В.П. ДЫМНИКОВ

# ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ГИДРОДИНАМИКИ

МОСКВА – 1 9 9 8

Российская академия наук
Институт вычислительной математики

В.П. ДЫМНИКОВ

# ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ГИДРОДИНАМИКИ

МОСКВА – 1 9 9 8

УДК 551

**Дымников В.П.** Избранные главы гидродинамики. М.: ИВМ РАН, 1998. – 97 с., 6 ил.

Данное учебное пособие посвящено изложению отдельных разделов гидродинамики и рассматривается автором как введение в курс геофизической гидродинамики.

В книге подробно исследуются предположения, лежащие в основе вывода уравнений гидродинамики, приводятся классические результаты, касающиеся течений баротропной жидкости, и обсуждаются физические механизмы возбуждения и современные методы исследования неустойчивости гидродинамических течений. Большое внимание уделено задачам, часть из которых можно рассматривать как самостоятельные теоретические проблемы.

Книга рассчитана на студентов и аспирантов, специализирующихся в области геофизической гидродинамики, численного моделирования общей циркуляции атмосферы и океана и математической теории климата.

**Dymnikov V.P.** Hydrodynamics Selected Chapters. Moscow, INM RAS, 1998, 97 p., Fig. 6.

The monograph is dedicated to some problems in hydrodynamics and is considered by the author as a necessary introduction to geophisical fluid dynamics.

The book contains careful considerations of the main assumptions which underly general hydrodynamics equations, classical theorems for barotropic currents, physical machanisms and modern methods of investigation of hydrodynamical flows instability and a set of concrete problems with solutions.

The book is intended for students and graduate students studying geophysical fluid dynamics, numerical modelling of general circulation of atmosphere and ocean and mathematical theory of climate.

# Оглавление

# Предисловие

В основу этого учебного пособия положен полугодовой курс лекций, который автор читал для студентов кафедры математического моделирования физических процессов Московского физико-технического института. Полгода для курса гидродинамики, конечно, явно недостаточно, чтобы в ней специализироваться, поэтому курс должен рассматриваться как вводный к курсам по геофизической гидродинамике (гидродинамике атмосферы и океана) – направлению, которое занимает существенное место в общем блоке изучаемых на кафедре проблем. В то же время определенные знания по гидродинамике должен иметь каждый студент, специализирующийся в области численных методов решения уравнений математической физики, не обязательно физики атмосферы и океана. Поэтому материал для данного курса выбирался из следующих соображений: во-первых, необходимо дать вывод всех основных уравнений и тщательно разобрать все предположения, которые принимаются при их выводе. Особенно это касается уравнений Навье-Стокса, поскольку математические трудности, возникающие при их анализе, не преодолены до сих пор. Во-вторых, необходимо исследовать адиабатические инварианты, поскольку теория адиабатических инвариантов дает методологическую основу для построения конечномерных аппроксимаций этих уравнений. В-третьих, курс должен давать основу для понимания проблем, возникающих при изучении одного из наиболее ярких современных направлений – теории нелинейных диссипативных систем.

В первую очередь это касается понимания механизмов возникновения неустойчивости гидродинамических течений и методов их исследования. И, наконец, я считаю, что с точки зрения понимания общности методов математического анализа различных физических задач и внутренней красоты теории совершенно необходимо уделить внимание теории двумерных потенциальных течений, хотя, может быть, она и не очень актуальна в настоящее время.

Совершенно очевидно, что без решения конкретных задач след, оставленный в памяти студентов столь кратким курсом, вряд ли будет достаточно глубоким, поэтому в конце каждой главы приведены задачи – автор наивно полагает, что эти задачи должны быть решены студентами самостоятельно (хотя к большинству задач и приложены решения). Часть задач составлена автором, часть позаимствована из известных монографий по гидродинамике сплошных сред. Решение некоторых задач настолько громоздко, что может стать предметом отдельных лекций. Более того, заметная часть гидродинамических проблем разобрана именно в задачах. Одна лекция вынесена в приложение – это лекция об основных понятиях классической равновесной термодинамики.

## Глава 1.

# Определение жидкого состояния. Обьемные и поверхностные силы. Тензор напряжений

Провести резкую грань между тремя состояниями вещества – твердым, жидким и газообразным – вообще говоря, невозможно. Тем не менее, мы, следуя Бетчелору, определим жидкое состояние вещества как состояние, в котором вещество не может сопротивляться изменениям формы при неизменном обьеме при любых приложенных силах. Это определение в некотором смысле является конструктивным и будет позднее использовано в одном из доказательств. Далее, мы принимаем гипотезу континуума – непрерывной структуры жидкости и газа, хотя для газов, например, расстояние между молекулами намного больше размеров молекул.

Мы разделим силы, действующие на элементы жидкости, на нелокальные – типа гравитационных сил, которые проникают в весь обьем жидкости, и локальные, которые действуют локально на выделенный обьем жидкости. Нелокальные силы часто называют обьемными силами. Если мы выделим некоторый обьем $\delta V$, то обьемную силу можно записать в виде

$$\vec{F} \cdot \rho \cdot \delta V.$$

(Если иметь в виду гравитационные силы, то множитель $\rho$ вводится, чтобы показать, что сила пропорциональна массе выделенного обьема).

Ко второй группе сил – локальных – мы отнесем поверхностные силы, которые обусловлены взаимодействием выделенных обьемов жидкости с другими обьемами через очень тонкие поверхностные слои. Эти силы быстро убывают с удалением от поверхности взаимодействия.

Если элемент обьема $\delta V$ имеет часть поверхности $\delta A$, то поверхностную силу можно записать в виде:

$$\vec{P}(\vec{n}, \vec{x}, t) \cdot \delta A,$$

где $\vec{n}$ – внешняя нормаль к поверхности $\delta A$, определяющая ее ориентацию в пространстве.

Сила $\vec{P}$ на единицу площади называется напряжением.

