E^n$ . Введём функцию Лагранжа

$$L(u, \bar{\lambda}) = \lambda_0 J(u) + \sum_{j=1}^s \lambda_j g_j(u)$$

переменных  $(u^1, \dots, u^n, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_s) \equiv (u, \bar{\lambda}) \in E^{n+s+1}$ .

**Теорема 1.** Пусть  $u_*$  - точка локального экстремума  $J(u)$  на множестве  $U$ , задаваемом ограничениями (4.87). Пусть функции  $J(u), g_1(u), \dots, g_s(u)$  непрерывно дифференцируемы в окрестности точки  $u_*$ . Тогда необходимо существуют числа,  $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_s) \equiv \bar{\lambda}^* \neq 0$ , называемые множителями Лагранжа, такие, что

$$\frac{\partial L(u, \bar{\lambda}^*)}{\partial u_i} \Big|_{u=u_*} \equiv \lambda_0^* \frac{\partial J(u_*)}{\partial u^i} + \sum_{j=1}^s \lambda_j^* \frac{\partial g_j(u_*)}{\partial u^i} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.88)$$

Таким образом, уравнения

$$g_i(u) = 0, \quad i = \overline{1, s}$$

$$\frac{\partial L(u, \bar{\lambda}^*)}{\partial u_i} = 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (4.89)$$

дают необходимые условия существования экстремума  $J(u)$ . Решение (4.89) - дает точки, подозрительные на экстремум. Она является системой для нахождения вектора  $(u^1, \dots, u^n, \lambda_0, \dots, \lambda_s)$  размерности  $(s+n+1)$ . Если система (4.89) имеет решения такие, что  $\lambda_0 \neq 0$ , то задача минимизации называется регулярной в точке  $u^*$ . В этом случае можно положить  $\lambda_0 = 1$ .

Нетрудно видеть, что для регулярной задачи в точке  $u^*$ , достаточно чтобы векторы  $g'_1(u^*), \dots, g'_s(u^*)$  были линейно независимы, то есть, чтобы равенство  $\alpha_1 g'_1(u^*) + \dots + \alpha_s g'_s(u^*) = 0$  было возможно только при  $\alpha_1 = \dots = \alpha_s = 0$ .

**Теорема 2.** Пусть:

1) функции  $J(u), g_1(u), \dots, g_s(u)$  дважды дифференцируемы в точке

$$u^* \in U = \{u \in E^n : g_i(u) = 0, \quad i = \overline{1, s}\};$$

2) точка  $(u^*, \bar{\lambda})$  удовлетворяет условиям (4.89),

3) квадратичная форма  $\langle L_{uu}(u^*, \bar{\lambda})h, h \rangle > 0 [ < 0 ]$ , при  $\forall h$ , для которых  $\langle J'(u^*), h \rangle \leq 0 [ \geq 0 ]$ ,  $\langle g'_i(u^*), h \rangle = 0$ ,  $i = \overline{1, s}$  и  $u \neq 0$ . (4.90)

Тогда в точке  $u^*$   $J(u)$  на  $U$  имеет строгий локальный минимум (максимум).

Пример. На  $n$ -мерной единичной сфере  $U = \{u \in E^n : |u|^2 \equiv \langle u, u \rangle = 1\}$  найти точку, сумма квадратов расстояний от которой до  $m$  заданных точек  $u_1, \dots, u_m \in E^n$  – была бы минимальной.

$$\begin{cases} J(u) = \sum_{i=1}^m (u - u_i)^2 \rightarrow \min \\ \langle u, u \rangle = 1 \end{cases}$$

#### 4.5 Численное решение уравнений мелкой воды

Данный параграф является примером постановки и решения задачи геофизической гидродинамики в рамках дипломной студенческой работы.

Уравнения мелкой воды – это система гиперболических дифференциальных уравнений в частных производных, которая описывает динамику жидкости в мелком водоёме. Система получается путём интегрирования по глубине 3-х мерных уравнений крупномасштабной динамики океана при условии, что горизонтальный масштаб много больше вертикального.

Рассматриваемая в модели система уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{r_x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{r_y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - \tilde{l} \cdot v &= -\frac{g}{r_x} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} - R_b \cdot u + \Lambda \cdot u + f_1 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{r_x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v}{r_y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \tilde{l} \cdot u &= -\frac{g}{r_x} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial y} - R_b \cdot v + \Lambda \cdot v + f_2 \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{1}{r_x r_y} \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial x} (H - \zeta) \cdot r_y \cdot u + \frac{\partial}{\partial y} (H - \zeta) \cdot r_x \cdot v \right] &= 0 \end{aligned}$$

(4.91)

В системе уравнений (4.91) используются следующие обозначения:

$x$  - долгота,  $y$  – широта, отсчитываемая от южного полюса в случае обычной сферической системы;

$$\tilde{l} = l + \frac{1}{r_x r_y} \cdot \left[ \frac{\partial r_y}{\partial x} \cdot v - \frac{\partial r_x}{\partial y} \cdot u \right], \text{ где } l = -2 \cdot \Omega_0 \cdot \cos y \text{ - параметр Кориолиса, } \Omega_0 \text{ - угловая}$$

скорость вращения Земли;

$r_x = R \cdot \sin y$ ,  $r_y = R$ ,  $R$  – средний радиус Земли,  $g$  – ускорение силы тяжести;

$R_b$  - функция придонного трения;

$f_1, f_2$  - атмосферное воздействие (ветер + давление);

Оператор турбулентного обмена  $\Lambda$  имеет вид:

$$\Lambda \approx \frac{1}{r_x r_y H_0} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{r_y}{r_x} \mu H \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{r_x}{r_y} \mu H \frac{\partial}{\partial y} \right) \right], H_0 = const$$

В случае системы координат со сдвинутыми полюсами выражения для параметра Кориолиса и метрических коэффициентов соответствующим образом преобразуются. [4]

Граничные условия для системы уравнений (1) на береговом контуре имеют следующий вид:

$$\vec{U} = (u, v), \quad \vec{U}_n = 0, \quad \frac{\partial \vec{U}_\tau}{\partial n} = 0 \quad (4.92)$$

а  $n_\Sigma$  - внешняя нормаль к поверхности границы. Т.о., необходимо найти вектор скорости и значение уровня в заданной точке в некоторый момент времени при условии граничных значений (4.93).

Исходная система уравнений (4.91) решается разрывным/непрерывным методом Галёркина. Метод показывает хорошие результаты как по скорости сходимости к точному решению, так и по устойчивости. Этот метод является модернизацией обычного метода Галёркина, с той лишь разницей, что в качестве базисных пространств предложены конкретные функциональные пространства. P1 – это линейные на треугольниках функции, а P2 – квадратичные. В коде используются непрерывные кусочно-квадратичные элементы для уровня  $\xi$ , и разрывные кусочно-линейные элементы для вектора скорости ( $\vec{u}$ ). Далее применяется метод Галёркина.

Пара элементов, выбранных таким образом, обладает геострофически сбалансированными состояниями, которые точно удовлетворяют граничным условиям, обладая нулевой дискретной дивергенцией и, следовательно, устойчивыми состояниями для дискретных уравнений. Это означает, что выбранная пара элементов хорошо описывает свойство геострофического баланса. Стоит также отметить, что применяя данный метод для «невращающейся» системы линейных уравнений мелкой воды, мы не получаем никаких неправильных малых собственных значений. Это связано с тем, что функция уровня обладает вторым порядком аппроксимации, что на один порядок больше, чем аппроксимация скорости.

Система (4.1) расщепляется на три этапа по физическим процессам. Расщепление по физическим процессам в задачах гидродинамики базируется на методе слабой аппроксимации и обосновании аддитивности этих процессов при достаточно малых шагах по времени.

Схема расщепления имеет вид:

Первый этап расщепления:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u^j}{r_x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v^j}{r_y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} &= \Lambda u \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u^j}{r_x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v^j}{r_y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} &= \Lambda v\end{aligned}\tag{4.3}$$

Второй этап расщепления:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{r_x r_y} \cdot \left[ \frac{\partial r_y}{\partial x} \cdot v^j - \frac{\partial r_x}{\partial y} \cdot u^j \right] \cdot u &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{r_x r_y} \cdot \left[ \frac{\partial r_y}{\partial x} \cdot v^j - \frac{\partial r_x}{\partial y} \cdot u^j \right] \cdot v &= 0\end{aligned}\tag{4.4}$$

Третий этап расщепления:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - l \cdot v &= -\frac{g}{r_x} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} - R_b \cdot u + f_1 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + l \cdot u &= -\frac{g}{r_y} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial y} - R_b \cdot v + f_2\end{aligned}\tag{4.5}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{1}{r_x r_y} \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial x} (H - \zeta)^j \cdot r_y \cdot u + \frac{\partial}{\partial y} (H - \zeta)^j \cdot r_x \cdot v \right] = 0$$

При решении уравнений на этапах расщепления 1-3 применяются неявные схемы по времени.

**Тестовые расчеты.** Одной из проверок любого алгоритма, является его тестирование на точных решениях дифференциальных задач. Применительно к нашей системе, такой проверкой может быть решение задачи Пуанкаре. Сформулируем и решим аналитически эту задачу.

*Задача Пуанкаре:* Дан периодический двумерный канал, длины  $L$  и ширины  $D$ . Параметр Кориолиса  $l$  и глубину  $H$  мы считаем известными и постоянными. Требуется найти уровень  $\zeta$ , скорости  $u$  и  $v$  в канале в произвольный момент времени  $t$ , с учётом заданных граничных и начальных условий.

Решение:



Рис 47. Схематический рисунок к задаче Пуанкаре.

Запишем систему уравнений мелкой воды в линейном приближении:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - l \cdot v &= g \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + l \cdot u &= g \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial y} \end{aligned}, \quad l = \text{const}, \quad H = \text{const}, \quad v(0) = v(D) = 0 \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial(H \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(H \cdot v)}{\partial y}$$

Решение системы уравнений (4.6) будем искать в виде:

$$\begin{aligned} u &= u(y) \cdot e^{i(\omega t - kx)} \\ v &= v(y) \cdot e^{i(\omega t - kx)} \\ \zeta &= \zeta(y) \cdot e^{i(\omega t - kx)} \end{aligned} \quad (4.7)$$

После подстановки (4.7) в (4.6) получим:

$$i\omega \cdot u(y) - l \cdot v(y) = g \cdot \zeta(y) \cdot (-ik), \quad (4.8)$$

$$i\omega \cdot v(y) + l \cdot u(y) = g \cdot \frac{\partial \zeta(y)}{\partial y}, \quad (4.9)$$

$$i\omega \cdot \zeta(y) = H \cdot u(y) \cdot (-ik) + H \cdot \frac{\partial v(y)}{\partial y}, \quad (4.10)$$

Выражая из (4.8) величину  $\zeta(y)$ , получим:

$$\zeta(y) = \frac{i}{gk} \cdot [i\omega \cdot u(y) - l \cdot v(y)], \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial \zeta(y)}{\partial y} = \frac{i}{gk} \cdot \left[ i\omega \cdot \frac{\partial u(y)}{\partial y} - l \cdot \frac{\partial v(y)}{\partial y} \right], \quad (4.12)$$

Подставляя полученные выражения в (4.9) и (4.10) получим:

$$i\omega \cdot v(y) + l \cdot u(y) = \frac{i}{k} \cdot \left[ i\omega \frac{\partial u(y)}{\partial y} - l \frac{\partial v(y)}{\partial y} \right], \quad (4.13)$$

$$-\frac{\omega}{gk} \cdot [i\omega \cdot u(y) - l \cdot v(y)] = -ikH \cdot u(y) + H \cdot \frac{\partial v(y)}{\partial y}, \quad (4.14)$$

Выражая из (4.14)  $u(y)$  получим:

$$u(y) = \frac{gk}{i(gHk^2 - \omega^2)} \cdot \left[ H \cdot \frac{\partial v(y)}{\partial y} - \frac{l\omega}{gk} \cdot v(y) \right], \quad (4.15)$$

Подставляя теперь (4.15) в (4.13) и преобразуя выражение, придём к следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2 v(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{Hg} \cdot v(y) \cdot [\omega^2 - (l^2 + gHk^2)] = 0, \quad (4.16)$$

Это дифференциальное уравнение имеет известное решение:

$$v(y) = A \cdot \cos(\Omega \cdot y) + B \cdot \sin(\Omega \cdot y), \text{ где } \Omega^2 = \frac{\omega^2 - (l^2 + gHk^2)}{Hg}$$

Используя граничные условия, придём к следующему равенству:

$$\Omega = \frac{\pi \cdot m}{D}, m \in Z$$

Теперь, можно найти выражения для  $u(y)$  и  $\zeta(y)$ , а потом и для  $u$  и  $\zeta$ :

$$\begin{aligned} u &= \frac{gkB}{i(gHk^2 - \omega^2)} \cdot \left[ H\Omega \cdot \cos(\Omega \cdot y) - \frac{l \cdot \omega}{gk} \cdot \sin(\Omega \cdot y) \right] \cdot e^{i(\omega t - kx)} \\ v &= B \cdot \sin(\Omega \cdot y) \cdot e^{i(\omega t - kx)} \\ \zeta &= \frac{iB}{gk} \cdot \left\{ \frac{gk\omega}{gHk^2 - \omega^2} \cdot \left[ H\Omega \cdot \cos(\Omega \cdot y) - \frac{l \cdot \omega}{gk} \cdot \sin(\Omega \cdot y) \right] - l \cdot \sin(\Omega \cdot y) \right\} \cdot e^{i(\omega t - kx)} \end{aligned} \quad (4.17)$$

В тестовом примере использованы следующие функции скоростей и уровня:

$$\begin{aligned} u_{\text{частн}} &= \frac{gkB}{gHk^2 - \omega^2} \cdot \left[ H\Omega \cdot \cos(\Omega \cdot y) - \frac{l \cdot \omega}{gk} \cdot \sin(\Omega \cdot y) \right] \cdot \sin(\omega t - kx) \\ v_{\text{частн}} &= B \cdot \sin(\Omega \cdot y) \cdot \cos(\omega t - kx) \\ \zeta_{\text{частн}} &= \frac{-B}{gk} \cdot \left\{ \frac{gk\omega}{gHk^2 - \omega^2} \cdot \left[ H\Omega \cdot \cos(\Omega \cdot y) - \frac{l \cdot \omega}{gk} \cdot \sin(\Omega \cdot y) \right] - l \cdot \sin(\Omega \cdot y) \right\} \cdot \sin(\omega t - kx) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Теперь, зная аналитическое решение задач, можно использовать решение задачи Пуанкаре в качестве тестового для отладки программы.

**Решение тестовой задачи Пуанкаре.** В качестве расчётной области было выбрано кольцо, лежащее между 44 и 46 градусами. Для расчёта использовалась структурированная сетка с количеством треугольников 3458. Наблюдалась динамика распространения волны. В качестве наблюдаемых параметров использовался модуль разности между численным и аналитическим решениями. Сравнение показало, что относительные погрешности для уровня

и скорости составили 40 и 15 процентов соответственно. Предполагается, что наличие погрешностей связано с получением численного решения на сфере, в то время как аналитическое решение было получено на плоском прямоугольнике. Ожидается, что увеличение количества узлов по оси ординат позволит повысить точность расчёта.

Ниже приведены рисунки модуля разности численного и аналитического решений через 20 минут после начала движения волны.

