

Московский государственный университет
им. М.В.Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Ю.В.Василевский

М.А. Ольшанский

**Краткий курс по многосеточным методам
и методам декомпозиции области**

Аннотация

В кратком курсе излагаются основы многосеточных методов и методов декомпозиции области и рассматриваются приложения методов к численному решению задач математической физики. В книгу вошли геометрический многосеточный метод, включая V-цикл, W-цикл и ВРХ-переобуславливатель, методы декомпозиции типа Неймана – Дирихле, Шварца и интерфейсные переобуславливатели. Книга дополняет стандартные учебники по численным методам и рассчитана на студентов старших курсов и аспирантов. Она может служить учебным пособием к практикуму по численным методам и основой для одно-семестрового курса лекций. Книга может быть полезной для исследователей в области численного анализа.

Москва 2007 год

Оглавление

1	Метод конечных элементов	9
1.1	Слабое решение уравнения	9
1.2	Метод конечных элементов	13
1.3	Арифметическая сложность решения систем уравнений	19
2	Многосеточный метод	21
2.1	Двухсеточный метод	21
2.1.1	Сглаживающее свойство базовых итерационных методов	21
2.1.2	Коррекция с грубой сетки	23
2.1.3	Продолжение, проектор, оператор на грубой сетке	24
2.1.4	Матрица итераций	26
2.1.5	Сходимость для модельной задачи	27
2.2	Многосеточный метод	28
2.2.1	V- и W-циклы	30
2.2.2	Предсглаживание и постсглаживание. Матрица итераций	32
2.3	Сходимость многосеточного метода	34
2.3.1	Сходимость W-цикла	35
2.3.2	Свойства сглаживания и аппроксимации	37
2.3.3	Случай самосопряженной задачи	38
2.4	Анализ многосеточного метода на примере задачи Пуассона	39
2.4.1	Проверка свойства аппроксимации	42
2.4.2	Свойство сглаживания	44
2.5	Многосеточный метод как переобуславливатель	47
2.5.1	Аддитивный многосеточный метод	50
2.5.2	Метод параллельной коррекции на подпространствах	52
2.5.3	ВРХ переобуславливатель	54
2.5.4	Сходимость метода параллельной коррекции на подпространствах	55
2.6	Оценка для ВРХ-переобуславливателя на примере задачи Пуассона	57
2.7	Неравномерное измельчение и метод иерархических базисов	60
2.8	Алгебраический многосеточный метод	64
3	Методы декомпозиции области	71
3.1	Основные приложения методов декомпозиции области	71
3.2	Математические основы методов декомпозиции	73
3.2.1	Условие сшивки	73
3.2.2	Теорема о продолжении и теорема о следах	75
3.2.3	Уравнение Пуанкаре-Стеклова	76
3.3	Метод итераций Нейман-Дирихле	78
3.3.1	Дифференциальная формулировка	78
3.3.2	Итерации Нейман-Дирихле в терминах уравнения Пуанкаре-Стеклова	81
3.3.3	Итерации Нейман-Дирихле в терминах билинейных форм	81
3.3.4	Итерации Нейман-Дирихле в матричной форме	82
3.3.5	Матричный аналог уравнения Пуанкаре - Стеклова	83
3.3.6	Переобуславливатель Нейман-Дирихле	85
3.4	Метод итераций Нейман-Нейман	88
3.5	Метод итераций Дирихле-Дирихле	89
3.6	Метод Шварца	92

Введение

Рассмотрим задачу нахождения решения системы алгебраических уравнений

$$Ax = b, \quad \text{где } A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x, b \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Предположим, что определитель матрицы A отличен от нуля, а размерность n достаточно большая, поэтому задача требует использования компьютера. Оставляя в стороне важные вопросы, связанные с конечной машинной арифметикой, посмотрим на возможные подходы решения этой задачи с точки зрения вычислительной сложности. Вычислительной сложностью алгоритма называют число элементарных арифметических и логических действий, которое необходимо произвести для решения задачи. Легко убедиться, что для матриц A достаточно общего вида вычислительная сложность метода исключений Гаусса и его вариантов равна $O(n^3)$ при $n \rightarrow \infty$. Такой же асимптотикой по n обладают и другие стандартные методы нахождения точного решения (1), описание которых можно найти в большинстве учебников по вычислительной математике.¹ Данная зависимость вычислительной сложности от n для метода решения (1) не является неулучшаемой. Действительно, мощность множества входных и выходных данных для этой задачи равна $n^2 + 2n$ (количество элементов матрицы и векторов правой части и решения), поэтому теоретически оптимальной вычислительной сложностью алгоритма для ее решения является $O(n^2)$ при $n \rightarrow \infty$. Как построить алгоритм решения (1), обладающий оптимальной или близкой к оптимальной вычислительной сложностью, если такой алгоритм существует? Этот вопрос считается одним из самых трудных и важных в вычислительной линейной алгебре. Он остается открытым уже долгое время.

К счастью, во многих практических задачах требуется нахождение решения системы уравнений (1) с матрицей A не произвольного вида, а имеющей специальную структуру или некоторые заранее известные свойства. В этом случае иногда удается строить алгоритмы оптимальной вычислительной сложности. Так, в частности, обстоит дело при численном решении многих систем уравнений в частных производных, имеющих физический подтекст. После дискретизации (один из возможных способов дискретизации рассмотрен в первой

¹Существуют специальные методы, с немного лучшей асимптотикой по n . Эти методы, однако, не получили широкого распространения по разным причинам, среди которых неустойчивость к накоплению ошибок округления и сложность реализации.

части книги) и, возможно, линеаризации дифференциальных уравнений возникают системы алгебраических уравнений с матрицами, обладающими свойством разреженности — число ненулевых элементов в матрицах растет, как $O(n)$ при $n \rightarrow \infty$. Как следствие, оптимальный алгоритм решения задачи должен иметь сложность $O(n)$. Оптимальные алгоритмы решения систем с разреженными матрицами известны. Каждый из них имеет свою область применимости. Наиболее распространенным, благодаря своей универсальности, является *многосеточный метод*. Об этом алгоритме пойдет речь во второй части книги. Третья часть посвящена методам декомпозиции области, позволяющим комбинировать известные технологии решения задач в подобластях для эффективного решения исходной системы алгебраических уравнений. Практичность, эффективность и солидный теоретический фундамент, которым обладают многосеточный метод и метод декомпозиции области, привели к тому, что их использование стало по факту стандартом во многих прикладных пакетах, как коммерческих так и находящихся в свободном доступе, а без знания основ этих алгоритмов трудно понять значительную часть современных научных публикаций по вычислительной математике и моделированию. Эти соображения привели нас к созданию краткого курса лекций, где практическая и теоретическая составляющая методов излагалась в достаточном для первого знакомства объеме, но в тоже время компактно и доступно. Такой курс читался авторами несколько лет в Московском Государственном Университете им. М.В.Ломоносова. Книга базируется на этих лекциях, а также на опыте преподавания авторов на кафедре вычислительных технологий и моделирования факультета ВМиК и кафедре вычислительной математики Механико-математического факультета.

Введение было бы неполным без краткой истории вопроса. Историю многосеточных методов принято исчислять с работ российских математиков Федоренко [14, 15] (1961,1964), Бахвалова [4] (1966) и Астраханцева [3] (1971). Однако в те годы их работы не привлекли широкого внимания, и метод посчитали непрактичным. Позже многосеточный метод был “открыт” заново в работе Брандта [18] (1973), но только начиная с другой статьи Брандта [19] (1977), метод получил признание, и количество публикаций стало стремительно расти. Современная теория метода была заложена в начале 80-х годов, и заметным событием можно назвать выход монографии Хакбуша [22] (1985) со строгим изложением абстрактной теории и описанием многих приложений. В настоящее время многосеточным методам посвящена огромная библиография, насчитывающая, в том числе, более

десятка книг, однако, в русскоязычной литературе им уделено относительно мало внимания. Из книг можно назвать монографию Шайдурова [16], требующую от читателя серьезной подготовки в области численного анализа, и недавно вышедшую книгу одного из авторов [11].

История методов декомпозиции начинается с метода Шварца итерирования по подобластям [30] (1869), предложенного для доказательства существования решения эллиптического уравнения в составной области. Долгое время методы декомпозиции оставались исключительно инструментом теоретического анализа [12] (1936), пока в 50-х годах не пришло осознание их потенциала для эффективного итерационного решения сеточных систем на компьютерах, см., например, [29] (1953), [2] (1958). Начиная с 60-х годов количество статей по развитию и приложениям этих методов стало неуклонно возрастать. основополагающей работой, заложившей теоретические основы методов декомпозиции в вычислительной математике, является статья Мацокина и Непомнящего [10] (1985). Получив название теории аддитивного метода Шварца, эти результаты были открыты “заново” в ряде других работ (см., например [35]). Одними из первых книг по методам декомпозиции области были монографии Лебедева и Агошкова [7] (1983), [8] (1986). Среди других заметных монографий выделим книги Смита, Бьорстада, Грошпа [31] и Квартерони, Валли [27].

Построение материала в книге следующее. В первой главе пойдет речь о методе конечных элементов для эллиптических уравнений в частных производных. Метод конечных элементов служит для сведения дифференциального уравнения к системе алгебраических уравнений. Свойства этого метода существенно используются как в многосеточных методах, так и в методах декомпозиции. Вторая глава посвящена многосеточному методу. В третьей главе рассматривается группа методов декомпозиции области.

на границе Ω . Скалярное произведение в $H^1(\Omega)$ (и в $H_0^1(\Omega)$) задается равенством

$$(u, v)_{H^1} := \int_{\Omega} (u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) + \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x},$$

где символ “ \cdot ” обозначает скалярное произведение в \mathbb{R}^d . Пространства $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ и $H_0^1(\Omega)$ являются гильбертовыми. Пусть Γ — подобласть $\partial\Omega$, через $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ обозначим пространство следов функций из $H^1(\Omega)$ на Γ . Подробно о введенных выше пространствах и о понятии следа функции можно прочесть в [6]. След $v \in H^1(\Omega)$ на Γ будем обозначать $v|_{\Gamma}$. Если $v \in C^0(\overline{\Omega})$, то $v|_{\Gamma}(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x})$, для всех $\mathbf{x} \in \Gamma$.

Для функций из $H_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство Фридрихса:

$$\left(\int_{\Omega} u^2 \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} \leq C(\Omega) \left(\int_{\Omega} (\nabla u)^2 \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.1)$$

Здесь и далее $C(\Omega)$ или, просто, C , c , C_1 , c_1, \dots обозначают некоторые положительные константы, зависящие только от области Ω , конкретное значение которых для наших целей не существенно. Из неравенства Фридрихса следует, что на пространстве $H_0^1(\Omega)$ можно ввести скалярное произведение

$$(u, v)_1 := \int_{\Omega} \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

причем нормы $\|\cdot\|_{H^1}$ и $\|\cdot\|_1$ будут эквивалентны¹.

В качестве простого примера рассмотрим вначале одномерное уравнение диффузии:

$$-(k(x)u')' = f \quad \text{на } (0, 1), \quad (1.2)$$

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (1.3)$$

Будем предполагать, что $k(x)$ — кусочно-непрерывная на $(0, 1)$ функция, и $1 \leq k(x) \leq K$. Умножим (1.2) на произвольную функцию $v(x) \in H_0^1(0, 1)$ и проинтегрируем полученное равенство по частям

¹Две нормы $\|\cdot\|_a$ и $\|\cdot\|_b$ называют эквивалентными на H , если существуют положительные константы c и C , такие что

$$c\|v\|_a \leq \|v\|_b \leq C\|v\|_a$$

для любого элемента v пространства H .

Глава 1

Метод конечных элементов

1.1 Слабое решение уравнения

В этом разделе мы рассмотрим основы метода конечных элементов для эллиптических уравнений в частных производных. Метод конечных элементов служит для сведения численного решения дифференциального уравнения к решению системы алгебраических уравнений. На примере модельной задачи будет показано, как вывести слабую постановку дифференциальной задачи и далее получить систему алгебраических уравнений, решение которой требуется найти численно с помощью компьютера. Мы обсудим основные утверждения о сходимости метода конечных элементов. Эти утверждения в дальнейшем необходимы для анализа многосеточных методов. Подробно с методом конечных элементов можно ознакомиться в классической книге Сьярле [13].

Договоримся использовать стандартные обозначения. Пусть Ω — область в \mathbb{R}^d с границей $\partial\Omega$, удовлетворяющей условию Липшица. Обозначим через $L_2(\Omega)$ — пространство интегрируемых по Лебегу функций на Ω , с конечным интегралом $\int_{\Omega} v^2(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$; интеграл $\int_{\Omega} u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ задает на $L_2(\Omega)$ скалярное произведение; $C^k(\Omega)$ — пространство функций k раз непрерывно дифференцируемых на Ω ; $H^k(\Omega)$ — пространство интегрируемых на Ω функций, имеющих обобщенные (в том числе смешанные) производные порядка $0, \dots, k$ из $L_2(\Omega)$; $H_0^1(\Omega)$ — пространство функций из $H^1(\Omega)$ с нулевым следом

от 0 до 1. Благодаря нулевым граничным условиям для $v(x)$, приходим к соотношению:

$$\int_0^1 k(x)u'v' dx = \int_0^1 fv dx \quad \forall v(x) \in H_0^1(0,1). \quad (1.4)$$

Функция u из $H_0^1(0,1)$, удовлетворяющая (1.4), называется *слабым* решением (1.2)–(1.3). Если интеграл в правой части (1.4) задает линейный ограниченный функционал на $H_0^1(0,1)$, то решение (1.4) существует и единственно². Более того, если решение (1.4) $u(x)$ и коэффициент $k(x)$ суть гладкие функции (например, $u \in C^2(0,1)$, $k \in C^1(0,1)$), то можно проверить, что $u(x)$ является также решением (1.2)–(1.3) в сильном (обычном) смысле.

Рассмотрим уравнение (1.2) с другими краевыми условиями, например,

$$u(0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1) = a. \quad (1.5)$$

Для задания правильной слабой формулировки вместо $H_0^1(0,1)$ в качестве основного пространства (пространства, где ищется решение) надо выбрать подпространство \bar{H}^1 функций из $H^1(0,1)$, удовлетворяющих условию Дирихле *только* на левом краю отрезка: $u(0) = 0$. После интегрирования по частям, как в предыдущем примере, получим равенство

$$\int_0^1 k(x)u'v' dx = \int_0^1 fv dx + av(1) \quad \forall v(x) \in \bar{H}^1. \quad (1.6)$$

Функция u из \bar{H}^1 , удовлетворяющая равенству (1.6), является *слабым* решением уравнения (1.2) с краевыми условиями (1.5). Условия Неймана в точке $x = 1$ учтены в интегральном соотношении (1.6). Из леммы Лакса-Мильграма снова следует существование и единственность слабого решения. Если это решение оказывается достаточно гладкой функцией, то оно удовлетворяет уравнению (1.2) и краевым условиям (1.5) в обычном смысле.

На примере одномерного уравнения диффузии видно, что слабое решение есть обобщение понятия обычного решения дифференциального уравнения на случай, когда данные задачи недостаточно

² Результат следует из леммы Лакса-Мильграма: если $a(u, v)$ — билинейная непрерывная форма на гильбертовом пространстве H , такая что $a(v, v) \geq c\|v\|^2$ для любого элемента из H , а $f(u)$ — линейный ограниченный функционал на H , то существует единственное $u \in H$, удовлетворяющее равенству

$$a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in H.$$

гладкие, — заметим, правой частью в слабой формулировке может служить произвольный линейный ограниченный функционал на H^1 .

В более общем случае краевая задача для эллиптического уравнения в частных производных имеет вид

$$-\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{i,j}(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j}) + \sum_{i=1}^d b_i(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(\mathbf{x})u = f, \quad (1.7)$$

$$u|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} = h,$$

где $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$, $\text{mes}\Gamma_1 > 0$, коэффициенты являются измеримыми ограниченными функциями и выполнено условие (равномерной) эллиптичности: $0 < c_0 \leq \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(\mathbf{x})\xi_i\xi_j \quad \forall \xi_i, \xi_j \in \mathbb{R}^d$. Слабая постановка состоит в нахождении решения $u \in \tilde{H}^0$:

$$a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in \tilde{H}^0. \quad (1.8)$$

Билинейная форма, функционал в (1.8) и пространство \tilde{H}^0 определяются ниже

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^d b_i(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j} v + c(\mathbf{x})uv dx,$$

$$f(v) = \int_{\Omega} fv dx + \int_{\Gamma_2} hv ds, \quad \tilde{H}^0 := \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_1} = 0\}.$$

Для слабого решения эллиптической задачи нетрудно получить *априорные оценки*, т.е. оценки некоторых норм решения, не требующие нахождения самого решения. Например, если в (1.4) подставить $v = u$ и для оценки правой части равенства последовательно воспользоваться неравенством Коши: $|(f, u)| \leq \|f\| \|u\|$, где (\cdot, \cdot) — скалярное произведение в $L_2(0,1)$, и неравенством Фридрихса $\|u\| \leq c\|u'\|$, то, учитывая $1 \leq k(x)$, получим

$$\left(\int_0^1 u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^1 (u')^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq c \left(\int_0^1 f^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Если дополнительно предположить, что $k(x) \in C^1(0,1)$, то можно получить оценку и на норму второй производной (см. подробнее в [11]):

$$\left(\int_0^1 (u'')^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left(\int_0^1 f^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Данные неравенства являются основными априорными оценками для решения задачи (1.2)–(1.3). Заметим, что для получения оценки на вторую производную понадобилось дополнительное предположение на “гладкость” данных в задаче: $k(x) \in C^1(0, 1)$.

В общем случае, для однозначной разрешимости (1.7) достаточно потребовать коэрцитивности билинейной формы $a(\cdot, \cdot)$:

$$a(v, v) \geq c \|v\|_1^2 \quad \forall v \in \tilde{H}^0, \quad c > 0.$$

Данное условие будет выполнено, если, например, дополнительно предположить положительность $c(\mathbf{x})$ и малость норм коэффициентов $b_i(\mathbf{x})$ (см. [6]). В этом случае для слабого решения (1.7) априорные оценки также имеют место. Так, при однородных краевых условиях справедлива оценка

$$\|u\|_{H^1} \leq C_1 \|f\|_{L_2}. \quad (1.9)$$

Положительная константа C_1 может зависеть от Ω , Γ_1 и коэффициентов уравнения. С оценкой на норму вторых производных в общем случае дело обстоит немного сложнее. В многомерном случае помимо дополнительных условий на гладкость коэффициентов уравнения необходимы ограничения на форму области. Так, если Ω выпуклая, или $\partial\Omega$ — кусочно-гладкая без входящих углов, а коэффициенты уравнения суть гладкие функции, то имеет место оценка

$$\|u\|_{H^2} \leq C_2 \|f\|_{L_2}, \quad (1.10)$$

то есть решение внутри области будет гладким. Если же область Ω имеет, например, входящий угол, то в окрестности этого угла вторые производные решения могут быстро расти и интеграл от их квадрата будет расходиться, т.е. норма $\|u\|_{H^2}$ не будет ограниченной. Подробнее о зависимости гладкости решения от гладкости коэффициентов и границы можно прочесть в [6], а о поведении решения в окрестностях угловых точек границы (и ребер в трехмерном случае) в [5, 21].

1.2 Метод конечных элементов

Метод конечных элементов служит для приближенного решения дифференциальных уравнений. Объясним его принципы на примере уравнения (1.2)–(1.3). Основой для метода конечных элементов является слабая постановка задачи.

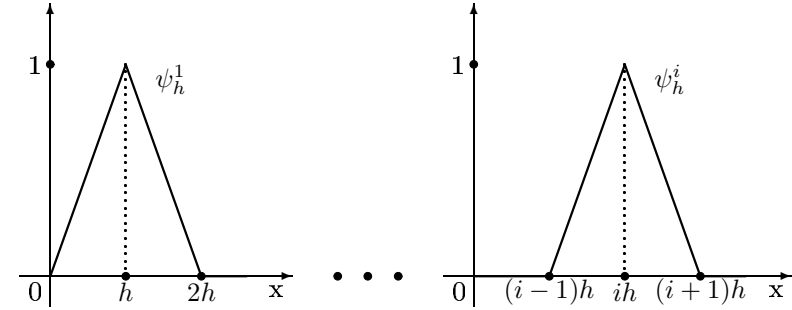


Рис. 1.1: Базисные функции для кусочно-линейных элементов.

Выберем пространство \mathbb{U}_h конечной размерности, аппроксимирующее пространство $H_0^1(0, 1)$ и такое, что $\mathbb{U}_h \subset H_0^1(0, 1)$. Что понимается под словами “ \mathbb{U}_h аппроксимирует $H_0^1(0, 1)$ ”, станет понятнее позже. Самый простой пример \mathbb{U}_h — кусочно-линейные непрерывные функции на $[0, 1]$ относительно разбиения $[0, 1]$ на N равных отрезков длины h . Для функций из \mathbb{U}_h потребуем также выполнения граничных условий $v_h(0) = v_h(1) = 0$. Конечно-элементным решением задачи (1.2)–(1.3) называется функция u_h из \mathbb{U}_h , удовлетворяющая равенству

$$\int_0^1 k(x) u_h' v_h' dx = \int_0^1 f v_h dx \quad \forall v_h(x) \in \mathbb{U}_h. \quad (1.11)$$

Так как \mathbb{U}_h — пространство конечной размерности, то поиск решения (1.11) может быть сведен к решению системы алгебраических уравнений. На практике это можно сделать, выбрав в \mathbb{U}_h какой-либо базис. Например, пусть $\{\psi_h^i\}$, $i = 1, \dots, N-1$ — базис в \mathbb{U}_h из функций вида, изображенного на рис. 1.1

$$\psi_h^i(x) = \begin{cases} \frac{x}{h} - (i-1), & x \in [(i-1)h, ih], \\ -\frac{x}{h} + i + 1, & x \in [ih, (i+1)h], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В силу линейности (1.11) относительно v_h достаточно потребовать выполнение $(N-1)$ -ого уравнения вида

$$\int_0^1 k(x) u_h' (\psi_h^i)' dx = \int_0^1 f \psi_h^i dx \quad i = 1, \dots, N-1 \quad (1.12)$$

Если (1.12) выполняется, то (1.11) также имеет место.

Решение u_h будем искать в виде разложения по базисным функциям. Пусть z_h — вектор коэффициентов $\{z_i\}$ разложения u_h по базису $\{\psi_h^i\} : z_h \in \mathbb{R}^{N-1}$

$$u_h = \sum_{i=1}^{N-1} z_i \psi_h^i. \quad (1.13)$$

Подставим разложение (1.13) в (1.12). Соотношение (1.12) сводится к системе линейных алгебраических уравнений, где неизвестным является вектор коэффициентов $z_h \in \mathbb{R}^{N-1}$:

$$A_h z_h = f_h. \quad (1.14)$$

Матрица A_h называется *матрицей жесткости*. Элементы матрицы жесткости и правая часть вычисляются по формулам

$$A_h = \{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,N-1}, \quad f_h = \{f_i\}_{i=1,\dots,N-1},$$

$$a_{ij} = \frac{1}{h} \int_0^1 k(x) (\psi_h^j)' (\psi_h^i)' dx, \quad f_i = \frac{1}{h} \int_0^1 f \psi_h^i dx. \quad (1.15)$$

Появление масштабирующих множителей $\frac{1}{h}$ перед скалярными произведениями поясним чуть позже.

Рассмотрим в \mathbb{R}^{N-1} скалярное произведение и норму :

$$\langle y, z \rangle := \sum_{i=1}^{N-1} h y_i z_i, \quad \|y\| := \langle y, y \rangle^{1/2}. \quad (1.16)$$

Новое пространство будем обозначать через \mathbb{R}_h . Оно отличается от \mathbb{R}^{N-1} определением скалярного произведения. Равенство (1.13) задает изоморфизм $P_h : \mathbb{R}_h \rightarrow \mathbb{U}_h$ между пространством функций \mathbb{U}_h и \mathbb{R}_h , пространством коэффициентов в разложении функций по базису. При этом, с некоторыми константами c и C , не зависящими от h , выполнено

$$c \|z\| \leq \|P_h z\|_0 \leq C \|z\|, \quad (1.17)$$

где $\|\cdot\|_0$ обозначает L_2 -норму. Появление множителя h в определении скалярного произведения (1.16) необходимо для выполнения неравенств (1.17) с константами эквивалентности, не зависящими от h . В свою очередь, появление множителей $\frac{1}{h}$ перед скалярными произведениями в определении элементов матрицы A_h и правой части f_h необходимо для установления весьма полезного соотношения

(1.18). Из (1.15) и (1.16) следует, что для произвольных $z, y \in \mathbb{R}_h$ и $u_h = P_h z, v_h = P_h y$ выполняется соотношение

$$\langle A_h z, y \rangle = \int_0^1 k(x) u_h' v_h' dx, \quad (1.18)$$

которое служит альтернативой (1.15) для определения матрицы жесткости A_h . Именно определение (1.18) будет удобно использовать при анализе многосеточных методов.

Так как носитель базисной функций ψ_h^i в методе конечных элементов обычно имеют непустое пересечение только с носителями нескольких соседних базисных функций, то большинство элементов матрицы жесткости равны нулю. В простых случаях матрицу A_h легко найти явно. Например, для $k(x) = 1$ матрица A_h размерности $(n-1) \times (n-1)$ из (1.14) имеет вид :

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \mathbf{0} \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ \mathbf{0} & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

В случае краевых условий (1.5) в качестве \mathbb{U}_h выбираем пространство кусочно-линейных функций на $[0, 1]$, равных нулю в точке $x = 0$. На правом конце никаких условий не накладывается, что соответствует добавлению еще одной базисной функции — “пол-пирамидки” в точке $x = 1$. В этом случае матрица жесткости размерности $n \times n$ имеет вид

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \mathbf{0} \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ \mathbf{0} & & & & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В качестве еще одного примера рассмотрим двумерную задачу Пуассона: найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \quad \text{в } \Omega = (0, 1) \times (0, 1), \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (1.19)$$

Умножая (1.19) на произвольную функцию $v(x, y)$ из $H_0^1(\Omega)$ и интегрируя по частям, получаем слабую постановку задачи: найти

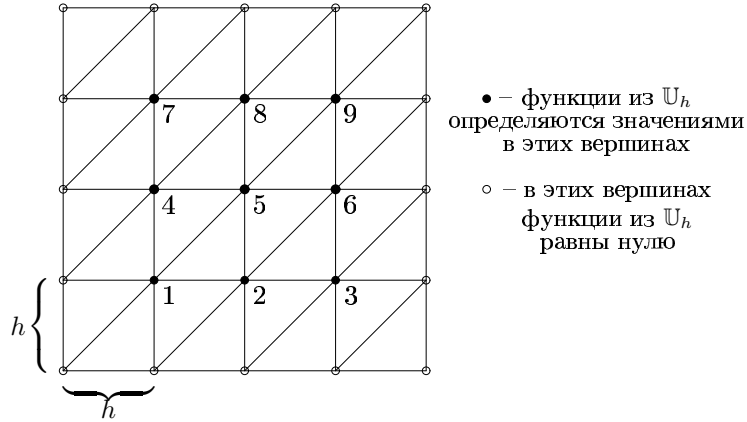


Рис. 1.2: Разбиение области и нумерация вершин для кусочно-линейных элементов.

$u \in H_0^1(\Omega)$, удовлетворяющую равенству

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 f v dx dy \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (1.20)$$

Аналогично задаче диффузии, метод конечных элементов состоит в замене гильбертова пространства $H_0^1(\Omega)$ в (1.20) на конечномерное пространство \mathbb{U}_h . Для построения \mathbb{U}_h разобьем область на элементарные треугольники, как это показано на рисунке 1.2. Пусть \mathbb{U}_h — пространство всех кусочно-линейных (т.е. линейных на каждом треугольнике) функций, непрерывных во всей области Ω и зануляющихся на $\partial\Omega$. Ясно, что любая функция из \mathbb{U}_h полностью определяется своими значениями в вершинах треугольников разбиения. Занумеруем все внутренние, т.е. лежащие внутри области, вершины каким-либо образом; например, как это сделано на рисунке 1.2. В качестве i -ой базисной функции возьмем функцию из \mathbb{U}_h , принимающую значение 1 в i -ой вершине и 0 во всех остальных вершинах. Матрица A_h , определяемая соотношением (1.18), показана ниже

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} T_1 & -I & & \mathbf{0} \\ -I & T_2 & -I & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ \mathbf{0} & & -I & T_n \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

Блок T является матрицей $n \times n$ и имеет вид:

$$T_k = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & \mathbf{0} \\ -1 & 4 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ \mathbf{0} & & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

а I обозначает единичную матрицу порядка n .