Заметим, что сила, приложенная к другой стороне поверхности, равна

$$\vec{P}(-\vec{n}, \vec{x}, t) = -\vec{P}(\vec{n}, \vec{x}, t).$$

Это означает, что $\vec{P}$ есть нечетная функция $\vec{n}$.

Рассмотрим элемент поверхности $\delta A$ с внешней нормалью $\vec{n}$ и проекциями на ортогональные плоскости, определенные ортами $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – $\delta A_1, \delta A_2, \delta A_3$.

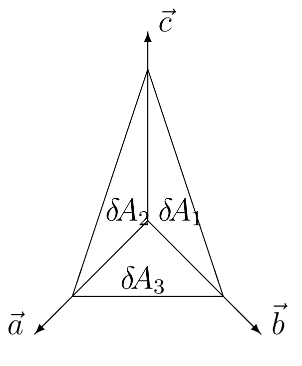


Рис. 1

Эти четыре поверхности ограничивают элементарный обьем $\delta V$. Суммарная поверхностная сила, действующая на этот элементарный обьем, есть

$$\vec{P}(\vec{n})\delta A + \vec{P}(-\vec{a})\delta A_1 + \vec{P}(-\vec{b})\delta A_2 + \vec{P}(-\vec{c})\delta A_3.$$

(Мы считаем, что обьем настолько мал, что в каждой из сил можно взять одни и те же координаты, соответствующие центру обьема). Из простых геометрических соображений ясно, что

$$\delta A_1 = (\vec{a}, \vec{n})\,\delta A,$$
$$\delta A_2 = (\vec{b}, \vec{n})\,\delta A,$$
$$\delta A_3 = (\vec{c}, \vec{n})\,\delta A.$$

Следовательно, суммарная сила равна

$$\delta A\,[\vec{P}(\vec{n}) - \vec{P}(\vec{a}) \cdot (\vec{a}, \vec{n}) - \vec{P}(\vec{b})(\vec{b}, \vec{n}) - \vec{P}(\vec{c})(\vec{c}, \vec{n})] =$$

$$= \delta A\,[\vec{P}(\vec{n}) - \{\vec{P}(\vec{a})a_j + \vec{P}(\vec{b})b_j + \vec{P}(\vec{c})c_j\}\,n_j],$$

где по повторяющимся индексам ведется суммирование, а $a_k, b_k, c_k$ суть компоненты векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ в некоторой ортогональной системе координат.

$i$-я компонента силы есть

$$\delta A\,[P_i(\vec{n}) - \{P_i(\vec{a})a_j + P_i(\vec{b})b_j + P_i(\vec{c})c_j\}\,n_j].$$

Пусть у нас есть уравнение движения, выражающее закон Ньютона для элементарного обьема:

масса х ускорение = объемные силы + поверхностные силы.

Если мы устремим $\delta V$ к 0, то все члены уравнения будут стремиться к 0 как $(\delta r)^3$, а поверхностные силы как $(\delta r)^2$. Это означает, что в данном приближении член, стоящий в квадратных скобках, должен стремиться к нулю, как $\delta r$ при $\delta r \to 0$, т.е. другими словами необходимо следующее приближение (в разложениях по соответствующему малому параметру) для описания поверхностных сил. Итак, мы имеем (при $\delta r \to 0$ с точностью до $(\delta r)^2$)

$$P_i(\vec{n}) = \{P_i(\vec{a})a_j + P_i(\vec{b})b_j + P_i(\vec{c})c_j\}\,n_j \equiv \sigma_{ij} \cdot n_j.$$

Выражение в фигурных скобках есть $i, j$ – компонента тензора второго ранга с девятью элементами $i, j \in [1, 2, 3]$.

Можно показать, что не все компоненты тензора независимы, тензор – симметричен, т.е. $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Другими словами, $i$-я компонента силы на единицу площади поверхности, приложенной ортогонально $j$ направлению, равна $j$-й компоненте силы на единицу площади, приложенной ортогонально $i$ направлению.

Введем в рассмотрение два тензора:

$\delta_{ij}$ – тензор Кронекера: $\delta_{ij} = 0\ i \neq j$, $\delta_{ij} = 1\ i = j$;

и тензор $\epsilon_{ijk} = 1$, если все $i, j, k$ разные и расположены в циклическом порядке, $\epsilon_{ijk} = -1$, если индексы разные и расположены не в циклическом порядке, в противном случае $\epsilon_{ijk} = 0$.

$i$-я компонента суммарного момента поверхностных сил около точки 0 (центра элемента) есть

$$\int \epsilon_{ijk} r_j \sigma_{kl} \cdot n_l \, dA.$$

Этот интеграл по замкнутой поверхности может быть преобразован в объемный

$$\int \epsilon_{ijk} r_j \sigma_{kl} \cdot n_l \, dA = \int \epsilon_{ijk} \left( \sigma_{kj} + r_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial r_l} \right) dV.$$

Если $\sigma$ и $\dfrac{\partial \sigma}{\partial r}$ ограниченные функции, то

$$\sigma_{kj} dV \to 0 \qquad (\delta r)^3$$

$$r_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial r_l} \, dV \to 0 \qquad (\delta r)^4.$$

Это означает

$$\epsilon_{ijk} \cdot \sigma_{kj} = 0,$$

что эквивалентно симметричности тензора $\sigma_{kj}$. Компоненты тензора $\sigma_{ii}$ называются нормальными напряжениями, $\sigma_{ij} (i \neq j)$ – сдвиговыми.