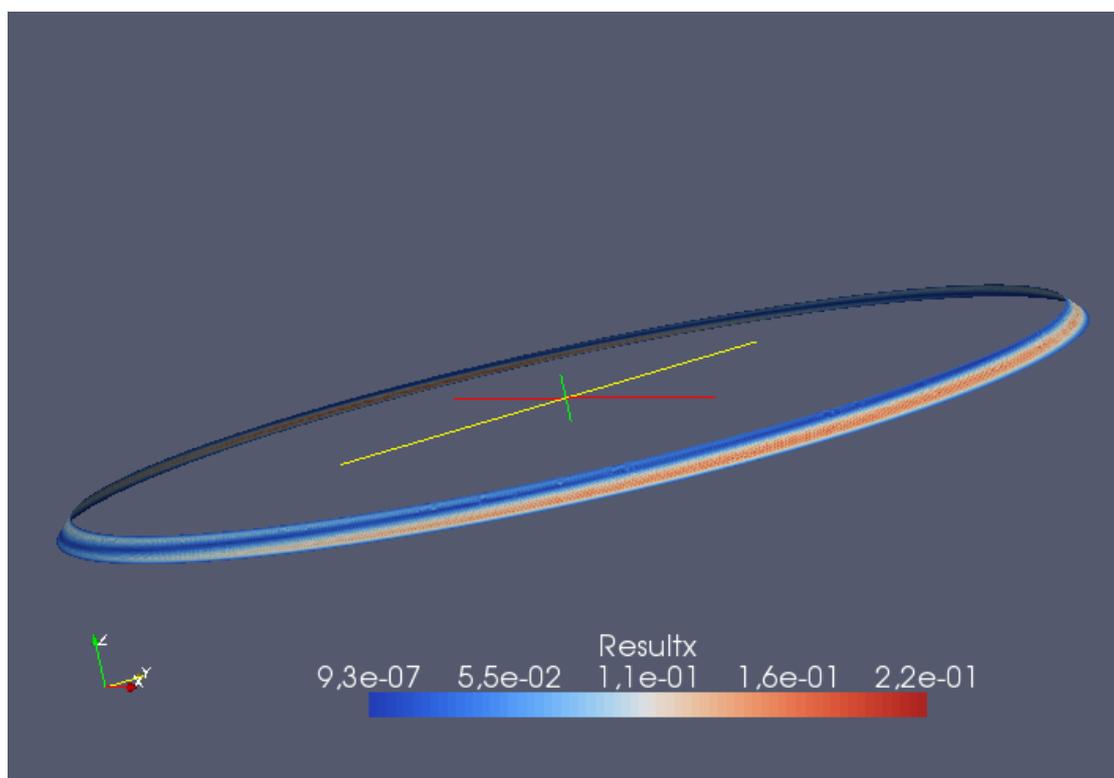


Рис. 48. Модуль разности  $u$ -компоненты численного и аналитического решений.

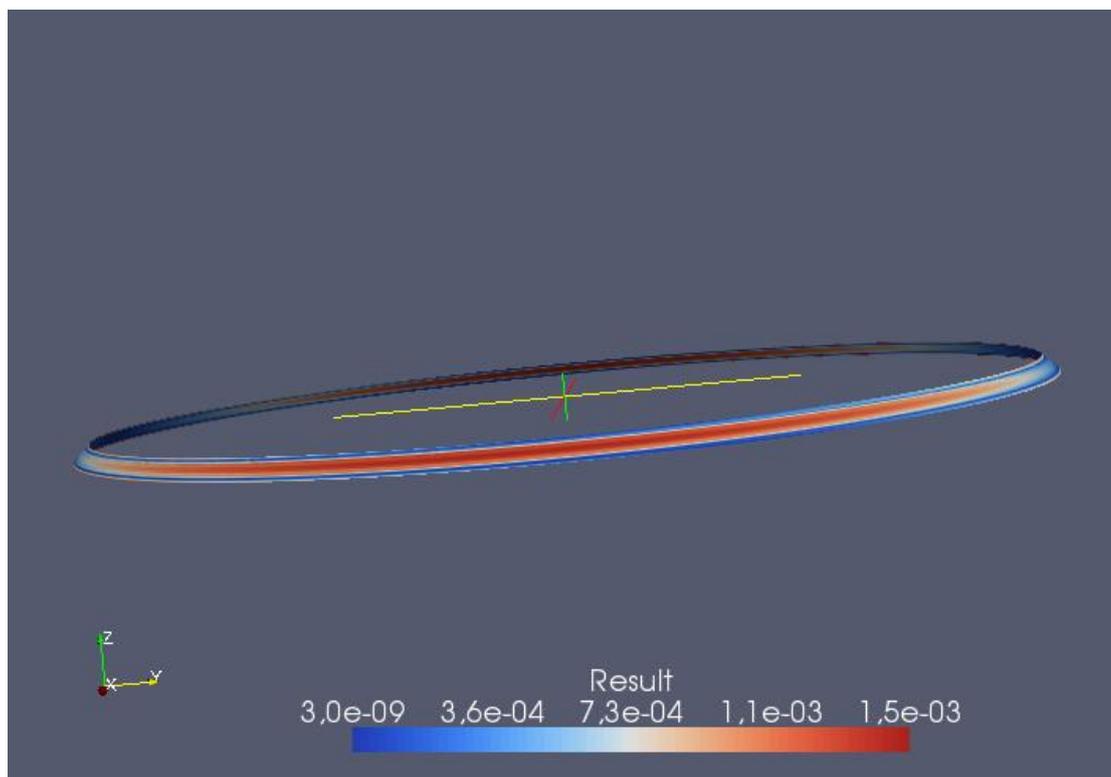


Рис 49. Модуль разности численного и аналитического уровней.

**Решение задачи динамики Балтийского моря.** При решении задачи динамики Балтийского моря ставились вопросы, связанные с расчетами при различных модельных параметрах. Для того, чтобы понять, насколько верны численные расчёты, было предложено провести ряд экспериментов. Они заключались в том, что модель запускалась при различных значениях параметров, таких как параметр Кориолиса, коэффициент вязкости и придонного трения. Также менялись расчётные сетки и шаг по времени. Изучался вопрос о том, насколько хорошо модель воспроизводит распространение волн вблизи границы.

Вначале были произведены численные оценки основных параметров модели, которые согласовывались с реальными оценками. В результате, было получено, что коэффициент вязкости ( $\mu$ ) должен приблизительно равняться 3,6 км/час, а коэффициент придонного трения 0,036 1/час. На основе этих теоретических оценок проводились дальнейшие численные эксперименты.

**Эксперимент.** В данном эксперименте рассматривалась треугольная сетка, с длиной стороны треугольника 6,4 км. Для простоты расчётов и наглядности результатов глубина бралась постоянной и равной 100 м. Шаг по времени изменялся в пределах от 5 до 1440 сек. Критерием остановки программы было значение невязки на 20-30 шаге. Вот результаты некоторых экспериментов:

<b>h, км</b>	6,4	6,4	6,4	6,4	6,4	6,4	6,4	6,4	6,4
<b>t, сек</b>	5	15	30	60	120	240	360	720	1440
<b><math>\mu</math>, км<sup>2</sup>/час</b>	3	3	3	3	3	3	3	3	3
<b>R, 1/час</b>	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3
<b><i>l</i></b>	+	+	+	+	+	+	+	+	+
<b>residual</b>	sol  ↑	расходится	sol  ↑	расходится	расходится	расходится	не сходится	не сходится	расходится

**Таблица 1.** Результаты запуска при различных параметрах модели.

Наиболее быстрая сходимость наблюдалась при следующих параметрах программы:

<b>h, км</b>	6,4	6,4	6,4	6,4	6,4	6,4	6,4	6,4	6,4
<b>t, сек</b>	5	15	30	60	120	240	360	720	1440
<b><math>\mu</math>, км<sup>2</sup>/час</b>	10	10	10	10	10	10	10	10	10
<b>R, 1/час</b>	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03
<b><i>l</i></b>	+	+	+	+	+	+	+	+	+
<b>residual</b>	sol  ↑	расходится	sol  ↓	sol  ↓	sol  ↓	не сходится	не сходится	не сходится	расходится

**Таблица 2.** Результаты запуска при различных параметрах модели.

Было проведено несколько десятков подобных экспериментов, все они показали, что модель реагирует на изменение параметров. Причём, в соответствии с предположениями, наилучшие результаты по скорости и численным результатам представлены в таблице 2.

Далее рассматривалась задача распространения длинных волн в акватории Балтийского моря. Задача формулируется следующим образом.

Пусть, в начальный момент времени отклонение уровня всюду равно нулю, и модуль скорости также равен нулю. Пусть далее в точке с координатами 20° восточной долготы и 58°40' северной широты произошло возмущение водной поверхности. Следует рассчитать эволюцию данного возмущения во времени и пространстве.

Входные модельные параметры следующие: глубина моря – постоянна,  $H=100$  (м); используется сетка с шагом  $h=6,4$  (км); коэффициент вязкости  $\mu=10$  (км<sup>2</sup>/час); коэффициент трения о дно  $R=0.03$  (1/час). Расчет проводится на срок около 2 часов, шаг по времени в равен 1 минуте. Результаты вычислений представим в виде рисунков, полученных с помощью пакета «Paraview».

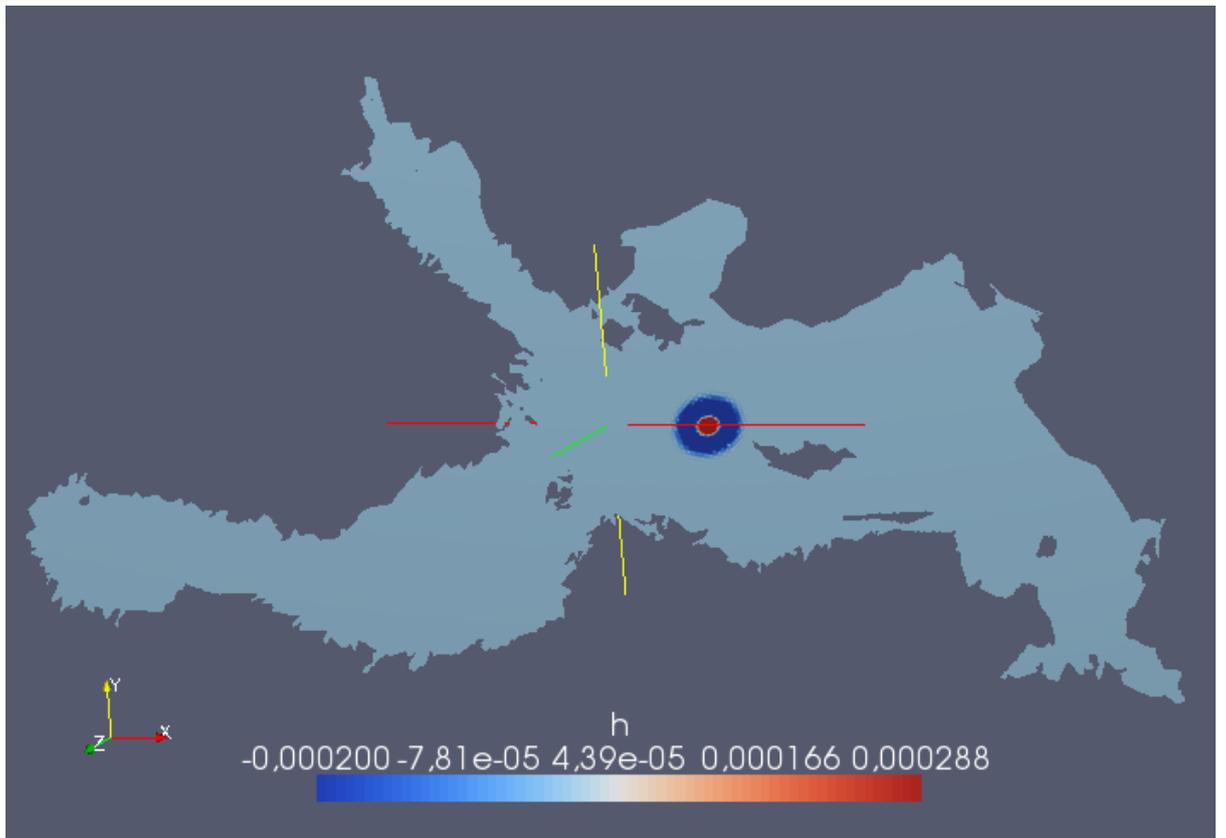


Рис. 50. Расчетный уровень моря при  $t=10$  минут.

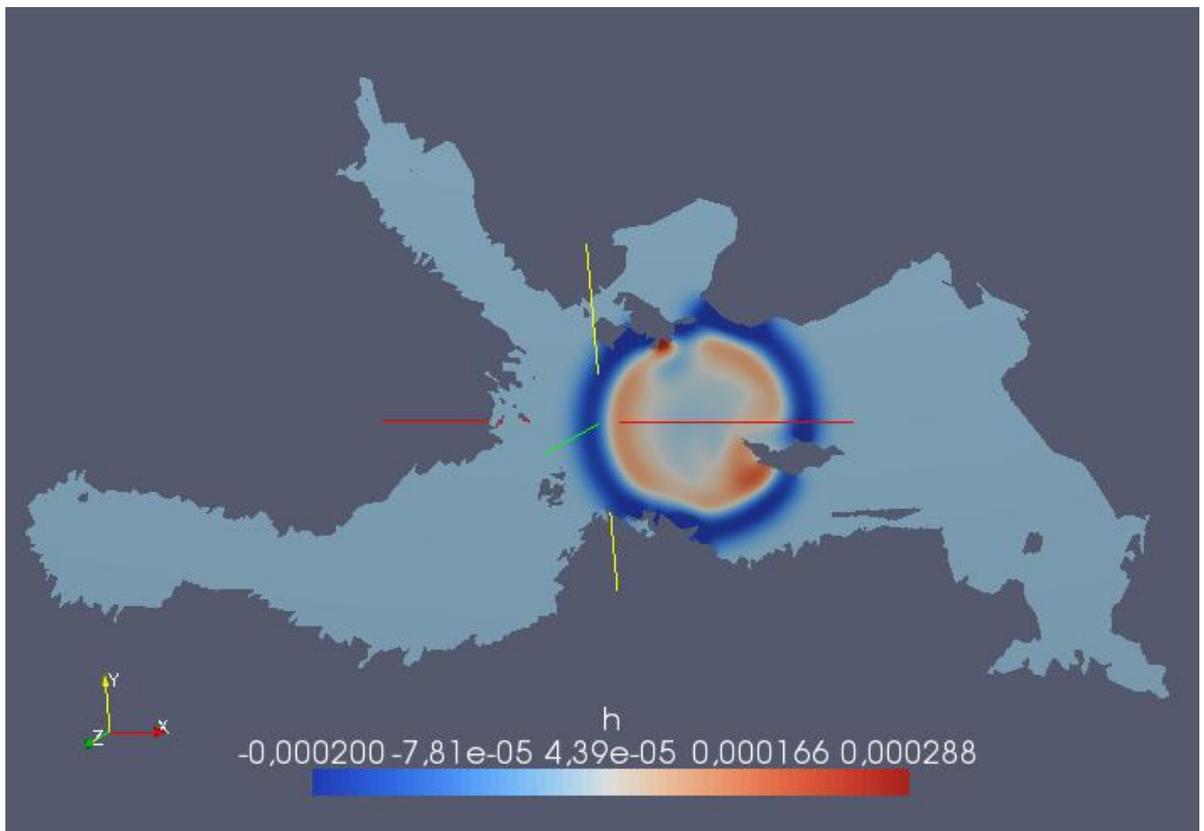


Рис. 51. Расчетный уровень моря при  $t=70$  минут.