Теперь расшифруем, что означает высказывание “пространство \mathbb{U}_h аппроксимирует пространство $H^1(\Omega)$ ”. Для этого вернемся на время к одномерному случаю. Предположим, что v — некоторая функция из $H^1(0, 1)$, тогда для любого заданного $\varepsilon > 0$ существует $h > 0$, т.е. достаточно мелкое разбиение отрезка $(0, 1)$, такое, что $\|v - v_h\|_{H^1} < \varepsilon \|v\|_{H^1}$ для некоторой $v_h \in \mathbb{U}_h$. Однако даже при фиксированном ε необходимый параметр разбиения h может быть сколь угодно мал, в зависимости от “поведения” конкретной функции v . Такая ситуация не является удовлетворительной, поэтому аппроксимационные свойства пространства \mathbb{U}_h принято формулировать для тех элементов $H^1(\Omega)$, которые имеют дополнительную гладкость, например, принадлежат $H^2(\Omega)$. В одномерном случае примером аппроксимационных свойств служит оценка (см. [11])

$$\inf_{v_h \in \mathbb{U}_h} \int_0^1 (v' - v_h')^2 dx \leq h^2 \int_0^1 (v'')^2 dx \quad \forall v \in H^2(0, 1).$$

В многомерном случае ситуация несколько сложнее. Разбиение области (на треугольники, тетраэдры и т.п.) должно удовлетворять некоторым условиям регулярности. Опуская детали, которые можно прочесть в [13], будем предполагать, что имеет место свойство

$$\inf_{v_h \in \mathbb{U}_h} \|v - v_h\|_{H^1} \leq ch \|v\|_{H^2} \quad \forall v \in H^2(\Omega) \cap \tilde{H}^0, \quad (1.22)$$

где \tilde{H}^0 — пространство из слабой постановки задачи (1.8), h — характерный диаметр элементов разбиения.

Оказывается, что оценка (1.22) на разность между функцией из $H^2(\Omega) \cap \tilde{H}^0$ и ее наилучшим приближением из \mathbb{U}_h переносится на ошибку метода конечных элементов, т.е. на разность между решением (1.8) и его конечно-элементным аналогом u_h , в следующем смысле:

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq c \inf_{v_h \in \mathbb{U}_h} \|u - v_h\|_{H^1}.$$

Откуда следует, если решение u задачи (1.8) принадлежит $H^2(\Omega)$, то

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq ch \|u\|_{H^2}.$$

Более того, если данные задачи такие, что при произвольной $f \in L_2(\Omega)$ для решения выполняется оценка (1.10), то в L_2 -норме можно доказать сходимость на один порядок выше, чем в H^1 -норме:

$$\|u - u_h\|_{L_2} \leq ch \|u - u_h\|_{H^1}.$$

Два последних неравенства вместе с (1.10) приводят к оценке на разность решения дифференциальной задачи и решения методом конечных элементов вида

$$\|u - u_h\|_{L_2} \leq ch^2 \|f\|_{L_2}. \quad (1.23)$$

1.3 Арифметическая сложность решения систем уравнений

Рассмотрим задачу (1.2)–(1.3) с $k(x) = 1$. Для ее аппроксимации применим метод конечных элементов, выбрав в качестве U_h кусочно-линейные элементы. Получим систему линейных алгебраических уравнений

$$A_h z = f_h \quad (1.24)$$

с матрицей

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \mathbf{0} \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ \mathbf{0} & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для решения данной системы можно эффективно применить прямые (“точные”) методы, такие, как метод прогонки (метод Гаусса для трехдиагональных матриц). Арифметическая сложность метода прогонки составляет $O(N)$ действий, что означает асимптотически оптимальную сложность метода. Однако, мы используем этот пример для иллюстрации подхода, применимого к более сложным задачам, для которых метод Гаусса становится неэффективным. Действительно, несложно проверить, что вычислительная сложность метода Гаусса для решения системы с матрицей из (1.21) уже равна $O(N^{\frac{3}{2}})$ арифметических операций, где N — число неизвестных в системе (2.15).

При решении трехмерных задач вычислительная сложность метода Гаусса для решения системы с конечно-элементной матрицей порядка N достигает $O(N^2)$ действий (на практике показатель степени оказывается выше 2). Это означает, что уменьшение шага сетки

в два раза приводит к увеличению N в 8 раз и увеличению арифметической работы более чем в 64 раза! Например, наилучшая из известных нам реализаций метода Гаусса требует 10 секунд для решения трехмерной сеточной задачи с $h = 25^{-1}$, и 1100 секунд для решения такой же задачи на сетке $h = 50^{-1}$ (вычисления проводились на PC Pentium IV, 2.5 ГГц). Однако трудность трехмерных задач для метода Гаусса заключается не только в объеме и времени вычислений, но и в объеме используемой компьютерной памяти: для решения задачи на рассмотренной грубой сетке потребуется по меньшей мере 46 МБ оперативной памяти, а на мелкой сетке — 926 МБ. Таким образом, сеточные системы с одним миллионом неизвестных (при $h = 100^{-1}$) в настоящее время невозможно решить методом Гаусса из-за практических ограничений на оперативную память компьютера.

При большом числе неизвестных необходимы итерационные методы. Эффективность итерационных методов характеризуется скоростью сходимости и арифметической сложностью одной итерации. Многосеточные методы и методы декомпозиции позволяют строить итерационные методы, обеспечивающие оптимальную арифметическую сложность нахождения приближенного решения как двумерных, так и трехмерных сеточных систем.

Глава 2

Многосеточный метод

2.1 Двухсеточный метод

2.1.1 Сглаживающее свойство базовых итерационных методов

Для решения системы (1.14), порожденной конечно-элементной аппроксимацией одномерного уравнения диффузии, рассмотрим простейший итерационный метод, — метод Якоби с релаксационным параметром w . Пусть z^0 - задано, для $i = 0, 1, 2, \dots$ мы вычисляем

$$z^{i+1} = z^i - wD^{-1}(A_h z^i - f_h), \quad (2.1)$$

где $D = \text{diag}(A_h)$ — диагональная матрица, составленная из элементов главной диагонали A_h .

Метод (2.1) эквивалентен для данного примера методу простой итерации (все ненулевые элементы D одинаковы):

$$z^{i+1} = z^i - \frac{wh^2}{2}(A_h z^i - f_h). \quad (2.2)$$

О сходимости (2.2) можно судить, зная спектр матрицы A_h . Непосредственной проверкой убеждаемся, что решением задачи на собственные значения

$$A_h \psi^k = \lambda_k \psi^k$$

являются

$$\psi^k = \sin(\pi k j h), \quad \lambda_k = 4h^{-2} \sin^2(\pi k \frac{h}{2}), \quad k = 1, \dots, N-1. \quad (2.3)$$

Заметим, что $\lambda_{min} \leq \pi^2$, $\lambda_{max} = O(h^{-2})$. Следовательно, показатель сходимости (2.2) при оптимальном w можно оценить через $1 - O(h^2)$, а количество итераций, необходимых для решения системы с точностью ε , как $O(h^{-2} \ln \varepsilon^{-1})$. Таким образом, общее число арифметических операций оценивается как $O(h^{-3} \ln \varepsilon^{-1})$. Наша цель — оптимальная сложность вычислений ($O(h^{-1} \ln \varepsilon^{-1})$ для данной задачи) заведомо не достигается. Вывод: метод Якоби нельзя признать эффективным для решения данной системы. Тот же вывод относится и к методам Гаусса-Зейделя, сопряженных градиентов (для данного метода сложность будет $O(h^{-2} \ln \varepsilon^{-1})$) и к другим итерационным методам, используемым для произвольных симметричных положительно определенных матриц. Многосеточный метод, обеспечивая оптимальную арифметическую сложность, использует специфическое происхождение решаемой системы.

Рассмотрим только “высокочастотные” собственные функции матрицы A_h , то есть такие ψ^k , для которых $k \geq N/2 = \frac{1}{2h}$. В этом разделе мы будем предполагать, что $N = h^{-1}$ — четное целое. Заметим, что для таких k справедливо

$$2 < 4 \sin^2 \frac{\pi}{4} \leq h^2 \lambda_k \leq 4.$$

Выберем в (2.2) $w = 1/2$. Тогда для собственных значений $\lambda_k(S_h)$ матрицы итераций $S_h = I - \frac{wh^2}{2} A_h$ имеем:

$$|\lambda_k(S_h)| = |1 - \frac{h^2}{4} \lambda_k(A_h)| \leq \frac{1}{2} \quad \text{при } k \geq \frac{N}{2}. \quad (2.4)$$

Поскольку матрица итераций ответственна за изменение ошибки в методе, оценка (2.4) означает, что на высоких гармониках метод Якоби имеет скорость сходимости не хуже, чем 0.5. Другими словами, если вектор ошибки разложить в базисе из собственных функций ψ^k , то коэффициенты при высоких ($k \geq \frac{N}{2}$) гармониках сокращаются на каждой итерации не меньше, чем в два раза. Следовательно, уже после нескольких итераций вклад высоких гармоник в ошибку $e_h = z_h^i - z_h$ будет незначителен ($z_h^i \equiv z^i$). Так как при больших k функции ψ^k быстро изменяются (осциллируют), то говорят, что в процессе итераций (2.2) ошибка “сглаживается”.

Таким образом, представляется разумной следующая стратегия нахождения решения (1.14) с заданной точностью:

Шаг 1. Несколько “сглаживающих” итераций типа Якоби;

Шаг 2. Применить некоторую процедуру для подавления низкочастотных компонент в ошибке, т.е. для уменьшения коэффициентов при ψ^k , $k < \frac{N}{2}$;

Шаг 3. Если требуемая точность не достигнута, например, норма невязки все еще велика, то перейти к шагу 1.

В классическом (геометрическом) двухсеточном методе шаг 2 называется коррекцией с грубой сетки.

2.1.2 Коррекция с грубой сетки

Сделаем два простых, но важных замечания.

Во-первых, если ошибка $e_h = z_h^i - z_h$ — гладкая функция, то она может быть хорошо аппроксимирована на сетке с меньшим количеством узлов¹ (хотя мы можем не знать в явном виде e_h , нам важен сам факт существования такой функции, ее аппроксимирующей).

Во-вторых, ошибка e_h является решением уравнения

$$A_h e_h = d_h, \quad \text{где } d_h = A_h z_h^i - f_h. \quad (2.5)$$

Если мы найдем e_h , то мы найдем и решение $z_h = z_h^i - e_h$. Систему (2.5) также трудно решить, как и исходную (1.14). Однако, принимая во внимание первое из сделанных замечаний, попытаемся найти *приближение* e_{2h} к e_h на *грубой сетке*² (с шагом $2h$), решая задачу (2.5) на грубой сетке:

$$A_{2h} e_{2h} = d_{2h}. \quad (2.6)$$

Если $p : \mathbb{R}_{2h} \rightarrow \mathbb{R}_h$ — оператор *продолжения*, то новое приближение z_h^{i+1} к решению z_h будет

$$z_h^{i+1} = z_h^i - p e_{2h}. \quad (2.7)$$

Соотношение (2.7) называется *коррекцией с грубой сетки*.

Остались открытыми вопросы:

а. Как выбрать оператор продолжения p ?

¹Вообще говоря, e_h — это вектор коэффициентов из \mathbb{R}_h некоторой конечно-элементной функции из \mathbb{U}_h , для которой, в свою очередь, понятие аппроксимации на сетке с меньшим количеством узлов вполне корректно.

²Еще раз оговоримся, что здесь и далее мы используем эту удобную терминологию вместо развернутого: “соответствующей конечно-элементной функции, определенной на грубой сетке”.

б. Как выбрать оператор *проектирования* $r : \mathbb{R}_h \rightarrow \mathbb{R}_{2h}$, необходимый для определения невязки на грубой сетке $d_{2h} = r d_h$?

с. Как задать *оператор на грубой сетке* A_{2h} ?

В новых обозначениях соотношение (2.7) может быть переписано как

$$z_h^{i+1} = z_h^i - p A_{2h}^{-1} r (A_h z_h^i - f_h). \quad (2.8)$$

Следующий параграф отвечает на поставленные вопросы а.–с.

2.1.3 Продолжение, проектор, оператор на грубой сетке

Когда система получена в результате применения метода конечных элементов, операторы продолжения и проектирования естественно выбирать следующим *каноническим* образом.

Для метода конечных элементов типичной является ситуация, когда $\mathbb{U}_{2h} \subset \mathbb{U}_h$, где \mathbb{U}_{2h} — конечно-элементное пространство, соответствующее грубой сетке.

Продолжение

Предположим, что \mathbb{U}_{2h} вложено в \mathbb{U}_h , тогда конечно-элементное продолжение \bar{p} , выраженное в пространствах коэффициентов $p : \mathbb{R}_{2h} \rightarrow \mathbb{R}_h$, определяется с помощью изоморфизмов (см. § 1.2) $P_h : \mathbb{R}_h \rightarrow \mathbb{U}_h$ и $P_{2h} : \mathbb{R}_{2h} \rightarrow \mathbb{U}_{2h}$:

$$p : \mathbb{R}_{2h} \xrightarrow{P_{2h}} \mathbb{U}_{2h} \subset \mathbb{U}_h \xrightarrow{P_h^{-1}} \mathbb{R}_h.$$

Таким образом,

$$p := P_h^{-1} P_{2h}. \quad (2.9)$$

Для кусочно-линейных элементов действие оператора продолжения p показано на рисунке 2.1, где каждому i -ому узлу сетки соответствует i -ый коэффициент вектора из \mathbb{R}_h .

В общем случае p является разреженной матрицей, которую можно вычислить, зная P_h и P_{2h} .

Проектирование

Рассмотрим L_2 -проекцию на пространствах конечных элементов $\bar{r} : \mathbb{U}_h \rightarrow \mathbb{U}_{2h}$. По определению \bar{r} задается равенством

$$(\bar{r} v_h, u_{2h})_{L_2} = (v_h, u_{2h})_{L_2} \quad \forall v_h \in \mathbb{U}_h, u_{2h} \in \mathbb{U}_{2h}. \quad (2.10)$$

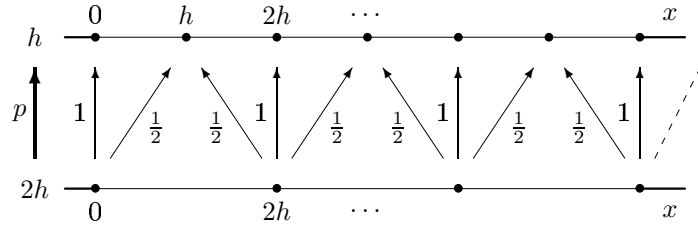


Рис. 2.1: Оператор продолжения для кусочно-линейных КЭ с грубой сетки на частую.

Это равенство порождает канонический проектор $r : \mathbb{R}_h \rightarrow \mathbb{R}_{2h}$ следующим образом. Перепишем (2.10) в пространствах коэффициентов:

$$\langle rP_h^{-1}v_h, P_{2h}^{-1}u_{2h} \rangle_{\mathbb{R}_{2h}} = \langle P_h^{-1}v_h, P_h^{-1}u_{2h} \rangle_{\mathbb{R}^h} \quad \forall v_h \in \mathbb{U}_h, u_{2h} \in \mathbb{U}_{2h}.$$

Данное соотношение задает $r^* = P_h^{-1}P_{2h}$, где r^* — оператор сопряженный к r , т.е. $\langle r \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}_{2h}} = \langle \cdot, r^* \cdot \rangle_{\mathbb{R}_h}$. Таким образом, учитывая (2.9), получаем

$$r = p^*, \quad (2.11)$$

где p^* — оператор сопряженный к p из (2.9).

Соотношение (2.11) на практике (и в теории) часто берется как правило для определения проектора при заданном операторе продолжения. В рассматриваемом примере и в терминах матриц легко проверить, что $r = \frac{1}{2}p^T$, где фактор $\frac{1}{2}$ появляется за счет множителей h и $2h$ в определении $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}_h}$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}_{2h}}$, соответственно. Схематично действие проектора показано на рисунке 2.2. Если в точке $x = 0$ заданы условия Дирихле на функцию $u_h(x)$, то оператор r в ней не задается.

Оператор на грубой сетке A_{2h}

Для выбора оператора на грубой сетке A_{2h} существует два подхода. *Прямой подход.* Задача (1.2) непосредственно аппроксимируется на грубой сетке, т.е. в пространстве \mathbb{U}_{2h} . Так, для рассмотренного примера A_{2h} будет задаваться соотношением

$$\langle A_{2h}z, y \rangle_{\mathbb{R}_{2h}} = \int_0^1 k(x)u'_{2h}v'_{2h} dx,$$

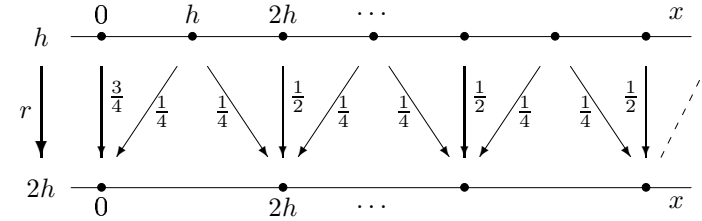


Рис. 2.2: Оператор проектирования для кусочно-линейных КЭ с частой сетки на грубую.

для всех $z, y \in \mathbb{R}_{2h}$, $u_{2h} = P_{2h}z$, $v_{2h} = P_{2h}y$.

Подход галеркинского проектирования. Определяем A_{2h} как произведение трех операторов

$$A_{2h} := r A_h p.$$

Для примеров метода конечных элементов из § 1.2 и канонического выбора r и p , т.е. по формулам (2.9)–(2.11), прямой подход и подход галеркинского проектирования дают одинаковый оператор A_{2h} .

2.1.4 Матрица итераций

Теперь, когда все необходимые компоненты определены, напомним, что двухсеточный метод можно рассмотреть как итерационный — по заданному приближению z_h^k следующее приближение z_h^{k+1} вычисляется в два этапа. Во-первых, выполняется несколько (общим числом ν) сглаживаний, например, по методу Якоби. Новое, промежуточное приближение \tilde{z}^k удовлетворяет равенству

$$\tilde{z}^k = S^\nu z_h^k + g^\nu, \quad (2.12)$$

где S_h — матрица сглаживающей итерации, а вектор g^ν зависит только от правой части системы f_h . Для метода Якоби в нашем примере $S_h = I - \frac{wh^2}{2}A_h$. Во-вторых, z_h^{k+1} находится как результат коррекции \tilde{z}^k с грубой сетки, что в силу (2.8) может быть записано как

$$z_h^{k+1} = \tilde{z}^k - pA_{2h}^{-1}r(A_h\tilde{z}^k - f_h).$$

Суперпозиция с (2.12) дает

$$z_h^{k+1} = \bar{M}_h z_h^k + \bar{M}_h g^\nu - pA_{2h}^{-1}r f_h = \bar{M}_h z_h^k + \bar{g}^\nu,$$

где \bar{M}_h — матрица итераций двухсеточного метода:

$$\bar{M}_h = (I - pA_{2h}^{-1}rA_h)S_h^\nu. \quad (2.13)$$

Как следует из определения \bar{M}_h , переходу к коррекции с грубой сетки, предшествуют ν сглаживающих итераций.

Из общей теории итерационных методов следует, что для сходимости двухсеточного метода необходимо выполнение неравенства $|\lambda(\bar{M}_h)| < 1$. Достаточным условием является оценка $\|\bar{M}_h\| < 1$ в некоторой операторной норме.

2.1.5 Сходимость для модельной задачи

Для рассматриваемого модельного примера и операторов r и p , показанных на рис. 2.1 и 2.2, сходимость двухсеточного метода можно проверить прямыми вычислениями с помощью анализа Фурье. Можно проверить (см. [11], § 1.2.5), что собственные векторы ψ^k и ψ^{N-k} из (2.3) образуют инвариантное пространство относительно умножения на \bar{M}_h . Следовательно, \bar{M}_h приводится в базисе из собственных векторов к блочно-диагональному виду, где блоки имеют размерность 2×2 . Обозначим эти блоки через $\bar{M}_h^{(k)}$, $k = 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$. Данные блоки имеют вид:

$$\bar{M}_h^{(k)} = \begin{bmatrix} s_k^2 & c_k^2 \\ s_k^2 & c_k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_k^{2\nu} & 0 \\ 0 & s_k^{2\nu} \end{bmatrix}, \quad \bar{M}_h^{(\frac{N}{2})} = 2^{-\nu}, \quad (2.14)$$

где $s_k^2 = \sin^2 \pi k \frac{h}{2}$, $c_k^2 = \cos^2 \pi k \frac{h}{2}$. Влияние сглаживающих итераций и коррекции с грубой сетки на низко- и высокочастотные части спектра хорошо видны из строения $\bar{M}_h^{(k)}$. Так, левый блок разложения (2.14) соответствует коррекции с грубой сетки. В этом блоке на малый коэффициент s_k^2 умножаются “гладкие” собственные вектора, т.е. те ψ^k , для которых $k \leq \frac{N}{2}$. Другой механизм реализуется для правого блока разложения (2.14). Он соответствует сглаживающим итерациям. На малый коэффициент $s_k^{2\nu}$ теперь умножаются “быстро-осциллирующие” собственные вектора, т.е. те ψ^k , для которых $k \geq \frac{N}{2}$.

Можно получить и точные оценки. Непосредственные вычисления дают:

$$\lambda(\bar{M}_h^{(k)}) \in \{0, s_k^2 c_k^{2\nu} + c_k^2 s_k^{2\nu}\}, \quad k = 1, \dots, \frac{N}{2} - 1, \quad \lambda(\bar{M}_h^{(\frac{N}{2})}) = 2^{-\nu}.$$

Заметим, что $s_k^2 \in [0, 0.5]$ для $k = 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} |\lambda(\bar{M}_h)| &\leq \max_{x \in [0, 0.5]} (x(1-x)^\nu + (1-x)x^\nu) \leq \\ &\leq \max_{x \in [0, 0.5]} (x(1-x)^\nu) + \max_{x \in [0, 0.5]} ((1-x)x^\nu) = \\ &= \frac{1}{\nu+1} \left(1 - \frac{1}{\nu+1}\right)^\nu + \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu+1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|\lambda(\bar{M}_h)| \leq \frac{1}{2} \text{ и } |\lambda(\bar{M}_h)| \sim \frac{1}{e} \frac{1}{\nu} \text{ при } \nu \rightarrow \infty.$$

Для оценки спектральной нормы матрицы итераций удобно воспользоваться неравенством Гельдера:

$$\|\bar{M}_h\|^2 \leq \|\bar{M}_h\|_\infty \|\bar{M}_h\|_1 \leq \max_k ((s_k^2 c_k^{2\nu} + c_k^2 s_k^{2\nu}) \cdot 2 \max\{s_k^2 c_k^{2\nu}; c_k^2 s_k^{2\nu}\}).$$

Аналогично оценке собственных значений получаем

$$\|\bar{M}_h\| \leq \frac{1}{2} \text{ и } \|\bar{M}_h\| \sim \frac{\sqrt{2}}{e} \frac{1}{\nu} \text{ при } \nu \rightarrow \infty.$$

Таким образом, для данного модельного примера норма матрицы итераций двухсеточного метода, в отличие от нормы матрицы итераций Якоби, оценивается независимо от h . Зависимость от числа сглаживаний вида $O(\nu^{-1})$ характерна для многосеточных методов.

2.2 Многосеточный метод

Нашей целью по-прежнему является решение системы линейных алгебраических уравнений

$$A_h z_h = f_h, \quad (2.15)$$

полученной в результате дискретизации дифференциальной задачи методом конечных элементов. Это может быть задача диффузии или уравнение Пуассона из предыдущей главы. Другие примеры встретятся в книге позже.

В предыдущем разделе был рассмотрен двухсеточный метод, суть которого состояла в том, что после нескольких базовых итераций для системы (2.15), строилась задача для неизвестной ошибки на грубой сетке ($A_{2h} e_{2h} = d_{2h}$). Эта задача решалась точно. После этого вычислялось приближение $\tilde{e}_h = p e_{2h}$ к ошибке e_h на частой сетке и

происходила коррекция приближения к решению на частой сетке. Наиболее трудоемкий в вычислительном плане этап двухсеточного метода — это решение задачи на грубой сетке. Заметим, что получаемое \tilde{e}_h — только приближение к e_h , а следовательно нет решительных причин находить e_{2h} точно. Мы можем ограничиться нахождением лишь приближения \tilde{e}_{2h} к e_{2h} . Для приближенного решения системы на грубой сетке применим несколько (общим числом γ) итераций двухсеточного метода, переходя в нем на сетку еще более грубую. *Многосеточный метод* состоит в повторении данной процедуры рекурсивно, пока не будет достигнута сетка с малым количеством узлов (“самая грубая”), на которой система уравнений может быть решена точно, например с помощью метода Гаусса.

Формализуем идею многосеточного метода. Пусть задана иерархия конечно-элементных пространств:

$$\mathbb{U}_0 \subset \mathbb{U}_1 \subset \dots \subset \mathbb{U}_k \subset \dots \subset \mathbb{U}_l = \mathbb{U}_h. \quad (2.16)$$

Пространство \mathbb{U}_0 соответствует самой грубой сетке. Соответствующие пространства коэффициентов связаны операторами проектирования и продолжения:

$$\mathbb{R}_0 \xleftarrow[r]{} \mathbb{R}_1 \xleftarrow[r]{} \dots \xleftarrow[r]{} \mathbb{R}_k \xleftarrow[r]{} \dots \xleftarrow[r]{} \mathbb{R}_l = \mathbb{R}_h.$$

Предположим, что операторы $A_l = A_h$ и A_k , $k = 0, \dots, l-1$ заданы (вычислены по правилам из § 2.1.3).

Зададим натуральное ν , число сглаживающих итераций на каждом уровне, и натуральное γ , число рекурсивных вызовов метода на каждом уровне в иерархии (2.16). Одна итерация многосеточного метода решения системы $A_h z_h = f_h$ определяется рекурсивной процедурой $z^{new} = MGM(l, z^{old}, f_h)$. Здесь z^{old} — начальное приближение к z_h , z^{new} — полученное новое приближение. Сама процедура описана ниже.

$$\bar{z} = MGM(k, z, b)$$

{
Если $k = 0$, то

0. $\bar{z} = A_0^{-1}b$ (точное решение на самой грубой сетке), далее выход из процедуры;

Иначе ($k > 0$)

1. $z^0 = z$, $z^{i+1} = z^i - W_k^{-1}(A_k z^i - b)$, $i = 0, \dots, \nu - 1$ (ν базовых итераций — сглаживаний);
2. $d = r(A_k z^\nu - b)$ (проектирование невязки на грубую сетку);

3. $e^0 = 0$ (начальное приближение к ошибке);
4. Выполняем $e^{i+1} = MGM(k-1, e^i, d)$ для $i = 0, \dots, \gamma - 1$ (γ итераций многосеточного метода на грубой сетке);
5. $\bar{z} = z^\nu - p e^\gamma$ (коррекция приближения z^ν с грубой сетки)

}
Одно выполнение процедуры $z^{new} = MGM(l, z^{old}, f_h)$ является одной итерацией многосеточного метода. Всего выполняют заданное количество итераций или пока норма невязки $\|A_h z^{new} - f_h\|$ не станет меньше заданного ε .

Пример итераций:

1. $z^{old} = 0$;
2. Пока $\|A_h z^{old} - f_h\| \geq \varepsilon$ выполнять: $z^{new} = MGM(l, z^{old}, f_h)$, $z^{old} = z^{new}$.

Далее мы покажем, что во многих случаях вычислительная сложность одного вызова функции $MGM(l, z^{old}, f_h)$ составляет $O(N_l)$ элементарных арифметических операций, где N_l — количество неизвестных на самой мелкой сетке, а множитель перед N_l зависит от числа сглаживаний. Также мы покажем, что многосеточный метод для широкого круга задач обладает замечательным свойством сокращения ошибки, установленным нами в конце предыдущего раздела для двухсеточного метода и модельной задачи:

$$\|z_h - z^{new}\| \leq q \|z_h - z^{old}\|$$

с некоторым $q < 1$, не зависящим от шага сетки h_l или, что то же самое, от количества неизвестных на самой мелкой сетке. Более того, делая не одно, а несколько сглаживаний на каждом уровне можем положить, к примеру, $q \leq 0.1$. Таким образом, решение системы (2.15) с относительной точностью ε требует всего $O(N_l |\ln \varepsilon|)$ элементарных арифметических действий, что является оптимальной сложностью для итерационного метода. Во многих случаях многосеточный метод — единственный известный подход при численном решении уравнений в частных производных, приводящий к оптимальной трудоемкости.