Для двумерного потока можно нарисовать следующую картинку:

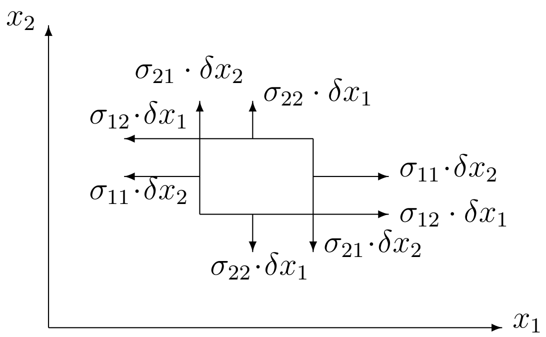


Рис. 2

Тензор второго ранга может быть приведен к каноническому виду (к главным направлениям) – к диагональному виду, так что будем иметь

$$\sigma'_{11}+\sigma'_{22}+\sigma'_{33}=\sigma_{ii}.$$

В направлении этих осей идет только растяжение или сжатие.

Пусть наша жидкость находится в покое. Приведем тензор напряжений к главным осям и представим его в виде:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}\sigma_{ii} & & 0 \\ & \frac{1}{3}\sigma_{ii} & \\ 0 & & \frac{1}{3}\sigma_{ii} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma'_{11}-\frac{1}{3}\sigma_{ii} & & 0 \\ & \sigma'_{22}-\frac{1}{3}\sigma_{ii} & \\ 0 & & \sigma'_{33}-\frac{1}{3}\sigma_{ii} \end{bmatrix}$$

Первый тензор имеет сферическую симметрию, он изотропен (для скалярной матрицы можно выбрать любую систему ортогональных векторов как систему собственных векторов). Второй тензор имеет сумму диагональных элементов, равную 0. Это означает, что вдоль главных осей по части направлений идет сжатие, по другой части – растяжение, т.е. выбранный в покоящейся жидкости шар должен превращаться в эллипс в силу нашей гипотезы о невозможности жидкости препятствовать изменению формы без изменения обьема при приложении сил. Другими словами, мы не имеем состояния покоя. Из этого следует, что второй тензор в покоящейся жидкости должен быть тождественно равен 0, т.е. $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$, в состоянии покоя, где – давление. Эта формула выражает закон о равенстве давлений во всех направлениях в статической жидкости.

В настоящей главе мы не будем выводить уравнения Навье-Стокса. Сделаем лишь несколько замечаний. Для покоящейся жидкости мы показали, что справедливо фундаментальное утверждение – тензор напряжений изотропен. В движущейся жидкости тензор напряжений должен зависеть от локальных движений. Выделяя из него изотропную часть мы можем написать

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + d_{ij},$$

где $d_{ij}$ – девиатор, который в принципе может зависеть от $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$. (Линейная зависимость девиатора от $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$ определяет ньютоновскую жидкость). Возникает важный вопрос – насколько определенное таким образом давление для покоящейся жидкости близко к термодинамическому равновесному давлению, когда жидкость находится в движении. Мы не будем детально обсуждать этот вопрос, везде в дальнейшем предполагая, что в идеальной жидкости (жидкости без сдвиговых напряжений) неизотропными сжатиями-растяжениями можно пренебречь. Таким образом, идеальную жидкость мы можем определить как жидкость с изотропным (скалярным) тензором напряжений.

## Механическое равновесие жидкости

При механическом равновесии жидкости мы имеем равенство обьемных и поверхностных сил. Пусть обьем $V$ имеет поверхность $S$. Тогда

$$\int\limits_V \rho\vec{F}\,dV - \int\limits_S p\vec{n}\,dS = 0,$$

($n$ – нормаль к поверхности) и по теореме Остроградского-Гаусса

$$\int\limits_V (\rho\vec{F} - \nabla p)\,dV = 0,$$

что эквивалентно

$$\rho\vec{F} = \nabla p.$$

Справедливость этой формулы очевидна из "скалярной"теоремы Остроградского-Гаусса:

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial M}{\partial z}\right)\,dV = \iint\limits_S (P\,dydz + Q\,dxdz + M\,dxdy),$$

если для простоты можно рассмотреть параллелепипед и положить $P \equiv \vec{i}p$, $Q \equiv \vec{j}p$, $M \equiv \vec{k}p$.

Пусть $\vec{F}$ – потенциальная сила, $\vec{F} = -\nabla\Phi$. Тогда $-\rho\nabla\Phi = \nabla P$. Если взять операцию ротора от обеих частей, то получим:

$$(\nabla\rho) \times (\nabla\Phi) = 0.$$

(Здесь $\times$ – оператор векторного умножения.) Таким образом,уровенные поверхности $\rho$ и $\Phi$ должны совпадать, и для уровенной поверхности можно написать:

$$\frac{dP}{d\Phi} = -\rho(\Phi).$$

## Задачи

**1.** Доказать, что для картезианских тензоров все изотропные тензоры четвертого порядка могут быть представлены как сумма произведений тензоров второго порядка $\delta_{ij}$:

$$A_{ijkl} = \mu\delta_{ik} \cdot \delta_{jl} + \mu' \cdot \delta_{il} \cdot \delta_{jk} + \mu''\delta_{ij} \cdot \delta_{kl}.$$

**2.** Получить давление в центре самогравитирующей сферической звезды, у которой плотность на растоянии $r$ от центра представляется выражением $\rho = \rho_c(1 - \beta r^2)$, $\rho_c, \beta$ — положительные константы.

Показать, что если средняя плотность звезды в два раза больше поверхностной плотности, то давление в центре такой звезды будет в $13/8$ раза больше, чем у звезды с однородной плотностью и той же массой.

*Решение.*

Пусть $\vec{F} = -\nabla\Phi$. Исходное уравнение имеет вид

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho.$$

Поскольку $\nabla\Phi = -\dfrac{1}{\rho}\nabla P$, то в сферическо-симметричном случае имеем:

$$\nabla\frac{1}{\rho}\nabla P = -4\pi G\rho.$$

Дальнейшие вычисления не представляют трудностей.

**3.** Пусть адиабатическая жидкость находится в поле силы тяжести, так что

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho.$$

Сформулировать условие гидростатического равновесия.