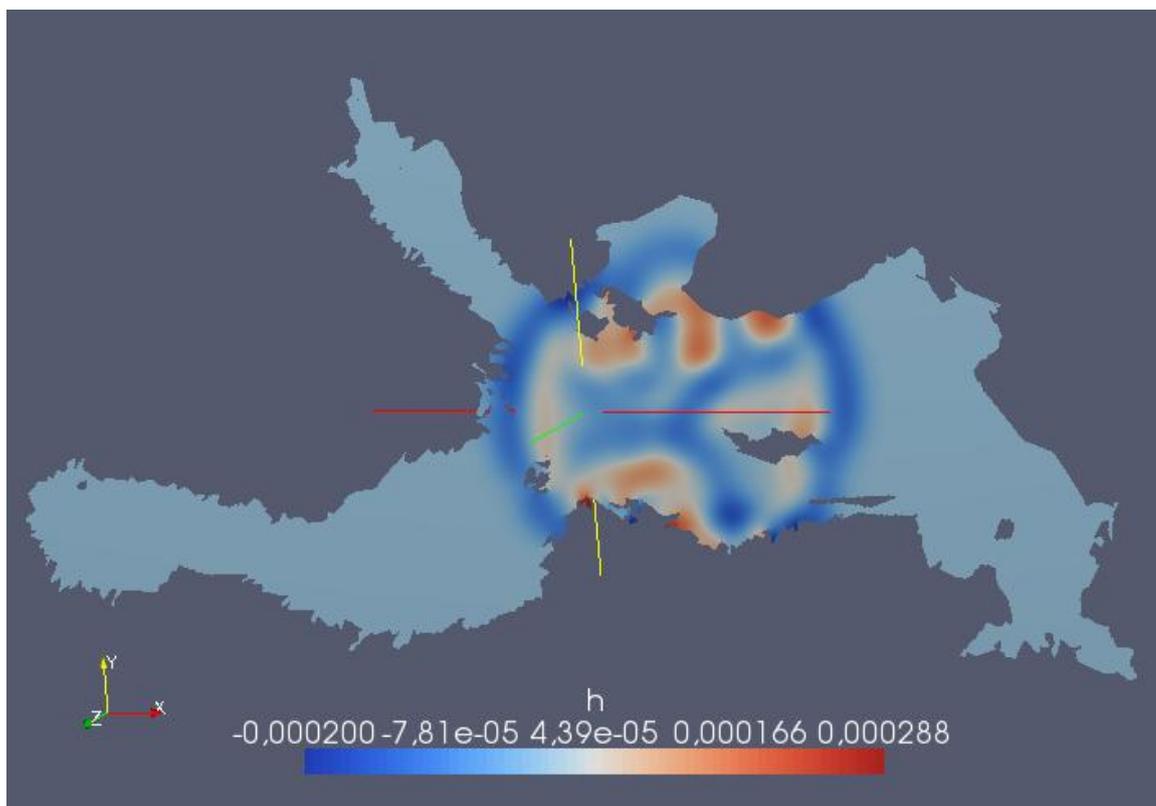


Рис. 52. Расчетный уровень моря при  $t=115$  минут.

#### 4.6 Метод расщепления для решения уравнений турбулентного обмена в океане

Формулируются математические модели, описывающие процесс турбулентного обмена по вертикали. Задача ставится в рамках систем 2-х уравнений: а) для кинетической энергии турбулентности и диссипации, б) для частотной функции и кинетической энергии турбулентности. Для второй задачи формулируется алгоритм численного решения на основе метода расщепления по физическим процессам.

Опишем две дифференциальные модели локального вертикального турбулентного обмена, которые могут встраиваться в 3-х мерную модель общей циркуляции океана. Они обычно обозначаются, как  $(k - \varepsilon)$  и  $(k - \omega)$  модели [88, 89]. В отличие от иных, часто используемых моделей турбулентного обмена, они не требуют специального задания масштаба турбулентности и дают возможность привлекать и обрабатывать данные наблюдений как по кинетической энергии турбулентности (КЭТ), так и по диссипации КЭТ [88]. Эксперименты показывают хорошую согласованность результатов, полученных по обеим,  $(k - \varepsilon)$  и  $(k - \omega)$  - моделям.

Запишем уравнения  $(k - \varepsilon)$  и  $(k - \omega)$  моделей в сферической  $\sigma$  - системе координат. Первым эволюционным уравнением  $(k - \varepsilon)$  и  $(k - \omega)$  - моделей служит уравнение баланса КЭТ:

$$\frac{dk}{dt} = \frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \mathbf{v}_u \frac{\partial k}{\partial \sigma} + \mathbf{v}_u G^2 - \mathbf{v}_\rho N^2 - \varepsilon \quad (4.19)$$

Здесь  $\sigma = z/H(\varphi, \lambda)$ ,  $z$  - обычная направленная вниз вертикальная координата,  $H(\varphi, \lambda)$  - рельеф дна как функция от широты и долготы,  $k = 0.5(u'u' + v'v' + w'w')$  - КЭТ, осредненная по ансамблю, величины со штрихами - турбулентные пульсации относительно среднего течения;  $\sigma_k$  - турбулентное число Шмидта для КЭТ.  $G$  - частота сдвига и  $N$  - частота Вайсяля-Брента:

$$G^2 = \left( \frac{1}{H} \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right)^2 + \left( \frac{1}{H} \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right)^2 + \left( \frac{1}{H} \frac{\partial w}{\partial \sigma} \right)^2, \quad N^2 = \frac{1}{H} \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho_{pot}}{\partial \sigma}, \quad (4.20)$$

$\rho_{pot} = \rho(T, S)$  - потенциальная плотность воды как функция температуры и солености,  $g$  - ускорение свободного падения.

Использование дополнительных физических гипотез для второго эволюционного уравнения  $(k - \varepsilon)$  и  $(k - \omega)$  - моделей сказывается в том, что  $\sigma_k$  различается для этих моделей:  $\sigma_k = \sigma_k^\varepsilon = 1.0$  для  $(k - \varepsilon)$  - модели и  $\sigma_k = \sigma_k^\omega = 2.0$  для  $(k - \omega)$  - модели. Далее будем опускать верхний индекс  $\sigma_k$ , помня об указанных различиях. Заметим, что мы используем традиционную гипотезу преобладания вертикальной диффузии характеристик турбулентности над диффузией горизонтальной, которой в уравнении для КЭТ пренебрегли, как пренебрежем ею и далее в уравнениях для диссипации и частоты диссипации.

Первое слагаемое в правой части (4.19) описывает вертикальную диффузию КЭТ. Второе и третье слагаемые - скорость генерации КЭТ вследствие вертикального сдвига течения и влияние плавучести. При неустойчивой стратификации плавучесть является источником КЭТ, а при устойчивой - ее стоком. Поскольку, вертикальная ось направлена вниз от невозмущенной поверхности океана, то при  $\frac{\partial \rho_{pot}}{\partial \sigma} > 0$  ( $N^2 > 0$ ) имеем устойчивую стратификацию, а при  $\frac{\partial \rho_{pot}}{\partial \sigma} < 0$  ( $N^2 < 0$ ) - неустойчивую. Отметим, что если модель локальной турбулентности встраивается в гидростатическую модель общей циркуляции, то

последнее слагаемое, зависящее от вертикального компонента скорости, в выражении для  $G^2$  опускается.

Для  $(k - \varepsilon)$  - модели вторым уравнением служит эволюционное уравнение для  $\varepsilon$  – скорости диссипации КЭТ (далее будем называть  $\varepsilon$  просто диссипацией) из-за вязкости среды во внутреннюю тепловую энергию воды:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{v_u}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} + \frac{\varepsilon}{k} (c_1^\varepsilon v_u G^2 - c_3^\varepsilon v_\rho N^2 - c_2^\varepsilon \varepsilon) \quad (4.21)$$

где  $\sigma_\varepsilon = 1.3$  – турбулентное число Шмидта для диссипации. Полуэмпирические коэффициенты в (4.21) равны:

$$c_1^\varepsilon = 1.44, \quad c_2^\varepsilon = 1.92, \quad c_3^\varepsilon = \begin{cases} -0.4, & N^2 > 0 \\ 1.0, & N^2 \leq 0 \end{cases}$$

Введем теперь третью характеристику, которую можно назвать частотой диссипации КЭТ –  $\omega$  :

$$\omega = \frac{\varepsilon}{(c_s^0)^4 k}, \quad (4.22)$$

где  $c_s^0$  - эмпирический коэффициент. Если, учитывая (4.22), вместо  $\varepsilon$  использовать  $\omega$ , то придем к  $(k - \omega)$  - модели. Для нее вторым является уравнение, описывающее эволюцию частоты  $\omega$ :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{v_u}{\sigma_\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \sigma} + \frac{\omega}{k} (c_1^\omega v_u G^2 - c_3^\omega v_\rho N^2 - c_2^\omega \omega), \quad (4.23)$$

где  $\sigma_\omega = 2.0$  - турбулентное число Шмидта для  $\omega$ . Полуэмпирические коэффициенты в (4.23) равны:

$$c_1^\omega = 0.555, \quad c_2^\omega = 0.833, \quad c_3^\omega = \begin{cases} -0.6, & N^2 > 0 \\ 1.0, & N^2 \leq 0 \end{cases}.$$

Обратим внимание на то, что  $c_3^\varepsilon$  в (4.21) и  $c_3^\omega$  в (4.23) меньше нуля при устойчивой стратификации плотности, что соответствует наличию в этом случае источника как  $\varepsilon$ , так и  $\omega$ . При безразличной и неустойчивой стратификации формируется сток  $\varepsilon$  и  $\omega$ .

Чтобы замкнуть системы модельных уравнений (4.19)-(4.21), и (4.19), (4.22), (4.23), необходимо уравнение для коэффициента турбулентной вязкости  $\nu_u$ . Учитывая соображения размерности и связь диссипации КЭТ с масштабом турбулентности, запишем для замыкания  $(k - \varepsilon)$  - модели формулу  $\nu_u$  в виде:

$$\nu_u = (c_s^0)^3 c_s^u \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad (4.24)$$

где  $c_s^u = c_s^u(G, N, k, \varepsilon)$  - безразмерная функция устойчивости,  $c_s^0 \approx 0.5544$ . В первом приближении можно учитывать эффекты сдвига и плавучести лишь в эволюционных уравнениях (4.19), (4.21), (4.23) и использовать простейшее выражение для  $c_s^u$ :

$$c_s^u = c_s^0. \quad (4.25)$$

Для замыкания  $(k - \omega)$  - модели коэффициент турбулентной вязкости, принимая во внимание (4.22), запишем в виде:

$$\nu_u = \frac{c_s^u}{c_s^0} \frac{k}{\omega}. \quad (4.26)$$

Примем для коэффициента турбулентной диффузии тепла (и соли) наиболее простое выражение:

$$\nu_\rho = \frac{\nu_u}{\text{Pr}}, \quad (4.27)$$

где  $\text{Pr} = 1.4$  – турбулентное число Прандтля.

Сформулируем для (4.19), (4.21), и (4.23) граничные условия. На поверхности океана поток КЭТ состоит из потока энергии, связанного с обрушением ветровых волн  $M_w$ , плюс поток из-за сдвига течения в тонком приповерхностном слое  $\delta/H$ :

$$\frac{v_u}{\sigma_k} \frac{1}{H} \frac{\partial k}{\partial \sigma} = M_w + \int_0^{\delta/H} \left( \bar{\tau}_w \frac{1}{H} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \sigma} \right) d\sigma, \quad (4.28)$$

где  $\bar{\tau}_w$  - напряжение трения в воде. В работе [5] показано, что оба эти компонента пропорциональны величине куба скорости трения в воде у поверхности океана

$$u_*^S = \left( \frac{\sqrt{\tau_{ax}^2 + \tau_{ay}^2}}{\rho_w} \right)^{1/2},$$

где  $\tau_{ax}$  и  $\tau_{ay}$  - зональный и меридиональный компоненты вектора ветрового напряжения  $\bar{\tau}_w$ ,  $\rho_w$  - плотность воды у поверхности океана.

Таким образом, в первом приближении на поверхности моря имеем при  $\sigma = 0$

$$\frac{v_u}{\sigma_k} \frac{1}{H} \frac{\partial k}{\partial \sigma} = C_g \cdot (u_*^S)^3, \quad (4.29)$$

где  $C_g$  - полуэмпирический параметр,  $u_*^S$  - скорость трения на поверхности.

На дне моря, полагая отсутствие потока КЭТ, имеем при  $\sigma = 1$ :

$$\frac{v_u}{\sigma_k} \frac{1}{H} \frac{\partial k}{\partial \sigma} = 0. \quad (4.30)$$

Выпишем граничные условия для (4.21) и (4.23) с учетом двух предположений. Во-первых, предположим, что в поверхностном и придонном пограничных слоях постоянных потоков выполняются соотношения:

$$k_0 = \left( \frac{u_*^S}{c_s^0} \right)^2, \quad k_H = \left( \frac{u_*^H}{c_s^0} \right)^2, \quad (4.31)$$

где  $u_*^H$  - скорость трения на дне моря. Во-вторых, что масштаб турбулентности в пограничных слоях линейно зависит от расстояния до стенки. Так, у поверхности океана  $L = \chi \cdot H \cdot (\sigma + \sigma_0)$ , где  $\sigma_0 = z_r^0 / H$ ,  $z_r^0 = 0.03 \cdot H_r^0$  - масштаб шероховатости поверхности океана,  $H_r^0 \cong 0.5$  м - характерная средняя величина элементов шероховатости поверхности океана. В придонном слое  $L = \chi \cdot H \cdot (1 - \sigma + \sigma_H)$ , где аналогичные параметры шероховатости имеют вид:  $\sigma_H = z_r^H / H$ ,  $z_r^H = 0.1 \frac{V}{u_*^H} + 0.03 \cdot H_r^H$ . Здесь  $\chi = 0.4$  -

безразмерная константа Кармана, а  $\nu = 1.3 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2/\text{с}$  – коэффициент молекулярной вязкости. Учитывая это, получаем при  $\sigma = 0$  и  $\sigma = 1$  выражения для  $\varepsilon$  и с учетом (4.22) – выражения для  $\omega$ . Например, при  $\sigma = 0$  имеем

$$\varepsilon = (c_s^0)^3 \frac{k^{3/2}}{\chi \cdot H \cdot (\sigma + \sigma_0)}, \quad \omega = \frac{k^{1/2}}{c_s^0 \chi \cdot H \cdot (\sigma + \sigma_0)},$$

или, предполагая что выполняются соотношения (4.31),

$$\varepsilon = \frac{(u_*^s)^3}{\chi \cdot H \cdot (\sigma + \sigma_0)}, \quad \omega = \frac{u_*^s}{(c_s^0)^2 \chi \cdot H \cdot (\sigma + \sigma_0)}.$$

Дифференцируя выражения для  $\varepsilon$  и  $\omega$  по вертикали в окрестности  $\sigma = 0$  и  $\sigma = 1$  и учитывая, что

$$v_u = c_s^u k^{1/2} \chi \cdot H \cdot (\sigma + \sigma_0) = \frac{c_s^u}{c_s^0} u_*^s \chi \cdot H \cdot (\sigma + \sigma_0),$$

можно получить удобные в расчетах граничные условия для потоков  $\varepsilon$  и  $\omega$ :

при  $\sigma = 0$ :

$$\frac{v_u}{\sigma_\varepsilon} \frac{1}{H} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} = Q_\varepsilon^0, \quad (4.32)$$

$$\frac{v_u}{\sigma_\omega} \frac{1}{H} \frac{\partial \omega}{\partial \sigma} = Q_\omega^0, \quad (4.33)$$

при  $\sigma = 1$

$$\frac{v_u}{\sigma_\varepsilon} \frac{1}{H} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} = Q_\varepsilon^H, \quad (4.34)$$

$$\frac{v_u}{\sigma_\omega} \frac{1}{H} \frac{\partial \omega}{\partial \sigma} = Q_\omega^H. \quad (4.35)$$

Присоединяя к уравнениям (4.19), (4.21) граничные условия (4.29), (4.30), (4.32), (4.34), а также соответствующие начальные условия, получаем формулировку локальной  $(k - \varepsilon)$  - модели турбулентного обмена по вертикали. Уравнения (4.19), (4.23) с соответствующими граничными и начальными условиями образуют локальную  $(k - \omega)$  - модель турбулентности. Обе указанные локальные модели турбулентности встраиваются в 3-х мерную модель крупномасштабной циркуляции моря или океана. Изложим технику решения общих моделей циркуляции и турбулентного обмена, основанную на методе расщепления.