2.2.1 V- и W-циклы

Практика показала, что разумно выбирать $\gamma = 1$ или $\gamma = 2$ рекурсивных итераций. При $\gamma = 1$ одна итерация метода получила название V-цикл, а при $\gamma = 2$ — W-цикл. Рисунки 2.3 и 2.4 иллюстрируют

эти названия. Стрелочки показывают передачу данных с одного сеточного уровня на другой. Горизонтальная стрелочка означает, что вычисления, в данном случае — сглаживания, происходят на одном уровне.

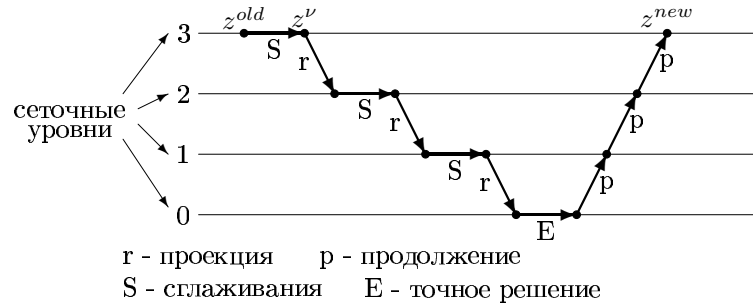


Рис. 2.3: V-цикл.

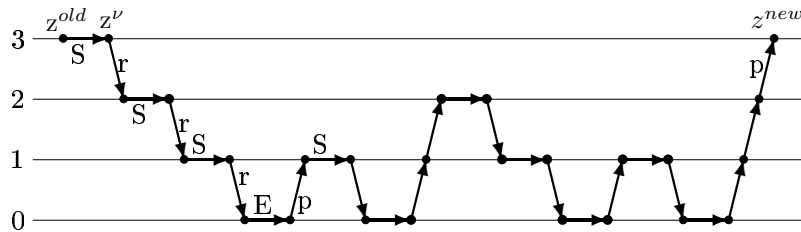


Рис. 2.4: W-цикл.

Трудоёмкость (или вычислительная сложность) итерационного алгоритма решения задачи является оптимальной, если число арифметических операций для достижения заданной точности зависит линейно от числа неизвестных. Изучим вопрос трудоёмкости одного цикла многосеточного метода.

Пусть N_k — число неизвестных на k -ом сеточном уровне. Обозначим

$$C_n := \inf_{k=1, \dots, l} N_k / N_{k-1}. \quad (2.17)$$

Предположим, что одна итерация сглаживания, а также выполнение проектирования и продолжения на k -ом уровне требуют CN_k операций. Данное условие выполняется для систем, возникающих в методе конечных элементов для уравнений в частных производных и для общепринятых сглаживающих итераций таких, как метод Якоби или Зейделя. Обозначим через N_{mg} трудоёмкость одного цикла многосеточного метода. Нетрудно проверить следующее утверждение. Пусть $\kappa = \gamma C_n^{-1}$, тогда возможны три случая:

- I. если $\kappa < 1$, то $N_{mg} = O(N_l)$,
- II. если $\kappa = 1$, то $N_{mg} = O(l N_l)$,
- III. если $\kappa > 1$, то $N_{mg} = O(\kappa^l N_l)$.

Для примера одномерного уравнения диффузии из предыдущей главы $C_n = 2$, и V-цикл соответствует первому, а W-цикл — второму случаю.

2.2.2 Предсглаживание и постсглаживание. Матрица итераций

Рассмотренную в предыдущих пунктах операцию сглаживания часто называют *предсглаживанием* (presmoothing), так как она выполняется перед коррекцией с грубой сетки. Сглаживающие итерации можно выполнять и после коррекции с грубой сетки, тогда они называются *постсглаживанием* (postsmoothing). Часто в многосеточном методе выполняется как предсглаживание, так и постсглаживание. В этом случае процедура становится более ‘симметричной’. Например, V-цикл многосеточного метода с одним предсглаживанием и одним постсглаживанием $z^{new} = MGMV(l, z^{old}, f_h)$ задается вызовом рекурсивной процедуры:

$$\bar{z} = MGMV(k, z, b)$$

{

Если $k = 0$, то

$$0. \bar{z} = A_0^{-1}b, \text{ далее выход из процедуры;}$$

Иначе ($k > 0$)

$$1. z^0 = z, z^1 = z^0 - W_k^{-1}(A_k z^0 - b) \text{ (одно предсглаживание);}$$

$$2. d = r(A_k z^1 - b) \text{ (проектирование невязки на грубую сетку);}$$

$$3. e^0 = 0 \text{ (начальное приближение к ошибке);}$$

$$4. e^1 = MGMV(k - 1, e^0, d) \text{ (рекурсивный вызов метода на грубой сетке);}$$

5. $z^2 = z^1 - p e^1$ (коррекция с грубой сетки);
6. $\bar{z} = z^2 - W_k^{-1}(A_k z^2 - b)$ (одно постсглаживание).

}
Пусть на каждом сеточном уровне выполняется ν_1 предсглаживаний и ν_2 постсглаживаний. Матрицу итераций многосеточного метода $M_l(\nu_1, \nu_2)$ можно определить рекурсивно:

$$M_0(\nu_1, \nu_2) = 0, \quad (2.18)$$

$$M_k(\nu_1, \nu_2) = S_k^{\nu_2} (I - p(I - M_{k-1}^\gamma(\nu_1, \nu_2))A_{k-1}^{-1}r A_k) S_k^{\nu_1}. \quad (2.19)$$

Проверим соотношения (2.18)–(2.19) с помощью индукции по k . Напомним, что матрица итераций — это матрица, ответственная за изменение вектора ошибки на каждой итерации. Для $k = 0$ (2.18) справедливо, так как на самой грубой сетке система решается точно, т.е. ошибка за одну “итерацию” обращается в ноль. Проверим (2.19) для произвольного $k > 0$. S_k — матрица сглаживающих итераций, и множители $S_k^{\nu_1}$ и $S_k^{\nu_2}$ соответствуют выполнению ν_1 сглаживающих итераций до коррекции с грубой сетки и ν_2 сглаживающих итераций после.

Найдем матрицу итераций для коррекции с грубой сетки. Пусть $d_{k-1} = r(A_k z_k^{\nu_1} - b_k)$ — проекция невязки с k -ого на $(k-1)$ -ый уровень, где $z_k^{\nu_1}$ — приближение к решению системы $A_k z_k = b_k$ после ν_1 предсглаживаний. На $k-1$ -ом уровне решаем приближенно систему

$$A_{k-1} e_{k-1} = d_{k-1}. \quad (2.20)$$

Пусть $e_{k-1} = A_{k-1}^{-1} d_{k-1}$ — точное решение (2.20), и мы делаем γ итераций (циклов) многосеточного метода на $(k-1)$ -ом уровне для решения (2.20), причем M_{k-1} — матрица этих итераций. Найденное таким образом приближение обозначим через z_{k-1}^γ . Тогда для ошибки справедливо

$$e_{k-1} - z_{k-1}^\gamma = M_{k-1}^\gamma (e_{k-1} - z_{k-1}^0),$$

а так как $z_{k-1}^0 = 0$ (см. шаг 3 в определении процедуры $MGM(k, z, f)$), то

$$e_{k-1} - z_{k-1}^\gamma = M_{k-1}^\gamma e_{k-1}, \quad \text{где } e_{k-1} = A_{k-1}^{-1} d_{k-1}.$$

Следовательно,

$$z_{k-1}^\gamma = A_{k-1}^{-1} d_{k-1} - M_{k-1}^\gamma A_{k-1}^{-1} d_{k-1} = (I - M_{k-1}^\gamma) A_{k-1}^{-1} d_{k-1}.$$

Найденное приближение z_{k-1}^γ продолжается на k -ый уровень и вычисляется новое приближение $z_k^{\nu_1+1}$:

$$z_k^{\nu_1+1} = z_k^{\nu_1} - p z_{k-1}^\gamma.$$

Подставляя полученное выражение для z_{k-1}^γ , имеем

$$z_k^{\nu_1+1} = z_k^{\nu_1} - p (I - M_{k-1}^\gamma) A_{k-1}^{-1} r (A_k z_k^{\nu_1} - b_k),$$

что можно переписать как

$$z_k^{\nu_1+1} = (I - p (I - M_{k-1}^\gamma) A_{k-1}^{-1} r A_k) z_k^{\nu_1} + g_k,$$

где вектор g_k не зависит от $z_k^{\nu_1}$. Таким образом, матрица итераций коррекции с грубой сетки имеет вид

$$I - p (I - M_{k-1}^\gamma) A_{k-1}^{-1} r A_k.$$

Суперпозиция с матрицами пред- и постсглаживаний дает (2.19).

Как известно, для доказательства сходимости итерационного метода необходимо оценить норму или в симметричном случае спектральный радиус матрицы итераций. Для многосеточного метода эту задачу сильно упростит показанная ниже связь между его матрицей итераций и матрицей итераций двухсеточного метода.

Пусть $\bar{M}_k(\nu_1, \nu_2)$ — матрица итераций двухсеточного метода, тогда

$$M_1(\nu_1, \nu_2) = \bar{M}_1(\nu_1, \nu_2), \quad (2.21)$$

$$M_k(\nu_1, \nu_2) = \bar{M}_k(\nu_1, \nu_2) + S_k^{\nu_2} p M_{k-1}^\gamma(\nu_1, \nu_2) A_{k-1}^{-1} r A_k S_k^{\nu_1} \quad (2.22)$$

для $k > 1$.

Соотношения (2.21)–(2.22) непосредственно следуют из (2.19) и представления (2.13) для матрицы двухсеточного метода:

$$\bar{M}_k(\nu_1, \nu_2) = S_k^{\nu_2} (I - p A_{k-1}^{-1} r A_k) S_k^{\nu_1}.$$

2.3 Сходимость многосеточного метода

В этом разделе будут доказаны оценки на показатель сходимости многосеточного метода. Относительно современной теории сходимости многосеточных методов следует сказать следующее. Если матрица жесткости метода конечных элементов симметричная и положительно определенная, то для решения системы алгебраических

уравнений можно, как правило, доказать сходимость V- и W-циклов уже с одной сглаживающей итерацией на каждом уровне. В случае произвольной, необязательно симметричной и положительно определенной, матрицы удается доказывать сходимость W-цикла при ограничении снизу на число сглаживаний на сеточных уровнях. В общем случае данное ограничение оказывается необходимым. Мы детально разберем теорию, применимую в общем случае, а (более сильные) результаты для самосопряженных задач приведем без подробных доказательств и только для V-цикла. Такой подход выбран нами не только потому, что он позволяет охватить значительно более широкий круг проблем, но и потому, что общая теория, построенная на свойствах сглаживания и аппроксимации, ясно отражает существо многосеточного метода.

2.3.1 Сходимость W-цикла

Предположим выполнение следующих условий на оператор продолжения p и на сглаживания S_k^ν : для всех $k = 1, \dots, l$, $x \in \mathbb{R}_{k-1}$ и всех ν больше некоторого $\bar{\nu} > 0$

$$c_p \|x\|_{k-1} \leq \|p x\|_k \leq C_p \|x\|_{k-1}, \quad (2.23)$$

$$\|S_k^\nu\| \leq C_s. \quad (2.24)$$

с некоторыми константами c_p, C_p и C_s , не зависящими от k . В предположении, что $P_k : \mathbb{R}_k \rightarrow \mathbb{U}_k$ — изоморфизм с константами эквивалентности, не зависящими от k (см. (1.17) в § 1.2), неравенства (2.23) выполняются автоматически. Условие (2.24) выполняются, к примеру, для всех сходящихся сглаживающих итераций.

Суть доказанной ниже теоремы в том, что *сходимости двухсеточного метода достаточно для сходимости W-цикла*. Детально рассмотрим случай отсутствия постсглаживаний ($\nu_2 = 0$).

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия (2.23) и (2.24), а норма матрицы итераций двухсеточного метода удовлетворяет оценке

$$\|\bar{M}_k(\nu, 0)\| \leq \eta(\nu)$$

с некоторой функцией $\eta(\nu)$, не зависящей от k и такой, что $\eta(\nu) \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$, тогда для всех $\nu \geq \bar{\nu}$ многосеточный метод сходится при $\gamma \geq 2$ и

$$\|M_k(\nu, 0)\| \leq \frac{\gamma}{\gamma - 1} \eta(\nu). \quad (2.25)$$

Доказательство. Докажем теорему для случая $\gamma = 2$ (W-цикл). Доказательство будет базироваться на рекурсивном представлении (2.22). Сначала заметим справедливость соотношений:

$$S_k^{\nu_2} = I, \text{ т.к. } \nu_2 = 0, \quad (2.26)$$

$$\|p\|_{\mathbb{R}^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}^k} \leq C_p \text{ в силу (2.23),} \quad (2.27)$$

$$p A_{k-1}^{-1} r A_k S_k^\nu = S_k^\nu - (I - p A_{k-1}^{-1} r A_k) S_k^\nu = S_k^\nu - \bar{M}_k(\nu, 0). \quad (2.28)$$

Из (2.23), (2.24) и (2.28) следует

$$\begin{aligned} \|A_{k-1}^{-1} r A_k S_k^\nu\| &\leq c_p^{-1} \|p A_{k-1}^{-1} r A_k S_k^\nu\| = \\ &= c_p^{-1} \|S_k^\nu - \bar{M}_k(\nu, 0)\| \leq c_p^{-1} (\|S_k^\nu\| + \|\bar{M}_k(\nu, 0)\|) \leq c_p^{-1} (C_s + 1). \end{aligned} \quad (2.29)$$

В последнем неравенстве мы использовали то, что $\|\bar{M}_k(\nu, 0)\| \leq 1$ для достаточно больших ν .

Обозначим $\xi_k := \|M_k(\nu, 0)\|$. Цель доказательства — получить оценку (2.25), то есть $\xi_k < 2\eta(\nu)$ для всех k . Проверим ее с помощью индукции по k . В основании индукции будет случай $k = 1$. Действительно, равенство (2.21) и предположение теоремы для матриц \bar{M}_k дают

$$\xi_1 \leq \eta(\nu).$$

Теперь из (2.22) заключаем для $k > 1$

$$\begin{aligned} \xi_k &\leq \|\bar{M}_k(\nu, 0)\| + \|p M_{k-1}^2(\nu, 0) A_{k-1}^{-1} r A_k S_k^\nu\| \leq \\ &\leq \eta(\nu) + \|p\| \|M_{k-1}^2(\nu, 0)\| \|A_{k-1}^{-1} r A_k S_k^\nu\|. \end{aligned}$$

Используем теперь оценки (2.24), (2.27) и (2.29). Получаем

$$\xi_k \leq \eta(\nu) + C_p \xi_{k-1}^2 c_p^{-1} (C_s + 1).$$

Мы получили рекурсивное соотношение

$$\xi_k \leq \eta(\nu) + C^* \xi_{k-1}^2, \quad k = 2, 3, \dots, l. \quad (2.30)$$

Предположим, что оценка $\xi_{k-1} \leq 2\eta(\nu)$ уже доказана. Возьмем $\bar{\nu}$ такое, что $\eta(\nu) \leq \frac{1}{4C^*}$ для $\nu \geq \bar{\nu}$, тогда получим желаемое $\xi_k \leq 2\eta(\nu)$. Последнее неравенство следует из (2.30) и неравенства $\eta(\nu) + C^* 4\eta^2(\nu) \leq 2\eta(\nu)$, справедливого для $\eta(\nu) \leq \frac{1}{4C^*}$. \square

Аналогично можно доказать сходимость для $M_k(\nu_1, \nu_2)$ при $\nu_1 \neq 0, \nu_2 \neq 0$.

2.3.2 Свойства сглаживания и аппроксимации

1. *Свойство сглаживания*: существует функция $\eta(\nu) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, не зависящая от k , такая, что $\eta(\nu) \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$ и

$$\|A_k S_k^\nu\| \leq \eta(\nu) \|A_k\| \quad \forall k \geq 0. \quad (2.31)$$

2. *Свойство аппроксимации*: существует константа $C_A > 0$, не зависящая от k , такая, что

$$\|A_k^{-1} - p A_{k-1}^{-1} r\| \leq C_A \|A_k\|^{-1} \quad \forall k \geq 1. \quad (2.32)$$

Имеет место теорема о сходимости двухсеточного метода.

Теорема 2.2. Пусть свойства сглаживания и аппроксимации выполнены, тогда существует $\bar{\nu} > 0$, такое что для всех $\nu \geq \bar{\nu}$ двухсеточный метод сходится и

$$\|\bar{M}_k(\nu, 0)\| \leq C_A \eta(\nu). \quad (2.33)$$

Доказательство. Доказательство следует из равенств

$$\bar{M}_k(\nu, 0) = (I - p A_{k-1}^{-1} r A_k) S_k^\nu = (A_k^{-1} - p A_{k-1}^{-1} r) (A_k S_k^\nu).$$

Норму правой части оцениваем через произведение норм выражений под скобками. Далее применяем (2.31), (2.32) и получаем (2.33). Благодаря свойству сглаживания, правая часть (2.33) может быть сделана как угодно мала, в частности, меньше 1, за счет выбора достаточно большого ν . Эта оценка является достаточным условием сходимости двухсеточного метода. \square

Следствие. Свойства сглаживания, аппроксимации и условия (2.23), (2.24) гарантируют оценку сходимости W-цикла, не зависящую от числа сеточных уровней. Это означает, что если сложность одной итерации (одного цикла) метода оптимальна, т.е. пропорциональна количеству неизвестных на самой мелкой сетке, и $\kappa < 1$, где κ определено на странице 32, то общая сложность метода, необходимая для достижения любой *наперед заданной точности* для решения системы, также оптимальна.

Замечание. Присутствие множителей $\|A_k\|$ и $\|A_k\|^{-1}$ в правых частях (2.31) и (2.32) необязательно, но является “традицией” в теории многосеточных методов и несет методологический смысл.

Неформальное объяснение названий свойств сглаживания и аппроксимации может быть следующим: A_k , как правило, является матрицей дискретизации дифференциального оператора 2-ого порядка. Поэтому применение A_k к вектору x должно “выделять” в x высокие гармоники — так же как взятие второй производной от $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \{a_m \sin(mx) + b_m \cos(mx)\}$ увеличит абсолютное значение коэффициентов при m -ых гармониках в m^2 раз. Оценка на $A_k S_k^\nu x$ означает, что после применения ν сглаживающих итераций вклад высоких гармоник в $S_k^\nu x$ мал. Относительно функции $\eta(\nu)$ в сглаживающем свойстве (2.31) отметим, что типичным видом $\eta(\nu)$ является

$$\eta(\nu) = O\left(\frac{1}{\nu}\right) \quad \text{или} \quad \eta(\nu) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right). \quad (2.34)$$

Оценка для нормы разности $A_k^{-1} - p A_{k-1}^{-1} r$ означает, что операторы на двух соседних сеточных уровнях k и $k-1$ близки, т.е. задача на грубой сетке “ $k-1$ ” хорошо аппроксимирует задачу на более частой сетке “ k ”.

2.3.3 Случай самосопряженной задачи

Предположим, что матрица A_h из (2.15) является симметричной и положительно определенной — типичная ситуация при применении метода конечных элементов для дискретизации самосопряженных дифференциальных задач. Такими задачами являются, например, встречавшиеся ранее уравнения диффузии или задача Пуассона из следующего параграфа. Для систем с симметричными матрицами требование о достаточно большом количестве сглаживающих итераций можно исключить из теорем о сходимости. Приведем ниже соответствующие утверждения для V-цикла.

Итак для матрицы на самой частой сетке $A_l := A_h$ мы предполагаем $A_l = A_l^T > 0$. Запись $A > 0$ используется для обозначения положительно определенной матрицы, т.е. $(Ax, x) > 0$ для всех $x \neq 0$. Анализ сходимости V-цикла выполняется в норме, задаваемой оператором A_l

$$\|\cdot\|_{A_l} := \langle A_l \cdot, \cdot \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Зададим операторы продолжения, проектирования и оператор на грубой сетке каноническим образом:

$$r = p^*, \quad A_{k-1} = r A_k p. \quad (2.35)$$

Свойства сглаживания и аппроксимации удобно потребовать в немного измененном виде. Свойство сглаживания: пусть матрица базовых

итераций на k -ом сеточном уровне имеет вид $S_k = I - W_k^{-1} A_k$ с переобуславливателем W_k , для которого выполняется

$$W_k = W_k^T \geq A_k. \quad (2.36)$$

Свойство аппроксимации потребуем в виде (сравните с (2.32))

$$\|A_k^{-1} - pA_{k-1}^{-1}r\| \leq C_A \|W_k\|^{-1}. \quad (2.37)$$

Например, в методе Якоби с параметром w имеем $W_k = \frac{1}{w} \text{diag}(A_k)$. Условию (2.36) можно всегда удовлетворить выбирая параметр w достаточно малым. Константа C_A из (2.37) будет, вообще говоря, зависеть от w .

Приведем без доказательства основную теорему о сходимости V-цикла.

Теорема 2.3. *При перечисленных выше условиях (2.35)–(2.37) V-цикл сходится при произвольном ненулевом числе пред- или пост-сглаживаний, причем*

$$\|M_I(\nu_1, \nu_2)\|_{A_1} \leq \frac{C_A}{\sqrt{(C_A + \nu_1)(C_A + \nu_2)}}, \quad (2.38)$$

где C_A — константа из (2.37).

Еще раз обратим внимание, что теорема 2.3 гарантирует сходимость V-цикла уже при одном пред- и пост-сглаживании. В общем случае нами была установлена сходимость W-цикла для достаточно большого числа сглаживающих итераций. Для самосопряженных задач сходимость W-цикла можно доказать также при одной сглаживающей итерации на каждом сеточном уровне, однако известные авторам оценки нормы матрицы итераций весьма громоздки, и приводиться не будут.

2.4 Анализ многосеточного метода на примере задачи Пуассона

Применим полученные результаты для доказательства сходимости V- и W-циклов многосеточного метода для нахождения приближенного конечно-элементного решения задачи Пуассона:

$$-\Delta u = f \text{ в } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \Omega \in \mathbb{R}^2, \quad (2.39)$$

где $\Delta := \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, Ω — ограниченная область. Более того, чтобы избежать громоздких технических деталей, будем считать, что Ω — многоугольник.

Слабая постановка задачи состоит в нахождении $u \in H_0^1(\Omega)$, удовлетворяющей равенству

$$a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (2.40)$$

где

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx, \quad (f, v) := \int_{\Omega} f v dx \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Предположим, что на последовательности равномерно измельченных сеток T_k задана система вложенных конечно-элементных пространств

$$\mathbb{U}_0 \subset \mathbb{U}_1 \subset \dots \subset \mathbb{U}_k \subset \dots \subset \mathbb{U}_l \subset H_0^1(\Omega),$$

причем самая грубая сетка является конформной регулярной триангуляцией³. Пространства \mathbb{U}_k состоят из кусочно-полиномиальных функций степени не выше d . Предположим, что соответствующий параметр дискретизации удовлетворяет условию:

$$c_0 2^{-k} \leq \frac{h_k}{h_0} \leq c_1 2^{-k}, \quad (2.41)$$

c_0, c_1 не зависят от k , а область Ω такая, что для $f \in L_2(\Omega)$ решение u принадлежит $H^2(\Omega)$ и выполнена оценка (1.10). Последнее условие носит название H^2 -регулярности и обсуждалось на стр. 13.

Сделанные выше предположения далеко не всегда выполняются на практике. Так, вложение $\mathbb{U}_{k-1} \subset \mathbb{U}_k$ не имеет место при использовании неконформных конечных элементов. Если область Ω является многоугольником, то условие H^2 -регулярности выполняется лишь в случае отсутствия входящих углов. Условие (2.41) может нарушаться при сгущении сетки в какой-то части области. Во всех этих случаях многосеточный метод может, тем не менее, успешно применяться, однако его анализ усложняется. Мы не будем рассматривать в нашем курсе подобные “сложные случаи”. Их обзор можно найти в [11].

³В конформной триангуляции любые два треугольника либо не имеют общих точек, либо имеют общую целую сторону, либо общую вершину. В регулярной триангуляции оценка снизу на наименьший угол всех элементов триангуляции является равномерной относительно числа элементов.

Будем считать, что пространства \mathbb{U}_k аппроксимируют H_0^1 в смысле, расшифрованном нами в § 1.2. А именно, для произвольной $v \in H_0^1 \cap H^2(\Omega)$ найдется $v_k \in \mathbb{U}_k$, такая что

$$\|v - v_k\|_1 \leq c h_k \|v\|_{H^2}. \quad (2.42)$$

Пусть $f \in L_2(\Omega)$, и $u_k \in \mathbb{U}_k$ — решение конечно-элементной задачи, которая аппроксимирует (2.39) в пространстве \mathbb{U}_k :

$$a(u_k, v_k) = (f, v_k) \quad \forall v_k \in \mathbb{U}_k. \quad (2.43)$$

Сходимость метода конечных элементов в L_2 - и H^1 -норме означает выполнение оценок

$$\|u - u_k\|_0 \leq c h_k^2 \|u\|_{H^2}, \quad \|u - u_k\|_1 \leq c h_k \|u\|_{H^2}. \quad (2.44)$$

Благодаря (1.10) получаем

$$\|u - u_k\|_0 + h_k \|u - u_k\|_1 \leq c h_k^2 \|f\|_0, \quad (2.45)$$

где u — решение задачи (2.39).

Матрица A_l на мелкой сетке определяется из соотношения

$$\langle A_l z, y \rangle_{\mathbb{R}_l} = a(P_l z, P_l y) \quad \forall z, y \in \mathbb{R}_l, \quad (2.46)$$

а правая часть f_l из соотношения

$$\langle f_l, y \rangle_{\mathbb{R}_l} = (f, P_l y) \quad \forall y \in \mathbb{R}_l, \quad (2.47)$$

где $\langle z, y \rangle_{\mathbb{R}_k} = h_k^2 \sum_{i=0}^{n_k} z_i y_i$. Напомним, что $P_k : \mathbb{R}_k \rightarrow \mathbb{U}_k$ — естественный изоморфизм между пространством коэффициентов \mathbb{R}_k и пространством конечно-элементных функций \mathbb{U}_k , а продолжение и проектирование задаются равенствами

$$p = P_k^{-1} P_{k-1}, \quad r = p^*. \quad (2.48)$$

Оператор r сопряжен к p относительно скалярного произведения в \mathbb{R}_k , т.е. $\langle p x, y \rangle_{\mathbb{R}_k} = \langle x, r y \rangle_{\mathbb{R}_{k-1}} \quad \forall x \in \mathbb{R}_{k-1}, y \in \mathbb{R}_k$. Так, в случае кусочно-линейных элементов для вычисления значения $r u_h$ во внутреннем узле грубой сетки требуется просуммировать значения u_h , взятые в данном узле и соседних с ним с весами, показанными на рисунке 2.5. Здесь использовано равномерное разбиение с шагом h_k для мелкой сетки и $h_{k-1} = 2h_k$ для грубой. Значения $p u_{2h}$ в силу линейности элементов вычисляются следующим образом: если узел принадлежит грубой сетке, то значение в нем сохраняется; если не принадлежит, то берется линейная интерполяция по двум значениям в узлах грубой сетки, расположенных на том же ребре треугольника разбиения “ $2h$ ”.

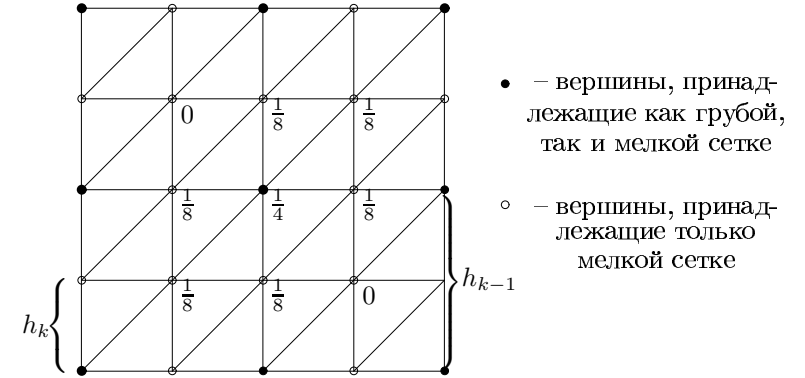


Рис. 2.5: Шаблон для оператора проектирования r с мелкой сетки на грубую в случае кусочно-линейных элементов.