*Решение.*

Пусть уравнение состояния жидкости есть $p = p(\rho, s)$, где $s$ – энтропия. Тогда

$$\frac{dp}{dz} = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{s=\mathrm{const}} \frac{d\rho}{dz} + \left.\frac{\partial p}{\partial s}\right|_{\rho=\mathrm{const}} \frac{ds}{dz} \equiv c^2 \frac{dp}{dz} + M\,\frac{ds}{dz},$$

где $c^2$ – квадрат скорости звука, а $M \equiv \left.\dfrac{\partial p}{\partial s}\right|_{\rho=const}$.

Рассмотрим частицу жидкости объемом $V_0$, находящуюся в точке $z$. На нее действует сила тяжести $-\rho(z)gV_0$ и сила Архимеда. Сместим частицу на величину $\zeta$ по вертикали. Ее объем изменится (из-за сжимаемости), а масса и энтропия сохранятся. Сила, действующая на частицу, будет равна

$$F = -g\rho(z)V_0 + g\rho(z+\zeta)(V_0 + \Delta V),$$

или в первом приближении

$$F = g\rho(z)V_0 \left[\frac{1}{\rho(z)}\frac{d\rho}{dz}\,\zeta + \frac{\Delta V}{V_0}\right].$$

Изменение объема можно получить из уравнения состояния, полагая $\Delta s = 0$.

$$\Delta p = c^2 \Delta\rho = c^2 \Delta\left(\frac{m}{V}\right) = c^2\rho(z)V_0\Delta\left(\frac{1}{V}\right) = -c^2\rho(z)\frac{\Delta V}{V_0}.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta V}{V_0} = -\frac{1}{c^2\rho(z)}\,\Delta p. \qquad \Delta p = \frac{\partial p}{\partial z}\zeta = -g\rho(z)\zeta.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{g}{c^2}\,\zeta$$

и выражение для силы, действующей на частицу, будет иметь вид

$$F = g\rho(z)V_0\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{g}{c^2}\right)\zeta = -mN^2\zeta,$$

где

$$N^2 = -g\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{g}{c^2}\right)$$

— квадрат частоты Брента-Вяйселя. Состояние равновесия будет устойчиво, если $N^2 \geq 0$. Отсюда

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{g}{c^2} \leq 0,$$

т.е. плотность должна достаточно быстро убывать с высотой.

Глава 2.

# Уравнения идеальной жидкости

## Лагранжево и эйлерово описание жидкости

В гидродинамике приняты две формы описания движения жидкости – лагранжево и эйлерово. В лагранжевой форме мы следим (описываем) движение частицы, которую мы так или иначе маркируем. В эйлеровой форме мы изучаем поведение частиц во времени в конкретной точке пространства. В любом случае мы предполагаем, что жидкость состоит из частиц (бесконечно малых), которые движутся, т.е. обладают скоростью. Скорость – это основная гидродинамическая характеристика, и эта характеристика по существу лагранжева, так как приписывается жидкой частице.

Пусть $u_i$ – $i$-я компонента скорости и пусть $a_i$ – $i$-я компонента ускорения

$$a_i = \frac{du_i}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u_i(x_i + \Delta x_i, t + \Delta t) - u_i(x, t)}{\Delta t} = \\ = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \qquad (1)$$

(Здесь и далее под повторяюшимся индексом подразумевается суммирование.) Производная $d/dt$ называется полной производной (или материальной), а (1) есть ее представление в эйлеровой системе координат. В лагранжевой системе, естественно, $a_i = \dfrac{\partial u_i}{\partial t}$.

Пусть лагранжевы координаты частицы будут $\zeta_i$. (Например, мы можем в качестве лагранжевых координат взять координаты частиц при $t = 0$.) Вычислим интеграл от некоторой функции по обьему $V$, состоящему из одних и тех же частиц:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V F\,dV \equiv \frac{d}{dt}\int\limits_V F\,dx_i, \tag{2}$$

$$dV \equiv dx_1\,dx_2\,dx_3 \equiv dx_i$$

Перейдем в формуле (2) к лагранжевым координатам – координатам частиц в начальный момент времени. Имеем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V F\,dx_i = \frac{d}{dt}\int\limits_{V_0} F\cdot J\,d\xi_i. \tag{3}$$

В (3) $J$ – якобиан преобразования из одной системы координат в другую:

$$J = \left|\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}\right|.$$

Поскольку $V_0$ – константа, то справедливы соотношения:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_0} F\cdot d\xi_i = \int\limits_{V_0}\left(\frac{dF}{dt}\cdot J + F\,\frac{dJ}{dt}\right)d\xi_i =$$

$$= \int\limits_V\left(\frac{dF}{dt}\cdot J + F\,\frac{dJ}{dt}\right)\frac{1}{J}\,dx_i = \int\limits_V\left(\frac{dF}{dt} + F\,\frac{1}{J}\frac{dJ}{dt}\right)dx_i \tag{4}$$

Справедлива формула (доказательство приведено в задаче):

$$\frac{1}{J}\,\frac{dJ}{dt} = \operatorname{div}\vec{u} \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}\,\frac{dx_i}{dt}. \tag{5}$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V F\,dx_i = \int\limits_V\left(\frac{dF}{dt} + F\operatorname{div}\vec{u}\right)dV. \tag{6}$$

Пусть $F \equiv \rho$ – плотность жидкости (масса единицы обьема). Тогда $\int\limits_V \rho\, dx_i$ – масса объема, состоящая из одних и тех же частиц, которая, очевидно, сохраняется. Отсюда

$$\int\limits_V \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{u}\right) dV = 0$$

и в силу произвольности обьема:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{u} = 0. \tag{7}$$

Так как

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)\rho,$$

то окончательно имеем:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho\vec{u} = 0. \tag{8}$$

Это так называемое уравнение неразрывности. Если жидкость несжимаема, то есть если плотность ее сохраняется вдоль траектории, то $\dfrac{d\rho}{dt} = 0$ и из (7) следует, что

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0. \tag{9}$$

Пусть $\vec{F} \equiv \rho\vec{u}$ – импульс частицы. Поскольку мы рассматриваем идеальную жидкость, т.е. касательные напряжения принимаем равными нулю, а нормальные считаем изотропными, то мы можем написать (второй закон Ньютона):

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\vec{u}\, dx_i = \int\limits_V \vec{f}\rho\, dV - \int\limits_s p\vec{n}\, ds, \tag{10}$$

где $\vec{f}$ – объемные силы, а $p$ – давление.