Решение  $(k - \varepsilon)$  и  $(k - \omega)$  - моделей осуществим с помощью метода расщепления по физическим процессам. Учтем, как было сказано выше, что на каждом интервале по времени  $t_j \leq t \leq t_{j+1}$  уже решена задача 3-х мерной динамики моря и вычислены все необходимые

сеточные функции в момент времени  $t_{j+1}$ . Используя метод расщепления, на этом же интервале требуется теперь решить систему уравнений локального турбулентного обмена, т.е. следующие уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

$$D_t k = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{v_u}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial \sigma} + \Lambda k + H (v_u G^2 - v_\rho N^2 - \varepsilon)$$

$$D_t \varepsilon = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{v_u}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} + \Lambda \varepsilon + H \frac{\varepsilon}{k} (c_1^\varepsilon v_u G^2 - c_3^\varepsilon v_\rho N^2 - c_2^\varepsilon \varepsilon)$$

$$D_t \omega = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{v_u}{\sigma_\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \sigma} + \Lambda \omega + H \frac{\omega}{k} (c_1^\omega v_u G^2 - c_3^\omega v_\rho N^2 - c_2^\omega \varepsilon)$$

с начальными условиями при  $t = t_j$

$$u = u^{j+1}, \quad v = v^{j+1}, \quad w = w^{j+1}, \quad \rho = \rho(T^{j+1}, S^{j+1}),$$

$$k = k^j, \quad \varepsilon = \varepsilon^j, \quad \omega = \omega^j.$$

Процесс решения задачи на интервале по времени  $t_j \leq t \leq t_{j+1}$  разбивается на три основных этапа, отвечающих физическим процессам переноса – диффузии свойств, генерации КЭТ и вязкой диссипации.

На первом этапе рассматриваются уравнения переноса и вертикальной диффузии:

$$D_t k = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{v_u}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial \sigma} + \Lambda k,$$

$$D_t \varepsilon = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{v_u}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} + \Lambda \varepsilon,$$

$$D_t \omega = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{v_u}{\sigma_\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \sigma} + \Lambda \omega$$

с начальными условиями при  $t = t_j$

$$k = k^j, \quad \varepsilon = \varepsilon^j, \quad \omega = \omega^j.$$

Компоненты вектора скорости берутся из решения задачи крупномасштабной динамики:

$u = u^{j+1}$ ,  $v = v^{j+1}$ ,  $\tilde{w} = \tilde{w}^{j+1}$ , а коэффициенты вертикального турбулентного обмена приписываются к предыдущему шагу по времени  $v_u = v_u^j$ ,  $v_T = v_T^j$ ,  $v_S = v_S^j$ .

На втором этапе расщепления, на этом же интервале  $t_j \leq t \leq t_{j+1}$ , решаются уравнения продукции турбулентной энергии:

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{c_s^u}{c_s^0} \left( G^2 - \frac{1}{\text{Pr}} N^2 \right) \frac{k}{\omega},$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{c_s^u}{c_s^0} \left( c_1^\varepsilon G^2 - \frac{c_3^\varepsilon}{\text{Pr}} N^2 \right) \frac{\varepsilon}{\omega},$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \left( c_1^\omega G^2 - \frac{c_3^\omega}{\text{Pr}} N^2 \right) \frac{c_s^u}{c_s^0}.$$

Начальными условиями для решения этой системы является решение предыдущей системы (32) – (33):

при  $t = t_j$

$$k = k^{j+1}, \quad \varepsilon = \varepsilon^{j+1}, \quad \omega = \omega^{j+1}.$$

Заметим, что на данном этапе расщепления правая часть уравнения для  $\omega$  не зависит от времени и искомых функций  $k$ ,  $\varepsilon$ ,  $\omega$  и имеет простое аналитическое решение. Аналитически можно решить также уравнения для  $k$  и  $\varepsilon$ .

Наконец, на третьем этапе расщепления решаются уравнения диссипации турбулентной энергии:

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -(c_s^0)^4 \omega \cdot k,$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -c_2^\varepsilon (c_s^0)^4 \omega \cdot \varepsilon,$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -c_2^\omega (c_s^0)^4 \omega^2,$$

где начальными условиями служит решение задачи на втором этапе. Так же, как на предыдущем этапе, эти уравнения могут быть решены как численно, так и аналитически. Окончательным решением встроенной модели турбулентности в момент времени  $t = t_{j+1}$  служит решение уравнений третьего этапа.

## 5 ПРОГРАММА ВНЕДРЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ НИР В ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ПРОЦЕСС

Основная цель НИР — разработка высокопроизводительных информационно-вычислительных технологий решения сложных задач геоинформатики; создание комплекса программ для решения прикладных задач глобальных изменений гидросферы Земли в национальных и стратегических интересах России.

Наряду с решением сложных задач геофизической гидродинамики, в основном, динамики морей и океанов, значительное внимание в работе уделено формулировке и решению соответствующих задач для студентов и аспирантов ВУЗов России. Одним из прикладных направлений, в которое можно сделать вклад, основанный на результатах НИР, является обучение морским и военно-морским специальностям.

Программа внедрения результатов НИР в образовательный процесс для соответствующих гражданских и специальных ВУЗов России может быть следующей.

1. Включение материала учебного пособия, изложенного в пп. 4.1 – 4.4 предыдущей главы в курс лекций по сопряженным уравнениям и методам оптимального управления в задачах математической физики, а также в задачах геофизической гидродинамики.
2. Включение примеров, рассмотренных в пп. 4.1 – 4.4 предыдущей главы для формулировки практических занятий по курсу лекций, связанных с моделированием процессов геофизической гидродинамики.
3. Формулировка дипломных работ для студентов 4 – 6 курсов соответствующих ВУЗов на основе материала, изложенного в п. 4.5 предыдущей главы. Тематика: численное решение уравнений мелкой воды (для выбранных акваторий) методом конечных элементов и методом расщепления.
4. Формулировка дипломных работ для студентов 4 – 6 курсов соответствующих ВУЗов на основе материала, изложенного в п. 4.6 предыдущей главы. Тема: моделирование процессов вертикального турбулентного обмена в выбранных акваториях морей и океанов. Возможна постановка следующих задач: а)  $k - \varepsilon$  модель турбулентного обмена на основе неявных схем по времени; б)  $k - \omega$  модель

турбулентного обмена, основанная на точных решениях и/или неявных схемах по времени; в) сравнение  $k - \varepsilon$  и  $k - \omega$  моделей турбулентного обмена для выбранных областей морей и океанов.

5. Использовать разработанную в НИР модель динамики Мирового океана для формулировки задачи и проведения вычислений в рамках темы диссертационной работы по специальностям: 05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ, 25.00.28 – океанология.
6. Использовать разработанную в НИР модель динамики Северной Атлантики - Северного Атлантического океана – Берингова моря для формулировки задачи и проведения вычислений в рамках темы диссертационной работы по специальностям: 05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ, 25.00.28 – океанология.
7. Использовать разработанную в НИР модель динамики Индийского океана для формулировки задачи и проведения вычислений в рамках темы диссертационной работы по специальностям: 05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ, 25.00.28 – океанология.

## 6 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На пятом этапе НИР проводились работы, связанные с обобщением результатов предыдущих этапов работ, оценкой полноты решения задач и эффективности полученных результатов. Были проведены дополнительные исследования, позволяющие дать оценку возможности создания конкурентоспособной продукции и услуг. Завершена разработка научно-методических материалов к учебному пособию по курсу «Сопряженные уравнения и методы оптимального управления в задачах математической физики» и программы внедрения результатов НИР в образовательный процесс.

Основное содержание выполняемых на пятом этапе работ включало.

1. Обобщение результатов предыдущих этапов работ. Оценку полноты решения задач и эффективности полученных результатов.

2. Проведение дополнительных исследований. Оценку возможности создания конкурентоспособной продукции и услуг.

3. Завершение разработки научно-методических материалов к учебному пособию по курсу «Сопряженные уравнения и методы оптимального управления в задачах математической физики».

4. Разработку программы внедрения результатов НИР в образовательный процесс.

Оценка полноты решения поставленных задач. Все поставленные задачи решены.

Рекомендации по конкретному использованию результатов НИР.

Разработанные в ходе выполнения первых двух этапов НИР методы и алгоритмы можно использовать в практических задачах расчета, анализа и информационного мониторинга крупных океанических акваторий и морей России. В частности, для улучшения моделирования и прогноза процессов в акваториях Черного и Балтийского морей. Разработанный научно-методический материал к учебному пособию по курсу «Сопряженные уравнения и методы оптимального управления в задачах математической физики» можно использовать для чтения лекций, проведения семинарских занятий и формулировки курсовых, дипломных и диссертационных работ по соответствующим специальностям.

Основными научными результатами пятого этапа НИР являются:

- обобщение предыдущих результатов НИР с оценкой полноты решения задач и эффективности полученных результатов;

- оценка возможности создания конкурентоспособной продукции и услуг;

- разработка научно-методических материалов к учебному пособию по курсу «Сопряженные уравнения и методы оптимального управления в задачах математической физики»;
- программа внедрения результатов НИР в образовательный процесс.

**Результаты оценки научно-технического уровня работ на данном этапе в сравнении с лучшими достижениями в данной области.** Полученные результаты позволяют определить высокую степень научно-технического уровня выполненных работ сопоставимого с лучшими достижениями в области численного моделирования и информационного анализа процессов гидрофизической гидродинамики. Разработанные в НИР подходы к построению методологии решения прогностических задач и задач вариационной ассимиляции данных наблюдений в моделях геоинформатики основан на сочетании эффективных численных методов расщепления сложных задач и метода сопряженных уравнений. Общая методология данного подхода имеет модульную структуру. Это позволяет более просто строить и реализовывать сложные модели, увеличивает устойчивость алгоритмов. Она не используется в настоящее время в подобных исследованиях. Реализуемый в НИР подход позволяет создавать вычислительно эффективные инструментарию решения поставленных проблем. Основные методы и результаты НИР изложены в высокорейтинговых журналах в нашей стране и за рубежом [1, 6, 7, 12, 20, 29, 46, 47, 73-75, 77-79, 87-93].

## ПРИЛОЖЕНИЕ.

### ОПИСАНИЕ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА ДЛЯ РАСЧЁТА ЦИРКУЛЯЦИИ ОКЕАНОВ И МОРЕЙ.

В процессе выполнения НИР было разработано учебно-методическое пособие, в котором приводится структура модели циркуляции океана, схема ее работы и руководство по ее использованию. Для работы с моделью необходимо иметь установленный Фортран-компилятор на Windows- или Linux-платформе.

#### 6.1 Структура модели и ее компиляция

Программа модели циркуляции океана имеет следующую структуру. Файл *octask.f* является головной программой, которая осуществляет инициализацию данных, временной цикл и выдачу результатов. Остальные файлы находятся в следующих папках:

- *Control* – файлы управления;
- *Function* – файлы, содержащие решение отдельных физических подзадач;
- *Service* – файлы служебных подпрограмм;
- *Lib* – файлы, выполняющие роль некоторых программных библиотек. Для решения уравнений мелкой воды в терминах  $(u, v, \zeta)$  нужны библиотеки, которые нужно создавать отдельно для каждого компилятора.
- *Inc* – inc-файлы, в которых задается основная часть входных параметров модели..

Основная часть входных параметров задается в .inc-файлах, расположенных в папке Inc. Имена файлов, подлежащих редактированию пользователями, как правило, начинаются с цифры 1. Ниже приводится их описание.

- 0VGRID.INC – параметры вертикальной сетки. По умолчанию определяется аналитическое задание вертикальных T-уровней и расположение W-уровней посередине между T-уровнями. При необходимости ручного задания уровней параметр ANALITCAL\_SET устанавливается равным .FALSE., а оператор DATA, в котором перечисляются эти уровни, раскомментируется. В случае, если требуется альтернативная система (в которой T-уровни расположены посередине между W-уровнями), параметр WGR\_IN\_TGR следует изменить с .TRUE. на .FALSE.
- Файлы, управляющие степенью явности-неявности интегрирования по времени для

некоторых блоков:

- 0ADEXPIMP.INC – уравнения бароклинной адаптации,
- 0SWEXPIMP.INC – уравнения баротропной адаптации,
- 0TRTSS.INC – уравнения переноса-диффузии тепла и соли (ТОЛЬКО при использовании расщепления по геометрическим координатам),
- 0TRUVS.INC – уравнения переноса-диффузии компонентов скорости.

редактируются только при крайней необходимости. Во всех файлах параметр с окончанием IMP – это коэффициент неявности при решении соответствующих блоков. Значение, равное 1, дает чисто неявный алгоритм, 0 – чисто явный. Обычно в уравнениях переноса используется 0.55 (схема Кранка-Николсон с перевесом в сторону неявности), а в уравнениях адаптации – 1 (чисто неявная схема).

1ATMFORCING.INC – параметры параметры, касающиеся атмосферных данных и сетки, на которой они заданы. В частности, здесь указаны размерность, разрешение и левая нижняя граница атмосферной сетки и коэффициенты перехода, необходимые в случае, если исходные данные заданы в единицах измерения, отличных от модельных.

1ATMGRID.INC – задание непосредственно атмосферной сетки.

Эти два атмосферных файла привязаны только к конкретным атмосферным данным и при переходе на новую акваторию не меняются, поскольку в модель встроена программа пространственной интерполяции, которая переводит эти данные на океаническую сетку. В случае же, если решено использовать другие атмосферные данные, вообще говоря, эти файлы нужно редактировать.

1BASINPAR.INC - основной файл, содержащий информацию о расчетной области.

- NX, NY, NZ – размерность области по пространственным координатам. Здесь следует подчеркнуть, что данные в модели используются на расширенной по горизонтали сетке размером NX x NY, которая, помимо содержательной центральной части размером (NX-4) x (NY-4), содержит пустую рамку (по 2 точки с каждой границы) для возможности работы с периодической областью. Так что если известны размеры значимой области, то нужно прибавить к ним по 4, чтобы определить NX и NY.
- MLR – параметр, зависящий от имеющейся температурной маски суша-вода и характеризует число прогонок, используемых при решении уравнений переноса-диффузии. Как его выбирать, будет сказано ниже.
- MMM, MM, NNN, NN – сеточные координаты крайних значимых точек по горизонтали. По умолчанию модель использует MMM=3, MM=NX-2, NNN=3,

NN=NY-2, т.е. остается рамка размером две точки с каждой стороны.

- MMD – в случае непериодической области равен 0, в случае периодической – период по долготе.
- NBASINS – число акваторий, для которых требуется вывод меридиональных характеристик. Если это нужно только для всей области, то ставится 1. Для глобальной модели, как правило ставится 4 и в файл температурной маски добавляется копия основной маски, в которой регионы помечены цифрами (см. ниже).
- DXST и DYST – шаги пространственной сетки в градусах. Имеют полный смысл только для равномерной сетки.
- RLON и RLAT – координаты нижнего левого угла ЗНАЧИМОЙ расчетной области, т.е. на модельной сетке эта точка должна иметь сеточные координаты (3,3).
- ROTATION\_ON\_LON, ROTATION\_ON\_LAT - эйлеровы углы поворота (в градусах) в случае, если расчетная область является сферой, полученной путем поворота географической сетки на данные углы. В случае географической системы оба этих параметра задаются нулями.
- X\_POLE, Y\_POLE – используются только в случае криволинейной системы координат (с одним или двумя смещенными полюсами) и характеризуют координаты нового полюса (в градусах) в географической системе.
- CRIT\_LAT – широта в Северном полушарии, выше которой используется Фурье-фильтрация решения для устранения численного шума в районе Северного полюса.
- LAT\_CRIT\_4D – широта в Северном полушарии, выше которой используется фильтрация решения фильтром 4-го порядка для устранения численного шума в районе Северного полюса.

1BASPAR.INC – построение расчетной области (на температурной сетке). В случае равномерного шага используются циклы по пространству, в противном случае некоторые координаты прописываются вручную.

1BASTYPE.INC – параметры системы координат.