2.4.1 Проверка свойства аппроксимации

Наш план проверки свойства аппроксимации следующий. Сначала перейдем из пространства коэффициентов \mathbb{R}_k в пространство конечно-элементных функций \mathbb{U}_h , где воспользуемся свойством конечно-элементного решения аппроксимировать решение дифференциальной задачи. После этого совершим обратный переход в \mathbb{R}_k .

Пользуясь определением нормы матрицы как оператора, свойство аппроксимации (2.32) перепишем в виде

$$\frac{\|(A_k^{-1} - p A_{k-1}^{-1} r) f_k\|}{\|f_k\|} \leq C_A \|A_k\|^{-1}$$

или

$$\|z_k - p z_{k-1}\| \leq C_A \|A_k\|^{-1} \|f_k\|, \quad (2.49)$$

где $A_k z_k = f_k$, $A_{k-1} z_{k-1} = r f_k$, f_k — произвольный элемент из \mathbb{R}_k . Поскольку задан естественный изоморфизм между \mathbb{R}_k и пространством конечных элементов \mathbb{U}_k , то проверку (2.49) удобно свести к оценке нормы разности конечно-элементных решений на “соседних” сеточных уровнях. Через P_k^* обозначим оператор сопряженный к естественному изоморфизму $P_k : \mathbb{R}_k \rightarrow \mathbb{U}_k$. Пусть $F_k = (P_k^*)^{-1} f_k$,

$F_k \in \mathbb{U}_k$, а $u_k \in \mathbb{U}_k$ и $u_{k-1} \in \mathbb{U}_{k-1}$ — решения задач

$$\begin{aligned} a(u_k, \phi) &= (F_k, \phi) \quad \forall \phi \in \mathbb{U}_k \\ a(u_{k-1}, \phi) &= (F_k, \phi) \quad \forall \phi \in \mathbb{U}_{k-1}. \end{aligned}$$

Справедливы равенства

$$z_k = P_k^{-1}u_k, \quad p z_{k-1} = P_k^{-1}u_{k-1}.$$

Следовательно, для доказательства (2.49) достаточно проверить оценку разности конечно-элементных решений на соседних сеточных уровнях

$$C \|u_k - u_{k-1}\|_0 \leq c C_A \|A_k\|^{-1} \|F_k\|_0. \quad (2.50)$$

Константы c и C появились из оценок (1.17) на нормы изоморфизмов P_k и P_k^{-1} . Независимость этих констант от k следует из наших предположений на сетку и ее измельчение.

Норма разности $u_k - u_{k-1}$ оценивается через “близость” u_k и u_{k-1} к решению дифференциальной задачи:

$$\|u_k - u_{k-1}\|_0 \leq \|u - u_k\|_0 + \|u - u_{k-1}\|_0,$$

где u — решение задачи

$$a(u, \phi) = (F_k, \phi) \quad \forall \phi \in \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Теперь воспользуемся оценкой (2.45), как в \mathbb{U}_k , так и в \mathbb{U}_{k-1} :

$$\begin{aligned} \|u - u_k\|_0 &\leq c h_k^2 \|F_k\|_0, \\ \|u - u_{k-1}\|_0 &\leq c h_{k-1}^2 \|F_k\|_0, \end{aligned}$$

а так как $h_{k-1} \leq c h_k$, то

$$\|u_k - u_{k-1}\|_0 \leq c h_k^2 \|F_k\|_0. \quad (2.51)$$

Осталось показать, что $h_k^2 \leq c \|A_k\|^{-1}$. Для этого воспользуемся “обратным” неравенством для конечно-элементных функций:

$$\|v_k\|_1 \leq c h_k^{-1} \|v_k\|_0 \quad \forall v_k \in \mathbb{U}_k. \quad (2.52)$$

Константа c в (2.52) зависит от вида конечных элементов (от степени полиномов), но не зависит от k . Получаем для произвольного $y \in \mathbb{R}_k$:

$$\langle A_k y, y \rangle_{\mathbb{R}_k} = a(P_k y, P_k y) = \|P_k y\|_1^2 \leq c h_k^{-2} \|P_k y\|_0^2 \leq c_0 h_k^{-2} \|y\|_{\mathbb{R}_k}^2.$$

Так как матрица A_k симметрична, то неравенство

$$\frac{\langle A_k y, y \rangle_{\mathbb{R}_k}}{\|y\|_{\mathbb{R}_k}^2} \leq c_0 h_k^{-2}$$

влечет оценку на $\lambda_{\max}(A_k)$, а следовательно и на спектральную норму (все $\lambda(A_k)$ положительны):

$$\|A_k\| \leq c h_k^{-2}. \quad (2.53)$$

Теперь неравенство (2.51) можно переписать, как

$$\|u_k - u_{k-1}\|_0 \leq c \|A_k\|^{-1} \|F_k\|_0.$$

Свойство аппроксимации для задачи Пуассона доказано.

Для доказательства сходимости V- цикла свойство аппроксимации требуется в виде (2.37). Если в качестве сглаживающих итераций выбран метод Якоби с параметром, то $W_k = \frac{1}{w} D_k$. Для проверки (2.37) достаточно проверить, что $\|W_k\| \leq c \|A_k\|$ или $\|D_k\| \leq c \|A_k\|$, если параметр релаксации w не зависит от k . Но $D_k = \text{diag}(A_k)$, поэтому всегда справедливо $\|D_k\| \leq \|A_k\|$. Проверка оценки $\|W_k\| \leq c \|A_k\|$ для сглаживаний симметричным методом Гаусса–Зейделя будет проведена в конце следующего параграфа.

2.4.2 Свойство сглаживания

В симметричном случае стандартным инструментом для проверки свойства сглаживания является

Лемма 2.1. Пусть матрица B такая, что $0 \leq B = B^T \leq I$, тогда

$$\|B(I - B)^\nu\| \leq \frac{1}{1 + \nu}, \quad \nu \geq 0. \quad (2.54)$$

Доказательство. Так как $B = B^T$, то

$$\|B(I - B)^\nu\| = \max_{\lambda} \{|\lambda(1 - \lambda)^\nu| : \lambda \in \text{sp}(B)\}.$$

По условию $\lambda(B) \in [0, 1]$, получаем

$$\|B(I - B)^\nu\| = \max_{x \in [0, 1]} x(1 - x)^\nu.$$

Функция $f(x) = x(1 - x)^\nu$ достигает наибольшего значения в $x_0 = \frac{1}{1 + \nu}$. Легко убедиться, что $f(x_0) \leq \frac{1}{1 + \nu}$. \square

Проверим сглаживающее свойство для метода Якоби с параметром и симметричного метода Гаусса–Зейделя. Пусть ϕ_i^k — i -ая локальная базисная функция из \mathbb{U}_k , тогда диагональные элементы матрицы A_k можно оценить, исходя из определения

$$(D_k)_{ii} = (A_k)_{ii} = h_k^{-2} a(\phi_i^k, \phi_i^k) = h_k^{-2} \|\phi_i^k\|_1 \geq c_1 h_k^{-2}. \quad (2.55)$$

Используя $\|D_k^{-1}\| = \max_i (D_k)_{ii}^{-1} \leq c_1^{-1} h_k^2$ и (2.53), получаем для $c_2 = c_0 c_1^{-1}$

$$\|A_k\| \leq c_2 \|D_k^{-1}\|^{-1}.$$

Положим в методе Якоби $w = \frac{1}{c_2}$, тогда для $W_k = \frac{1}{w} D_k$ легко проверить

$$0 \leq W_k^{-1} A_k \leq I. \quad (2.56)$$

Для симметричного метода Гаусса–Зейделя в качестве сглаживаний имеем

$$W_k = (L_k + D_k) D_k^{-1} (D_k + L_k^T) = A_k + L_k D_k^{-1} L_k^T \geq A_k,$$

что доказывает (2.56) для симметричного Гаусса–Зейделя.

Заметим, что оценка (2.56) является сглаживающим свойством и для доказательства сходимости V-цикла из § 2.3.3.

Проверим, что

$$\|W_k\| \leq c \|A_k\|. \quad (2.57)$$

Для метода Якоби (2.57) было установлено в конце предыдущего параграфа. Для симметричного метода Гаусса–Зейделя (2.57) следует из следующих рассуждений. Каждая базисная функция в \mathbb{U}_k имеет ненулевое пересечение носителей с конечным и независимым от k числом других базисных функций. Это число совпадает количеством ненулевых элементов в соответствующей строке матрицы A_k . Поэтому,

$$\begin{aligned} \|L_k\|^2 &\leq \|L_k\|_1 \|L_k\|_\infty = \left(\max_j \sum_{i=j+1}^{n_k} |(A_k)_{ij}| \right) \left(\max_i \sum_{j=1}^{i-1} |(A_k)_{ij}| \right) \leq \\ &\leq c \max_{i,j} (A_k)_{ij}^2 \leq c \|A_k\|^2. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Следовательно,

$$\|W_k\| = \|A_k + L_k D_k^{-1} L_k^T\| \leq \|A_k\| + \|L_k\|^2 \|D_k\|^{-1} \leq c \|A_k\|.$$

Покажем, что выполняется сглаживающее свойство, которое требуется для анализа W-цикла. А именно, докажем, что

$$\|A_k S_k^\nu\| \leq \frac{c}{\nu+1} \|A_k\|. \quad (2.59)$$

Обозначим $B = W_k^{-\frac{1}{2}} A_k W_k^{-\frac{1}{2}}$, тогда $\text{sp}(B) = \text{sp}(W_k^{-1} A_k) \subset [0, 1]$. Так как $S_k = I - W_k^{-1} A_k$, то

$$\begin{aligned} \|A_k S_k^\nu\| &= \|W_k^{\frac{1}{2}} B (I - B)^\nu W_k^{\frac{1}{2}}\| \leq \|W_k\| \|B (I - B)^\nu\| \leq \\ &\leq \frac{1}{1+\nu} \|W_k\| \leq \frac{c}{1+\nu} \|A_k\|. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Таким образом, проверены необходимые условия для теорем 2.1 и 2.3. Следовательно, сходимость V-цикла с одинаковым числом пред- и постсглаживаний и сходимость W-цикла с числом пред- или постсглаживаний большим некоторого $\bar{\nu} > 0$ для конечно-элементной аппроксимации задачи Пуассона доказаны.

В случае, если A_k или W_k — несимметричные матрицы, то лемма 2.1 не подходит для проверки сглаживающего свойства базовых итераций. Так обстоят дела, если для сглаживаний используется метод Гаусса–Зейделя (несимметризованный) или метод SOR, а так же если исходная задача не самосопряженная, как, например, уравнение конвекции-диффузии. Кроме того, использование леммы 2.1 бывает затруднительно, если свойство сглаживания требуется проверить в норме, отличной от спектральной.

В несимметричном случае подходящим инструментом может служить следующая лемма (известная как лемма Рёскина (Reusken)) и следствие из нее.

Лемма 2.2. Пусть для матрицы $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ выполнено $\|B\| \leq 1$ в некоторой операторной норме. Тогда в той же норме справедливо

$$\|(I - B)(I + B)^\nu\| \leq 2^{\nu+1} \sqrt{\frac{2}{\pi\nu}}, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots \quad (2.61)$$

Доказательство леммы можно прочесть, например, в [23]. Следствием леммы является теорема, устанавливающая сглаживающее свойство для итерационных методов с матрицей итераций

$$S_k = I - W_k^{-1} A_k.$$

Полагая в лемме 2.2 $B = I - 2W_k^{-1}A_k$ и проверяя, что при таком выборе

$$\|A_k S_k^\nu\| = \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu+1} \|W_k(I - B)(I + B)^\nu\|,$$

получаем следующую теорему.

Теорема 2.4. *Предположим, что в некоторой норме выполнено*

$$\|I - 2W_k^{-1}A_k\| \leq 1 \quad (2.62)$$

$$\|W_k\| \leq C\|A_k\|, \quad (2.63)$$

тогда справедливо сглаживающее свойство

$$\|A_k S_k^\nu\| \leq C \sqrt{\frac{2}{\pi\nu}} \|A_k\|. \quad (2.64)$$

Применение этой теоремы для доказательства сглаживающего свойства метода метода SOR для аппроксимаций уравнения Пуассона линейными конечными элементами можно посмотреть в [11].

2.5 Многосеточный метод как переобуславливатель

Как и в предыдущем разделе, нас интересует задача нахождения решения системы линейных алгебраических уравнений

$$Az = b. \quad (2.65)$$

Предположим $A = A^T > 0$. Через η обозначим спектральное число обусловленности матрицы A :

$$\eta = \text{cond}(A) := \|A\| \|A^{-1}\| = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}.$$

Например, для матрицы, полученной для одномерного уравнения диффузии (стр. 19), собственные значения известны, и мы заключаем из (2.3)

$$\eta = \frac{\cos^2(\frac{1}{2}\pi h)}{\sin^2(\frac{1}{2}\pi h)} = O(h^{-2}) \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (2.66)$$

При отсутствии дополнительной информации о структуре и спектре матрицы A одним из лучших итерационных методов является метод

сопряженных градиентов. Метод требует на каждой итерации одного или двух (в зависимости от реализации) применений оператора A к некоторому вектору:

$$z^{i+1} = z^i + \alpha_i(z^i - z^{i-1}) + \beta^i(Az^i - b), \quad (2.67)$$

параметры α^i и β^i вычисляются в процессе итераций (2.67). Для ошибки справедливо:

$$\|z - z^k\| \leq 2 \left(\frac{\sqrt{\eta} - 1}{\sqrt{\eta} + 1} \right)^k \|z - z^0\|, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.68)$$

Если $\eta \gg 1$, как происходит в (2.66) при малых h , то норма ошибки убывает медленно.

Предположим, что в нашем распоряжении имеется оператор $B = B^T > 0$ такой, что $\text{cond}(BA) = \bar{\eta} \ll \eta$ (напомним, что $\text{cond}(AB) = \text{cond}(BA)$), и для произвольного вектора x можно эффективно⁴ вычислить Bx . Тогда вместо (2.65) решаем систему

$$BAz = \bar{b}, \quad \bar{b} = Bb \quad \text{или} \quad AB\bar{z} = b, \quad z = B\bar{z}. \quad (2.69)$$

Оператор AB самосопряжен в скалярном произведении $(B\cdot, \cdot)$, а оператор BA в $(B^{-1}\cdot, \cdot)$ или $(A\cdot, \cdot)$. Оператор B называется переобуславливателем. Метод сопряженных градиентов, примененный к (2.69), будет обеспечивать сходимость в норме $\|\cdot\|_B$ (или $\|\cdot\|_{B^{-1}}$) с лучшим показателем сходимости по сравнению с (2.68)

$$\|z - z^k\|_B \leq 2 \left(\frac{\sqrt{\bar{\eta}} - 1}{\sqrt{\bar{\eta}} + 1} \right)^k \|z - z^0\|_B, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.70)$$

Пусть для решения системы (2.65) заданы итерации вида:

$$z^{i+1} = Mz^i + Nb, \quad (2.71)$$

где M — матрица итераций. Разумным требованием, которое, в частности, выполняется для всех базовых итерационных методов, является то, что решение системы $z = A^{-1}b$ является неподвижной точкой для (2.71):

$$z = Mz + Nb.$$

Это можно переписать как

$$A^{-1}b = MA^{-1}b + Nb.$$

⁴Имеется ввиду, что операция Bx по арифметической сложности сопоставима с вычислением Ax .

В силу произвольности b последнее влечет

$$A^{-1} = MA^{-1} + N$$

или

$$N = (I - M)A^{-1}. \quad (2.72)$$

Пусть $M = M_l$ — матрица итерации (одного цикла) многосеточного метода для решения (2.65). Предположим, что многосеточный метод сходится и $\|M\| \leq \xi < 1$. Построим переобуславливатель B для матрицы A следующим образом: для произвольного $x \in \mathbb{R}_l$ зададим правило для вычисления $y = Bx$. А именно, вектор y является приближением к решению системы $A\bar{y} = x$, полученным после выполнения k итераций (циклов) многосеточного метода с нулевым начальным приближением $y^0 = 0$:

$$y = M^k y^0 + Nx = Nx.$$

Пользуясь представлением (2.72), получаем:

$$B = N = (I - M^k)A^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.73)$$

Отметим, что равенство (2.73) служит для аналитических исследований ниже, а не для фактического вычисления B . При численной реализации матрица B явно не вычисляется, а задается правило умножения B на произвольный вектор x , которое состоит в выполнении k циклов многосеточного метода.

Для предложенного переобуславливателя B из (2.73) следует равенство $BA = (I - M^k)$ и оценка

$$\text{cond}(BA) = \|I - M^k\| \|(I - M^k)^{-1}\| \leq \frac{(1 + \xi^k)}{(1 - \xi^k)}.$$

Последнее неравенство следует из

$$\|I - M^k\| \leq \|I\| + \|M^k\| \leq \|I\| + \|M\|^k \leq (1 + \xi^k)$$

и

$$\begin{aligned} \|(I - M^k)^{-1}\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|(I - M^k)^{-1}x\|}{\|x\|} = \sup_{y \neq 0} \frac{\|y\|}{\|(I - M^k)y\|} \leq \\ &\leq \sup_{y \neq 0} \frac{\|y\|}{\|y\| - \|M^k y\|} \leq \sup_{y \neq 0} \frac{\|y\|}{(1 - \|M^k\|)\|y\|} \leq (1 - \xi^k)^{-1}. \end{aligned}$$

Следовательно, скорость сходимости метода сопряженных градиентов с многосеточным переобуславливателем можно оценить как (см. (2.70))

$$\frac{\sqrt{\eta} - 1}{\sqrt{\eta} + 1} = \frac{\sqrt{\frac{1+\xi^k}{1-\xi^k}} - 1}{\sqrt{\frac{1+\xi^k}{1-\xi^k}} + 1} = \frac{1 - \sqrt{1 - \xi^{2k}}}{\xi^k} < \xi^k.$$

Поэтому использование многосеточного метода для задания переобуславливателя может быть выгоднее, а иногда и удобнее, чем в качестве самостоятельных итераций. В этом случае метод сопряженных градиентов называют *внешними* итерациями, а многосеточный метод *внутренними* итерациями. Для аддитивного многосеточного метода, рассмотренного в этом разделе, метод сопряженных градиентов в качестве внешних итераций в большинстве случаев необходим.

2.5.1 Аддитивный многосеточный метод

Многосеточный метод из предыдущего раздела иногда называют *мультипликативным* многосеточным методом. Для большинства “естественных” аппроксимаций самосопряженных эллиптических задач он обеспечивает не зависящую от числа сеточных уровней скорость сходимости. Однако мультипликативный метод, особенно W -цикл, не очень эффективны для распараллеливания на многопроцессорных компьютерах, так как расчеты на сеточных уровнях производятся последовательно. Для вычислений на многопроцессорных компьютерах часто оказывается более эффективным *аддитивный* многосеточный метод. Более того, аддитивные методы могут быть более удобны (с точки зрения реализации), чем мультипликативные, для задач, использующих локально сгущающиеся (измельчаемые) сетки. Вопрос о локально сгущающихся сетках будет обсуждаться в конце раздела.

Используя предположения и обозначения из параграфа 2.2, зададим одну итерацию аддитивного метода для решения системы $A_l z_l = f_l$ в виде процедуры $z^{new} = AMG(l, z^{old}, f_l)$, где z^{old} — начальное приближение к z_l :

$$\bar{z} = AMG(k, z, f)$$

{
Если $k = 0$, то

0. $\bar{z} = A_0^{-1}f$ (точное решение на самой грубой сетке), далее выход из процедуры;

Иначе

1. $d = r(A_k z - f)$ (проецирование невязки на грубую сетку);

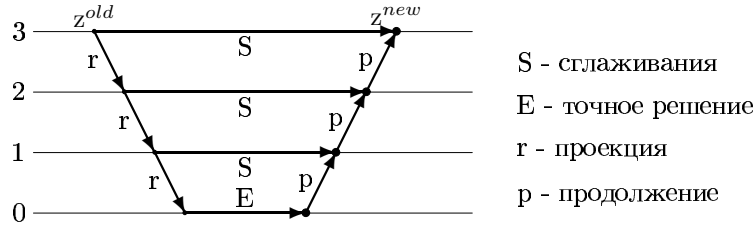


Рис. 2.6: Цикл аддитивного метода.

2. $z^0 = z, z^{i+1} = z^i - W_k^{-1}(A_k z^i - f), i = 0, \dots, \nu - 1$ (ν базовых итераций (сглаживаний));
3. $e = 0$ (начальное приближение к ошибке);
4. выполняем $\bar{e} = AMG(k - 1, e, d)$ (многосеточный метод для решения задачи на грубой сетке);
5. $\bar{z} = z^\nu - \theta p \bar{e}$ (коррекция приближения z^ν с грубой сетки).

Заметим, что шаг 4 не зависит от шага 2 и может выполняться параллельно. Таким образом, сглаживающие итерации на всех сеточных уровнях могут выполняться параллельно. Аддитивный метод проиллюстрирован схемой на рисунке 2.6.

Сходимость аддитивного метода требует правильного выбора параметра θ на пятом шаге, необходимое значение θ заранее может быть не известно. Поэтому аддитивный метод в абсолютном большинстве случаев используют как переобуславливатель в методе сопряженных градиентов при $\theta = 1$, что позволяет автоматически выбирать релаксационные параметры. В литературе исследование сходимости таких итераций проводится в рамках более общей теории итерационных методов коррекции на подпространствах. Ниже мы познакомим читателя с основными моментами этой теории.

Нетрудно убедиться, что матрица итераций двухсеточного аддитивного метода имеет вид

$$M_a = I - (\theta p A_{2h}^{-1} r + (I - S_h^\nu) A_h^{-1}) A_h, \quad (2.74)$$

где S_h — матрица сглаживающих итераций. Из представления (2.74) видно, что аддитивный многосеточный метод в отличие от мультипликативного не является точным, если $\|S_h\| < 1$ и $\nu \rightarrow \infty$. Увели-

чение числа сглаживаний не обязательно ведет к улучшению сходимости метода. Он будет точным только в случае, если θ зависит от ν , и $\theta(\nu) \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$.

Аддитивный многосеточный метод используется как переобуславливатель. Анализ его строится не на выводе оценок для матрицы итераций M_a , а на оценках для спектрального числа обусловленности произведения BA_h . Это достигается в рамках теории аддитивного метода Шварца [10], лежащей в основе методов коррекции на подпространствах.

2.5.2 Метод параллельной коррекции на подпространствах

Рассмотрим некоторую систему линейных алгебраических уравнений

$$Az = b, \quad (2.75)$$

где b и z принадлежат пространству $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$. Пусть задано разложение \mathbb{V} в сумму подпространств (необязательно прямую!):

$$\mathbb{V} = \sum_{i=0}^l \mathbb{V}_i, \quad \mathbb{V}_i \subset \mathbb{V}, \quad (2.76)$$

т.е. для любого $v \in \mathbb{V}$ существует (может быть, не единственное) разложение $v = \sum_{i=0}^l v_i, v_i \in \mathbb{V}_i$. Наша цель — свести итерационный метод решения (2.75) к решению систем уравнений на подпространствах. Общий план следующий: система (2.75) проецируется на подпространства, где (приближено) решаются системы меньшей размерности. После этого “собирается” информация со всех \mathbb{V}_i для получения нового приближения к решению на \mathbb{V} .

Определим операторы проектирования $P_i, Q_i : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}_i$ и оператор на подпространстве $A_i : \mathbb{V}_i \rightarrow \mathbb{V}_i$ следующим образом:

$$(Q_i v, v_i) = (v, v_i), \quad (P_i v, v_i)_A = (v, v_i)_A \quad \forall v \in \mathbb{V}, v_i \in \mathbb{V}_i, \\ (A_i z_i, v_i) = (Az_i, v_i) \quad \forall z_i, v_i \in \mathbb{V}_i.$$

Оператор A_i можно рассматривать как проекцию оператора A на подпространство \mathbb{V}_i . Действительно, из определения операторов для произвольных $v \in \mathbb{V}$ и $v_i \in \mathbb{V}_i$ следует

$$(A_i P_i v, v_i) = (A P_i v, v_i) = (P_i v, v_i)_A = (v, v_i)_A = (A v, v_i) = (Q_i A v, v_i).$$

В силу произвольности v и v_i получаем

$$A_i P_i = Q_i A. \quad (2.77)$$

Прямым следствием (2.77) и (2.75) является равенство

$$A_i z_i = b_i, \quad (2.78)$$

где $z_i = P_i z$, $b_i = Q_i b$. Уравнение (2.78) называют *уравнением на подпространстве*.

Предположим, что система (2.75) приближено решается итерационным методом, в котором z^0 — известное приближение к решению z , $r^0 = A z^0 - b$ — невязка, а $e = z^0 - z$ — неизвестная ошибка. Вектор ошибки удовлетворяет уравнению:

$$A e = r^0.$$

Если предположить, что e найдено, то точное решение находится как $z = z_0 - e$. Будем искать приближение к ошибке следующим образом. Рассмотрим уравнение для ошибки на подпространстве \mathbb{V}_i :

$$A_i e_i = Q_i r^0, \quad \text{где } e_i = P_i e.$$

Вполне может случиться так, что уравнения на подпространствах затруднительно решать точно. Однако, предположим, что можно найти приближение \hat{e}_i к e_i как

$$\hat{e}_i = R_i Q_i r^0,$$

где R_i — приближение к A_i^{-1} . В знакомых терминах можно сказать, что R_i — переобуславливатель к A_i . Тогда, “собирая” приближения к ошибке на подпространствах, новое приближение к решению находим в виде

$$z^1 = z^0 - \sum_{i=0}^l \hat{e}_i,$$

что может быть переписано как переобусловленный итерационный метод:

$$z^1 = z^0 - B(A z^0 - b) \quad (2.79)$$

с переобуславливателем

$$B = \sum_{i=0}^l R_i Q_i. \quad (2.80)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости следующей леммы.

Лемма 2.3. *Если все R_i самосопряженные и положительно определенные операторы, то оператор B из (2.80) является положительно определенным и самосопряженным.*

Таким образом, если $A = A^T > 0$ и $R_i = R_i^T > 0$, то для решения системы (2.75) представляется разумным применять *метод сопряженных градиентов с переобуславливателем B* .

В качестве тривиального примера метода, попадающего в класс методов коррекции на подпространствах, рассмотрим метод Якоби. Для этого положим $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ и возьмем разложение \mathbb{R}^n в сумму одномерных ортогональных подпространств $\mathbb{R}^n = \sum_{i=1}^n \text{span}\{\bar{e}_i\}$, здесь \bar{e}_i — единичный базисный вектор, тогда

$$Q_i v = v_i \bar{e}_i,$$

где v_i — i -ая компонента вектора v . Для матрицы A получаем $(A \bar{e}_i, \bar{e}_j) = a_{ij}(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = a_{ij} \delta_j^i$, поэтому

$$A_i = a_{ii}.$$

Если положить $R_i = A_i^{-1} = a_{ii}^{-1}$, то метод коррекции на подпространствах (2.79) будет совпадать методом Якоби.

2.5.3 ВРХ переобуславливатель

Пусть задана система вложенных конечно-элементных пространств $\mathbb{U}_0 \subset \dots \subset \mathbb{U}_l$, пусть $\mathbb{V} = \mathbb{R}_l$, $\mathbb{V}_i = \mathbb{R}_i$, где \mathbb{R}_i — пространства коэффициентов конечно-элементных функций из \mathbb{U}_i на i -ом сеточном уровне (см. § 2.2). Вложение $\mathbb{V}_i \subset \mathbb{V}$ будем понимать в смысле вложений конечно-элементных пространств:

$$\mathbb{V}_i = \mathbb{R}_i \sim \mathbb{U}_i \subset \mathbb{U}_l \sim \mathbb{R} = \mathbb{V},$$

элемент $v_i \in \mathbb{V}_i$ будем рассматривать в \mathbb{V} как элемент $p_l p_{l-1} \dots p_{i+1} v_i$. Здесь p_i — канонический оператор продолжения из \mathbb{R}_{i-1} в \mathbb{R}_i (ранее индекс i опускался), канонический оператор проектирования будем, соответственно, обозначать через r_i . По определению Q_i получаем

$$\begin{aligned} (Q_i v, v_i)_{V_i} &= (v, p_l p_{l-1} \dots p_{i+1} v_i)_V = (p_{i+1}^* \dots p_{l-1}^* p_l^* v, v_i)_{V_i} = \\ &= (r_{i+1} \dots r_{l-1} r_l v, v_i)_{V_i}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$Q_i = r_{i+1} \dots r_{l-1} r_l, \quad Q_l = I.$$

Обязательным элементом многосеточного метода являются сглаживания. Пусть S_i — матрица сглаживающих итераций на i -ом уровне. Например

$$S_i = I - wD_i^{-1}A_i$$

для сглаживаний Якоби. В новых обозначениях S_i действует на векторах из \mathbb{V}_i . Как следует из представления (2.73), применение ν итераций для решения системы с матрицей A_i может быть формально записано, как умножение правой части системы на матрицу $(I - S_i^\nu)A_i^{-1}$. Теперь легко видеть, что метод параллельной коррекции (2.79) будет эквивалентен методу простой итерации с одним циклом *аддитивного* многосеточного метода в качестве переобуславливателя (с нулевым начальным приближением и $\theta = 1$). При этом справедливо формальное равенство

$$R_i = (I - S_i^\nu)A_i^{-1}. \quad (2.81)$$

Построенный таким образом переобуславливатель имеет название ВРХ по имени авторов: Bramble, Pasciak, Xu. Его обычно используют, как переобуславливатель в методе сопряженных градиентов. Удобная реализация этого метода, в том числе на адаптивных сетках, будет рассмотрена в разделе 2.7.