Преобразуя последний интеграл по формуле Остроградского-Гаусса, используя соотношение (6) и уравнение для $\rho$, получим:

$$\int\limits_V \left(\frac{d\rho\vec{u}}{dt} + \rho\vec{u}\cdot \operatorname{div} \vec{u}\right) dV = \int\limits_V \vec{f}\rho\, dV - \int\limits_V \nabla p\, dV,$$

или

$$\int\limits_V \left(\rho\frac{d\vec{u}}{dt} + \vec{u}\left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}\vec{u}\right)\right) dV = \int\limits_V \vec{f}\rho\, dV - \int\limits_V \nabla p\, dV.$$

Отсюда получим:

$$\rho\frac{d\vec{u}}{dt} + \vec{f}\rho - \nabla p,$$

или

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{f}. \tag{11}$$

Если $\vec{f}$ есть потенциальная сила $\vec{f} = \nabla\Phi$, то (11) преобразуется к виду:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \nabla\Phi - \frac{1}{\rho}\nabla p. \tag{12}$$

(Например, в поле силы тяжести $\nabla\Phi = \vec{g}$).

Система уравнений (8), (11) незамкнута, поэтому для ее замыкания можно использовать уравнения классической термодинамики (система становится замкнутой для несжимаемой жидкости). Уравнение первого начала термодинамики можно записать в виде:

$$C_V\frac{dT}{dt} + p\,\frac{dV}{dt} = \frac{dQ}{dt};$$

$$\tag{13}$$

$$V = \frac{1}{\rho}.$$

Чтобы замкнуть систему, нужно выписать уравнение состояния:

$$p = p(\rho, T). \tag{14}$$

Для идеального газа $C_p = C_V + R,\ \ p = R\rho T$, и мы имеем:

$$C_p\frac{dT}{dt} - \frac{RT}{p}\frac{dp}{dt} = \frac{dQ}{dt}. \tag{15}$$

Таким образом, система (8), (11), (13), (14) замкнута.

Для постановки задачи нужно сформулировать начальные и граничные условия. Вопросы однозначной разрешимости конкретных задач для идеальной жидкости очень сложны, и мы в данном курсе лекций их рассматривать не будем.

## Задачи

**1.** Доказать, что для

$$J = \left| \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} \right|,$$

где $J$ – якобиан преобразования из системы координат $(x_1, x_2, x_3)$ в систему $\xi_1, \xi_2, \xi_3$, справедливо соотношение:

$$\frac{dJ}{dt} = J \operatorname{div} \vec{u},$$

где $\operatorname{div} \vec{u} = \dfrac{\partial}{\partial x_i} \dfrac{dx_i}{dt}$.

*Решение*

По правилам дифференцирования определителей будем иметь:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial(u_1, x_2, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} + \frac{\partial(x_1, u_2, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} + \frac{\partial(x_1, x_2, u_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}.$$

Но

$$\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial \xi_j} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial \xi_j}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial(u_1, x_2, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial(x_2, x_2, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} +$$

$$+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial(x_3,x_2,x_3)}{\partial(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\cdot J,$$

так как члены при $\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}$ и $\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}$ равны 0.

Таким образом,

$$\frac{dJ}{dt}=J\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\equiv J\operatorname{div}\vec{u}.$$

**2.** Пусть дана система уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt}&=F_i(\vec{x}),\quad \vec{x}\in R^N.\\ x_i(0)&=x_i^0\end{aligned}$$

Пусть $V_0$ – замкнутый обьем в $R^N$. Выпустим из каждой точки $V_0(x_i^0\in V_0)$ траекторию согласно вышеприведенной системе. Обьем $V_0$ будет деформироваться. Показать, что

$$\frac{dV}{dt}=\int\limits_V\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\,dV.$$

## *Решение*

По определению

$$V=\int\limits_V dV.$$

Следовательно, в формуле (6) $F\equiv 1$ и, таким образом,

$$\frac{dV}{dt}=\int\limits_V\operatorname{div}\vec{u}=\int\limits_V\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}=\int\limits_V\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\,dV.$$

**3.** Пусть мы имеем систему уравнений

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x},$$

где $-\{a_{ij}\} - n \times n$ матрица. Пусть $X$ – матрица, столбцами которой являются $\vec{x}^{(k)}$, т.е. $X$ – система линейно независимых решений уравнения

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}.$$

Доказать, что справедливо соотношение $\dfrac{d|X|}{dt} = \operatorname{tr} A \cdot |X|$, где $|X|$ – детерминант матрицы $X$, $\operatorname{tr} A$ – след матрицы $A$.

*Решение*

Определитель матрицы равен объему, образованному столбцами $X$ как векторами, помещенными в начало координат. Следовательно, мы можем воспользоваться соотношением:

$$\frac{dV}{dt} = V \operatorname{div} \vec{u}, \qquad \operatorname{div} \vec{u} = \sum \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \sum a_{ii} = \text{const} \equiv \operatorname{tr} A.$$

Итак,

$$\frac{d|X|}{dt} = |X| \operatorname{tr} A.$$

Впрочем, это соотношение легко проверить прямыми вычислениями.