- CURVE\_GRID – тип системы координат. 0 – сферическая, 1 – криволинейная со смещенным северным полюсом, 2 – криволинейная с двумя смещенными полюсами.

1DAYDIST.INC – распределение дней за 4 года. Можно выбрать четырехлетие длиной 1440 дней (фиктивное по 30 дней в месяц), 1460 (по 365 без високосного года) и 1461 (с високосным годом). Зависит от имеющихся данных по атмосферному воздействию.

1LATDIFF.INC – выбор способа задания коэффициентов бокового турбулентного обмена.

1LEVS.INC – файл, в котором прописываются вертикальные z-уровни, на которых будут выводиться трехмерные массивы результатов.

1LEVS\_YZ.INC – файл, в котором прописываются вертикальные z-уровни, на которых будет выводиться массив меридиональной функции тока.

1LQBC.IBC – параметры жидких граничных условий. Параметр NUMB\_OF\_LQP\_MAX отвечает за максимально возможное число жидких граничных точек. Задание самих точек описано ниже.

1LREC.INC – параметры записи данных в двоичные файлы прямого доступа. На ПК LRECL=1, на некоторых рабочих станциях LRECL=4.

1MASSTRANS.INC – настройка необходима, если при выдаче результатов вызывается подпрограмма, рассчитывающая перенос массы через ключевые проливы. Содержит координаты граничных точек.

1SEAICE.INC – характеристики модели морского льда. MGRAD – количество градаций по толщине, HMAX – задание самих градаций.

1STDOUT.INC – определяет систему координат, в которой будет производиться вывод результатов.

- GEO\_OUTPUT – если задается 0, то результаты выводятся в той же системе координат, в которой работает модель. Адекватно, если расчеты проводятся на стандартной географической сетке. Если же параметр равен 1, то при выдаче результатов производится интерполяция в географическую систему. В случае географической модельной сетки нецелесообразно.

- остальные параметры – актуальны только в случае, если GEO\_OUTPUT=1. Определяют параметры географической сетки, на которую производится выдача результатов. Их смысл аналогичен схожим по названию параметрам из файла 1BASINPAR.INC. Параметр OUT\_MASK\_FILE характеризует имя файла с маской на выходной сетке, которая должна соответствовать параметрам этой сетки.

1SWEQPRECOND.INC – характеристики солвера уравнений мелкой воды.

use\_direct\_solver=1, если используется прямой алгоритм решения, и

use\_direct\_solver=0 в случае итерационного алгоритма. В последнем случае необходимо поставить параметр nzmax достаточно большим для заданной размерности области.

1TRANTS.INC – управляет явным алгоритмом для задачи переноса скалярных полей.

- NITER\_TRANS – определяет число внутренних подшагов для решения задачи переноса.

- ALPHA\_TRANS – параметр Адамса-Бэшфорта. Если равен нулю, то определяет явную схему Эйлера, 0.5 – чистую схему Адамса-Бэшфорта. По

умолчанию установлен 0.6.

В модели есть еще несколько inc-файлов, которые можно редактировать, но это стоит делать только в крайнем случае в целях более тонкого подбора этих параметров.

OICEPAR.INC – файл, содержащий параметры модели льда, а также параметры, необходимые для расчета атмосферных потоков по балк-формулам.

2FUNDCONST.INC – файл с фундаментальными константами (радиус земли, ускорение свободного падения и др.).

Трансляцию модели на ПК можно осуществлять следующим образом. Если работа с моделью идет в рамках фортран-проекта, то модель удобно транслировать через этот проект. Нужно только из режима Debug, удобного для отладки программы, переключиться в режим Release, который использует различные оптимизации для увеличения быстродействия. Далее надо выполнить трансляцию проекта, и при отсутствии разного рода ошибок в папке Release создастся исполняемый модуль INM\_OCEAN\_MODEL.EXE.

Можно поступить и иначе. После запуска скрипта mk\_constr\_zone.bat в папке

Constr\_Zone появятся файлы oc\_contr.f, oc\_modls.f, oc\_serv.f, oc\_lib.f, а также все .inc- и .lib-файлы. Далее надо скопировать в папку Constr\_Zone файлы otask.f и mkexe.bat из корневой директории модели, зайти в папку Constr\_Zone и запустить трансляцию программы командой mkexe.bat otask.f. В случае успеха в этой папке появится файл otask.exe, который и представляет собой основной исполняемый модуль.

Для трансляции модели на Linux в корневой папке модели существуют файлы makefile и Makefile.inc. Последний нужно отредактировать, поставив в нем нужный фортран-компилятор. При этом нужно заранее транслировать все библиотеки, о чем подробно написано в файлах readme к ним, и скопировать их в корневую папку модели. После этого выполнить команду make. Создастся исполняемый модуль dsom.

В итоге исполняемый модуль нужно поместить в директорию с экспериментами (назовем ее EXP).

## 6.2 Запуск модели

Для запуска модели необходимо в корневой папке с экспериментами (EXP) создать папку для конкретного эксперимента (напр. E01) и подпапки E01/XY, E01/XYZ и E01/XYZ, в которые будут записываться результаты. В саму папку E01 нужно поместить данные с начальными условиями (контрольными точками) в  $\sigma$ -координатах. В общем случае для запуска нужны данные по температуре и солености (cpss.dat, cptt.dat), горизонтальным

скоростям (сруu.dat, срvv.dat) и уровню океана (cpslh8.dat), а также накопительный файл для расчета среднемесячных полей срmmean.dat и файл срmmc.txt с информацией о количестве накопленных полей. Кроме того, если в какой-то степени задействована модель льда, необходимо поместить туда начальные данные по льду. Это spraiсе.dat(сплоченность), срphice.dat(масса льда), срphsnow.dat(масса снега), срuисе.dat и срvисе.dat (компоненты скорости дрейфа льда) и, наконец, срsig1.dat, срsig2.dat, срsig12.dat (компоненты тензора напряжений льда). Как видно, все необходимые для перезапуска модели файлы начальных данных начинаются с "ср". Обычно они берутся из предыдущих экспериментов. При запуске же модели впервые на новом регионе счет ведется с нулевых скоростей и отсутствии льда, в этом случае нужны только данные по температуре и солёности океана (срss.dat, срtt.dat). В корневой папке EXP должны быть данные топографии, температурной маски суша-вода и 3 файла с параметрами. О подготовке всех данных будет сказано ниже, сейчас же опишем подробнее файлы с параметрами, без которых модель работать не будет. При редактировании необходимо придерживаться формата ввода параметров, который указан в каждом комментарии.

Файл octask.par содержит параметры интегрирования модели по времени, а также информацию о местоположении необходимых данных. Его структура следующая.

```

7200.0 :STEP,IN SECONDS(*-FORMAT,11-COLUMNS)
7300.0 :DURATION OF RUN IN DAY(*11C)
87600 :INITIAL STEP 1958 :INITIAL YEAR(I7)
730 :WRITING PERIOD IN STEPS FOR CONTROL POINT OUTPUT
120 :WRITING PERIOD IN STEPS FOR INTEGRAL PARAMETER OUTPUT
10 :WRITING PERIOD IN STEPS FOR LOCAL OUTPUT (not use if =<0)
730. 10. :EXTERNAL INTERNAL PERIODS IN DAYS TO WRITE XYZ ARRAYS
730. 10. :EXTERNAL INTERNAL PERIODS IN DAYS TO WRITE PASSIVE TRACER ARRAYS
3650. 10. :EXTERNAL INTERNAL PERIODS IN DAYS TO WRITE XY ARRAYS
3650. 5. :EXTERNAL INTERNAL PERIODS IN DAYS TO WRITE YZ ARRAYS
3 3 3 :TYPES OF SS CONDITION FOR T,S,WIND(
1 1 :USAGE OF ICE BLOCK IN OCEAN MODEL(0-DO NOT USE,1-USE)
1 2 :1-DO NOT 2- REMOVE SPACE AVARAGING WATER FLUXES(2I4)
2.0E-03 2.0E-03 :COEFFICIENT OF RELAXATION FOR SST SSS[CM/S>(*22C)
E01-20AB :PATH TO OCEAN CONTROL POINT(RESULTES)(A32) /data1/gusev/OGCM1X05/SS :PATH TO OCEAN DATA FILES
sst1x05npf.dat :SEA SURFACE TEMPERATURE
sss1x05npf.dat :SEA SURFACE SALINITY
tlbc.dat :T-VALUES FOR LIQUID WALLS
slbc.dat :S-VALUES FOR LIQUID WAL
/data1/gusev/DATA :PATH TO FILES OF ATM FORCING
mzs.dat :SEA SURFACE ZONAL WIND STRESS(A32)
mms.dat :SEA SURFACE MERIDIONAL WIND STRESS(A32)
mnhf.dat :SEA SURFACE HEAT BALANCE(OCMOD)(A32)
mswr.dat :SEA SURFACE SHORTWAVE RAD BALANCE(A32)
mpme.dat :PRECIPITATION-EVAPORATION(A32)
icemask.dat :ICE MASK (A32) UNUSED.dat :TEMPERATURE OF ATMOSPHERE(CM ONLY)
slp.dat :SEA LEVEL PRESSURE
roff.dat :RIVER RUNOFF
lwat.dat :DW-LW-RAD
swat.dat :DW-SW-RAD
prat.dat :PRECIPIT
tat.dat :TEMP OF ATMOSPHERE
qat.dat :HUMIDITY
uat.dat :U-WIND SPEED
vat.dat :V-WIND SPEED NONE :SEA-LAND MASK FOR ATMPSPHERE

```

#### Построчные комментарии.

1. Модельный шаг по времени в секундах.
2. Продолжительность счета в сутках.
3. Номер начального шага (0, если старт из состояния покоя, в случае перезапуска значение берется из файла srag.txt из директории предыдущего эксперимента)
4. Начальный год. Ставится, если расчет ведется по атмосферному воздействию реальных лет.
5. Период (в шагах), через который будет производиться запись контрольных точек.
6. Период (в шагах), через который будет производиться выдача интегральных характеристик.
7. Период (в шагах), через который будет производиться выдача некоторых локальных характеристик (см. ниже). Если 0, то локальные характеристики не выводятся.
8. Внешний и внутренний периоды записи XYZ-массивов. Запись 730. 10. означает, что каждые 10 суток будут записываться файлы 3-мерных полей, а каждые 730 суток эти файлы будут перезаписываться сначала.
9. То же, для трехмерных массивов пассивного трасера (если участвует).
10. То же, для XY-массивов.
11. То же, для YZ-массивов.
12. Типы граничных условий для температуры, солености и скорости. Варианты: для температуры и солености:
  - а)  $\pm 1$  – первое условие (задаются T и S на поверхности); если отрицательно, то значение на поверхности нулевое;
  - б)  $\pm 2$  – второе условие (задаются балансы тепла, КВ-радиации и пресной воды); если отрицательно, то поток нулевой;
  - в)  $\pm 3$  – третье условие (потоки тепла и/или соли рассчитываются по балк-формулам); если отрицательно, то поток нулевой.Варианты для скорости:
  - а) 1 – задается на напряжение трения ветра;
  - б) 2 – задается на напряжение трения ветра, атмосферное давление влияет на скорость течений;
  - в)  $\pm 3$  – напряжение трения ветра рассчитывается по балк-формулам;
  - г)  $\pm 4$  – напряжение трения ветра рассчитывается по балк-формулам, атмосферное давление влияет на скорость течений.если в случаях в) и г) отрицательное число, то скорость ветра в полярных регионах

рассчитывается по атмосферному давлению. В зависимости от типов граничных условий, считываются только те данные, которые нужны.

13. Использование блока льда.

Первое число.

а) 0 – не используется;

б) 1 – используется.

Второе число – количество внутренних шагов по времени для задачи динамики льда.

14. Числа, показывающие, вычитается ли среднее из потока тепла и пресной воды соответственно. на практике актуально только для потока пресной воды. 1 – нет, 2 – да.

15. Коэффициенты релаксации для коррекции потоков тепла и соли соответственно (в см/с)

16. Путь к директории с текущим экспериментом (контр. точками).

17. Путь к директории с данными температуры и солености на поверхности и жидких границах.

18. Путь к файлу поверхностной температуры (на океанической сетке, 12 среднемесячных полей).

19. То же, для солености.

20. Путь к файлу температуры на жидких границах(12 среднемесячных полей).

21. То же, для солености.

22. Путь к директории, где хранятся данные по атмосферному воздействию (среднемесячные или 6- и 24-часовые, климатические или реальных лет).

23. Файл зонального напряжения трения ветра.

24. Файл меридионального напряжения трения ветра.

25. Файл баланса тепла на поверхности.

26. Файл баланса коротковолновой радиации на поверхности.

27. Файл баланса пресной воды на поверхности (осадки – испарения).

28. Файл концентрации льда на поверхности (если неактивна модель льда).

29. Файл температуры воздуха (нужен только для совместной модели).

30. Файл атмосферного давления.

31. Файл стока рек.

32. Файл падающей длинноволновой радиации.

33. Файл падающей коротковолновой радиации.

34. Файл осадков.

35. Файл температуры воздуха.

36. Файл влажности воздуха.
37. Файл зональной скорости ветра.
38. Файл меридиональной скорости ветра.
39. Файл маски суша-вода на атмосферной сетке (если есть, иначе NONE).

Необходимо отметить следующее. Если в файле модели 1ATMFORCING.INC какой-либо файл помечен как среднеклиматический, то полный путь к нему будет строиться так. Берутся путь к атмосферным данным и имя файла, а между ними вставляется директория CLIM. Например, для данного файла octask.par полный путь к данным по температуре воздуха будет следующим: /data1/gusev/DATA/CLIM/tat.dat. Если же файл помечен как файл реального года, то вставляется номер года, соответствующий модельному времени. В данном случае полный путь станет таким:/data1/gusev/DATA/1958/tat.dat. Поэтому если ведется расчет по данным реальных лет, важно правильно поставить номер начального года.

Файл "oceanmodel.par" содержит ключи управления физическими подзадачами модели и их параметры. Его структура следующая.

```

4 :DENSITY DEVIATION(1,3,4/2 = NONZERO/ZERO)
5 :SEA LEVEL (+1/5 = NO/YES)
3 :LATERAL TRANSPORT MIX OF T S(+1/2/3 = NO/SIGMA/UNIVERSAL)
-7 :VERTICAL TRANSPORT MIX OF T S(+1/2,3/4,5/6,7 = NO/CONST COEF/PPMIX/MO)
-2 :LATERAL TRANSPORT MIX OF U V(+1/2 = NO/CONST COEF.)
4 :VERTICAL TRANSPORT MIX OF U V(1/2/3/4 = NO/CONST COEF./PPMIX/MO)
1 :LATERAL TRANSPORTMIX OF PASSIVE TRACER(1/2 = NO/YES)
1 :VERTICAL TRANSPORT MIX OF PASSIVE TRACER(1/2 = NO/YES)
0 :NUMBER OF LIQUID BOUNDARIES INCLUDED(0-NO INCLUDED)
0.0D-06 1.2 :BAROTROPIC RELAXATION PARAMETER ITERATION PARAMETER
1.0E+00 4.0E+06 :LATERAL DIFFUSION COEFFICIENTS IN X YDIRECTION[UNDIM,CM**2/S]
1.0E+00 2.0E+04 :LATERAL VISCOUS COEFFICIENTS IN X YDIRECTION[UNDIM,CM**2/S]
0.0156 0.0156 :LATERAL DIFFUSION OF 4-TH ORDER X YDIRECTION[UNDIM,UNDIM]
0.002 0.002 :LATERAL VISCOSITY OF 4-TH ORDER X YDIRECTION[UNDIM,UNDIM]
1000.0 0.01 :VERTICAL MAX(TOP) BACKGROUND DIFFUSION COEFFICIENTS
1000.0 1.0 :VERTICAL MAX(TOP) BACKGROUND VISCOUS COEFFICIENTS
1.0 1.00 0.00 :WEIGHT COEFFICIENT LATERAL S,Z,R -DIFFUSION
1.00 0.00 :WEIGHT COEFFICIENT VERTICAL Z,R -DIFFUSION(1ST PART)
1.00 0.00 0.00 :WEIGHT COEFFICIENT VERTICAL Z,R,ZR-DIFFUSION(2ND PART)
300.0 300.0 1.0 :SWITCHING DEPTH FOR TYPE OF LATERAL DIFFUSION[M]
mask1x05r.txt :FILE WITH TEMPERATURE MASK(0-OCEAN,1-LAND)(A32)
top1x05Hgr.dat :FILE WITH BOTTOM TOPOGRAPHY[M](A32)

```

Построчные комментарии.