Теория методов параллельной коррекции на подпространствах используется для доказательства сходимости метода сопряженных градиентов с аддитивным многосеточным методом в качестве переобуславливателя.

2.5.4 Сходимость метода параллельной коррекции на подпространствах

Оценка скорости сходимости метода сопряженных градиентов с переобуславливателем B может быть определена оценкой числа обусловленности матрицы BA . Для метода параллельной коррекции на подпространствах подходящим инструментом для оценки $\text{cond}(BA)$ является следующая теорема.

Теорема 2.5. *Предположим, что матрицы A и R_i — симметричные и положительно определенные. Пусть для любого вектора $v \in \mathbb{V}$ существует разложение $v = \sum_i v_i$, $v_i \in \mathbb{V}_i$, такое, что с некоторой константой K_0 выполнено*

$$\sum_{i=0}^l (R_i^{-1}v_i, v_i) \leq K_0(Av, v). \quad (2.82)$$

Пусть $T_i = R_iQ_iA = R_iA_iP_i$, и для любых векторов $y, v \in \mathbb{V}$ с некоторой константой K_1 выполняется

$$\sum_{i,j=0}^l (T_i y, T_j v)_A \leq K_1 \left(\sum_{i=0}^l (T_i y, y)_A \right)^{1/2} \left(\sum_{j=0}^l (T_j v, v)_A \right)^{1/2} \quad (2.83)$$

Тогда $\text{cond}(BA) := \frac{\lambda_{\max}(BA)}{\lambda_{\min}(BA)} \leq K_0 K_1$.

Доказательство теоремы 2.5 не сложно и приведено, например, в [35, 11]. Отметим, что прообразом теоремы 2.5 является теорема об аддитивном методе Шварца [10], рассмотренная в разделе 3.6.

Еще одним удобным инструментом, применяемым в теории аддитивных многосеточных методов, является проверка усиленного неравенства Шварца для конечно-элементных подпространств, соответствующим различным масштабам. Поясним ниже, как это происходит.

Говорят, что для подпространств $\mathbb{U}_1 \subset \mathbb{U}$ и $\mathbb{U}_2 \subset \mathbb{U}$, где \mathbb{U} — гильбертово или евклидово пространство, выполнено усиленное неравенство Коши-Шварца, если

$$|(u_1, u_2)_{\mathbb{U}}| \leq \gamma \|u_1\|_{\mathbb{U}} \|u_2\|_{\mathbb{U}} \quad \forall u_1 \in \mathbb{U}_1, u_2 \in \mathbb{U}_2 \quad (2.84)$$

с некоторой константой $\gamma \in [0, 1)$. Заметим, что обычное неравенство Коши всегда гарантирует выполнение (2.84) с $\gamma = 1$. Однако в возможна ситуация, когда $\gamma < 1$. Например, для ортогональных подпространств $\gamma = 0$. Величину $\arccos \gamma$ называют еще углом между подпространствами.

Оценку для K_1 из (2.83) можно получить, доказывая неравенства типа усиленных неравенств Коши-Шварца для подпространств \mathbb{V}_i и \mathbb{V}_j из разложения (2.76). Для этого преобразуем слагаемые в правой части (2.83), пользуясь определениями матриц (операторов) T_i и Q_i :

$$\begin{aligned} (T_i y, y)_A &= (AT_i y, y) = (AR_i Q_i A y, y) = (R_i Q_i A y, A y) = \\ &= (R_i Q_i A y, Q_i A y) = (R_i^{-1} R_i Q_i A y, R_i Q_i A y) = (R_i^{-1} T_i y, T_i y). \end{aligned}$$

Так как $T_i y \in \mathbb{V}_i$, то (2.83) будет следовать из оценки

$$\sum_{i,j=0}^l (v_i, v_j)_A \leq K_1 \left(\sum_{i=0}^l (R_i^{-1} v_i, v_i) \right)^{1/2} \left(\sum_{j=0}^l (R_j^{-1} v_j, v_j) \right)^{1/2} \quad (2.85)$$

для произвольного набора векторов $v_i \in \mathbb{V}_i$, $v_j \in \mathbb{V}_j$, $i, j = 0, \dots, l$.

Теперь предположим, что для произвольных $v_i \in \mathbb{V}_i$ и $v_j \in \mathbb{V}_j$ выполнено

$$(v_i, v_j)_A \leq \gamma_{ij} (R_i^{-1} v_i, v_i)^{1/2} (R_j^{-1} v_j, v_j)^{1/2} \quad (2.86)$$

где константы γ_{ij} не зависят от выбора функций из \mathbb{V}_i и \mathbb{V}_j . Из констант γ_{ij} составим симметричную матрицу $G = \{\gamma_{ij}\}$ размерности $(l+1) \times (l+1)$. Пусть $\rho(G)$ — спектральный радиус G . Для симметричной матрицы и спектральной нормы справедливо $\|G\| = \rho(G)$. Неравенство (2.85) выполнено с $K_1 = \rho(G)$. Действительно, для произвольных $x, y \in \mathbb{R}^{l+1}$ выполняется

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=0}^l \gamma_{ij} x_i y_j &= (Gx, y) \leq \|G\| \|x\| \|y\| = \rho(G) \|x\| \|y\| = \\ &= \rho(G) \left(\sum_{i=0}^l x_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=0}^l y_j^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Оценка (2.85) получается суммированием (2.86) по всем i, j и применением (2.87) с $x_i = (R_i^{-1} v_i, v_i)^{1/2}$ и $y_j = (R_j^{-1} v_j, v_j)^{1/2}$.

Для получения оценки на K_1 нам достаточно доказать (2.86) с константами γ_{ij} , такими, что $\rho(G)$ не зависит от h_l и от числа сеточных уровней l .

2.6 Оценка для ВРХ-переобуславливателя на примере задачи Пуассона

На примере задачи Пуассона докажем сходимость метода сопряженных градиентов с аддитивным многосеточным методом в качестве переобуславливателя (ВРХ-переобуславливатель). Рассмотрим сглаживания Якоби. Оценка показателя сходимости не будет зависеть от h_l и l . Условия на сетку будем предполагать такие же, как в разделе 2.4. Предположим, что конечно-элементные пространства \mathbb{U}_k состоят из кусочно-линейных конечных элементов относительно разбиения T_k области Ω на треугольники.

Далее мы будем опускать нижний индекс 0 в обозначении L_2 -нормы. Из контекста будет ясно, когда через $\|\cdot\|$ обозначается L_2 -норма функции, а когда — евклидова норма вектора.

Докажем вначале оценку на K_1 . Для метода Якоби $R_k = D_k^{-1}$, D_k — диагональ A_k , следовательно, справедливо (см. раздел 2.4):

$$c_1 h_k^{-2} \|v_k\|^2 \leq (R_k^{-1} v_k, v_k) \leq c_2 h_k^{-2} \|v_k\|^2, \quad (2.88)$$

$$c_3 \|v_k\|_A^2 \leq (R_k^{-1} v_k, v_k) \quad (2.89)$$

для произвольных $v_k \in \mathbb{V}_k$, $k = 0, \dots, l$ и с константами c_0, c_1, c_2 , не зависящими от k и v_k .

Нам понадобится следующая вспомогательная лемма, доказанная, например, в [35, 11].

Лемма 2.4. Пусть $0 \leq k \leq m \leq l$, тогда для произвольных $u \in \mathbb{U}_k$, $v \in \mathbb{U}_m$ выполняется неравенство

$$|(\nabla u, \nabla v)| \leq c \sqrt{\frac{h_m}{h_k}} \|\nabla u\| h_m^{-1} \|v\|. \quad (2.90)$$

Благодаря изоморфизмам между \mathbb{U}_k и $\mathbb{R}_k = \mathbb{V}_k$ и определению матрицы A , оценка (2.90) влечет соответствующую оценку в пространстве коэффициентов конечно-элементных функций, а именно

$$(v_k, v_m)_A \leq c \sqrt{\frac{h_m}{h_k}} \|v_k\|_A h_m^{-1} \|v_m\| \quad \forall v_k \in \mathbb{V}_k, v_m \in \mathbb{V}_m, k \leq m. \quad (2.91)$$

Комбинируя (2.91) с (2.88) и (2.89), получаем

$$(v_k, v_m)_A \leq \sqrt{\frac{h_m}{h_k}} (R_k^{-1} v_k, v_k)^{1/2} (R_m^{-1} v_m, v_m)^{1/2}, \quad k \leq m.$$

Следовательно, нами доказано усиленное неравенство Шварца (2.86) для подпространств \mathbb{V}_k и \mathbb{V}_m с константой

$$\gamma_{ij} = c \min \left\{ \sqrt{\frac{h_i}{h_j}}, \sqrt{\frac{h_j}{h_i}} \right\}.$$

Из свойств триангуляций T_i, T_j имеем: $\frac{h_i}{h_j} \leq c(\frac{1}{2})^{i-j}$.

Спектральный радиус $|\rho(G)|$ матрицы G можно оценить через ее ∞ -норму:

$$\rho(G) \leq \|G\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^l |\gamma_{ij}| \leq c \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}.$$

Так как $K_1 \leq \rho(G)$, то оценка K_1 , не зависящая от h_l и l , доказана.

Перейдем к получению оценки для константы K_0 . Для этого рассмотрим произвольную функцию $v \in \mathbb{V} := \mathbb{R}_l$. Для v требуется найти разложение, такое, что (2.82) выполнено. Перейдем в пространство конечных элементов $\mathbb{U}_l \subset \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и рассмотрим соответствующую $u \in \mathbb{U}_l$, $u = P_l v$. Далее, найдем подходящее разложение для u , а после вернемся обратно в пространства коэффициентов. Пусть $u_k \in \mathbb{U}_k$ — \mathbb{H}^1 -ортогональная проекция u в \mathbb{U}_k , т.е.

$$(\nabla u_k, \nabla \psi) = (\nabla u, \nabla \psi) \quad \forall \psi \in \mathbb{U}_k. \quad (2.92)$$

Если область Ω такая, что выполнено условие \mathbb{H}^2 -регулярности (1.10), то при допущенных предположениях на триангуляцию имеет место оценка (см. § 1.2)

$$\|u - u_k\| \leq ch_k \|u - u_k\|_1. \quad (2.93)$$

Рассмотрим теперь следующий набор функций $\bar{u}_k \in \mathbb{U}_k$:

$$\begin{aligned} \bar{u}_0 &= u_0, & \bar{u}_k &= u_k - u_{k-1}, \quad k = 1, \dots, l, \\ u_l &= u. \end{aligned}$$

Имеем разложение

$$u = \sum_{k=0}^l \bar{u}_k. \quad (2.94)$$

Так как $\mathbb{U}_{k-1} \subset \mathbb{U}_k$, то (2.92) влечет для всех $k = 1, \dots, l$

$$(\nabla u_{k-1}, \nabla \psi) = (\nabla u_k, \nabla \psi) \quad \forall \psi \in \mathbb{U}_{k-1}. \quad (2.95)$$

Следовательно, аналогично (2.93) мы имеем

$$\|u_k - u_{k-1}\| \leq ch_{k-1} \|u_k - u_{k-1}\|_1 \leq c_1 h_k \|u_k - u_{k-1}\|_1. \quad (2.96)$$

Более того, подставляя $\psi = \bar{u}_m$ в (2.95) при $m < k$, получаем ортогональность

$$(\nabla \bar{u}_k, \nabla \bar{u}_m) = 0 \quad \forall k \neq m. \quad (2.97)$$

Оценку (2.96) можно переписать как

$$\|\bar{u}_k\| \leq ch_k \|\bar{u}_k\|_1.$$

Предположим, что $h_0 \sim O(1)$. Тогда для $\bar{u}_0 \in \mathbb{U}_0$ оценка $\|\bar{u}_0\| \leq h_0 \|\nabla \bar{u}_0\|$ следует непосредственно из неравенства Фридрихса.¹ Возвращаясь в пространства коэффициентов (полагая $v_k = P_l^{-1} \bar{u}_k$, где

¹Это условие можно опустить, потребовав $R_0 = A_0^{-1}$, т.е. на самой грубой сетке задача решается точно.

P_l — изоморфизм между \mathbb{V} и \mathbb{U}_l , см. § 1.2), получаем разложение $v = \sum_{k=0}^l v_k$, для которого выполняется:

$$\|v_k\| \leq ch_k \|v_k\|_A. \quad (2.98)$$

Следовательно, в силу свойства ортогональности (2.97), которое в пространствах \mathbb{V}_m и \mathbb{V}_k принимает вид $(v_k, v_m)_A = 0$, $k \neq m$, получаем

$$\|v\|_A^2 = \sum_{k=0}^l \|v_k\|_A^2.$$

Далее применяем (2.98)

$$\|v\|_A^2 = \sum_{k=0}^l \|v_k\|_A^2 \geq c \sum_{k=0}^l h_k^{-2} \|v_k\|^2.$$

Последняя оценка и (2.88) влечет

$$\|v\|_A^2 \geq c \sum_{k=0}^l h_k^{-2} \|v_k\|^2 \geq c \sum_{k=0}^l (R_k^{-1} v_k, v_k).$$

Оценка константы K_0 , не зависящая от h_l и l , получена.

Таким образом, если A — матрица конечно-элементной дискретизации уравнения Пуассона, B — переобуславливатель, полученный применением аддитивного многосеточного метода, то $\text{cond}(BA) \leq C$ с некоторой константой $C = K_0 K_1$, не зависящей от шага сетки и количества сеточных уровней. Эта оценка обеспечивает h -независимую скорость сходимости метода сопряженных градиентов для решения системы $Az = b$ с переобуславливателем B .

Дополнительным преимуществом аддитивного многосеточного метода является гибкость по отношению к параллелизации: распараллеливание вычислений возможно как по сеточным уровням, так и по сеточным подобластям.

2.7 Неравномерное измельчение и метод иерархических базисов

Нам уже известно, что один цикл аддитивного многосеточного метода можно записать в терминах метода коррекции на подпространствах:

$$u^{new} = u^{old} - B\tau = u^{old} - \sum_{i=1}^l R_i Q_i \tau, \quad (2.99)$$

где \mathbf{r} — невязка, $\mathbf{r} = A u^{old} - \mathbf{b}$.

Если мы применяем ВРХ-переобуславливатель со сглаживаниями Якоби, а на грубой сетке решаем задачу точно, то 2-ое слагаемое в (2.99) можно переписать

$$B\mathbf{r} = A_0^{-1}Q_0\mathbf{r} + P_l^{-1} \left(\sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^{n_k} \frac{(r_h, \phi_i^{(k)})}{a(\phi_i^{(k)}, \phi_i^{(k)})} \phi_i^{(k)} \right), \quad (2.100)$$

где $r_h = P_l\mathbf{r}$ — невязка в пространстве конечно-элементных функций, n_k — число базисных функций на k -ом сеточном уровне, $\phi_i^{(k)}$ — базисные функции на k -ом уровне, $a(\cdot, \cdot)$ — билинейная форма конечно-элементной постановки задачи. Для примера задачи Пуассона $a(\psi, \phi) = (\nabla\psi, \nabla\phi)$. Напомним, что в методе конечных элементов матрица A_l и вектор в правой части системы \mathbf{b} находятся из соотношений

$$\langle A_l \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle_{\mathbb{R}^l} = a(\phi_j^{(l)}, \phi_i^{(l)}), \quad \langle \mathbf{b}, \bar{e}_i \rangle_{\mathbb{R}^l} = (f, \phi_i^{(l)}).$$

Предположим, что сетка может измельчаться неравномерно: на k -ом уровне добавляются узлы сетки x_i с номерами $i = n_{k-1} + 1, \dots, n_k$, тогда имеет смысл следующая модификация переобуславливателя (2.100). Исключим из суммы в (2.100) те слагаемые, которые не обновляются при переходе с $k-1$ -ого уровня на k -ый:

$$B\mathbf{r} = A_0^{-1}Q_0\mathbf{r} + P_l^{-1} \left(\sum_{k=1}^l \sum_{\phi_i^{(k)} \neq \phi_i^{(k-1)}} \frac{(r_h, \phi_i^{(k)})}{a(\phi_i^{(k)}, \phi_i^{(k)})} \phi_i^{(k)} \right), \quad (2.101)$$

где мы ввели обозначение:

$$\sum_{\phi_i^{(k)} \neq \phi_i^{(k-1)}} := \sum_{i=1; \phi_i^{(k)} \neq \phi_i^{(k-1)}; i=1; \dots; n_{k-1}} + \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k}.$$

На k -ом уровне в (2.101) входят только базисные функции, относящиеся к *новым* (для k -ого уровня) узлам и узлам соседним с ними, т.е. все новые базисные функции. Алгоритмически переобуславливатель B реализуется следующим образом. В рекурсивной процедуре AMGМ (см. стр. 50) на шаге 2 при выполнении сглаживаний методом Якоби вычисляются только компоненты вектора, соответствующие узлам, в которых изменились базисные функции. остальные компоненты равны нулю. Тогда $B\mathbf{r} = AMGМ(l, 0, \mathbf{r})$ с $\nu = 1$ и $\theta = 1$. Таким образом, на k -ом уровне вычисления производятся только в подобласти, где измельчается сетка, а не во всей области Ω . Это может

существенно сократить вычисления. В качестве сравнения рассмотрим пример, когда в двумерной области сетка при переходе с k -ого на $k+1$ -ый сеточный уровень измельчается в подобласти, равной по площади $\frac{1}{2}$ от площади подобласти, где измельчалась сетка при переходе с $k-1$ -ого уровня на k -ый. Такая ситуация часто встречается на практике, когда решение дифференциальной задачи сильно изменяется в некоторой подобласти, например около границы. Поэтому сетка адаптируется, чтобы возможно было хорошо приблизить решение в таких областях. Для предложенного примера нетрудно посчитать, что количество узлов на k -ом уровне будет равно $(1 + \frac{3}{2} \sum_{i=1}^k 2^{i-1}) n_0$, где n_0 — число узлов самой грубой сетки. Константа из (2.17) $C_n \rightarrow 2$ при $l \rightarrow \infty$. Значит, классический многосеточный метод из предыдущих разделов перестает быть оптимальным по вычислительной сложности для $\gamma \geq 2$. Аддитивный же метод вида (2.99) с оператором B из (2.101) при любой подобной стратегии измельчения сетки ($C_n \geq q > 1$) будет иметь оптимальную сложность. Существуют варианты и мультипликативного метода, приспособленные для расчетов на адаптивных сетках. Сравнение аддитивного и мультипликативного методов можно найти в обзорной работе [17].

В *методе иерархических базисов* применение B из (2.101) “упрощается” далее и принимает вид:

$$B\mathbf{r} = A_0^{-1}Q_0\mathbf{r} + P_l^{-1} \left(\sum_{k=1}^l \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{(r_h, \phi_i^{(k)})}{a(\phi_i^{(k)}, \phi_i^{(k)})} \phi_i^{(k)} \right), \quad (2.102)$$

что соответствует выбору $\mathbb{V}_k = P_k^{-1}(\mathbb{U}_k - \mathbb{U}_{k-1})$ в методе коррекции на подпространстве. На новом k -ом уровне пересчет происходит только в новых, по сравнению с $k-1$ -ым уровнем, узлах. В этом случае формула расчетов очень проста и удобна для распараллеливания, а базисные функции из (2.102) можно перенумеровать и записать (2.102) в виде:

$$B\mathbf{r} = A_0^{-1}Q_0\mathbf{r} + P_l^{-1} \left(\sum_{i=n_0+1}^{n_l} \frac{(r_h, \hat{\phi}_i)}{a(\hat{\phi}_i, \hat{\phi}_i)} \hat{\phi}_i \right). \quad (2.103)$$

Для одномерного случая и линейных конечных элементов структура $\hat{\phi}_i$ проиллюстрирована на рисунках 2.7, 2.8.

Если A — матрица жесткости метода конечных элементов на самой мелкой сетке с шагом дискретизации h_l , а переобуславливатель B задается согласно методу иерархических базисов (формула

(2.103)), то

$$\text{cond}(BA) \leq K_0 K_1, \quad \text{где } K_0 = O(|\ln h_l|^2), \quad K_1 = O(1). \quad (2.104)$$

По сравнению с ВРХ-переобуславливателем оценка (2.104) зависит от h_l , однако логарифмический рост числа обусловленности часто считается приемлемой “ценой” за удобство расчетов. Отметим, что для трехмерных областей зависимость от h_l в методе иерархических базисов усиливается. Подробнее о методе иерархических базисов можно прочесть в обзоре [32]. Доказательство оценок (2.104) можно прочесть также в [11].

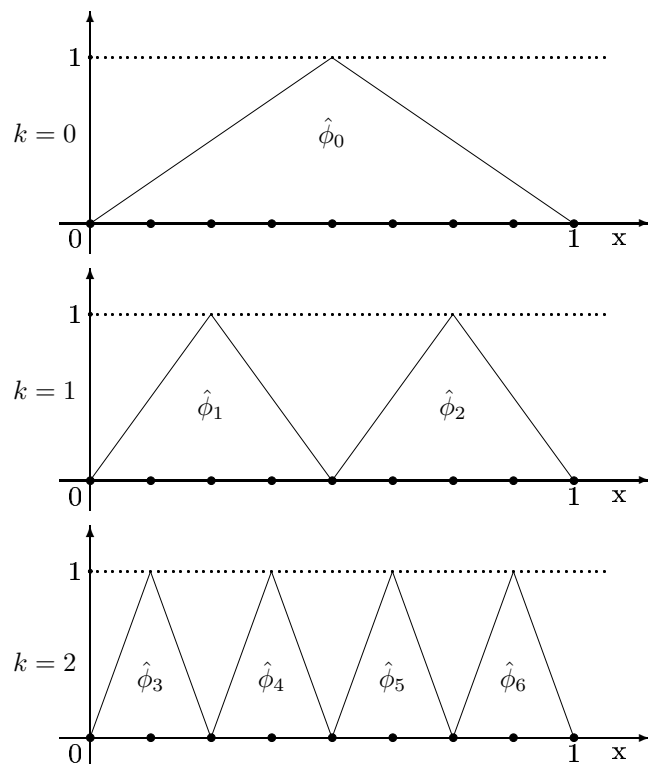


Рис. 2.7: Иерархический базис.

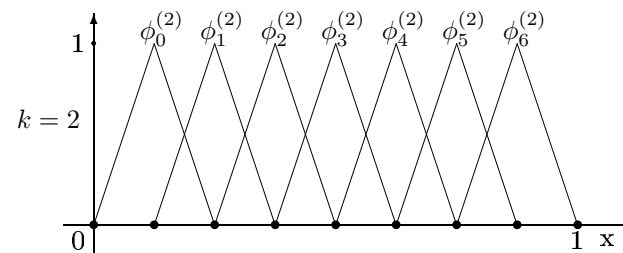


Рис. 2.8: Неиерархический базис.

2.8 Алгебраический многосеточный метод

Альтернативным подходом к построению многосеточного переобуславливателя является алгебраический метод, предложенный Кузнецовым [33]. Этот метод также использует иерархичность последовательности вложенных сеток. Однако построение метода в меньшей степени использует свойства исходной дифференциальной задачи, а его анализ не базируется на свойствах гладкости решения и априорных оценках. Эта особенность алгебраического метода становится привлекательной в ситуации, когда аппроксимируемая дифференциальная задача не обладает желанными свойствами, как происходит, например, в случае уравнения диффузии с разрывными коэффициентами или в случае расчетной области, имеющей входящие углы или разрезы. Метод применим как для треугольных [34] (тетраэдральных), так и квадратных (кубических) сеток. Ниже мы рассмотрим его для простейшего случая аппроксимации уравнения Пуассона (1.19) билинейными конечными элементами на квадратной сетке с шагом $h = 2^{-l}$. Последовательность вложенных сеток обозначим через Q_k , $k = 1, \dots, l$, причем сетка Q_k имеет шаг $h_k = 2^{-k}$. Пусть N_k — число внутренних узлов для сетки Q_k (степеней свободы в пространстве конечно-элементных функций), m_k — число ячеек.

Сначала рассмотрим двухсеточный метод. Разобьем все узлы сетки Q_l на три группы: первая группа состоит из узлов сетки Q_{l-1} , вторая содержит узлы, лежащие на ребрах сетки Q_{l-1} , а третья включает оставшиеся узлы. Разбиение на группы порождает разбиение матрицы $A \equiv A^{(l)}$, являющейся конечно-элементной аппроксимаци-

ей оператора $-\Delta \equiv -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ на сетке Q_l , на блоки:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что блок A_{33} является диагональной матрицей, так как никакие две точки из третьей группы не являются соседями на сетке Q_l . Простым перемножением можно убедиться, что матрица A допускает следующее представление:

$$A = F_A \begin{pmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{pmatrix} F_A^T - N, \quad (2.105)$$

где

$$F_A = \begin{pmatrix} I_{11} & A_{12}A_{22}^{-1} & 0 \\ 0 & I_{22} & A_{23}A_{33}^{-1} \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{23}A_{33}^{-1}A_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь I_{jj} — единичные матрицы соответствующих порядков. Данное представление послужит отправной точкой для построения двухсеточного переобуславливателя B для матрицы A . В этой связи заметим, что после исключения остатка N матрица в правой части (2.105) была бы легко обратима, если уметь легко вычислять умножение на вектора подматриц A_{22}^{-1} и $(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}$. Оказывается, подматрицу A_{22} можно заменить на близкую к ней диагональную матрицу B_{22} , причем так, что блок $A_{11} - A_{12}B_{22}^{-1}A_{21}$ становится эквивалентен матрице жесткости для задачи на грубой сетке.

Итак, пусть $A^{(l-1)}$ — матрица, являющаяся конечно-элементной аппроксимацией оператора $-\Delta$ на сетке Q_{l-1} . Принимая во внимание изложенные выше соображения, зададим двухсеточный переобуславливатель для A следующим образом:

$$B = F_B \begin{pmatrix} \frac{1}{2}A^{(l-1)} & 0 & 0 \\ 0 & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{pmatrix}^{-1} F_B^T, \quad (2.106)$$

где

$$F_B = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ -B_{22}^{-1}A_{21} & I_{22} & 0 \\ 0 & -A_{33}^{-1}A_{32} & I_{33} \end{pmatrix}.$$

Вычисление $\tilde{x} = Bx$, для произвольного вектора $x \in \mathbb{R}^{N_l}$ осуществляется за три шага:

Шаг 1. Вычислить $y = F_B^T x$;

Шаг 2. Решить систему с блочно-диагональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}A^{(l-1)} & 0 & 0 \\ 0 & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{pmatrix} z = y;$$

Шаг 3. Вычислить $\tilde{x} = F_B z$.

Трудность здесь может представлять только решение подсистемы с матрицей $\frac{1}{2}A^{(l-1)}$, поскольку решение остальных подсистем требует обращения диагональных матриц. Решение подсистемы с $\frac{1}{2}A^{(l-1)}$ — это решение задачи на более грубой сетке. В двухсеточном методе система с матрицей $A^{(l-1)}$ решается точно. В многосеточном методе для ее приближенного решения выполняется несколько итераций какого-нибудь линейного итерационного процесса с переобуславливателем, который строится аналогично B , но теперь на сетке Q_{l-1} , и так далее. Формально многосеточный алгоритм (переобуславливатель) будет выписан ниже, а сейчас мы покажем, как строится B_{22} , и получим оценки на спектр матрицы BA .