**4.** Получить уравнение для энтропии идеального газа.

*Решение*

Определение энтропии:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{T}\frac{dQ}{dt}.$$

Имеем

$$C_p\frac{dT}{dt} - \frac{RT}{p}\frac{dp}{dt} = \frac{dQ}{dt},$$

отсюда

$$C_p\frac{d\ln T}{dt} - R\,\frac{d\ln p}{dt} = \frac{1}{T}\frac{dQ}{dt},$$

или

$$C_p \frac{d \ln \frac{T}{p^{(R/C_p)}}}{dt} = \frac{1}{T} \frac{dQ}{dt}.$$

Следовательно,

$$S = C_p \ln \frac{T}{p^{(R/C_p)}} + \text{const}.$$

**5.** Показать, что уравнения Эйлера можно записать в форме Громеки-Лэмба:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{u} \times \vec{u} = -\nabla E - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \Phi,$$

$$E = \frac{(\vec{u} \cdot \vec{u})}{2}, \qquad (\vec{u} \cdot \vec{u}) = \sum_{i=1}^{3} u_i^2.$$

## *Решение*

Решение задачи получается из векторного тождества:

$$(\vec{V} \nabla) \vec{V} = \frac{1}{2} \nabla (V^2) - \vec{V} \times \operatorname{rot} \vec{V}.$$

**6.** Показать, что скорость изменения элементарного объема жидкости, занятого одними и теми же частицами, определяется уравнением:

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \operatorname{div} \vec{u}.$$

## *Решение*

Скорость изменения объема жидкости определяется движением его поверхности:

$$\frac{dV}{dt} = \int_S \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS = \int_V \operatorname{div} \vec{u} \, dV.$$

Устремляя $V$ к нулю, получим:

$$\frac{dV}{dt} = V \cdot \operatorname{div} \vec{u}.$$

Отсюда также получается соотношение для якобиана преобразования координат как элементарного объема. Действительно,

$$V = \int\limits_{V} dV = \int\limits_{V_0} J\, d\xi_i,$$

$$\frac{dV}{dt} = \int\limits_{V_0} \frac{dJ}{dt}\, d\xi_i = \int\limits_{V} \frac{1}{J}\frac{dJ}{dt}\, dV,$$

но

$$\frac{dV}{dt} = \int\limits_{V} \operatorname{div} \vec{u}\, dV,$$

следовательно,

$$\int\limits_{V} \left( \frac{1}{J}\frac{dJ}{dt} - \operatorname{div} \vec{u} \right) dV = 0$$

и в силу произвольности объема

$$\frac{dJ}{dt} = J \operatorname{div} \vec{u}.$$

**7.** Определим линию тока как линию, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением скорости частиц в данной точке. Доказать, что если $u_i$ не зависят явно от времени, то линия тока совпадает с траекторией частицы.

*Решение*

Траектории частиц находятся из уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i,$$

которые можно записать в виде:

$$\frac{1}{u_1(\vec{x}, t)}\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{u_2(\vec{x}, t)}\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{u_3(\vec{x}, t)}\frac{dx_3}{dt}.$$

Линии тока находятся из уравнений:

$$\frac{dx_1}{ds}\cdot\frac{1}{u_1(\vec{x},t)}=\frac{dx_2}{ds}\cdot\frac{1}{u_2(\vec{x},t)}=\frac{dx_3}{ds}\cdot\frac{1}{u_3(\vec{x},t)}=C,$$

где $t$ является параметром. Это следует из того, что линию тока можно задать параметрически: $x_i = x_i(s)$ или $\vec{r}=\vec{r}(s)$ ($s$ – длина дуги вдоль линии тока) и $\dfrac{d\vec{r}}{ds} = \mathrm{C}\vec{u}$, где C=const. Если течение стационарное, то обе системы уравнений совпадают.

**8.** Получить уравнение неразрывности в лагранжевой системе координат.

## *Решение*

Пусть $\int\limits_V \rho\, dV$ – масса объема $V$, занятого одними и теми же частицами. Очевидно, что $\dfrac{d}{dt}\int\limits_V \rho\, dV = 0$. Перейдем к лагранжевой системе координат. Получим:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\, dV = \frac{d}{dt}\int\limits_{V_0} J\rho\, d\xi_i = \int\limits_{V_0}\frac{dJ\rho}{dt}\, d\xi_i = 0.$$

В силу произвольности объема $V_0$ имеем:

$$\frac{dJ\rho}{dt}=0,$$

или

$$J\rho = J_0\rho_0.$$

Если в качестве лагранжевых координат взять координаты частиц в начальный момент времени, то

$$J_0 = 1$$

и уравнение будет иметь вид:

$$J\rho = \rho_0.$$

# Глава 3.

# Энергетика идеального газа. Симметризация уравнений термогидродинамики

Выпишем полную систему уравнений для идеального газа:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\,\nabla p,\\
&\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\vec{u} = 0,\\
&C_v\frac{dT}{dt} + p\,\frac{d\,1/\rho}{dt} = \frac{dQ}{dt},\\
&p = \rho RT, \qquad \vec{u} = (u, v, w).
\end{aligned} \tag{1}
$$

Умножим скалярно в $R^3$ первое уравнение на $\vec{u}$. Пусть $E = (\vec{u}, \vec{u})/2$, $(\vec{u}, \vec{u}) = u^2 + v^2 + w^2$. Получим

$$\rho\frac{dE}{dt} = -(\nabla p, \vec{u}).$$

С учетом уравнения неразрывности будем иметь:

$$\frac{\partial\rho E}{dt} + \operatorname{div}\rho\vec{u}E = -(\nabla p\cdot\vec{u}). \tag{$1'$}$$

Интегрируя ($1'$) по обьему и применяя к правой части правило интегрирования по частям, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint \rho E\,dv+\iint\limits_{s} \rho E\,\vec{u}\cdot\vec{n}\,ds = -\iiint \operatorname{div}(p\vec{u})\,dv +$$
$$+\iiint p\operatorname{div}\vec{u}\,dv. \qquad (2)$$

Из уравнения неразрывности имеем:

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\operatorname{div}\vec{u}=0,$$
$$\operatorname{div}\vec{u}=-\frac{1}{\rho}\,\frac{d\rho}{dt}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint \rho E\,dv = -\iint\limits_{s} \rho E\,\vec{u}\cdot\vec{n}\,ds - \iint\limits_{s} p\,\vec{u}\cdot\vec{n}\,ds\ -$$
$$-\iiint \frac{p}{\rho}\,\frac{d\rho}{dt}\,dv. \qquad (3)$$