1. Влияние градиентов плотности на движение:

- а) 1,3,4 – влияют;
- б) 2 – не влияют (в модели плотность обнуляется).

2. Алгоритм с помощью, которого решается баротропная циркуляция в модели:

- а) 1 – никакой;

б) 5 – алгоритм решения полной системы уравнений мелкой воды (Русаков А.С.).

3. Боковые перенос и диффузия температуры и солености:

а)  $\pm 1$  – не используется;

б)  $\pm 2$  – осуществляется вдоль сигма-уровней;

в)  $\pm 3$  – осуществляется по горизонтальным или изопикническим поверхностям, вид которых задается в строках 17-19.

г)  $\pm 4$  – используется полулагранжевая изопикническая диффузия, реализованная Е.М.Володиным (только в случае решения переноса трасера без расщепления по пространственным координатам)

4. Параметры боковой диффузии задаются в строке 11. Если перед цифрой поставить минус, то дополнительно будет работать сеточная диффузия 4 порядка (для температуры и солености в сигма-координатах не рекомендуется). Ее параметры задаются в строке 13.

5. Перенос температуры и солености по вертикали и параметризация вертикального перемешивания и конвекции:

а)  $\pm 1$  – не используется;

б)  $\pm 2,3$  – производится с постоянными коэффициентами диффузии;

в)  $\pm 4,5$  – производится согласно параметризации Филандера-Пахановского;

г)  $\pm 6,7$  – производится согласно параметризации Мони́на-Обухова.

В случае четных ключей дополнительно включается принудительное перемешивание температуры и солености. В случае отрицательного ключа работает распределенный по глубине источник тепла за счет проникающей коротковолновой радиации. Физические параметры вертикальной диффузии задаются в строке 15.

6. Боковой перенос компонент горизонтальной скорости и вид боковой вязкости:

а)  $\pm 1$  – не используется;

б)  $\pm 2$  – производится с постоянными коэффициентами вдоль сигма-уровней.

Параметры боковой вязкости задаются в строке 12. Если перед цифрой поставить минус, то дополнительно будет работать сеточная вязкость 4 порядка. Ее параметры задаются в строке 14.

7. Перенос компонент горизонтальной скорости по вертикали и параметризация вертикального перемешивания и конвекции:

а) 1 – не используется;

б) 2 – производится с постоянными коэффициентами;

в) 3 – производится согласно параметризации Филандера-Пахановского;

г) 4 – производится согласно параметризации Мони́на-Обухова.

Физические параметры вертикальной вязкости задаются в строке 15.

8. Боковые перенос и диффузия пассивного трасера. 1 – не используется, 2 – используется  
Вертикальные перенос и диффузия пассивного трасера. 1 – не используется, 2 – используется.

9. Количество жидких границ:

а) 0 – нет жидких границ; б)  $>0$  – количество жидких границ, используемых в расчете.

10. Первое число – коэффициент релаксации (размерность 1/с) для баротропной циркуляции. Второе число – не используется.

11. Первое число - отношение коэффициентов горизонтальной диффузии по долготе и широте. Второе число – значение коэффициента горизонтальной диффузии вдоль широты ( $\text{см}^2/\text{сек}$ ) из расчета шага сетки в 1 градус на экваторе сферической системы. Реальный коэффициент пропорционален реальному шагу сетки (Либо просто значение коэффициента горизонтальной диффузии вдоль широты ( $\text{см}^2/\text{сек}$ ), зависит от конфигурации файла 1LATDIFF.INC).

12. Первое число - отношение коэффициентов горизонтальной вязкости по долготе и широте. Второе число - максимальное значение коэффициента горизонтальной вязкости вдоль широты ( $\text{см}^2/\text{сек}$ ) из расчета шага сетки в 1 градус на экваторе сферической системы. Реальный коэффициент пропорционален реальному шагу сетки (Либо просто значение коэффициента горизонтальной вязкости вдоль широты ( $\text{см}^2/\text{сек}$ ), зависит от конфигурации файла 1LATDIFF.INC).

13. Числа диффузии (безразмерные величины) для сеточной диффузии 4-го порядка. Первое число - для диффузии температуры. Второе число - для диффузии солености.

14. Числа диффузии (безразмерные величины) для сеточной вязкости 4-го порядка. Первое число – для зональной скорости. Второе число – для меридиональной скорости.

15. Первое число – максимальный коэффициент вертикальной диффузии ( $\text{см}^2/\text{сек}$ ). Второе число – фоновое значение коэффициента вертикальной диффузии ( $\text{см}^2/\text{сек}$ ).

16. Первое число – максимальный коэффициент вертикальной вязкости ( $\text{см}^2/\text{сек}$ ). Второе число – фоновое значение коэффициента вертикальной вязкости ( $\text{см}^2/\text{сек}$ )

Далее идет задание сложного вида боковой диффузии в комбинации сигма, горизонтальной и изопикнической. По умолчанию определяют горизонтальную диффузию. Используются весовые коэффициенты и из формулы универсальной диффузии. Там же приведены их возможные комбинации. Соотношение между числами должно быть именно таким. Любое другое задание может привести к некорректной работе модели.

17.  $1 \quad \alpha \quad \beta$

18.  $\alpha \quad \beta$

19.  $\alpha^2 \quad \beta^2 \quad 2\alpha\beta$

20. Первое число – параметр глубины, определяющий функцию переключения между изопикнической и  $z$ -диффузией. Функция устроена так, что в верхних слоях работает только  $z$ -диффузия, а затем постепенно с глубиной добавляется влияние изопикнической части согласно вышеприведенным коэффициентам. Параметр определяет характерную глубину переключения в метрах. Второе число – масштаб экспоненциального уменьшения коэффициента боковой диффузии. Третье число – коэффициент уменьшения коэффициента боковой диффузии с глубиной.

21. Файл с температурной маской суша-вода (1/0).

22. Файл с топографией дна.

Файл "seaicemodel.par" содержит ключи управления подзадачами модели динамики-термодинамики льда. Структура файла следующая.

1 : (+-1/2) LATERAL CHANGE OF ICE-SNOW MASS AND COMPACTNESS  
2 : ( 1/2) VERTICAL CHANGE OF ICE-SNOW MASS AND COMPACTNESS  
3 : ( 1/2) INTERNAL CHANGE OF ICE-SNOW MASS AND COMPACTNESS  
1 : (+-1/2) LATERAL CHANGE OF ICE VELOCITY (TRANSPORT-DIFFUSION)  
1 : ( 1/2/3/4) (WIND AND WATER STRESS)  
1 1 : (1/2/3/4),(1/2) ADAPTATION OF ICE VELOCITY  
1 : (1/2/3) RHEOLOGY OF ICE VELOCITY

1. Горизонтальное изменение массы льда-снега и их сплоченности (перенос-диффузия):

а)  $\pm 1$  – не используется;

б)  $\pm 2$  – используется.

При отрицательном числе включится диффузия 4-го порядка.

2. Вертикальное изменение массы льда-снега и их сплоченности (термодинамика):

а) 1 – не используется;

б) 2 – используется.

3. Внутреннее изменение массы льда-снега и их сплоченности (перераспределение и коррекция):

а) 1 – не используется;

б) 2 – используется перераспределение по градиентам толщины;

в) 3 – используется перераспределение по градиентам толщины и коррекция для устранения отрицательных значений.

4. Горизонтальное изменение скорости льда (перенос-диффузия): а)  $\pm 1$  – не используется;

б)  $\pm 2$  – используется.

При отрицательном числе включится вязкость 4-го порядка.

5. Вертикальное изменение скорости льда (дрейф):

а) 1 – не используется; б) 2 – используется ветровой дрейф; в) 3 – используется водный дрейф; г) 4 – используются ветровой и водный дрейфы.

6. Адаптация скорости льда.

Первое число:

а) 1 – градиент уровня океана не влияет на скорость льда

б) 2 – градиент уровня океана влияет на скорость льда

Второе число:

а) 1 – адаптация по кориолису не используется

б) 2 – адаптация по кориолису используется

7. Реология скорости льда:

а) 1 – не используется;

б) 2 – используется реология кавитирующей жидкости;

в) 3 – используется упруго-вязко-пластичная реология.

### 6.3 Подготовка данных

Пространственная дискретизация модельных данных осуществляется на сетке "С" по классификации Аракавы. При такой аппроксимации значения температуры, солёности, уровня, а также всего атмосферного воздействия расположены в центре ячейки, значения компонент скорости - в центрах соответствующих граней, а значения топографии и функции тока - в серединах вертикальных ребер. Использование сетки С позволяет адекватно аппроксимировать расчетную область в узких проливах, использовать условие скольжения на боковых границах, а также уменьшить коэффициенты горизонтальной диффузии. Все данные (за исключением температурной и атмосферной масок суша-вода) подготавливаются в формате двоичных файлов прямого доступа, каждый из которых сопровождается файлом описания для возможности просмотра этих данных в системе GrADS. Маски же используются в текстовом формате.

#### 6.3.1 Подготовка исходных данных в $z$ -координатах

Чтобы синтерполировать начальные условия с полей разрешения, отличного от того, на котором будет производиться расчет, используется специальная программа интерполяции, позволяющая переводить данные из географической системы координат на расчетную область произвольного разрешения и с различным расположением полюсов. Если интерполяция производится на сферическую систему, которая отличается от географической

только расположением полюсов, то используются программы `intrpscl.exe` (для скалярных полей) и `intrpvec.exe` (для векторных). В случае интерполяции в систему координат со смещенным северным полюсом это программы `spintscl.exe` и `spintvec.exe`, а в систему с двумя симметрично смещенными полюсами – `spintscl2.exe` и `spintvec2.exe`.

Для интерполяции скалярных полей из географической системы на модельную область необходимо иметь входной файл данных и файлы описания (ctl-файлы) с параметрами входного и выходного файлов данных и прописать имена этих файлов в файле `intrpscl.par` (либо `spintscl.par` или `spintscl2.par`, если используется одна из криволинейных систем), в котором также указываются параметры преобразования координат и имена масок суша-вода, если таковые используются. Таким образом в первую очередь необходимо переинтеполировать трехмерные поля температуры и солёности, заданные на стандартных океанографических z-горизонтах. Чтобы учитывать сезонный ход, нужно иметь 12 среднемесячных полей по времени. Атмосферное воздействие интерполировать не нужно, это делается автоматически в модели. Поскольку модель использует в качестве солёности не абсолютное ее значение, а отклонение от 35ppt, то необходимо вычесть 35 из исходного поля солёности, если этого не было сделано (можно воспользоваться программой DIOGIN, опция "одноместная арифметика"). На данном этапе можно сохранить в отдельный файл данные поверхностного слоя из полученных трехмерных полей температуры и солёности с 12 записями по времени. Именно эти файлы со среднемесячным сезонным ходом и будут использоваться в модели в качестве поверхностных температуры и солёности.

#### 6.3.1.1 Подготовка топографии

Взять исходный рельеф (топография дна и суши) на сетке высокого разрешения (напр., ETOPO2 с разрешением 2'x2').

Отфильтровать рельеф, например, 5 раз при помощи DIOGIN (фильтрация Тьюки), либо GrADS (функция `smth9`).

Интерполировать это поле на нужную область (как правило, более грубого разрешения, чем исходное). При этом следует помнить, что топография задана на сетке, сдвинутой относительно температурной на полшага. Если размеры значимой температурной области (NX-4)x(NY-4), то размеры значимой области топографии (NX-3)x(NY-3).

Фильтровать полученную топографию (уже на нужной области), например, 4 раза. Затем умножить ее на -1 и сохранить (для того чтобы глубина в океане была положительной величиной).

Ограничить глубину минимальной величиной (например, величиной 10 м), сохранить (возможно, в тот же файл). Это делается для того, чтобы сигма-система координат была

невыврожденной.

Снова отфильтровать топографию, чтобы избавиться от резких изломов, нежелательных в сигма-координатах.

### 6.3.1.2 Подготовка трехмерных полей в $\sigma$ -координатах

Для дальнейшей работы необходимо иметь служебные программы, предназначенные для подготовки данных. Набор этих программ называется TREATMENT. Для того, чтобы эти программы успешно компилировались и корректно работали, необходимо приложить к ним inc-файлы, соответствующие данной расчетной области. Нужно также взять из модели модуль `os_serv.f` (как его получить, написано в разделе A) и иметь соответствующие par-файлы.

Имея трехмерные поля в z-координатах и рельеф дна, можно приступить к переводу полей в сигма-систему координат. Это делается с помощью процедуры `z2s`. Перед работой с этой процедурой желательно создать фиктивную температурную маску, состоящую из одних нулей и размерностью  $(NX-4) \times (NY-4)$ , равной размерности значимой расчетной области на температурной сетке. Затем нужно добавить рамку из единиц, по две на каждую из границ маски. Полезно написать координаты точки (3,3) (т. е. левого нижнего угла необрамленной маски), шаг сетки и размеры в первой (для комментариев) строке, которая обязательно должна присутствовать. Учтите, что все эти параметры определены для новой (обрамленной) сетки! То есть, размеры по сравнению со значимыми увеличиваются на 4. Полученная маска размером  $(NX \times NY)$  полезна для подготовки данных, поскольку они будут определены на всей области, и при смене шаблона области их не нужно переделывать. О создании рабочего шаблона области будет сказано ниже.

Для работы процедуры `z2s` необходимо иметь файлы `z2s.f`, `os_serv.f` и соответствующие inc-файлы. Также нужно скопировать готовую топографию (соответствующую сетке) в рабочую директорию. Далее нужно скомпилировать программу `z2s.f` (из командной строки это делается командой `f90 z2s.f os_serv.f`), а заодно `mkpot.f` на этом шаге (`f90 mkpot.f os_serv.f`). Последняя программа переводит *in situ* температуру в потенциальную. Далее нужно вписать в `z2s.par` подходящие параметры. "Число 3D массивов" есть размерность полей по времени. Для Левитуса это 12 месяцев. Так, после исполнения `z2s`, получим наши соленость и *in situ* температуру в сигма-координатах. Теперь нужно перевести *in situ* температуру в потенциальную, используя `mkpot`. Структура `mkpot.par` такая же, как в `z2s.par`. Для создания начальных условий необходимо сделать выборку за определенный месяц (или момент времени) в наших 4-мерных полях. Это также можно сделать при помощи `DIOGIN`. Назовем эти файлы `cpss.dat` (для солености) и `cppt.dat` (для потенциальной температуры).

Модель автоматически обратится к файлам с такими именами для начальных условий. Нужно сохранить эти данные в отдельной директории (резервной), а также скопировать их в директорию (рабочую) текущего эксперимента. Из этой самой директории модель и берет НУ. Итак, НУ готовы.

### 6.3.2 Создание температурной маски расчетной области

Для работы модели нужно создать маску (шаблон области) "суша-вода" (суша - 1, вода - 0). Это можно сделать с помощью исходного файла топографии (сынтиерполированного на *температурную* сетку расчетного разрешения, но не отфильтрованного), написав простую программу. Важно учесть, что значимая температурная сетка размером  $(NX-4) \times (NY-4)$  сдвинута на полшага по отношению к сетке топографии, имеющей  $(NX-3) \times (NY-3)$ . Полезно создать файлы маски в двух форматах: в текстовом (для редактирования и модели) и в двоичном (для визуализации в GrADS), а также программы для перевода из одного формата в другой. После этого нужно будет настроить созданную маску вручную, используя GrADS для сопоставления маски с контурами материков, встроенными в него (используя "set gxout fgrid"). Далее нужно добавить рамку, состоящую из точек суши (т. е. 1) по две с каждой стороны маски. Эта (обрамленная) маска будет использоваться GridCon для создания всех остальных масок модели. И, наконец, осталось добавить в файл маски первую строчку с каким-либо комментарием. Все замечания по поводу размеров фиктивной маски, описанной выше, остаются справедливыми. Таким образом, получается рабочую маску, используемую при запуске модели.