Для того, чтобы задать матрицу B_{22} , определим реберную сетку $\Gamma_h^{(l)}$, как совокупность узлов и ребер разбиения Q_l . Реберная сетка $\Gamma_h^{(l-1/2)}$ получается из $\Gamma_h^{(l-1)}$ путем введения дополнительных узлов в серединах сторон ячеек из Q_{l-1} . Пространство $W_h^{(l)}$ размерности N_l есть множество непрерывных на $\Gamma_h^{(l)}$, линейных на каждом ребре сетки $\Gamma_h^{(l)}$ и обращающихся в нуль на $\partial\Omega$ функций. Наконец, обозначим за $W_h^{(l-1/2)}$ пространство размерности $N_l - m_l$ сужений на $\Gamma_h^{(l-1/2)}$ функций из $W_h^{(l)}$.

Легко проверить, что справедливо равенство

$$(Av, w) = h_l \sum_{G \in Q_l} \frac{1}{2} \oint_{\partial G} \frac{dv^h}{ds} \frac{dw^h}{ds} ds \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^{N_l},$$

где функции v^h и w^h являются продолжениями векторов v и w на $W_h^{(l)}$.

Определим матрицу \tilde{K} с помощью следующего соотношения:

$$(\tilde{K}v, w) = h_l \sum_{G \in Q_{l-1}} \frac{1}{2} \oint_{\partial G} \frac{dv^h}{ds} \frac{dw^h}{ds} ds, \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^{N_l - m_{l-1}},$$

где функции v^h и w^h являются продолжениями векторов v и w на $W_h^{(l-1/2)}$. Поскольку узлы реберной сетки $\Gamma_h^{(l-1/2)}$ включают узлы группы 1 и группы 2, матрица \tilde{K} представима в блочном виде:

$$\tilde{K} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

где B_{22} является диагональной подматрицей (узлы группы 2 не соседствуют друг с другом в сетке $\Gamma_h^{(l-1/2)}$). Именно эта матрица B_{22} и является ключевой в двухсеточном переобуславливателе (2.106).

Лемма 2.5. *Собственные числа матрицы BA принадлежат отрезку $[1, 3]$.*

Доказательство. Запишем обратную матрицу B^{-1} в блочной форме:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & B_{22} + A_{23}A_{33}^{-1}A_{32} & A_{23} \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

и рассмотрим следующую задачу на собственные значения:

$$\lambda B^{-1}v = Av. \quad (2.107)$$

Если $\lambda \neq 1$, то соответствующие собственные вектора принадлежат подпространству

$$\mathcal{H} = \{v : A_{32}v_2 + A_{33}v_3 = 0\}.$$

Учитывая это, легко проверить, что λ являются собственными значениями задачи

$$\lambda \tilde{K}w = \tilde{S}w, \quad (2.108)$$

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - A_{23}A_{33}^{-1}A_{32} \end{pmatrix}.$$

В свою очередь, при $\lambda \neq 1$, спектральная задача (2.108) эквивалентна спектральной задаче

$$\lambda \hat{B}u = Au,$$

где

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} \tilde{K} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому для спектрального радиуса $\rho(BA)$ справедливо

$$\rho(BA) = \max_{v \in \mathcal{H}} \frac{(Av, v)}{(\hat{B}v, v)}.$$

Матрицы A и \tilde{K} порождаются ассемблированием локальных матриц на границах ячеек из Q_l и Q_{l-1} , соответственно. Сгруппировав ячейки $G^{(l)}$ из Q_l по четыре согласно их принадлежности некоторой i -ой ячейке $G_i^{(l-1)}$ из Q_{l-1} , мы можем представить скалярные произведения как

$$(Av, v) = \sum_{i=1}^{m_{l-1}} (A_{(i)}v_{(i)}, v_{(i)}) = \sum_{i=1}^{m_{l-1}} a_i,$$

$$(\hat{B}v, v) = \sum_{i=1}^{m_{l-1}} (\tilde{K}_{(i)}v_{(i)}, v_{(i)}) = \sum_{i=1}^{m_{l-1}} b_i,$$

где введены обозначения

$$a_i := (A_{(i)}v_{(i)}, v_{(i)}) = h_l \sum_{G^{(l)} \subset G_i^{(l-1)}} \frac{1}{2} \oint_{\partial G^{(l)}} \frac{dv_{(i)}^h}{ds} \frac{dw_{(i)}^h}{ds} ds,$$

$$b_i := (\tilde{K}_{(i)}v_{(i)}, v_{(i)}) = \frac{h_l}{2} \oint_{\partial G_i^{(l-1)}} \frac{dv_{(i)}^h}{ds} \frac{dw_{(i)}^h}{ds} ds.$$

Поскольку величины a_i и b_i неотрицательны, воспользуемся неравенством:

$$\frac{\sum_{i=1}^{m_{l-1}} a_i}{\sum_{i=1}^{m_{l-1}} b_i} \leq \max_{i=1, \dots, m_{l-1}} \frac{a_i}{b_i}$$

для оценки $\rho(BA)$ сверху:

$$\rho(BA) = \max_{i=1, \dots, m_{l-1}} \max_{v_{(i)}} \frac{(A_{(i)}v_{(i)}, v_{(i)})}{(\tilde{K}_{(i)}v_{(i)}, v_{(i)})},$$

где вектор $v_{(i)}$ есть сужение вектора $v \in \mathcal{H}$ на группу ячеек $G^{(l)}$, принадлежащих некоторой ячейке $G_i^{(l-1)}$. Прямое вычисление локальных интегралов с учетом $v \in \mathcal{H}$ дает оценку

$$\max_{v_{(i)}} \frac{(A_{(i)}v_{(i)}, v_{(i)})}{(\tilde{K}_{(i)}v_{(i)}, v_{(i)})} \leq 3.$$

Аналогично, используя неравенство

$$\frac{\sum_{i=1}^{m_{l-1}} a_i}{\sum_{i=1}^{m_{l-1}} b_i} \geq \min_{i=1, \dots, m_{l-1}} \frac{a_i}{b_i},$$

показываем, что

$$\min_{v^{(i)}} \frac{(A_{(i)} v^{(i)}, v^{(i)})}{(\tilde{K}_{(i)} v^{(i)}, v^{(i)})} \geq 1.$$

□

Для определения многосеточного переобуславливателя введем в обозначения двухсеточного переобуславливателя на уровне k индекс уровня: $A \rightarrow A^{(k)}$, $B \rightarrow B^{(k)}$, $F_B \rightarrow F_k$. Зададим $\hat{B}^{(1)} = B^{(1)}$ и для $k = 2, \dots, l$ определим последовательно матрицы

$$\hat{B}_{11}^{(k)} = \frac{1}{2} A^{(k-1)} \left(I^{(k-1)} - \prod_{j=1}^2 (I^{(k-1)} - \tau_j^{(k-1)} [\hat{B}^{(k-1)}]^{-1} A^{(k-1)}) \right)^{-1},$$

$$\hat{B}^{(k)} = F_k \begin{pmatrix} \hat{B}_{11}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & B_{22}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33}^{(k)} \end{pmatrix}^{-1} F_k^T.$$

Здесь $\tau_j^{(k)}$ — известные итерационные параметры, вычисляемые как обратные величины к корням многочлена Чебышева на основании явных локальных оценок спектра переобусловленной матрицы жесткости на каждом уровне [33, 34]. Матрица $B_{AMG} = \hat{B}^{(l)}$ называется алгебраическим многосеточным переобуславливателем с W -циклом для матрицы $A^{(l)}$, чье действие на вектор b задается рекурсивной процедурой:

$$\bar{z} = AlgMGM(k, b)$$

{
Если $k = 0$, то

0. $\bar{z} = [A^{(0)}]^{-1} b$ (точное решение на самой грубой сетке), далее выход из процедуры;

Иначе ($k > 0$)

1. $(z_1, z_2, z_3)^T = F_k^T b$;
2. $d_2 = [B_{22}^{(k)}]^{-1} z_2$, $d_3 = [A_{33}^{(k)}]^{-1} z_3$;
3. $e^0 = 0$ (начальное приближение к ошибке на грубой сетке);

4. Выполняем две итерации с переобуславливателем на грубой сетке

$$g^{i-1} = AlgMGM(k-1, A^{(k-1)} e^{i-1} - z_1), e^i = e^{i-1} - \tau_i^{(k)} g^{i-1}, i = 1, 2;$$
 5. $d_1 = e^2$;
 6. $\bar{z} = F_k(d_1, d_2, d_3)^T$.
- }

Теорема 2.6. Для числа обусловленности матрицы $B_{AMG}^{-1} A$ верна оценка:

$$cond B_{AMG}^{-1} A \leq 3 + 2\sqrt{3}.$$

Эта оценка не зависит от числа уровней l .

Доказательство теоремы носит чисто алгебраический характер и основано на анализе рекурсивных зависимостей, аналогично доказательству Теоремы 2.1, поэтому приводиться здесь не будет.

Глава 3

Методы декомпозиции области

3.1 Основные приложения методов декомпозиции области

Методы декомпозиции области (domain decomposition methods) — так называют совокупность методов и технологий, использующих принцип разделения целого и отдельной обработки частей (decomposition — разложение на составные части, англ.). Этим можно объяснить использование названия “методы декомпозиции области” для большого набора методов, многие из которых не используют, вообще говоря, понятие области в традиционном для теории уравнений в частных производных смысле. В этой главе мы, тем не менее, познакомим читателя только с базовыми алгоритмами, которые так или иначе используют разделение на подобласти той области, где ищется решение дифференциального уравнения. В русскоязычной литературе встречаются также термины методы разделения области [1] и методы композиции [8].

Для того чтобы мотивировать наш интерес к методом декомпозиции области, рассмотрим три примера.

В разделе 1.3 рассматривался вопрос решения линейной системы (2.15), возникающей при конечно-элементной аппроксимации уравнения Пуассона в единичном кубе на равномерной сетке. Метод исключения Гаусса для больших разреженных матриц, возникающих в данном примере, оказывается неэффективным как с точки зрения

арифметической цены, так и с точки зрения необходимого объема компьютерной памяти. Однако, метод Гаусса может быть успешно применен к решению разреженных систем умеренного порядка ($\sim 10^4$). Методы декомпозиции могут быть использованы для построения быстросходящегося итерационного процесса решения систем большой размерности, в котором реализация переобуславливателя основана на решении локальных подзадач методом Гаусса. Количество подзадач может диктоваться границей практической эффективности метода Гаусса. Так, например, для сетки с шагом $h = 50^{-1}$ можно разбить область (куб) на восемь равных подобластей и использовать метод Гаусса для подзадач с $h = 25^{-1}$. Учитывая нелинейность вычислительных затрат метода исключения¹, мы получим существенную экономию машинных ресурсов.

Другой пример связан с параллелизацией вычислений. Методы декомпозиции предлагают естественный способ распараллеливания, поскольку в них данные обрабатываются отдельно по подзадачам. Например, для решения рассмотренной выше системы (2.15) на восьми процессорах достаточно распределить степени свободы по процессорам согласно разбиению на восемь подобластей. При этом можно использовать тот же итерационный процесс, что и для последовательной реализации, однако каждая итерация будет выполняться примерно в восемь раз быстрее.

Третий пример касается не только метода решения, но и формулировки задачи. Существует множество физических явлений, которые удастся адекватно описывать, используя различные модели в разных подобластях. Для объединения моделей задаются дополнительные условия на границе раздела подобластей. Например, взаимодействие течения в канале, описываемого уравнениями Навье - Стокса, и течения в пористой среде (фильтрации), описываемого уравнением Дарси, подразумевает разбиение расчетной области на подобласть-канал и подобласть-пористую среду, на границе раздела которых налагается условие непрерывности потока жидкости и нормальной компоненты тензора напряжений. На основе методов декомпозиции можно построить такой итерационный алгоритм решения общей сеточной задачи, что на каждой итерации в каждой подобласти нужно будет решать свое уравнение с особым граничным условием, а полученное решение будет удовлетворять условиям

¹Теоретически число арифметических операций для данного примера растет не медленнее, чем $O(N^2)$, где N — число неизвестных. На практике известные авторам программные пакеты показывают асимптотику времени работы не лучше $O(N^{2.2})$.

‘сшивки’ на границе раздела.

3.2 Математические основы методов декомпозиции

Пусть Ω – область в \mathbb{R}^d , где ищется решение уравнения. Для подобласти $\omega \subset \Omega$ скалярное произведение в пространстве $L_2(\omega)$ будем обозначать $(\cdot, \cdot)_\omega$. В случае, когда область интегрирования есть вся область Ω , будем опускать индекс $(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_\Omega$.

3.2.1 Условие сшивки

Рассмотрим уравнение (1.7) в простейшем случае $a_{1,1} = a_{2,2} = 1$, $a_{1,2} = a_{2,1} = 0$, $\Gamma_1 = \partial\Omega$:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{в } \Omega, \\ u &= 0 & \text{на } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Предположим, что Ω разбита на две непересекающиеся подобласти Ω_1, Ω_2 с границей раздела Γ , в дальнейшем именуемой интерфейсом. Предположим также, что $\partial\Omega, \partial\Omega_1, \partial\Omega_2$ – кусочно-гладкие, а решение (3.1) $u \in C^1(\bar{\Omega})$. Тогда задача (3.1) эквивалентна двум подзадачам с условиями сшивки на Γ :

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 &= f & \text{в } \Omega_1, & & -\Delta u_2 &= f & \text{в } \Omega_2, \\ u_1 &= 0 & \text{на } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma, & & u_2 &= 0 & \text{на } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$u_1 = u_2 \text{ на } \Gamma, \quad \frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{\partial u_2}{\partial n} \text{ на } \Gamma, \quad (3.3)$$

где n обозначает нормаль к Γ .

Для слабой постановки задачи (3.1) можно также сформулировать соответствующий (3.2)–(3.3) аналог. Напомним слабую постановку (1.8) для задачи (3.1): найти $u \in V$ такое, что

$$a(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in V, \quad (3.4)$$

где $V = H_0^1(\Omega)$, $a(u, v) = (\nabla u, \nabla v)$. Введем дополнительно следующие пространства:

$$V_i = \{v \in H^1(\Omega_i) : v|_{\partial\Omega_i \setminus \Gamma} = 0\}, \quad i = 1, 2, \quad (3.5)$$

$$V_i^0 = \{v \in H^1(\Omega_i) : v|_{\partial\Omega_i} = 0\}, \quad i = 1, 2, \quad (3.6)$$

$$\Lambda = \{\eta \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) : \eta = v|_\Gamma, v \in V\}. \quad (3.7)$$

По поводу пространства следов Λ отметим следующее. В случае $\Gamma \cap \partial\Omega = \emptyset$ интерфейс является замкнутым множеством, совпадающим, например, с $\partial\Omega_1$. Если Ω_1 обладает регулярной формой и ее диаметр порядка единицы, то норма в пространстве $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ задается по формуле

$$\|\eta\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \left(\|\eta\|_{L_2(\Gamma)}^2 + \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{(\eta(s) - \eta(t))^2}{|s - t|^2} ds dt \right)^{1/2}.$$

В случае $\Gamma \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ интерфейс выходит на границу $\partial\Omega$ в точках x_a, x_b . При этом пространство следов функций из $H_0^1(\Omega)$ на Γ имеет в литературе специальное обозначение: $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ и снабжено усиленной нормой

$$\begin{aligned} \|\eta\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} &= \left(\|\eta\|_{L_2(\Gamma)}^2 + \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{(\eta(s) - \eta(t))^2}{|s - t|^2} ds dt \right. \\ &\quad \left. + \int_\Gamma \frac{\eta^2(s)}{|s - x_a|^2} ds + \int_\Gamma \frac{\eta^2(s)}{|s - x_b|^2} ds \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

В дальнейшем мы не будем использовать конструктивные нормировки в пространствах следов. Для наших целей достаточно отметить, что для нормы в пространстве Λ верна оценка

$$\|\eta\|_\Lambda \geq \|\eta\|_{L_2(\Gamma)}.$$

Для подзадач с условиями сшивки на Γ (3.2)–(3.3) слабая постановка выглядит следующим образом: найти $u_i \in V_i$ такие, что $u_1 = u_2$ на Γ ,

$$a_i(u_i, v_i) = (f, v_i)_{\Omega_i} \quad \forall v_i \in V_i^0, \quad i = 1, 2, \quad (3.8)$$

$$a_1(u_1, R_1\mu) + a_2(u_2, R_2\mu) = (f, R_1\mu)_{\Omega_1} + (f, R_2\mu)_{\Omega_2} \quad \forall \mu \in \Lambda. \quad (3.9)$$

Здесь $a_i(u, v) = (\nabla u, \nabla v)_{\Omega_i}$, а через R_i обозначен оператор продолжения из Λ в V_i , такой, что $(R_i\eta)_\Gamma = \eta$ (о его существовании см. следующий раздел).

Лемма 3.1. *Задачи (3.4) и (3.8)–(3.9) эквивалентны.*

Доказательство. Пусть верно (3.4). Положим $u_i = u|_{\Omega_i}$. Так как $V_i^0 \subset V$, то

$$a(u_i, v_i) = a(u, v_i) = (f, v_i) \quad \forall v_i \in V_i^0.$$

Следовательно, для $u_i = u|_{\Omega_i}$ выполняется (3.8). Функция

$$R\mu = \begin{cases} R_1\mu & \text{в } \Omega_1 \\ R_2\mu & \text{в } \Omega_2 \end{cases}$$

принадлежит V , поэтому $a(u, R\mu) = (f, R\mu)$, то есть выполняется (3.9).

Теперь докажем утверждение в обратную сторону. Пусть верно (3.8)–(3.9). Положим

$$u = \begin{cases} u_1 & \text{в } \Omega_1 \\ u_2 & \text{в } \Omega_2. \end{cases}$$

Функция u принадлежит V , поскольку $u_1 = u_2$ на Γ . Кроме того, для любого $v \in V$ определим $\mu = v|_{\Gamma} \in \Lambda$ и его продолжение $R\mu \in V$. Поскольку $v|_{\Omega_i} - R_i\mu \in V_i^0$, получаем из (3.8) и (3.9):

$$\begin{aligned} a(u, v) &= a(u, v \pm R_i\mu) = \sum_{i=1}^2 \{a_i(u, v|_{\Omega_i} - R_i\mu) + a_i(u_i, R_i\mu)\} \\ &= \sum_{i=1}^2 \{(f, v|_{\Omega_i} - R_i\mu)_{\Omega_i} + (f, R_i\mu)_{\Omega_i}\} = (f, v). \end{aligned}$$

□

Применение Леммы 3.1 для конечно-элементных пространств позволит сформулировать условия сшивки на сеточном уровне.

3.2.2 Теорема о продолжении и теорема о следах

Утверждения этого раздела являются техническими и приводятся без доказательства. Более подробно с ними можно ознакомиться в [26, 27]. Пусть Ω разбита на две непересекающиеся подобласти Ω_1, Ω_2 с кусочно-гладкими границами и интерфейсом Γ .

Теорема 3.1. *Существует оператор продолжения из Ω_2 в Ω , $R_{12} : V_2 \rightarrow V$, такой, что*

$$\|R_{12}u_2\|_V \leq \hat{C}_{12}\|u_2\|_{V_2} \quad \forall u_2 \in V_2, \quad (3.10)$$

где константа \hat{C}_{12} зависит только от подобластей Ω_1, Ω_2 .

Замечание. Существует такая константа C_{12} , зависящая от подобластей Ω_1, Ω_2 , что

$$a(R_{12}u_2, R_{12}u_2) \leq C_{12}^2 a_2(u_2, u_2). \quad (3.11)$$

Теорема 3.2. *Для любой $u_i \in V_i$ существует ее след $u_i|_{\Gamma}$ на Γ , причем*

$$\|u_i|_{\Gamma}\|_{\Lambda} \leq \check{C}_i \|u_i\|_{V_i}, \quad (3.12)$$

и существует оператор продолжения с Γ в Ω_i , $R_i : \Lambda \rightarrow V_i$, такой, что

$$\|R_i\mu\|_{V_i} \leq \hat{C}_i \|\mu\|_{\Lambda} \quad \forall \mu \in \Lambda, \quad (3.13)$$

где константы \check{C}_i, \hat{C}_i зависят только от подобластей Ω_1, Ω_2 .

Конечно-элементные аналоги теорем 3.1, 3.2 получаются формальной заменой пространств V, V_i, Λ на их конечно-элементные подпространства $\mathbb{U}^h, \mathbb{U}_i^h, \Lambda^h$, при этом операторы продолжения R_{12}, R_i заменяются на сеточные операторы продолжения R_{12}^h, R_i^h . Независимость констант $\hat{C}_{12}, C_{12}, \check{C}_i, \hat{C}_i$ от размерности пространств \mathbb{U}_i^h , (для квазиравномерных сеток это означает независимость от h), вообще говоря, не очевидна. Например, это не следует непосредственно из аппроксимационных свойств пространств \mathbb{U}_i^h . Для определенных классов сеток независимость констант от размерности V_i^h доказать удается. В частности, для конформных регулярных триангуляций, аппроксимирующих $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$ со вторым порядком, константы $\hat{C}_{12}, C_{12}, \check{C}_i, \hat{C}_i$ не зависят от числа узлов сетки. Все триангуляции, рассмотренные ниже, принадлежат этому классу. Учитывая это замечание, мы будем ссылаться на теоремы 3.1, 3.2 как для соболевских пространств, так и для их конечно-элементных подпространств.

3.2.3 Уравнение Пуанкаре-Стеклова

Рассмотрим задачу (3.1) в области Ω , разбитой на две подобласти Ω_1, Ω_2 с интерфейсом Γ так, что $\partial\Omega_1 \neq \Gamma$ и $\partial\Omega_2 \neq \Gamma$. Напомним, что пространство следов в этом случае $\Lambda = H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Для любой $\varphi \in \Lambda$ определим гармоническое продолжение $\mathcal{H}_i\varphi \in V_i$:

$$\begin{aligned} -\Delta(\mathcal{H}_i\varphi) &= 0 & \text{в } \Omega_i, \\ \mathcal{H}_i\varphi &= \varphi & \text{на } \Gamma, \\ \mathcal{H}_i\varphi &= 0 & \text{на } \partial\Omega_i \setminus \Gamma. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Для произвольной $f \in L_2(\Omega_i)$ обозначим через $T_i f \in H^1(\Omega_i)$ решение уравнения Пуассона в Ω_i :

$$\begin{aligned} -\Delta(T_i f) &= f && \text{в } \Omega_i, \\ T_i f &= 0 && \text{на } \partial\Omega_i. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Пусть u — решение уравнения (3.1), а λ — след u на Γ . В каждой подобласти u можно представить следующим образом:

$$u_i = u|_{\Omega_i} = \mathcal{H}_i \lambda + T_i f. \quad (3.16)$$

Следовательно,

$$\int_{\Omega_i} (\nabla u_i)^2 dx = \int_{\Omega_i} (\nabla \mathcal{H}_i \lambda)^2 dx + \int_{\Omega_i} (\nabla T_i f)^2 dx. \quad (3.17)$$

Из равенства (3.17) следует, что гармоническое продолжение $\mathcal{H}_i \lambda$ обладает минимальной энергетической полунормой среди всех функций $v \in H^1(\Omega)$ таких, что $v|_{\Gamma} = \lambda$ и $v|_{\partial\Omega \setminus \Gamma} = 0$.

Наша цель — получить операторное уравнение на λ , для этого воспользуемся непрерывностью потока на интерфейсе:

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{\partial u_2}{\partial n}.$$

Благодаря (3.16) получаем

$$\frac{\partial}{\partial n}(\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2)\lambda = \frac{\partial}{\partial n}(T_2 - T_1)f. \quad (3.18)$$

Определим оператор Пуанкаре-Стеклова $\mathcal{S} = \frac{\partial}{\partial n}(\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2) : \Lambda \rightarrow \Lambda'$ и правую часть $\chi = \frac{\partial}{\partial n}(T_2 - T_1)f \in \Lambda'$, где $\Lambda' = H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Уравнение (3.18) в операторной форме принимает вид

$$\mathcal{S}\lambda = \chi \quad (3.19)$$

и называется уравнением Пуанкаре-Стеклова. Это уравнение будет весьма полезно в дальнейшем, поэтому изучим свойства оператора \mathcal{S} . Обозначим через n_i нормаль к Γ , являющуюся внешней по отношению к Ω_i .

Лемма 3.2. $\frac{\partial}{\partial n_i} \mathcal{H}_i$ — симметричный и положительно определенный оператор в $L_2(\Gamma)$.

Доказательство. Пусть u, v — произвольные гармонические функции в Ω_i . С помощью формулы Грина получаем

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial n_i} u ds - (\nabla u, \nabla v)_{\Omega_i} = (u, \Delta v)_{\Omega_i} = 0 = (\Delta u, v)_{\Omega_i} = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n_i} v ds - (\nabla u, \nabla v)_{\Omega_i}.$$

Принимая в данном соотношении $u = \mathcal{H}_i \mu$ и $v = \mathcal{H}_i \lambda$ для произвольных μ, λ , получаем симметрию оператора:

$$\int_{\Gamma} \lambda \frac{\partial}{\partial n_i} \mathcal{H}_i \mu ds = \int_{\Omega_i} \nabla \mathcal{H}_i \mu \cdot \nabla \mathcal{H}_i \lambda dx = \int_{\Gamma} \mu \frac{\partial}{\partial n_i} \mathcal{H}_i \lambda ds$$

и положительную определенность оператора:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \mu \frac{\partial}{\partial n_i} \mathcal{H}_i \mu ds &= \int_{\Omega_i} \nabla \mathcal{H}_i \mu \cdot \nabla \mathcal{H}_i \mu dx \geq \frac{1}{C(\Omega_i)^2 + 1} \|\mathcal{H}_i \mu\|_{V_i}^2 \\ &\geq \frac{1}{(C(\Omega_i)^2 + 1) \check{C}_i^2} \|\mu\|_{L_2(\Gamma)}^2. \end{aligned}$$

Здесь $C(\Omega)$ — константа из неравенства Фридрикса (1.1), которое также верно для функций, зануляющихся лишь на части границы $\partial\Omega_i$. \square

Пусть n в определении оператора \mathcal{S} является внешней нормалью по отношению к Ω_1 , тогда простым следствием леммы 3.2 является симметричность и положительная определенность \mathcal{S} .

Теперь мы готовы к тому, чтобы перейти к изучению итерационных методов декомпозиции области. Сначала мы рассмотрим один из них подробно и с различных точек зрения. Это будет итерационный метод, известный в литературе под названием “метод итераций Нейман-Дирихле”.

3.3 Метод итераций Нейман-Дирихле

3.3.1 Дифференциальная формулировка

Для решения уравнения (3.1) зададим действительную величину $\theta > 0$ и построим итерационный процесс с начальным приближением $\lambda^0 \in \Lambda$. Пусть λ^k известно, находим приближения u_1^{k+1} и u_2^{k+1} к

решению в подобластях, решая последовательно уравнения:

$$\begin{cases} -\Delta u_1^{k+1} = f & \text{в } \Omega_1 \\ u_1^{k+1} = 0 & \text{на } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma \\ u_1^{k+1} = \lambda^k & \text{на } \Gamma \end{cases} \quad (3.20)$$

$$\begin{cases} -\Delta u_2^{k+1} = f & \text{в } \Omega_2 \\ u_2^{k+1} = 0 & \text{на } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma \\ \frac{\partial u_2^{k+1}}{\partial n_2} = -\frac{\partial u_1^{k+1}}{\partial n_1} & \text{на } \Gamma \end{cases} \quad (3.21)$$

и пересчитывая λ^{k+1} :

$$\lambda^{k+1} = \theta u_2^{k+1}|_\Gamma + (1 - \theta)\lambda^k. \quad (3.22)$$

На первом подшаге решается краевая задача с условием Дирихле на Γ , на втором подшаге решается краевая задача с условием Неймана на Γ , поэтому метод носит название итерации Нейман-Дирихле. На третьем подшаге осуществляется пересчет итерационного приближения λ^k к следу решения $u|_\Gamma$ на интерфейсе.