Преобразуем теперь уравнение притока тепла:

$$C_v\,\frac{dT}{dt}-\frac{RT}{\rho}\,\frac{d\rho}{dt}=\frac{dQ}{dt}.$$

Умножим это уравнение на $\rho$. Интегрируя его по обьему, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint \rho C_v T\,dv + C_v\iiint \operatorname{div}(\rho\vec{u}T) = \iiint RT\frac{d\rho}{dt}+\iiint \rho\frac{dQ}{dt},$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint \rho C_v T\,dv + \iint\limits_{s} C_v\rho T\,\vec{u}\cdot\vec{n}\,ds = \iiint \frac{p}{\rho}\,\frac{d\rho}{dt}\,dv+$$
$$+\iiint \rho\frac{dQ}{dt} \qquad (4)$$

Складывая уравнения (3) и (4), получим уравнение баланса энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint \rho[E + C_v T]\,dv = -\iint\limits_s [\rho C_v T + \rho E + p]\,\vec{u}\cdot\vec{n}\,ds \; + \\ + \iiint \rho\,\frac{dQ}{dt}\,dv. \qquad (5)$$

Если рассматривать задачу описания динамики идеального газа в замкнутом обьеме с граничными условиями непротекания газа через поверхность, ограничивающую данный обьем, $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0$, $\vec{n}$ – нормаль к поверхности, при отсутствии источников и стоков тепла $\frac{dQ}{dt} = 0$, то из (5) будет следовать закон сохранения полной энергии (кинетическая + внутренняя):

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint \rho\left[\frac{u^2+v^2+w^2}{2} + C_v T\right] = 0. \qquad (6)$$

В (6) отсутствует потенциальная энергия, поскольку мы рассматривали задачу в условиях отсутствия потенциальных сил. Отметим, что инвариант (6) не представляет из себя квадратичную форму, однако легко к ней преобразуется при условии положительности плотности и абсолютной температуры.

Действительно, при $\rho > 0$ в исходной системе уравнений можно сделать замену переменных:

$$\sqrt{\rho} = \rho_1; \quad \sqrt{C_V \rho T} = \Theta; \quad \sqrt{\rho}\vec{u} = \vec{u}_1.$$

Линейный закон сохранения массы в этом случае также становится квадратичным.

Поскольку мы имеем дело с вещественными функциями, то наличие квадратического закона сохранения автоматически означает, что в системе уравнений для вектора $\vec{\varphi} = \{\rho_1, \Theta, \vec{u}_1\}$

$$\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t} + K(\vec{\varphi})\vec{\varphi} = 0, \tag{7}$$

оператор $K(\vec{\varphi})$ – кососимметрический, удовлетворяющий условию:

$$(K(\vec{\varphi})\vec{\varphi}, \vec{\varphi}) = 0,$$

где скалярное произведение определено следующим образом:

$$(\vec{\varphi}, \vec{\eta}) = \sum_{i=1}^{3} \iiint\limits_{v} \varphi_i \eta_i \, dv.$$

Действительно, умножая (7) скалярно на $\vec{\varphi}$, мы получим $(\vec{\varphi}, \vec{\varphi})$ =const, т.е. наш исходный закон сохранения.

Проведенная таким образом симметризация уравнений термогидродинамики дает возможность легко строить приближенные методы решения этих уравнений, обладающие точными аналогами законов сохранения и устойчивыми в сеточных нормах, согласованных с нормой в $L_2$.

## Задачи

**1.** Пусть дана система уравнений термогидродинамики, в которой третье уравнение движения заменено на уравнение гидростатики ($\dfrac{\partial p}{\partial z} = -g\rho$, газ находится в поле силы тяжести). Перейти от системы координат $(x, y, z)$ к системе $(x, y, p)$ при условии $\rho > 0$ и получить уравнение для полной энергии.

*Решение*

Система уравнений в координатах $(x, y, z)$ имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)u = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad \vec{u} = (u, v, w)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)v = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \qquad \nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\vec{u} = 0,$$

$$C_p\frac{dT}{dt} - \frac{RT}{p}\frac{dp}{dt} = 0,$$

$$p = \rho RT.$$

Преобразования из системы $(x, y, z)$ в $(x, y, p)$ для скалярных функций имеют вид:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_p + \frac{\partial\varphi}{\partial p}\cdot\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z,$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_p + \frac{\partial\varphi}{\partial p}\cdot\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_z,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\varphi}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Пусть $\varphi \equiv z$. Тогда

$$0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p + \frac{\partial z}{\partial p}\cdot\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z.$$

Отсюда

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z = -\frac{1}{\partial z/\partial p}\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p = g\rho\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p.$$

Обозначим $\Phi \equiv gz$ ($\Phi$ – геопотенциал). Поскольку индивидуальная производная скалярной функции инвариантна в любой системе координат (это лагранжиев инвариант), то уравнение движения и уравнение притока тепла в системе координат $(x, y, p)$ примут следующий вид:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p},$$

$$C_p\frac{dT}{dt} - \frac{RT}{p}\tau = 0,$$

где $\tau = \dfrac{dp}{dt}$ – аналог вертикальной скорости в $p$-системе координат. Получим теперь уравнение неразрывности в $p$-системе координат. Имеем:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho u}{\partial x} + \frac{\partial\rho v}{\partial y} + \frac{\partial\rho w}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho, \qquad \rho = -\frac{1}{g}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Отсюда

$$-\frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + w\frac{\partial p}{\partial z}\right) + \frac{\partial\rho u}{\partial x} + \frac{\partial\rho v}{\partial y} = 0.$$

$$\frac{\partial\rho u}{\partial x} = -\frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\cdot u\right) = -\frac{1}{g}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial z}\right) =$$

$$= -\frac{1}{g}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_z + \frac{\partial}{\partial z}u\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial p}{\partial x}\right).$$