При необходимости аналогичная маска создается дополнительно на географической сетке, если при расчетах на сетке, не являющейся географической, требуется стандартная географическая выдача.

#### 6.3.2.1 Использование GRIDCON для проверки входной температурной маски

Прежде всего, нужно скомпилировать основную исполняемую программу GRIDCON "grids07.exe". Для этого нужны grids07.f, oc\_serv.f, grids07.par и соответствующие inc-файлы, а также построенная Т-маска (обычно agr- или txt-файл). Затем запустить grids07.exe, лучше выходные данные послать в файл, например, наберите "grids07.exe > Grids07.lst". Программа анализирует входную маску и находит ошибки, а также дает рекомендации для установки оптимального параметра MLR (в 1BASINPAR.INC). Нужно вручную отредактировать маску, чтобы исправить ошибки (устранить изолированные точки), и затем запустить GRIDCON снова. Этот вариант GRIDCON используется в основном для предварительной проверки. В модели есть свой "GRIDCON".

### 6.3.3 Подготовка данных для задания условий на жидких границах

Чтобы произвести расчет с учетом жидких границ, необходимо подготовить файлы с данными температуры и солености на жидких границах. Это делается с помощью процедуры `lqbpgrp.f`. При трансляции нужно включить в проект файлы `lqbpgrp.f`, `os_serv.f` и `.inc`-файлы, соответствующие расчетной области. В файле `1LQBC.INC` задать максимальное число всех жидких точек (сначала можно с запасом, так как программа, закончив работу, выдаст нужное значение). Далее нужно создать файл маски `lqbmask.txt`. Для этого нужно скопировать рабочую температурную маску, затем открыть ее и отредактировать, заменив нули в нужных точках жидких участков на A, B, C и т.д., где символ A описывает точки 1-й границы, B – второй и т.д. После всего этого нужно транслировать проект с указанными выше файлами. Перед запуском исполняемого файла нужно поместить в директорию с программой файлы с данными температуры и солености в  $\sigma$ -системе координат и прописать их имена в файле `lqbpgrp.par`. Программа найдет по маске жидкие точки и выдаст два файла - `slbc.dat` и `tlbc.dat` с `.ctl`-файлами к ним. Эти файлы и маску к ним (`lqbmask.txt`) надо поместить в директорию с граничными условиями (там же должны лежать поверхностные температура и соленость). Перед запуском модели прописать в файле `oceanmodel.par` число всех жидких границ (раньше там, возможно стоял 0), а в файле `ostask.par` - пути к файлам `slbc.dat` и `tlbc.dat`. Теперь при запуске модели расчет будет производиться с учетом указанных жидких границ.

### 6.3.4 Особенности настройки модели и подготовки данных для глобального океана

Сначала нужно в файле `1BASINPAR.INC` поставить `NBASINS=4` (для отдельной меридиональной выдачи по каждому океану) и `MMD=MM-MMM+1` (для учета периодичности). Чтобы подготовить температурную маску, надо добавить в тот же файл снизу обычной T-маски строку с комментариями с размерами и параметрами водоемов. Затем копировать саму маску ниже этой комментарной строки. После этого указать в маске коды отдельные водоемы, заменяя "0" числами, соответствующими водоему: 2 – Атлантический, 3 – Тихий, 4 – Индийский. При необходимости аналогичная маска создается дополнительно на географической сетке, если при расчетах на сетке, не являющейся географической, требуется стандартная географическая выдача. При этом необязательно, чтобы коды бассейнов стояли точно в точках океана. Наоборот, желательно, чтобы они охватывали несколько точек суши, чтобы уменьшить ошибки расчета интегральных характеристик в случае интерполяции из модельной системы в географическую.

## 6.4 Схема работы модели

Ниже представлена схема работы модели. Основной список соответствует вызову основных процедур из головной программы `ostask.f`, при необходимости пункты основного списка детализируются. В скобках указываются имена процедур в программе.

Считывание параметров интегрирования по времени (`READPAR`), физических параметров модели и инициализация расчетной области (`OSPAR`).

Расчет координат жидких граничных точек (`LQPCOORDINATES`).

Считывание начальных условий для океана (`OCINICOND`) и льда (`ICINICOND`).

Расчет матрицы интерполяции с атмосферной на океаническую сетку (`BUILD_INTRP_MTRX`).

### **НАЧАЛО ЦИКЛА ПО ВРЕМЕНИ**

Интерполяция по времени на текущий модельный шаг поверхностных температуры и солёности (`OCSURF`), жидких граничных условий (`LQWVINT`) и атмосферного воздействия (`INIATMF`).

Пространственная интерполяция атмосферного воздействия на расчетную область и расчет напряжения трения ветра (`OCFORCING`).

Расчет блока морского льда (`SEAICE_MODULE_SPLIT`).

Расчет потоков тепла и соли в океан (`ATM_FLUXES`).

Расчет коэффициентов вертикального турбулентного обмена (`VERTICAL_MIXING_PARAMETRIZATION`).

Линеаризация скорости (`UV_LINEARIZATION`).

Сохранение компонентов горизонтальной скорости.

Расчет коэффициентов придонного трения (`BOTTOM_FRICTION`).

Расчет криволинейной адвекции (`SPHERIC_ADDDV`).

### **Модуль расчета температуры**

(`TEMPERATURE_TRANSPORT_DIFFUSION_NOSPLIT`).

Перенос-боковая диффузия (`TRANTS_AD_BASH_UNIDIF`).

Расчет проникающей радиации (`SWRADPEN`).

Вертикальная диффузия (`DIFF_Z_IMPL`)

Коррекция на жидких границах.

### **Модуль расчета солёности**

(`SALINITY_TRANSPORT_DIFFUSION_NOSPLIT`).

Перенос-боковая диффузия (TRANTS\_AD\_BASH\_UNIDIF).

Вертикальная диффузия (DIFF\_Z\_IMPL)

Коррекция на жидких границах.

### **Перенос-диффузия скорости u**

(U\_VELOCITY\_TRANSPORT\_DIFFUSION).

Горизонтальный перенос-диффузия по Y (TRYU).

Вертикальный перенос-диффузия (TRZU).

Горизонтальный перенос-диффузия по X (TRXU).

Фильтрация вязкостью 4-го порядка (GRIDVISCOSITYU4).

### **Перенос-диффузия скорости v**

(V\_VELOCITY\_TRANSPORT\_DIFFUSION).

Горизонтальный перенос-диффузия по Y (TRYV).

Вертикальный перенос-диффузия (TRZV).

Горизонтальный перенос-диффузия по X (TRXV).

Фильтрация вязкостью 4-го порядка (GRIDVISCOSITYV4).

**Расчет плотности (DENSITY\_DEFINITION).**

**Блок адаптации (ADAPTATION\_MODULE).**

1. Генерация движения за счет градиента давления

(U\_BY\_PRESSURE\_GRADIENT,

V\_BY\_PRESSURE\_GRADIENT).

Вычитание из скоростей баротропных составляющих (UBARK8).

Бароклинная адаптация (INTERNAL\_INERTIA\_OSCILLATION).

Баротропная адаптация (ATM\_PRESSURE\_GRADIENTS, SEALEVEL\_ZALRUS).

Расчет вертикальной скорости (WWINTC).

Возврат в скорости баротропных составляющих.

Накопление среднемесячных полей и их выдача раз в месяц (MONTHLY).

Запись результатов через некоторое число шагов (XYZ\_OUTPUT, XY\_OUTPUT, YZ\_OUTPUT, ICEOUTPUT).

Расчет, запись и печать интегральных характеристик через некоторое число шагов (OSTIMEOUT, ICETIMEOUT).

Запись контрольных точек и информации о завершеном модельном времени через некоторое число шагов (OCPWRITE, ICPWRITE).

### **КОНЕЦ ЦИКЛА ПО ВРЕМЕНИ**

Заключительная запись контрольных точек и информации о завершеном модельном

времени (OCPWRITE, ICPWRITE).

## Примечания

1. Для температуры и солености можно использовать старый алгоритм, где перенос выполняется по расщеплению. Для этого нужно в файле octask.f закомментировать вызов процедур TEMPERATURE\_TRANSPORT\_DIFFUSION\_NOSPLIT и SALINITY\_TRANSPORT\_DIFFUSION\_NOSPLIT, а вместо них раскомментировать TEMPERATURE\_TRANSPORT\_DIFFUSION\_SPLIT и SALINITY\_TRANSPORT\_DIFFUSION\_SPLIT. Тогда эти два блока в схеме будут выглядеть следующим образом:

### **Модуль расчета температуры**

(TEMPERATURE\_TRANSPORT\_DIFFUSION\_SPLIT).

Горизонтальный перенос-диффузия YZ (TRDTYZ).

Горизонтальная диффузия ZY (TRDTZY).

Поправка на изменение уровня океана (TS\_VAR\_BY\_SSH\_CHANGE).

Расчет проникающей радиации (SWRADPEN).

Вертикальный перенос-диффузия (TRZ3PR)

Горизонтальный перенос-диффузия XZ (TRDTXZ).

Горизонтальная диффузия ZX (TRDTZX).

Коррекция на жидких границах.

### **Модуль расчета солености**

(SALINITY\_TRANSPORT\_DIFFUSION\_SPLIT).

Горизонтальный перенос-диффузия YZ (TRDTYZ).

Горизонтальная диффузия ZY (TRDTZY).

Поправка на изменение уровня океана (TS\_VAR\_BY\_SSH\_CHANGE).

Горизонтальный перенос-диффузия XZ (TRDTXZ).

Горизонтальная диффузия ZX (TRDTZX).

Вертикальный перенос-диффузия (TRZ3PR).

Коррекция на жидких границах.

2. В случае, если нужна локальная выдача определенных характеристик, необходимо вручную отредактировать подпрограмму LOCAL\_OUTPUT в файле octask.par.

## 7 СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Agoshkov V.I., Zalesny V.B. Variational data assimilation technique in mathematical modeling of ocean dynamics. Pure and Applied Geophysics. 2012. DOI: 10.1007/s00024-011-0372-5.
- 2 Дианский Н.А., Багно А.В., Залесный В.Б. Сигма-модель глобальной циркуляции океана и ее чувствительность к вариациям напряжения трения ветра. Изв. АН. Физика атмосферы и океана. 2002. Т. 38, N. 4. с. 537-556.
- 3 Zalesny V.B. Mathematical model of the marine dynamics in sigma coordinate system, Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2005. V. 20, N.1, p. 97-113.
- 4 Zalesny V.B., Rusakov A.S. Numerical algorithm of data assimilation based on splitting and adjoint equation methods. Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 2007. V. 22. N. 2, p. 199-219.
- 5 Zalesny V.B., Gusev A.V. Mathematical model of the World ocean dynamics with algorithms of variational assimilation of temperature and salinity fields. Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 2009. V. 24. N. 2, p. 171-190.
- 6 Zalesny V.B., Marchuk G.I., Agoshkov V.I., Bagno A.V., Gusev A.V., Diansky N.A., Moshonkin S.N., Tamsalu R., Volodin E.M. Numerical simulation of large-scale ocean circulation based on the multicomponent splitting method. Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 2010. V. 25. N. 6, 581-609.
- 7 Zalesny V.B., Zakharova N.B., Gusev A.V. Four-dimensional problem of variational initialization of hydrophysical fields of the World Ocean. Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 2011. V. 26. N. 2, 209-229.
- 8 Захарова Н.Б., Лебедев С.А., Алгоритмы интерполяции и экстраполяции оперативных геофизических данных наблюдений. Сборник статей молодых ученых факультета ВМК МГУ, выпуск №6, 2009 г.
- 9 Levitus S., Boyer T.P., Conkright M.E., O'Brien T., Antonov J., Stephens C., Stathoplos L., Jonson D., Gelfeld R. World Ocean Database 1998. NOAA Atlas NESDIS 18, 1998, 346 p.
- 10 Яковлев Н.Г. Совместная модель общей циркуляции океана и эволюции морского льда в Северном Ледовитом океане. Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2003. Т. 39, № 3. С. 394-409.
- 11 Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. Наука, М., 1980, 535с.
- 12 Данилов А.А. Технология построения неструктурированных сеток. ЖВМиМФ, 2010. Т. 50. N 1, с. 146-163.
- 13 Данилов А.А. Способы построения трёхмерных поверхностных триангуляций и тетраэдральных сеток. Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. -2010. Т. 65.
- 14 Amante, C. and B. W. Eakins, ETOPO1 1 Arc-Minute Global Relief Model: Procedures, Data

- Sources and Analysis. NOAA Technical Memorandum NESDIS NGDC-24, 19 pp, March 2009.
- 15 Le Roux, D., Staniforth, A., Lin C.A., Finite elements for shallow-water equation ocean models // *Monthly Weather Review*, V.126, N.7, 1998, P. 1931–1951.
  - 16 Walters, R., Casulli, V. A robust, finite element model for hydrostatic surface water flows // *Communications in Numerical Methods in Engineering*, V.14, 1998, P.931–940.
  - 17 Cotter C., Ham D., Pain C. A mixed discontinuous/continuous finite element pair for shallow-water ocean modeling // *Ocean Modelling*. V.26, 2009, P.86–90.
  - 18 Raviart, Thomas. A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems // *Mathematical Aspects of the Finite Element Method*. Lecture Notes in Mathematics. Springer, Berlin, 1977, P.292–315.
  - 19 Оселедец И.В., О новом тензорном разложении // *ДАН*, 2009. Т. 427 №2. С. 168-169.
  - 20 Oseledets I.V., Approximation of  $2^d \times 2^d$  matrices using tensor decomposition, // *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* V. 31. N. 4 P. 2130-2145. 2010.
  - 21 Oseledets I.V., Tyrtshnikov E.E., Breaking the curse of dimensionality, or how to use SVD in many dimensions, *SIAM J. Sci. Comp*, V.31 N 5 P. 3744—3759 2009
  - 22 Агошков В.И. Методы оптимального управления и сопряженных уравнений в задачах математической физики. - М: ИВМ РАН, 2003.
  - 23 Агошков В.И., Ипатова В.М. Разрешимость задачи усвоения данных наблюдений в трехмерной модели динамики океана. *Дифференциальные уравнения*, 2007. Т. 43, №8, с. 1064 - 1075.
  - 24 Агошков В.И., Ипатова В.М. Теоремы существования для трехмерной модели динамики океана и задачи ассимиляции данных. *ДАН*, 2007. Т. 412, №2, с. 151 – 153.
  - 25 Agoshkov V.I., Gusev A.V., Dianski N.A., Oleinikov R.V. An algorithm for the solution of the ocean hydrothermodynamics problem with variational assimilation of the sea level function data. *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, 2007. V. 22, N. 2, 133-161.
  - 26 Агошков В.И., Лебедев С.А., Пармузин Е.И. Численное решение проблемы вариационного усвоения оперативных данных наблюдений о температуре поверхности океана. *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*, 2009. Т. 45, №1, с. 76-107.
  - 27 Агошков В.И., Пармузин Е.И., Шутяев В.П. Численный алгоритм вариационной ассимиляции данных наблюдений о температуре поверхности океана. *ЖВМ и МФ*, 2008. Т. 48, № 8, с. 1371-1391.
  - 28 Agoshkov V. , E. Botvinovsky , A. Gusev, S. Lebedev , E. Parmuzin and V. Shutyaev Variational data assimilation system INM-T1. *Geophysical Research Abstracts*. V. 10, EGU2008-A-08220, 2008.
  - 29 Agoshkov, V.I., V. M. Ipatova, V.B. Zalesny, E.I. Parmuzin, and V.P. Shutyaev, Problems of

Variational Assimilation of Observational Data into Ocean General Circulation Models and Methods for Their Solution, *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, 2010. V. 46. N 6, pp. 677-712.