Покажем, что итерации сходятся. Для этого определим ошибки итерационных приближений в подобластях $\varepsilon_i^k = u - u_i^k$ и на интерфейсе $\xi^k = u|_\Gamma - \lambda^k$, которые удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{cases} -\Delta \varepsilon_1^{k+1} = 0 & \text{в } \Omega_1 \\ \varepsilon_1^{k+1} = 0 & \text{на } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma \\ \varepsilon_1^{k+1} = \xi^k & \text{на } \Gamma \end{cases} \quad \begin{cases} -\Delta \varepsilon_2^{k+1} = 0 & \text{в } \Omega_2 \\ \varepsilon_2^{k+1} = 0 & \text{на } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma \\ \frac{\partial \varepsilon_2^{k+1}}{\partial n_2} = -\frac{\partial \varepsilon_1^{k+1}}{\partial n_1} & \text{на } \Gamma \end{cases} \quad (3.23)$$

$$\varepsilon_1^{k+2} = \theta \varepsilon_2^{k+1} + (1 - \theta)\varepsilon_1^{k+1} \text{ на } \Gamma. \quad (3.24)$$

Последнее равенство следует из вычитания двух тождеств:

$$u|_\Gamma = \theta u|_\Gamma + (1 - \theta)u|_\Gamma,$$

и

$$u_1^{k+2}|_\Gamma = \theta u_2^{k+1}|_\Gamma + (1 - \theta)u_1^{k+1}|_\Gamma.$$

Для следов ошибок на интерфейсе из (3.23) и определения операторов \mathcal{H}_i получаем

$$\varepsilon_1^{k+2} = -\theta \left(\frac{\partial}{\partial n_2} \mathcal{H}_2 \right)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial n_1} \mathcal{H}_1 \right) \varepsilon_1^{k+1} + (1 - \theta)\varepsilon_1^{k+1} \quad (3.25)$$

$$= (I - \theta \left(I + \left(\frac{\partial}{\partial n_2} \mathcal{H}_2 \right)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial n_1} \mathcal{H}_1 \right) \right)) \varepsilon_1^{k+1}.$$

Покажем, что оператор $K = I + \left(\frac{\partial}{\partial n_2} \mathcal{H}_2 \right)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial n_1} \mathcal{H}_1 \right)$ самосопряжен, положительно определен и ограничен в скалярном произведении

$$\langle \mu, \lambda \rangle = \left(\frac{\partial}{\partial n_2} \mathcal{H}_2 \mu, \lambda \right)_{L_2(\Gamma)}$$

(скалярное произведение можно определить, поскольку оператор $\frac{\partial}{\partial n_2} \mathcal{H}_2$ симметричен и положительно определен в $L_2(\Gamma)$ в силу леммы 3.2). Самосопряженность K следует из

$$\langle K\mu, \lambda \rangle = \left(\frac{\partial}{\partial n_2} \mathcal{H}_2 \mu + \frac{\partial}{\partial n_1} \mathcal{H}_1 \mu, \lambda \right) = \langle \mu, K\lambda \rangle.$$

Положительная определенность вытекает из соотношений

$$\langle K\mu, \mu \rangle = \left(\frac{\partial}{\partial n_2} \mathcal{H}_2 \mu + \frac{\partial}{\partial n_1} \mathcal{H}_1 \mu, \mu \right) \geq \left(\frac{\partial}{\partial n_2} \mathcal{H}_2 \mu, \mu \right) = \langle \mu, \mu \rangle.$$

Ограниченность следует из оценок

$$\begin{aligned} \langle K\mu, \mu \rangle &= \left(\frac{\partial}{\partial n_2} \mathcal{H}_2 \mu + \frac{\partial}{\partial n_1} \mathcal{H}_1 \mu, \mu \right) = \int_{\Omega_2} (\nabla \mathcal{H}_2 \mu)^2 dx + \int_{\Omega_1} (\nabla \mathcal{H}_1 \mu)^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega_2} (\nabla \mathcal{H}_2 \mu)^2 dx + \int_{\Omega_1} (\nabla R_{12} \mathcal{H}_2 \mu)^2 dx \\ &\leq C_{12}^2 \int_{\Omega_2} (\nabla \mathcal{H}_2 \mu)^2 dx = C_{12}^2 \left(\frac{\partial}{\partial n_2} \mathcal{H}_2 \mu, \mu \right) = C_{12}^2 \langle \mu, \mu \rangle. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали теорему 3.1 о продолжении из подобласти Ω_2 в Ω . Таким образом, соотношение (3.24) можно переписать в виде

$$\varepsilon_1^{k+2} = (I - \theta K) \varepsilon_1^{k+1}.$$

Благодаря доказанным выше оценкам

$$\langle \mu, \mu \rangle \leq \langle K\mu, \mu \rangle \leq C_{12}^2 \langle \mu, \mu \rangle,$$

при $\theta = \frac{2}{1+C_{12}^2}$ имеем оценку на норму оператора перехода

$$\|I - \theta K\| \leq \frac{C_{12}^2 - 1}{C_{12}^2 + 3},$$

что означает геометрическую сходимость итераций Нейман-Дирихле.

3.3.2 Итерации Нейман-Дирихле в терминах уравнения Пуанкаре-Стеклова

По аналогии с (3.16) решение подзадачи (3.20) можно представить в виде

$$u_1^{k+1} = \mathcal{H}_1 \lambda^k + T_1 f.$$

Воспользовавшись очевидными равенствами $-\Delta T_2 f = f$, $T_2 f|_{\partial\Omega_2} = 0$, перепишем (3.21) в виде

$$\begin{cases} -\Delta(u_2^{k+1} - T_2 f) = 0 & \text{в } \Omega_2 \\ u_2^{k+1} - T_2 f = 0 & \text{на } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma \\ \frac{\partial(u_2^{k+1} - T_2 f)}{\partial n_2} = -\frac{\partial u_1^{k+1}}{\partial n_1} - \frac{\partial T_2 f}{\partial n_2} & \text{на } \Gamma, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{aligned} u_2^{k+1}|_{\Gamma} &= (u_2^{k+1} - T_2 f)|_{\Gamma} = \left(\frac{\partial}{\partial n_2} \mathcal{H}_2\right)^{-1} \left(-\frac{\partial u_1^{k+1}}{\partial n_1} - \frac{\partial T_2 f}{\partial n_2}\right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial n_2} \mathcal{H}_2\right)^{-1} \left(-\frac{\partial}{\partial n_1} \mathcal{H}_1 \lambda^k - \frac{\partial}{\partial n_1} T_1 f - \frac{\partial}{\partial n_2} T_2 f\right). \end{aligned}$$

Обозначив $\chi = -\frac{\partial}{\partial n_1} T_1 f - \frac{\partial}{\partial n_2} T_2 f$, $\mathcal{S}_i = \frac{\partial}{\partial n_i} \mathcal{H}_i$, перепишем (3.22)

$$\begin{aligned} \lambda^{k+1} &= \lambda^k + \theta(\mathcal{S}_2^{-1}(-\mathcal{S}_1 \lambda^k + \chi) - \lambda^k) \\ &= \lambda^k + \theta \mathcal{S}_2^{-1}(-(\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2) \lambda^k + \chi) \\ &= \lambda^k + \theta \mathcal{S}_2^{-1}(-\mathcal{S} \lambda^k + \chi). \end{aligned}$$

Таким образом, метод Нейман-Дирихле есть метод простой итерации для решения уравнения Пуанкаре-Стеклова (3.19) с переобуславливателем \mathcal{S}_2^{-1} :

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \theta \mathcal{S}_2^{-1}(-\mathcal{S} \lambda^k + \chi). \quad (3.26)$$

3.3.3 Итерации Нейман-Дирихле в терминах билинейных форм

Для применения метода Нейман-Дирихле к конечно-элементной постановке задачи его желательно переписать в терминах билинейных форм. Это легко сделать, применив лемму 3.1:

$$\begin{cases} \text{Найти } u_1^{k+1} \in V_1, \text{ такое что} \\ a_1(u_1^{k+1}, v_1) = (f, v_1)_{\Omega_1} \quad \forall v_1 \in V_1^0 \\ u_1^{k+1} = \lambda^k \quad \text{на } \Gamma \end{cases} \quad (3.27)$$

$$\begin{cases} \text{Найти } u_2^{k+1} \in V_2, \text{ такое что} \\ a_2(u_2^{k+1}, v_2) = (f, v_2)_{\Omega_2} \quad \forall v_2 \in V_2^0 \\ a_2(u_2^{k+1}, R_2 \mu) = (f, R_2 \mu)_{\Omega_2} + (f, R_1 \mu)_{\Omega_1} - a_1(u_1^{k+1}, R_1 \mu) \quad \forall \mu \in \Lambda \end{cases} \quad (3.28)$$

$$\lambda^{k+1} = \theta u_2^{k+1}|_{\Gamma} + (1 - \theta) \lambda^k. \quad (3.29)$$

Напомним, что R_i обозначает некоторый оператор продолжения, действующий из Λ в V_i .

3.3.4 Итерации Нейман-Дирихле в матричной форме

Зададим в области Ω конформную триангуляцию Ω^h . Через Γ_h обозначим дискретный интерфейс, который приближает интерфейс Γ со вторым порядком. Другими словами, пусть $\Omega^h = \Omega_1^h \cup \Omega_2^h$, $\Gamma_h = \bar{\Omega}_1^h \cap \bar{\Omega}_2^h$ и $\text{dist}(\Gamma, \Gamma_h) = O(h^2)$. Конечно-элементная дискретизация задачи (3.1) заключается в замене пространства V на его конечно-элементное подпространство \mathbb{U}^h :

$$a(u^h, v^h) = (f, v^h) \quad \forall v^h \in \mathbb{U}^h. \quad (3.30)$$

Эта формулировка приводит к системе линейных алгебраических уравнений с неизвестными коэффициентами u_i в разложении конечно-элементного решения $u^h = \sum u_i \varphi_i$ по базису φ_i пространства \mathbb{U}^h :

$$Au = f. \quad (3.31)$$

Напомним, что элементы матрицы A_{ij} и правой части f_i вычисляются следующим образом (см. раздел 1.2):

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, dx, \quad f_i = \int_{\Omega} f \varphi_i \, dx.$$

Множество узлов Ω^h , не лежащих на внешней границе, разобьем на три группы: внутренние узлы Ω_1^h , узлы, принадлежащие Γ_h , и внутренние узлы Ω_2^h . Множество кусочно-линейных базисных функций φ_i , разбивается при этом на три подмножества, что порождает блочное разбиение матрицы A и блочное представление системы (3.31)

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{1\Gamma} & 0 \\ A_{\Gamma 1} & A_{\Gamma} & A_{\Gamma 2} \\ 0 & A_{2\Gamma} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_{\Gamma} \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_{\Gamma} \\ f_2 \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Поскольку носители базисных функций второй группы лежат как в Ω_1^h , так и в Ω_2^h , обе сеточные подобласти вносят вклад в элементы

матрицы A_Γ и вектора f_Γ . Обозначим вклад подобласти Ω_i в A_Γ и f_Γ через $A_\Gamma^{(i)}$ и $f_\Gamma^{(i)}$ и представим (3.32) в виде

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{1\Gamma} & 0 \\ A_{\Gamma 1} & A_\Gamma^{(1)} + A_\Gamma^{(2)} & A_{\Gamma 2} \\ 0 & A_{2\Gamma} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_\Gamma \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_\Gamma^{(1)} + f_\Gamma^{(2)} \\ f_2 \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

Замена соболевских пространств V_1^0, V_2^0 в (3.27)-(3.28) на их конечно-элементные аналоги $\mathbb{U}_1^{0,h}, \mathbb{U}_2^{0,h}$ и определения матричных блоков $A_{ii}, A_\Gamma^{(i)}, A_{\Gamma i}, A_{i\Gamma}$ приводят к алгебраической формулировке итераций Нейман-Дирихле:

$$A_{11}u_1^{k+1} = f_1 - A_{1\Gamma}\lambda^k, \quad (3.34)$$

$$\begin{pmatrix} A_\Gamma^{(2)} & A_{\Gamma 2} \\ A_{2\Gamma} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\Gamma^{k+1} \\ u_2^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_\Gamma - A_{\Gamma 1}u_1^{k+1} - A_\Gamma^{(1)}\lambda^k \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

$$\lambda^{k+1} = \theta u_\Gamma^{k+1} + (1 - \theta)\lambda^k. \quad (3.36)$$

Действительно, уравнение (3.34) получается из (3.27) подстановкой базисных функций из $\mathbb{U}_1^{0,h}$, вторая строка уравнения (3.35) получается из первой строки (3.28) подстановкой базисных функций из $\mathbb{U}_2^{0,h}$, а первая строка уравнения (3.35) получается из второй строки (3.28) использованием тривиальных операторов продолжения сеточной функции μ^h , заданной на интерфейсе, в остальные узлы $x_k \in \Omega_i^h$ нулями: $R_i^h \mu^h(x_k) = 0, i = 1, 2$.

3.3.5 Матричный аналог уравнения Пуанкаре - Стеклова

Можно получить матричную запись уравнения Пуанкаре-Стеклова (3.18), рассуждая аналогично дифференциальному случаю.

Действительно, в терминах метода конечных элементов след сеточного решения представлен вектором коэффициентов u_Γ . Непрерывность потока на интерфейсе можно понимать в смысле уравнений, входящих во вторую блочную строку (3.32). Сеточное уравнение на след сеточного решения получается путем исключения первой и третьей блочных строк в (3.32):

$$(A_\Gamma - A_{\Gamma 1}A_{11}^{-1}A_{1\Gamma} - A_{\Gamma 2}A_{22}^{-1}A_{2\Gamma})u_\Gamma = f_\Gamma - A_{\Gamma 1}A_{11}^{-1}f_1 - A_{\Gamma 2}A_{22}^{-1}f_2. \quad (3.37)$$

Используя термины, принятые в линейной алгебре, матрицу $S \equiv A_\Gamma - A_{\Gamma 1}A_{11}^{-1}A_{1\Gamma} - A_{\Gamma 2}A_{22}^{-1}A_{2\Gamma}$ будем называть дополнением по Шуру для матрицы A относительно u_Γ .

Учитывая аддитивное представление A_Γ и f_Γ , перепишем (3.37) для вектора $\lambda \equiv u_\Gamma$ в виде

$$\begin{aligned} S\lambda &= \chi \\ S &= S_1 + S_2 \\ \chi &= \chi_1 + \chi_2 \\ S_i &= A_\Gamma^{(i)} - A_{\Gamma i}A_{ii}^{-1}A_{i\Gamma} \\ \chi_i &= f_\Gamma^{(i)} - A_{\Gamma i}A_{ii}^{-1}f_i \end{aligned} \quad (3.38)$$

Таким образом, алгебраическим аналогом оператора S_i является матрица S_i , поэтому алгебраическим аналогом метода простой итерации (3.26) является метод Ричардсона для системы (3.38) с дополнением по Шуру S

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \theta S_2^{-1}(-S\lambda^k + \chi). \quad (3.39)$$

Основные вычислительные затраты одной итерации метода (3.39) состоят из решений систем с матрицами A_{ii} (вычисление невязки) и решения системы с матрицей S_2 (переобуславливание).

Упражнение 3.1. Показать, что умножение S_2^{-1} на вектор, $\eta = S_2^{-1}\xi$, эквивалентно решению системы

$$\begin{pmatrix} A_\Gamma^{(2)} & A_{\Gamma 2} \\ A_{2\Gamma} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_\Gamma \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_\Gamma \\ 0 \end{pmatrix},$$

аппроксимирующей уравнение Лапласа с неоднородными условиями Неймана.

Итерации (3.39) допускают простое обобщение: поскольку матрицы S и S_2 симметричны и положительно определены, к решению уравнения (3.37) можно применить метод сопряженных градиентов с переобуславливателем S_2 .

Рассмотренный метод можно перенести на случай многих подобластей. Предположим для простоты, что область Ω разбита на m параллельных подобластей-полос Ω_i , а интерфейс Γ образован линиями раздела. Тогда система с дополнением по Шуру S для блочного представления системы (3.31) есть

$$S\lambda = f_\Gamma - \sum_{i=1}^m N_i A_{\Gamma i} A_{ii}^{-1} f_i, \quad S \equiv \sum_{i=1}^m N_i (A_\Gamma^{(i)} - A_{\Gamma i} A_{ii}^{-1} A_{i\Gamma}) N_i^T \quad (3.40)$$

где прямоугольные матрицы N_i состоят из элементов $\{0, 1\}$ и имеют не более одной единицы в строке. Матрицы N_i осуществляют ассемблирование вкладов каждой подобласти Ω_i в глобальную матрицу

S . Пронумеровав последовательно полосы, разобьем подобласти на две группы согласно четности индекса i и сформируем переобуславливатель

$$S_2 = \sum_{\text{четные подobl.}} N_i(A_\Gamma^{(i)} - A_{\Gamma i} A_{ii}^{-1} A_{i\Gamma}) N_i^T$$

для S . Поскольку каждое слагаемое в сумме является симметричным, то S_2 — симметричная матрица. Следовательно, мы можем применить метод сопряженных градиентов для решения системы (3.40).

3.3.6 Переобуславливатель Нейман-Дирихле

Рассмотрим другие варианты метода декомпозиции Нейман-Дирихле в терминах переобуславливателей для исходной системы (3.31).

Несимметричная версия

Рассмотрим матрицу

$$B_u = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{1\Gamma} & 0 \\ A_{\Gamma 1} & A_\Gamma^{(1)} & 0 \\ 0 & A_{2\Gamma} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Покажем, что на подпространстве дискретно-гармонических векторов

$$U = \{A_{2\Gamma} x_\Gamma + A_{22} x_2 = 0\}$$

оператор, задаваемый матрицей B_u , является самосопряженным, положительно определенным и спектрально эквивалентным A . Пусть для $i = 1, 2$,

$$B_i = \begin{pmatrix} A_{ii} & A_{i\Gamma} \\ A_{\Gamma i} & A_\Gamma^{(i)} \end{pmatrix}, \quad x_{i\Gamma} = \begin{pmatrix} x_i \\ x_\Gamma \end{pmatrix}, \quad y_{i\Gamma} = \begin{pmatrix} y_i \\ y_\Gamma \end{pmatrix}.$$

Тогда для произвольных $x, y \in U$ выполняется

$$\begin{aligned} (B_u x, y) &= (B_1 x_{1\Gamma}, y_{1\Gamma}) = (B_1 y_{1\Gamma}, x_{1\Gamma}) = (B_u y, x), \\ (B_u x, x) &= (B_1 x_{1\Gamma}, x_{1\Gamma}) \leq (Ax, x), \\ 0 &< (Ax, x) = (B_1 x_{1\Gamma}, x_{1\Gamma}) + (B_2 x_{2\Gamma}, x_{2\Gamma}) \\ &\leq (B_1 x_{1\Gamma}, x_{1\Gamma}) + (B_2 \tilde{x}_{2\Gamma}, \tilde{x}_{2\Gamma}) \\ &\leq C_{21}^2 (B_1 x_{1\Gamma}, x_{1\Gamma}) = C_{21}^2 (B_u x, x). \end{aligned} \quad (3.41)$$

В последней оценке мы последовательно использовали следующие рассуждения. Во-первых, дискретно гармоническая функция обладает минимальной энергией $(B_2 x_{2\Gamma}, x_{2\Gamma})$ среди всех функций с заданным следом x_Γ на интерфейсе

$$\tilde{x}_{2\Gamma} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_2 \\ x_\Gamma \end{pmatrix}.$$

Во-вторых, в качестве \tilde{x}_2 мы взяли специальное продолжение x_Γ в Ω_2^h , которое дается сеточным аналогом теоремы 3.1.

Таким образом, если показать, что на каждом шаге итерационного процесса ошибка принадлежит подпространству U , то матрицу B_u можно использовать в качестве эффективного переобуславливателя для системы (3.31). Выберем начальный вектор

$$B_u u^0 = f,$$

для которого верно

$$A_{2\Gamma} u_\Gamma^0 + A_{22} u_2^0 = f_2.$$

Тогда начальная ошибка $e^0 = u^0 - u$ принадлежит U . Рассмотрим метод простой итерации

$$u^{k+1} = u^k + \theta B_u^{-1} (f - Au^k). \quad (3.42)$$

Ошибка метода $e^k = u^k - u$ удовлетворяет

$$e^{k+1} = e^k - \theta B_u^{-1} A e^k = (I - B_u^{-1} A) e^k.$$

Если $e^k \in U$, т.е. $A_{2\Gamma} e_\Gamma^k + A_{22} e_2^k = 0$, то для вектора $g^k = B_u^{-1} A e^k$ имеем $A_{2\Gamma} g_\Gamma^k + A_{22} g_2^k = 0$ и $e^{k+1} = e^k - \theta g^k \in U$. По индукции заключаем, что все ошибки e^k принадлежат подпространству U , и при выборе $\theta = \frac{2}{C_{21}^2 + 1}$ и $u^0 = B_u^{-1} f$ итерации (3.42) сходятся со скоростью $\frac{C_{21}^2 - 1}{C_{21}^2 + 3}$.

Отметим, что реализация одной итерации (3.42) требует последовательного точного решения двух подзадач с матрицами B_1 и A_{22} при решении систем с переобуславливателем B_u .

Симметричная версия

Рассмотрим симметричную матрицу

$$B_s = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{1\Gamma} & 0 \\ A_{\Gamma 1} & A_\Gamma^{(1)} + A_{\Gamma 2} A_{22}^{-1} A_{2\Gamma} & A_{\Gamma 2} \\ 0 & A_{2\Gamma} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Решение системы $B_s x = y$ требует последовательного точного решения трех подзадач с матрицами A_{22} , B_1 , A_{22} , соответственно:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{1\Gamma} \\ A_{\Gamma 1} & A_{\Gamma}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_{\Gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_{\Gamma} - A_{\Gamma 2} A_{22}^{-1} y_2 \end{pmatrix},$$

$$x_2 = A_{22}^{-1} (y_2 - A_{2\Gamma} x_{\Gamma}).$$

Очевидно, что если $A = A^T$, то $B_s = B_s^T$. Покажем, что

$$C_{21}^{-2} A \leq B_s \leq A. \quad (3.43)$$

Действительно,

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{1\Gamma} & 0 \\ A_{\Gamma 1} & A_{\Gamma}^{(1)} + A_{\Gamma 2} A_{22}^{-1} A_{2\Gamma} & A_{\Gamma 2} \\ 0 & A_{2\Gamma} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{1\Gamma} & 0 \\ A_{\Gamma 1} & A_{\Gamma}^{(1)} + A_{\Gamma}^{(2)} - S_2 & A_{\Gamma 2} \\ 0 & A_{2\Gamma} & A_{22} \end{pmatrix},$$

$$S_2 = A_{\Gamma}^{(2)} - A_{\Gamma 2} A_{22}^{-1} A_{2\Gamma},$$

и

$$(B_s x, x) = (Ax, x) - (S_2 x_{\Gamma}, x_{\Gamma}).$$

Поскольку $S_2 \geq 0$, то $B_s \leq A$.

Для оценки снизу в (3.43) рассмотрим задачу на собственные значения

$$Ax = \lambda B_s x.$$

Для собственных векторов с отличными от единицы собственными значениями, имеем

$$A_{2\Gamma} x_{\Gamma} + A_{22} x_2 = 0,$$

поэтому, используя те же рассуждения, что при выводе оценок (3.41), получаем

$$(Ax, x) \leq C_{21}^2 (B_1 x_{1\Gamma}, x_{1\Gamma}) = C_{21}^2 (B_s x, x).$$

Таким образом, B_s является симметричной положительно определенной матрицей, спектрально эквивалентной матрице A . Это позволяет использовать B_s в качестве эффективного переобуславливателя в итерационных методах (например, методе сопряженных градиентов).

Определенным недостатком переобуславливателя B_s является требование решать сеточные задачи в подобластях точно. Оказывается, что в подобласти Ω_1 решение системы с матрицей B_1 может быть заменено на решение системы с переобуславливателем для B_1 .

Упражнение 3.2. Показать, что если следующие две матрицы эквивалентны по спектру

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{1\Gamma} \\ A_{\Gamma 1} & A_{\Gamma}^{(1)} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{1\Gamma} \\ \tilde{A}_{\Gamma 1} & \tilde{A}_{\Gamma}^{(1)} \end{pmatrix},$$

то переобуславливатель

$$\tilde{B}_s = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{1\Gamma} & 0 \\ \tilde{A}_{\Gamma 1} & \tilde{A}_{\Gamma}^{(1)} + A_{\Gamma 2} A_{22}^{-1} A_{2\Gamma} & A_{\Gamma 2} \\ 0 & A_{2\Gamma} & A_{22} \end{pmatrix}$$

также эквивалентен по спектру матрице A :

$$\tilde{B}_s \sim A.$$

Этот результат дает возможность строить многоуровневые методы декомпозиции области, в которых переобуславливатель для B_1 в свою очередь строится на основе метода декомпозиции. При этом расчетная область может быть покрыта большим количеством подобластей, а число обусловленности $B_s^{-1} A$ будет зависеть от числа подобластей. По аналогии с двухсеточным методом, зависимость от числа подобластей устраняется за счет введения дополнительной подзадачи на грубой сетке, порожденной разбиением на подобласти.

Замена блока A_{22} на переобуславливатель \tilde{A}_{22} приводит к нарушению спектральной эквивалентности декомпозиционного переобуславливателя и матрицы A , если не выполнено условие

$$A_{22} \leq \tilde{A}_{22} \leq (1 + ch^2) A_{22}.$$

3.4 Метод итераций Нейман-Нейман

В случае двух подобластей метод итераций Нейман-Нейман представляет собой итерационное решение уравнения на интерфейсе (3.37), при котором вклад подобластей в переобуславливатель для дополнения по Шуру S уравнивается:

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \theta \left(\frac{1}{2} S_1^{-1} + \frac{1}{2} S_2^{-1} \right) (-S \lambda^k + \chi). \quad (3.44)$$

Таким образом, вместо S_2^{-1} в качестве переобуславливателя используется полусумма $\frac{1}{2} S_1^{-1} + \frac{1}{2} S_2^{-1}$. Арифметическая цена одной итерации (3.44) определяется решением двух сеточных задач с условием

Дирихле на Γ_h (A_{ii}^{-1}) при вычислении невязки, и двух сеточных задач с условием Неймана на Γ_h (S_i^{-1}) при переобуславливании. Название метод получил по типу краевого условия в подзадачах, порождаемых переобуславливателем.

Метод итераций Нейман-Нейман легко обобщается на случай разбиения на большое число подобластей Ω_i , $i = 1, \dots, m$. Действительно, исключение внутренних неизвестных в подобластях Ω_i приводит к системе с дополнением по Шуру (3.40). Для каждой степени свободы, соответствующей узлу на Γ_h , определим число замыканий подобластей $\bar{\Omega}_i$, содержащих этот узел, и для интерфейсной части каждой подобласти Ω_i сформируем диагональную матрицу D_i из величин, обратных к этим числам. При этом ассемблирование матриц D_i порождает единичную матрицу:

$$\sum_{i=1}^m N_i D_i N_i^T = I.$$

Переобуславливатель B_S для матрицы S задается следующим образом

$$B_S = \sum_{i=1}^m N_i D_i S_i^{-1} D_i N_i^T.$$

Можно показать [25], что в случае использования квази-равномерных триангуляций с шагом h и квази-равномерных разбиений на подобласти с диаметром d число обусловленности $B_S S$ удовлетворяет оценке:

$$\text{cond}(B_S S) \leq C(1 + \log \frac{d}{h}) \max\{\frac{C}{d^2}; \log \frac{d}{h}\}.$$

Таким образом, в случае многих подобластей переобуславливатель B_S не является спектрально эквивалентным матрице S , а $\text{cond}(B_S S)$ зависит от числа подобластей $m \sim d^{-2}$. Тем не менее, действительные значения $\text{cond}(B_S S)$ оказываются очень малыми несмотря на свою логарифмическую зависимость от h . Как и в случае метода Нейман-Дирихле, зависимость от числа подобластей может быть устранена за счет решения дополнительной задачи на сетке, порождаемой разбиением на подобласти [25].