30 Венцель М., Залесный В.Б. Усвоение данных в одномерной модели конвекции-диффузии тепла в океане. *Изв. АН. Физика атмосферы и океана*, 1996. Т. 32, №5, с. 613-629.

31 Фурсиков А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. – Новосибирск: Научная книга, 1999.

32 Шутяев В.П. Операторы управления и итерационные алгоритмы в задачах вариационного усвоения данных. – М.: Наука, 2001.

33 Blum J., Le Dimet F.-X., Navon I.M. (2008), Data assimilation for geophysical fluids, in Giarlet (Ed.): *Computational Methods for the Atmosphere and the Oceans. Special volume. Handbook of Numerical analysis. V. XIV. P. 377-434.*

34 Castruccio F., Verron J., Gourdeau L., Brancart J.-M., and Brasseur P. Joint altimetric and in-situ data assimilation using GRACE mean dynamic topography: 1993-1998 hindcast experiment in the Tropical Pacific Ocean. *Ocean Dynamics*, 2008. V.58, 43-63.

35 Lions J.-L. *Control Optimal des Systemes Gouvernes par des Equations aux Derivees Partielles.* Dunod, Paris, 1968.

36 Marchuk G.I. *Adjoint Equations and Analysis of Complex.* Kluwer, Dordrecht, 1995.

37 Marchuk G.I., Agoshkov V.I., Shutyaev V.P. *Adjoint Equations and Perturbation Algorithms in Nonlinear Problems,* CRC Press Inc., New York, 1996.

38 Marchuk G., Shutyaev V., Zalesny V. Approaches to the solution of data assimilation problems, in Menaldi J.L., Rofman E., Sulem A. (eds.) *Optimal Control and Partial Differential Equations,* IOS Press, Amsterdam, 2001, pp. 489-497.

39 Navon I.M. Data Assimilation for Numerical Weather Prediction: A Review, “Data Assimilation for Atmospheric, Oceanic and Hydrologic Applications”, (Eds., S.K. Park, L. Xu), Springer-Ferlag, Berlin Heidelberg, 2009, 475 pp.

40 Marchuk G.I., Zalesny V.B. A numerical technique for geophysical data assimilation problem using Pontryagin’s principle and splitting-up method. *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling,* 1993. V. 8, 311-326.

41 Gilbert J.-C., Lemarechal C. Some numerical experiment with variable storage quasi-Newton algorithms. *Math. Program.,* 1989, B25, 408-435.

42 Shankar, D., Vinayachandran, P., N., Unnikrishnan, A., S., and Shetye, S., R., 2002: The monsoon currents in the north Indian Ocean, *Progr. Oceanogr.* 52(1), pp.63-119.

43 Tomczak, M., and J.S. Godfrey, 2003: *Regional Oceanography.* Butler and Tanner Ltd., Great Britain, Parts 11–13, pp.175–228.

44 Marchuk G.I., Rusakov A.S., Zalesny V.B. and Diansky N.A. Splitting Numerical Technique

with Application to the High Resolution Simulation of the Indian Ocean Circulation. //Pure and Applied Geophysics, Volume 12, Issue 8-9, pp. 1407–1429.

45 Дианский Н.А., Залесный В.Б., Мошонкин С.Н., Русаков А.С. Моделирование муссонной циркуляции Индийского океана с высоким пространственным разрешением. // Океанология. 2006, Vol. 46, No. 5, pp. 650–671.

46 Moshonkin S.N., Alekseev G.V., Bagno, Gusev A.V., Diansky N.A., Zalesny V.B. Numerical modeling of the North Atlantic-Arctic Ocean-Bering Sea circulation in the 20th century. Russ. J. Numer. Anal. Math. Modeling. 2011. V. 26, № 2.

47 Мошонкин С.Н., Алексеев Г.В., Гусев А.В., Дианский Н.А., Залесный В.Б. Моделирование климатической изменчивости притока вод Атлантики в Северный Ледовитый океан и запаса пресных вод в Круговороте Бофорта. Известия РАН, сер. Физика атмосферы и океана. 2011. Т. 47, № 1.

48 Aukrust P., and Oberhuber J.M., 1995: Modelling of the Greenland, Iceland and Norwegian Seas with a coupled sea ice - mixed layer - isopycnal ocean model. J.Geophys.Res. Vol. 100. № C3. pp. 4771-4789.

49 Алексеев Г.В., А.В. Пнюшков, Н.Е.Иванов, И.М. Ашик, В.Т. Соколов. Комплексная оценка климатических изменений в морской Арктике с использованием данных МПГ 2007-2008. Проблемы Арктики и Антарктики. 2009. №1(81), с. 7-14.

50 Aagaard K., and E. C. Carmack. The role of sea ice and fresh water in the Arctic circulation. J. Geophys. Res. 1989. Vol. 94, pp. 14485-14498.

51 Alekseev G.V., Johannessen O.M., Korablev A.A., Ivanov V.V., and Kovalevsky D.V. Interannual variability in water masses in the Greenland Sea and adjacent areas. Polar Research. 2001. Vol. 20, No. 2, pp. 201-208.

52 Arctic Climatology Project. Environmental Working Group joint U.S.-Russian atlas of the Arctic Ocean – winter period / Edited by L. Timokhov and F. Tanis. Ann Arbor, MI: Environmental Research Institute of Michigan in association with the National Snow and Ice Data Center. 1998. CD-ROM.

53 Belkin I. M., S. Levitus, J. Antonov, and S. Malmberg ‘Great salinity anomalies’ in the North Atlantic. Progress in Oceanography. 1998. Vol. 41, Pergamon, pp. 1–68.

54 Carmack E. C. The Arctic Ocean’s freshwater budget: Sources, storage and export. “The freshwater budget of the Arctic Ocean”. NATO Science Series. Edited by E. L. Lewis. Kluwer Academic Press. 2000. 91. 126 p.

55 Dukhovskoy D. S., M. A. Johnson and A. Proshutinsky, 2004: Arctic decadal variability: An auto-oscillatory system of heat and fresh water exchange. Geophysical Research Letters. Vol. 31, L03302, doi:10.1029/2003GL019023.

- 56 Fahrbach, E., J. Meinke, S. Osterhus, G. Rohart U. Schauer, V. Tverberg, J. Verduin. Direct measurements of volume transports through Fram Strait // *Polar Research*. 2001. Vol. 20, N 2. P. 217-224.
- 57 Holloway G., et al. Water properties and circulation in Arctic Ocean models, *J. Geophys. Res.* 2007. Vol. 112, C04S03, doi:10.1029/2006JC003642.
- 58 Karcher M., F. Kauker, R. Gerdes, E. Hunke, and J. Zhang On the dynamics of Atlantic Water circulation in the Arctic Ocean, *J. Geophys. Res.* 2007. Vol. 112, C04S02, doi:10.1029/2006JC003630.
- 59 Kuzin V.I., E.N. Golubeva, and G.A. Platov, 2006: Numerical simulation of impurity and fresh water propagation in the Arctic-North Atlantic system. *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*. Vol. 21, No.4, pp. 321-343.
- 60 Large W. G., and S. G. Yeager Diurnal to Decadal Global Forcing for Ocean and Sea-Ice Models: The Data Sets and Flux Climatologies. Climate and Global Dynamics Division. National Center for Atmospheric Research. Boulder, Colorado. 2004. 113 pp.
- 61 Maslowski W., D. Marble, W. Walczowski, U. Schauer, J. L. Clement, and A. J. Semtner On climatological mass, heat, and salt transports through the Barents Sea and Fram Strait from a pan-Arctic coupled ice-ocean model simulation. *J. Geophys. Res.* 2004. Vol. 109, C03032, doi:10.1029/2001JC001039
- 62 McPhee M. G., A. Proshutinsky, J. H. Morison, M. Steele, and M. B. Alkire Rapid change in freshwater content of the Arctic Ocean. *Geophysical Research Letters*. 2009. Vol. 36, L10602; doi:10.1029/2009GL037525.
- 63 Polyakov I.V., V.A. Alexeev, G.I. Belchansky, I.A. Dmitrenko, V.V. Ivanov, S.A. Kirillov, A.A. Korablev, M. Steele, L.A. Timokhov, and I.Y. Yashayaev, 2008: Arctic ocean fresh water changes over the past 100 years and their causes. *Journal of Climate*. Vol 21, No. 2, pp. 364-384.
- 64 Proshutinsky A., R. H. Bourke, and F. A. McLaughlin, 2002: The role of the Beaufort Gyre in Arctic climate variability: Seasonal to decadal climate scales. *Geophys. Res. Lett.* Vol. 29(23), 2100, doi:10.1029/2002GL015847.
- 65 Proshutinsky A., J. Yang, R. Krishfield, R. Gerdes, M. Karcher, F. Kauker, C. Koeberle, S. Hakkinen, W. Hibler, D. Holland, M. Maqueda, G. Holloway, E. Hunke, W. Maslowski, M. Steele, J. Zhang Arctic Ocean Study: Synthesis of Model Results and Observations. EOS, TRANSACTIONS AMERICAN GEOPHYSICAL UNION. 2005. Vol. 86, No. 40, doi:10.1029/2005EO400003.
- 66 Proshutinsky A., R. Krishfield, M.-L. Timmermans, et al., 2009: The Beaufort Gyre Fresh Water Reservoir: state and variability from observations. *J. Geophys. Res.* Vol. 114, C00A10, 25 PP., 2009, doi: 10.1029/2008JC005104

- 67 Sea Ice Index. Sea Ice Animation Tool. National Snow and Ice Data Center. 2009. (см. на сайте: [http://nsidc.org/data/seaiice\\_index/archives/image\\_select.html](http://nsidc.org/data/seaiice_index/archives/image_select.html))
- 68 Steele M., R. Morley, and W. Ermold PHC: A global ocean hydrography with a high-quality Arctic Ocean. *J. Climate*. 2001. Vol. 14, Issue 9, pp. 2079–2087.
- 69 Treguier A.M. et al., 2005: The North Atlantic Subpolar Gyre in four high-resolution models. *J. Phys. Oceanogr.* Vol. 35, № 5. pp.757-774.
- 70 Worthington I.V., 1969: An attempt to measure the volume transport of Norwegian sea overflow water through the Denmark Strait. *Deep-Sea Research*. Vol. 16. Supplement. p. 421-432.
- 71 Марчук Г.И., Залесный В.Б., Ивченко В.О., 2010: Моделирование динамики бароклинного океана с вариационной инициализацией гидрофизических полей. В кн. *Современные проблемы динамики океана и атмосферы*. Триада ЛТД, Москва, с. 107-129.
- 72 Залесный В.Б., Ивченко В.О., 2010: Моделирование реакции глобальной циркуляции и регионального отклика Северного Ледовитого океана на аномалии внешнего воздействия. *Океанология*. Т. 50, № 6. С. 877-889.
- 73 Агошков В.И., Ипатова В.М., Залесный В.Б., Пармузин Е.И., Шутяев В.П., 2010: Задачи вариационной ассимиляции данных наблюдений для моделей общей циркуляции океана и методы их решения. *Известия РАН, сер. Физика атмосферы и океана*. Т. 46, № 6. С. 734-770.
- 74 Zalesny V.B., Marchuk G.I., Agoshkov V.I., Gusev F.V., Diansky N.A., Volodin E.M., Tamsalu R., 2010: Numerical modeling of the large-scale ocean circulation on the base of multicomponent splitting method. *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modeling*. V. 25, № 6.
- 75 Ipatova V.M., Agoshkov V.I., Kobelkov G.M., Zalesny V.B., 2010: Theory of solvability of boundary value problems and data assimilation problems for equations of ocean dynamics. *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modeling*. V. 25, № 6.
- 76 Агошков В.И., Залесный В.Б., 2010: Обратные задачи динамики океана и вариационная инициализация гидрофизических полей. В кн. *Фундаментальные проблемы океанологии: физика, геология, биология, экология*. ИО РАН, Москва.
- 77 Moshonkin S.N., Alekseev G.V., Vagno, Gusev A.V., Diansky N.A., Zalesny V.B., 2011: Numerical modeling of the North Atlantic-Arctic Ocean-Bering Sea circulation in the 20th century. *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modeling*. V. 26, № 2.
- 78 Zalesny V.B., Zakharova N.B., Gusev A.V., 2011: Four-dimensional problem of variational initialization of hydrophysical fields of the World Ocean. *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modeling*. V. 26, № 2, p. 209-229.
- 79 Мошонкин С.Н., Алексеев Г.В., Гусев А.В., Дианский Н.А., Залесный В.Б., 2011: Моделирование климатической изменчивости притока вод Атлантики в Северный Ледовитый океан и запаса пресных вод в Круговороте Бофорта. *Известия РАН, сер. Физика*

атмосферы и океана. Т. 47, № 1.

80 Madec G., Delecluse, P., Imbard, M., Lévy, C., 1999. OPA8.1 ocean general circulation model reference manual. In: Note du Pôle de modélisation. Paris, France, pp.91.

81 Pacanovsky R.C., Griffies S.M. The MOM 3.0 Manual. Geophysic Fluid Dynamics Laboratory. NOAA, Princeton, USA, 2000, 680 p.

82 Мошонкин С.Н., Дианский Н.А., Гусев А.В. Влияние взаимодействия Атлантики с Северным Ледовитым океаном на Гольфстрим // Океанология. 2007. Т. 47. № 2. С. 197–210.

83 Bryden D., San S., Bleck R. A new approximation of the equation of state for seawater, suitable for numerical ocean models// J. Geoph. Res. 1999. V. 104, No. C1. P. 1537–1540

84 Агошков В.И., Владимиров В.С., Волович И.В., Дымников В.П., Шутяев В.П. Метод сопряженных уравнений и анализ сложных систем. Т.1. Вычислительная математика. Москва: Наука, 257-342, 2005.

85 Korotaev G.K., Oguz T., Dorofeev V.L., Demyshev S.G., Kubryakov A.I., Ratner Y.B. Development of Black Sea nowcasting and forecasting system. Ocean Sci. Discuss, 8, 917-954, 2011.

86 Blumberg A.F., Mellor G.L. Diagnostic and prognostic numerical circulation studies of the South Atlantic Bight // J. Geophys. Res. 1983. V. 88. P. 4579–4592.

87 Zalesny V.B, Diansky N.A., Fomin V.V., Moshonkin S. N., Demyshev S.G. Numerical model of the circulation of the Black Sea and the Sea of Azov. Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. V 27, No 1, 95-111, 2012.

88 Oseledets I.V. Tyrtysnikov E.E. Algebraic wavelet transform via quantics tensor train decomposition // SIAM J. Sci. Comput. 2011. V. 31, № 3. P.1315-1328.

89 Oseledets I.V. Tensor-train decomposition // SIAM J. Sci. Comput. 2011. V. 33, № 5. P.2295-2317.

90 Oseledets I.V. DMRG approach to fast linear algebra in the TT-format // Comput. Meth. Appl. Math. 2011. V. 10, № P.382-393.

91 Agoshkov V.I., Parmuzin E.I., Zakharova N.B. The study and numerical solution of the inverse problem of heat flows in the ocean dynamics model based on ARGO buoys data // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2011. V. 26, № 3. P.231-261.

92 Vassilevski Yu., Kapyrin I., Danilov A., Nikitin K. Application of nonlinear monotone finite volume schemes to advection-diffusion problems // Finite Volumes for Complex Applications VI - Problems & Perspectives. 2011. V. 1. P.761-769.

93 Danilov A., Vassilevski Yu. Benchmark 3D: A monotone nonlinear finite volume method for diffusion equations on polyhedral meshes // Finite Volumes for Complex Applications VI - Problems & Perspectives. 2011. V. 2. P.193-203.