3.5 Метод итераций Дирихле-Дирихле

Вернемся к разбиению Ω на две подобласти Ω_1, Ω_2 . Формулировка двух подзадач с условиями сшивки (3.2)–(3.3) допускает следующую

интегральную постановку. Обозначим $\lambda = \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma}$ и найдем такие $\lambda \in \Lambda'$, $u_i \in V_i$, $i = 1, 2$, что

$$\int_{\Omega_1} \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 \, dx + \int_{\Gamma} \lambda v_1 \, ds = \int_{\Omega_1} f v_1 \, dx \quad \forall v_1 \in V_1, \quad (3.45)$$

$$\int_{\Omega_2} \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 \, dx - \int_{\Gamma} \lambda v_2 \, ds = \int_{\Omega_2} f v_2 \, dx \quad \forall v_2 \in V_2, \quad (3.46)$$

$$\int_{\Gamma} (u_1 - u_2) \mu \, ds = 0 \quad \mu \in \Lambda'. \quad (3.47)$$

Одним из преимуществ данной постановки является то, что она применима к случаю триангуляций, не стыкующихся на интерфейсе², поскольку непрерывность функции на Γ здесь понимается лишь в слабом смысле, т.е. в смысле равенства (3.47). Мы ограничимся случаем стыкующихся триангуляций и заменим пространство V_i на стандартное конечно-элементное подпространство \mathbb{U}^h , а Λ' — на дискретное пространство функций Дирака Λ^h , заданных во внутренних узлах x_k интерфейса Γ :

$$\Lambda^h = \{\delta(x_k)\}.$$

Конечно-элементная формулировка заключается в поиске $\lambda^h \in \Lambda^h$, $u_i^h \in \mathbb{U}_i^h$ таких, что

$$\int_{\Omega_1} \nabla u_1^h \cdot \nabla v_1^h \, dx + \int_{\Gamma} \lambda^h v_1^h \, ds = \int_{\Omega_1} f v_1^h \, dx \quad \forall v_1^h \in \mathbb{U}_1^h, \quad (3.48)$$

$$\int_{\Omega_2} \nabla u_2^h \cdot \nabla v_2^h \, dx - \int_{\Gamma} \lambda^h v_2^h \, ds = \int_{\Omega_2} f v_2^h \, dx \quad \forall v_2^h \in \mathbb{U}_2^h, \quad (3.49)$$

$$\int_{\Gamma} (u_1^h - u_2^h) \mu^h \, ds = 0 \quad \mu^h \in \Lambda^h. \quad (3.50)$$

В частном случае стыкующихся триангуляций уравнение (3.50) сводится к требованию равенства конечно-элементных функций u_1^h, u_2^h в узлах интерфейса:

$$u_1^h(x_k) - u_2^h(x_k) = 0.$$

² Две триангуляции называются нестыкующимися, если их следы на интерфейсе не совпадают.

Отметим, что (3.48)-(3.50) является неконформной аппроксимацией (3.45)-(3.47), поскольку пространство Λ^h не является подпространством Λ' . Тем не менее, можно показать, что (3.48)-(3.50) и обычная дискретизация (3.30) порождают одно и то же сеточное решение.

Алгебраическая формулировка для задачи (3.48)-(3.50) выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 & C_1^T \\ 0 & B_2 & -C_2^T \\ C_1 & -C_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.51)$$

где ненулевые элементы матриц C_1 и C_2 — только единицы. Исключение неизвестных u_1 и u_2 из (3.51) приводит к системе для вектора λ вида

$$(C_1 B_1^{-1} C_1^T + C_2 B_2^{-1} C_2^T) \lambda = C_1 B_1^{-1} f_1 - C_2 B_2^{-1} f_2. \quad (3.52)$$

Таким образом, умножение вектора на $S_D \equiv C_1 B_1^{-1} C_1^T + C_2 B_2^{-1} C_2^T$ требует решения двух краевых задач с условием Неймана на интерфейсе (B_i^{-1}). Учитывая вид матриц $C_i^T = (0 \ C_{i\Gamma}^T)$, перепишем матрицу S_D следующим образом:

$$S_D = C_{1\Gamma} S_1^{-1} C_{1\Gamma}^T + C_{2\Gamma} S_2^{-1} C_{2\Gamma}^T.$$

где S_i^{-1} — интерфейсный блок матрицы B_i^{-1} , для которого верно (см. упражнение 3.2)

$$S_i = A_{\Gamma}^{(i)} - A_{\Gamma i} A_{ii}^{-1} A_{i\Gamma}, \quad i = 1, 2.$$

По аналогии с переобуславливателем Нейман-Нейман, выпишем переобуславливатель для S_D :

$$S_F = C_{1\Gamma} S_1 C_{1\Gamma}^T + C_{2\Gamma} S_2 C_{2\Gamma}^T,$$

называемый переобуславливателем Дирихле-Дирихле по типу краевых задач (A_{ii}^{-1}), которые необходимо решить при его реализации. Переобусловленная система на интерфейсе (3.52) записывается так:

$$S_F S_D \lambda = S_F (C_1 B_1^{-1} f_1 - C_2 B_2^{-1} f_2).$$

По аналогии с методом Нейман-Нейман, метод итераций Дирихле-Дирихле допускает обобщение на случай многих подобластей [28].

Другие способы построения интерфейсного переобуславливателя

Начиная с 80х годов прошлого столетия был предложен целый ряд переобуславливателей для дополнения по Шуру S [36], как зависящие, так и не зависящие от плохих параметров дискретизации h , d . Большинство из них базируется на теории аддитивного метода Шварца, предложенной Мацокиным и Непомнящих в [10].

3.6 Метод Шварца

Рассмотрим разбиение области Ω на m перекрывающихся подобластей

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^m \Omega_i$$

таких, что для любой Ω_i , $i = 1, \dots, m$ существует хотя бы одна подобласть Ω_j , $j \neq i$, для которой $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$ (подобласть — открытое множество).

Для решения краевой задачи (3.1) применим метод Шварца (1869). Пусть приближение u^n к решению (3.1) u на n -м шаге задано. Следующее приближение u^{n+1} находится после применения m подшагов вида

$$\begin{aligned} -\Delta u^{n+\frac{i}{m}} &= f \text{ на } \Omega_i \\ u^{n+\frac{i}{m}} &= u^{n+\frac{i-1}{m}} \text{ на } \bar{\Omega} \setminus \Omega_i, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Метод Шварца можно сформулировать в терминах слабых постановок. Определим пространства $V_i^0 = H_0^1(\Omega_i) \subset V$, $i = 1, \dots, m$. Для нахождения решения обобщенной задачи (3.4) введем поправку

$$z_i = u^{n+\frac{i}{m}} - u^{n+\frac{i-1}{m}} \in V_i^0$$

к текущему приближению на i -м подшаге и применим итерации

$$\begin{aligned} \text{найти } z_i : a(z_i, v) &= (f, v) - a(u^{n+\frac{i-1}{m}}, v), \quad \forall v \in V_i^0 \\ u^{n+\frac{i}{m}} &= u^{n+\frac{i-1}{m}} + z_i, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Для обоснования сходимости метода Шварца введем в пространстве V ортопроекторы $R_i : V \rightarrow V_i^0$

$$a(R_i u, v) = a(u, v) \quad \forall v \in V_i^0$$

и определим проектор $Q_i = I - R_i$, для которого

$$a(Q_i u, v) = 0 \quad \forall v \in V_i^0.$$

Следовательно,

$$(f, v) = a(u, v) = a(Q_i u, v) + a(R_i u, v) = a(R_i u, v) \quad \forall v \in V_i^0,$$

и из (3.54) имеем

$$a(z_i, v) = a(R_i u, v) - a(u^{n+\frac{i-1}{m}}, v) \quad \forall v \in V_i^0. \quad (3.55)$$

Для произвольного $w \in V$ выберем $v = R_i w \in V_i^0$, тогда $a(R_i u, v) = a(R_i u, R_i w) = a(R_i R_i u, w) = a(R_i u, w)$ и

$$a(R_i z_i, w) = a(R_i u, w) - a(R_i u^{n+\frac{i-1}{m}}, w) \quad \forall w \in V,$$

$$z_i = R_i z_i = R_i u - R_i u^{n+\frac{i-1}{m}},$$

поэтому

$$u^{n+\frac{i}{m}} = u^{n+\frac{i-1}{m}} + z_i = (R_i + Q_i)u^{n+\frac{i-1}{m}} + z_i = Q_i u^{n+\frac{i-1}{m}} + R_i u. \quad (3.56)$$

Введем ошибку на текущем подшаге

$$\varepsilon^{n+\frac{i}{m}} = u^{n+\frac{i}{m}} - u.$$

Из (3.56) для ошибки получаем

$$\varepsilon^{n+\frac{i}{m}} = Q_i(u^{n+\frac{i-1}{m}} - u) + R_i u - R_i u = Q_i \varepsilon^{n+\frac{i-1}{m}}.$$

Таким образом, ошибки метода Шварца связаны соотношением

$$\varepsilon^{n+1} = T \varepsilon^n, \quad T = Q_m Q_{m-1} \dots Q_1. \quad (3.57)$$

Сходимость метода Шварца обеспечивается оценкой нормы оператора перехода $\|T\|$. Обозначим $\|u\| = a(u, u)^{\frac{1}{2}}$.

Теорема 3.3. *Рассмотрим следующие два утверждения:*

1) Для любого $v \in V$ существует такие $v_i \in V_i^0$, $i = 1, \dots, m$, что

$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_m, \quad (3.58)$$

$$\|v_i\| \leq \gamma \|v\| \quad (3.59)$$

с некоторой константой γ .

2) Для нормы оператора перехода имеет место оценка

$$\|T\| \leq q < 1. \quad (3.60)$$

Утверждение 1) влечет 2) с некоторой константой q , вообще говоря, зависящей от m, γ ; утверждение 2) влечет 1) с $\gamma = (1-q)^{-1}$.

Доказательство. [9] Пусть выполнено (3.60). Тогда

$$\begin{aligned} I - T &= Q_1 + R_1 - Q_m \dots Q_1 = R_1 + (R_2 + Q_2)Q_1 - Q_m \dots Q_1 \\ &= R_1 + R_2 Q_1 + (R_3 + Q_3)Q_2 Q_1 - Q_m \dots Q_1 \\ &= R_1 + R_2 Q_1 + R_3 Q_2 Q_1 + \dots + R_m Q_{m-1} \dots Q_1. \end{aligned}$$

Поскольку $\|T\| < 1$, то $\|(I - T)^{-1}\| \leq (1 - \|T\|)^{-1}$, т.е. оператор $I - T$ имеет обратный, и

$$\begin{aligned} v &= (I - T)(I - T)^{-1}v \\ &= (R_1 + R_2 Q_1 + \dots + R_m Q_{m-1} \dots Q_1)(I - T)^{-1}v = v_1 + \dots + v_m, \end{aligned}$$

где

$$v_i = R_i Q_{i-1} \dots Q_1 (I - T)^{-1}v \in V_i^0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Далее, поскольку $\|R_i\| = \|Q_i\| = 1$, то

$$\|v_i\| \leq \|(I - T)^{-1}\| \|v\| \leq (1 - \|T\|)^{-1} \|v\| = \gamma \|v\|.$$

Теперь предположим, что выполнены (3.58)-(3.59). Сперва рассмотрим оператор $R = \sum_{i=1}^m R_i$. Так как все R_i являются проекторами, то оператор R самосопряжен в V и $\|R\| \leq m$. Более того,

$$\begin{aligned} \|u\| &= \sup_{v \neq 0} \frac{|a(u, v)|}{\|v\|} = \sup_{v \neq 0} \frac{|a(u, v_1 + \dots + v_m)|}{\|v\|} \leq \sup_{v \neq 0} \sum_{i=1}^m \frac{|a(u, v_i)|}{\|v\|} \\ &= \sup_{v \neq 0} \sum_{i=1}^m \frac{|a(R_i u, v_i)|}{\|v\|} \leq \sup_{v \neq 0} \sum_{i=1}^m \frac{|[R_i u][v_i]|}{\|v\|} \leq \gamma \sum_{i=1}^m |[R_i u]| \\ &\leq \gamma \sqrt{m} \left(\sum_{i=1}^m a(R_i u, R_i u) \right)^{\frac{1}{2}} = \gamma \sqrt{m} \left(\sum_{i=1}^m a(R_i u, u) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \gamma \sqrt{m} a(Ru, u)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$a(Ru, u) \geq \frac{1}{m\gamma^2} a(u, u),$$

и оператор R осуществляет взаимно однозначное отображение V на V и имеет ограниченный обратный

$$\|R^{-1}\| \leq m\gamma^2.$$

Докажем (3.60) от противного, что $\|T\| < 1$. Пусть $\|T\| = 1$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $v_\varepsilon \in V$, что $\|v_\varepsilon\| = 1$, $\|[Tv_\varepsilon]\|^2 \geq 1 - \varepsilon$. Тогда

$$1 - \varepsilon \leq \|[Tv_\varepsilon]\|^2 = \|[Q_m \cdots Q_2 Q_1 v_\varepsilon]\|^2 \leq \|Q_m \cdots Q_2\|^2 \cdot \|[Q_1 v_\varepsilon]\|^2 \leq \|[Q_1 v_\varepsilon]\|^2$$

и в силу $\|[R_1 v_\varepsilon]\|^2 + \|[Q_1 v_\varepsilon]\|^2 = 1$ имеем

$$\|[R_1 v_\varepsilon]\|^2 \leq \varepsilon \equiv \varepsilon_1.$$

Оценим $\|[R_i v_\varepsilon]\|^2$. Поскольку $T = Q_m \cdots Q_2(I - R_1)$, то

$$\|[Q_m \cdots Q_2 v_\varepsilon]\|^2 \geq \|[Tv_\varepsilon]\|^2 - \|[Q_m \cdots Q_2 R_1 v_\varepsilon]\|^2 \geq \sqrt{1 - \varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_1} = \sqrt{1 - \varepsilon_2}$$

где $\varepsilon_2 = 1 - (\sqrt{1 - \varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_1})^2$. Таким образом,

$$1 - \varepsilon_2 \leq \|[Q_m \cdots Q_3 Q_2 v_\varepsilon]\|^2 \leq \|[Q_2 v_\varepsilon]\|^2,$$

и в силу равенства $R_2 = I - Q_2$ имеет место оценка

$$\|[R_2 v_\varepsilon]\|^2 \leq \varepsilon_2.$$

Аналогично показываем, что для $i = 3, \dots, m$

$$\|[Q_i v_\varepsilon]\|^2 \geq 1 - \varepsilon_i, \quad \|[R_i v_\varepsilon]\|^2 \leq \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i = 1 - (\sqrt{1 - \varepsilon_{i-1}} - \sqrt{\varepsilon_{i-1}})^2.$$

Очевидно, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем $\varepsilon_i \rightarrow 0$, $i = 2, \dots, m$.

Теперь воспользуемся тем, что R обратим и R^{-1} ограничен:

$$1 = \|v_\varepsilon\| = \|R^{-1} R v_\varepsilon\| \leq \|R^{-1}\| \sum_{i=1}^m \|[R_i v_\varepsilon]\| \leq \|R^{-1}\| \sum_{i=1}^m \sqrt{\varepsilon_i} \leq m \gamma^2 \sum_{i=1}^m \sqrt{\varepsilon_i}.$$

Получили противоречие для достаточно малого $\varepsilon > 0$.

□

Упражнение 3.3. Показать, что если гильбертово пространство V разложено в прямую векторную сумму (3.58) и норма оператора перехода меньше единицы, то условие (3.59) выполняется с постоянной

$$\gamma = \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

Константу γ в (3.58) можно оценить. Для примера рассмотрим случай перекрытия двух единичных квадратов Ω_1, Ω_2 , для которых ширина полосы перекрытия равна d . Зададим гладкую функцию срезки $\xi(x)$, равную 1 на одной стороне полосы и 0 на другой, и определим для любой $v \in V = H_1^0(\Omega_1 \cup \Omega_2)$

$$v_1 = \xi v, \quad v_2 = (1 - \xi)v.$$

Получаем $\gamma \sim d^{-1}$, поскольку $\|\xi\| \sim d^{-1}$. Если ширина полосы перекрытия хотя бы где-то внутри Ω стремится к 0, то $\gamma \rightarrow +\infty$.

Алгебраическая формулировка метода Шварца

Пусть разбиение области $\Omega = \bigcup_{i=1}^m \Omega_i$ и ее триангуляция Ω^h таковы, что границы $\partial\Omega_i$ проходят по ребрам Ω^h . Заменяем V, V_i на их конечно-элементные аналоги $\mathbb{U}^h, \mathbb{U}_i^h$ размерности n, n_i , где $n(n_i)$ — количество внутренних узлов в $\Omega^h (\Omega_i^h)$, и зададим операторы сужения $r_i^h : \mathbb{U}^h \rightarrow \mathbb{U}_i^h$

$$r_i^h u^h(x_k) = u^h(x_k)$$

во всех внутренних узлах x_k триангуляции Ω_i^h .

Матричное представление оператора сужения есть прямоугольная $n_i \times n$ матрица R_i , состоящая из нулей и единиц, в каждом столбце которой не более одной единицы. С помощью матрицы R_i зададим $n_i \times n_i$ -матрицу A_i как сужение матрицы A системы (3.31) на подобласти Ω_i :

$$A_i = R_i A R_i^T.$$

Алгебраический вариант метода Шварца для решения системы (3.31) представляет собой итерационный процесс с m подшагами для нахождения очередного приближения u^{n+1} , если задано текущее приближение u^n :

$$\begin{aligned} A_i z_i &= R_i (f - A u^{n+\frac{i-1}{m}}) \\ u^{n+\frac{i}{m}} &= u^{n+\frac{i-1}{m}} + R_i^T z_i, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Для ошибки итерационного приближения на подшаге $e^{n+\frac{i}{m}} = u^{n+\frac{i}{m}} - u$ верно уравнение

$$e^{n+\frac{i}{m}} = e^{n+\frac{i-1}{m}} - R_i^T A_i^{-1} R_i A e^{n+\frac{i-1}{m}} = (I - P_i) e^{n+\frac{i-1}{m}},$$

где матрица $P_i = I - R_i^T A_i^{-1} R_i$ — проектор:

$$P_i^2 = (R_i^T A_i^{-1} R_i A)^2 = R_i^T A_i^{-1} R_i A R_i^T A_i^{-1} R_i A = R_i^T A_i^{-1} A_i A_i^{-1} R_i A = P_i.$$

Таким образом, оператор перехода, связывающий e^n и e^{n+1} , соответствует мультипликативному методу:

$$e^{n+1} = (I - P_m) \cdots (I - P_1) e^n. \quad (3.62)$$

Перепишем (3.62), используя определение ошибки e^n и обозначение $T = (I - P_m) \cdots (I - P_1)$:

$$u^{n+1} - u = T(u^n - u),$$

$$u^{n+1} = u^n + (I - T)u - (I - T)u^n = u^n + (I - T)A^{-1}f - (I - T)u^n.$$

Поэтому метод Шварца есть метод простой итерации для системы

$$(I - T)u = (I - T)A^{-1}f.$$

Аддитивный метод Шварца

Аддитивная версия метода Шварца отличается от вышерассмотренной мультипликативной (3.61) суммированием вкладов подобластей

$$\begin{aligned} A_i z_i &= R_i(f - Au^n), \quad i = 1, \dots, m, \\ u^{n+1} &= u^n + \sum_{i=1}^m R_i^T z_i. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Ошибки аддитивного метода связаны уравнением

$$e^{n+1} = e^n - \sum_{i=1}^m R_i^T A_i^{-1} R_i A e^n = (I - \sum_{i=1}^m P_i) e^n. \quad (3.64)$$

Таким образом, аддитивный метод Шварца можно интерпретировать, как метод простой итерации для решения системы $Au = f$ с переобуславливателем $B = (\sum_{i=1}^m P_i)$.

Привлекательность аддитивного метода Шварца заключается в его параллельной структуре: подзадачи решаются независимо, по окончании каждой итерации необходимо обменяться данными с границ подобластей Ω_i . Перекрывающиеся подобласти удобно строить расширением неперекрывающихся подобластей $\hat{\Omega}_i$, на которые область Ω разбита изначально.

Заметим, что матрично-векторную версию мультипликативного или аддитивного метода Шварца можно рассмотреть как метод последовательной или параллельной коррекции на подпространствах (см. разделы 2.5.2–2.5.4).

Связь с классическими итерационными методами

Рассмотрим случай минимального перекрытия между двумя триангуляциями Ω_1^h, Ω_2^h , когда любой узел из $\Omega_1^h \cap \Omega_2^h$ принадлежит либо $\partial\Omega_1$, либо $\partial\Omega_2$. Предположим, что сперва перенумерованы внутренние узлы Ω_1^h , а затем — внутренние узлы Ω_2^h . В этом случае для матриц A, R_1, R_2 верно представление

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad R_1 = (I_1 \ O), \quad R_2 = (O \ I_2).$$

Одна итерация аддитивного метода Шварца записывается в виде

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= u^n + R_1^T A_{11}^{-1} R_1 (f - Au^n) + R_2^T A_{22}^{-1} R_2 (f - Au^n) \\ &= u^n + \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} (f - Au^n), \end{aligned}$$

т.е. представляет собой одну итерацию блочного метода Якоби.

Одна итерация мультипликативного метода Шварца записывается в виде

$$\begin{cases} u^{n+\frac{1}{2}} = u^n + R_1^T A_{11}^{-1} R_1 (f - Au^n) \\ u^{n+1} = u^{n+\frac{1}{2}} + R_2^T A_{22}^{-1} R_2 (f - Au^{n+\frac{1}{2}}) \end{cases}$$

или

$$u^{n+1} = u^n + \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} (f - Au^n),$$

т.е. представляет собой одну итерацию блочного метода Гаусса - Зейделя.

Метод Шварца для сингулярно возмущенных операторов

Как уже было отмечено, скорость сходимости итераций (3.53) зависит от ширины полосы налегания подобластей d : чем меньше перекрытие, тем ближе $\|T\|$ к единице и хуже скорость сходимости. Это замечание верно для задачи (3.1) и других эллиптических уравнений. Если перекрытие большое, то большая часть неизвестных входит в решение двух или нескольких подзадач, что ухудшает параллельные свойства аддитивного метода Шварца.

При решении некоторых уравнений с сингулярно возмущенными операторами диффузии отпадает необходимость в больших перекрытиях, что открывает возможности построения эффективных параллельных алгоритмов.

Например, при дискретизации на фиксированной сетке уравнения диффузии-реакции $-\tau\Delta + I$ с малым параметром $\tau > 0$ (типичном при неявных дискретизациях параболических уравнений) норма оператора перехода (3.64) стремится к $q < 1$ при $\tau \rightarrow 0$. Более того, для любого $\varepsilon > 0$, при разбиении области на множество регулярных подобластей с таким налеганием, что справедлива оценка

$$d > C\sqrt{\tau} \left(\ln \frac{\varepsilon h^2}{\tau} \right)^{-1},$$

одна итерация аддитивного метода Шварца обеспечивает приближение к точному решению системы с точностью ε . Это наблюдение позволяет заменить неявную схему для простейшего уравнения теплопроводности

$$(-\tau\Delta + I)u^{n+1} = \tau f + u^n \text{ в } \Omega, \quad u^{n+1} = 0 \text{ на } \partial\Omega$$

набором [24] независимых задач в подобластях Ω_i , полученных расширением $\Omega_i, i = 1, \dots, m$:

$$(-\tau\Delta + I)\hat{u}_i = \tau f + u^n \text{ в } \Omega_i, \quad \hat{u}_i = 0 \text{ на } \partial\Omega_i,$$

и заданием

$$u^{n+1}|_{\Omega_i} = \hat{u}_i|_{\Omega_i}.$$

При решении уравнения с оператором конвекции-диффузии $-\tau\Delta + (\vec{b}\cdot\nabla)$ с малым параметром $\tau > 0$ скорость мультипликативного метода Шварца остается высокой даже при минимальном перекрытии между подобластями, если направление перебора подобластей $\Omega_i, i = 1, \dots, m$ совпадает с вектором конвективного переноса \vec{b} или ортогонально ему [20].

Литература

- [1] *Агошков В.И., Лебедев В.И.* Операторы Пуанкаре–Стеклова и методы разделения области в вариационных задачах // Выч. процессы и системы. — М.: Наука, 1985, С. 173–227.
- [2] *Алексидзе М.А.* О целесообразности применения альтернирующего метода Шварца на электронных цифровых машинах // Докл. АН СССР. 1958. Т.120, С.231–234.
- [3] *Астраханцев Г.П.* Об одном итерационном методе. //ЖВМиМФ. 1971. Т.11, N.2, С. 439–448.
- [4] *Бахвалов Н.С.* О сходимости одного релаксационного метода для эллиптического оператора с естественными ограничениями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1966. Т. 6. С. 101–135.
- [5] *Кондратьев В.А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками. // Тр. Моск. матем. об-ва. 1967. 16. С.209-292
- [6] *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. — М: Наука, 1973.
- [7] *Лебедев В.И., Агошков В.И.* Операторы Пуанкаре–Стеклова и их приложения в анализе. — М. ОВМ АН СССР, 1983.
- [8] *Лебедев В.И.* Методы композиции. — М.: ОВМ АН СССР, 1986.
- [9] *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1989.
- [10] *Мацюкин А.М., Непомнящих С.В.* Метод альтернирования Шварца в подпространстве // Известия высш. учебных заведений. Математика. 1985. N. 10, P. 61–66.
- [11] *Ольшанский М. А.* Лекции и упражнения по многосеточным методам. — М: Физматлит, 2005.
- [12] *Собалев С.Л.* Алгоритм Шварца в теории упругости. // Докл. АН СССР. 1936. Т. 4 (XIII), С. 235–238.
- [13] *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. — М: Мир, 1980.
- [14] *Федоренко Р. П.* Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений. // ЖВМиМФ. 1961. Т. 1, С. 922–927.
- [15] *Федоренко Р. П.* О скорости сходимости одного итерационного процесса. // ЖВМиМФ. 1964. Т. 4, С. 227–235.
- [16] *Шайдуров В. В.* Многосеточные методы конечных элементов. — М: Наука, 1989.
- [17] *Bastian, P. Hackbush W., Wittum G.* Additive and multiplicative multigrid — A comparison // Computing. 1998. V. 60, P. 345–364.
- [18] *Brandt A.* Multi-level adaptive technique (MLAT) for fast numerical solution to boundary value problems // Proc. 3rd Int. Conf. on Numerical Methods in Fluid Mechanics. / H.Cabannes and R.Temam (eds) / Lecture Notes in Physics. V. 18. — Berlin: Springer, 1973. — P. 82–89.
- [19] *Brandt A.* Multi-level adaptive solutions to boundary value problems. // Math. Comp. 1977. V. 31, P. 333–390.
- [20] *Garbey M., Kuznetsov Yu., Vassilevski Yu.* Parallel Schwarz method for a convection-diffusion problem. // SIAM J.Sci.Comp. 2000. V. 22, P. 891–916.
- [21] *Grisvard P.* Elliptic problems in nonsmooth domains. — Pitman Publishing, London, 1985.
- [22] *Hackbusch W.* Multi-grid Methods and Applications. — Berlin, Heidelberg: Springer, 1985.
- [23] *Hackbusch W.* Iterative solution of large sparse systems of equations. — New-York, Berlin: Springer, 1994.
- [24] *Kuznetsov Yu.* New Algorithms for Approximate Realization of Implicit Difference Schemes // Sov. J. Num. Anal. Math. Modelling. 1988. V. 3, P. 99–114.

- [25] *Mandel J.* Balancing domain decomposition // Commun. Appl. Numer. Meth. 1993. V.9, P. 233–241.
- [26] *Nepomnyaschikh S.* Mesh theorems of traces, normalizations of function traces and their inversion // Sov.J.Numer.Anal.Math.Modelling. 1991. V. 6, P. 223–242.
- [27] *Quarteroni A., Valli A.* Domain decomposition methods for partial differential equations. — Oxford Science Publications, 1999.
- [28] *Rixen D., Farhat C., Tezaur R., Mandel J.* Theoretical comparison of the FETI and algebraically partitioned FETI methods, and performance comparisons with a direct sparse solver // Int. J. Numer. Meth. Engrg. 1999. V. 46, P. 501–534.
- [29] *Saltzer Ch.* An abridged block method for the solution of the Dirichlet problem for the Laplace difference equation // J. Math. and Phys. 1953. V. 32, P. 63–67.
- [30] *Schwarz H.* Über einige Abbildungsaufgaben // J. Reine Angew. Math. 1869. V. 70, P. 105–120.
- [31] *Smith B., Bjorstad P., Gropp W.* Domain decomposition. Parallel multilevel methods for elliptic partial differential equations. — Cambridge University Press, 1996.
- [32] *Yserentant H.* Old and new convergence proofs for multigrid methods // Acta Numerica. 1993. V. 2, P. 285–326.
- [33] *Kuznetsov Yu.* Algebraic multigrid domain decomposition method // Sov.J.Numer.Anal.Math.Modelling. 1989. V. 4, P. 351–380.
- [34] *Hakopian Yu., Kuznetsov Yu.* Algebraic multigrid / substructuring preconditioners // Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1991. V. 6, P. 453–483.
- [35] *Xu J.* Iterative methods by space decomposition and subspace correction. // SIAM Review. 1992. V. 34, P. 581–613.
- [36] <http://www.ddm.org>
- [37] <http://www.mgnet.org>