Суммируя это выражение с аналогичным выражением для $\dfrac{\partial\rho v}{\partial y}$, получим:

$$-\frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + w\frac{\partial p}{\partial z} + u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y}\right) - \frac{1}{g}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_z -\right.$$

$$-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z+\frac{\partial p}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_z-\frac{\partial v}{\partial z}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_z\Bigg)=0.$$

Но так как

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_z=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_p+\frac{\partial u}{\partial p}\cdot\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z$$

и $\dfrac{\partial}{\partial z}=\dfrac{\partial p}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial}{\partial p}$, то окончательно получим:

$$\frac{\partial p}{\partial z}\cdot\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{dp}{dt}\right)+\frac{\partial p}{\partial z}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_p+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_p\right)=0.$$

Сокращая на $\dfrac{\partial p}{\partial z}(\rho>0)$ и обозначая $\tau\equiv\dfrac{dp}{dt}$, получим уравнение неразрывности в $p$-системе координат:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial \tau}{\partial p}=0.$$

Отметим, что уравнение неразрывности в $p$-системе координат стало линейным, аналогичным уравнению неразрывности в $z$-системе для несжимаемой жидкости. Возникает разумный вопрос – куда "делась"сжимаемость? Она перешла в краевые условия по вертикали, которые нужно ставить на $p$-поверхностях, не являющихся "физическими"поверхностями.

Получим теперь уравнение для полной энергии. Пусть $E=\dfrac{u^2+v^2}{2}$. Тогда:

$$\frac{dE}{dt}=-u\,\frac{\partial\Phi}{\partial x}-v\,\frac{\partial\Phi}{\partial y}=-\mathrm{div}\,(\Phi\vec{u})+\tau\,\frac{\partial\Phi}{\partial p}=-\mathrm{div}\,(\Phi\vec{u})-\frac{RT}{p}\,\tau.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint(E+C_pT)\,dv=-\iiint\mathrm{div}(\Phi\vec{u})\,dv=\iint\limits_s\,\Phi\vec{u}\cdot\vec{n}\,ds.$$

Если на поверхности, ограничивающей объем в $p$-системе, задано условие непротекания $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$, то

$$\iiint (E + C_pT)\,dv = \text{const}.$$

Отметим, что в $p$-системе координат при наличии гидростатики и поля силы тяжести интеграл энергии имеет тот же вид, что и в $z$-системе координат без силы тяжести, только $C_v$ заменено на $C_p$. Это означает, что в $p$-системе координат сумма внутренней и потенциальной энергии

$$\iiint (C_vT + gz)\,dv = \iiint C_pT\,dv.$$

**2.** Выписать уравнения движения в системе координат, вращающейся с постоянной угловой скоростью $\vec{\Omega}$.

## *Решение*

Пусть $\vec{\varphi} = \varphi_x\cdot\vec{i} + \varphi_y\cdot\vec{j} + \varphi_z\cdot\vec{k}$, где $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – орты инерциальной системы координат, и пусть $\vec{\varphi} = \varphi_x^{(1)}\vec{i}^{(1)} + \varphi_y^{(1)}\vec{j}^{(1)} + \varphi_z^{(1)}\vec{k}^{(1)}$, где $\vec{i}^{(1)},\vec{j}^{(1)},\vec{k}^{(1)}$ – орты вращающейся системы координат. Тогда

$$\frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \frac{d\varphi_x}{dt}\vec{i} + \frac{d\varphi_y}{dt}\vec{j} + \frac{d\varphi_z}{dt}\vec{k} = \frac{d\varphi_x^{(1)}}{dt}\vec{i}^{(1)} + \frac{d\varphi_y^{(1)}}{dt}\vec{j}^{(1)} + \frac{d\varphi_z^{(1)}}{dt}\vec{k}^{(1)} +$$

$$+\varphi_x^{(1)}\frac{d\vec{i}^{(1)}}{dt} + \varphi_y^{(1)}\frac{d\vec{j}^{(1)}}{dt} + \varphi_z^{(1)}\frac{d\vec{k}^{(1)}}{dt}.$$

Справедливы соотношения:

$$\frac{d\vec{i}^{(1)}}{dt} = \vec{\Omega}\times\vec{i}^{(1)}, \qquad \frac{d\vec{j}^{(1)}}{dt} = \vec{\Omega}\times\vec{j}^{(1)}, \qquad \frac{d\vec{k}^{(1)}}{dt} = \vec{\Omega}\times\vec{k}^{(1)}.$$

Следовательно,

$$\frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \frac{d\varphi_x^{(1)}}{dt}\vec{i}^{(1)} + \frac{d\varphi_y^{(1)}}{dt}\vec{j}^{(1)} + \frac{d\varphi_z^{(1)}}{dt}\vec{k}^{(1)} + \vec{\Omega}\times\vec{\varphi} \equiv \frac{d^{(1)}\vec{\varphi}}{dt} + \vec{\Omega}\times\vec{\varphi}.$$

$\dfrac{d^{(1)}}{dt}$ – индивидуальная производная, связанная с вращающейся системой координат. Пусть $\vec{\varphi} \equiv \vec{r}$ (радиус-вектор), тогда по определению:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{u}, \qquad \frac{d'\vec{r}}{dt} = \vec{u}^{(1)},$$

и мы имеем:

$$\vec{u} = \vec{u}^{(1)} + \vec{\Omega} \times \vec{r}.$$

Пусть $\vec{\varphi} \equiv \vec{u}$. Тогда

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d^{(1)}\vec{u}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{u} = \frac{d^{(1)}\vec{u}^{(1)}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{u}^{(1)} + \vec{\Omega} \times \vec{u}^{(1)} + \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{r} =$$

$$= \frac{d'\vec{u}^{(1)}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{u}^{(1)} - \Omega^2 \times \vec{R},$$

где $\vec{R}$ – проекция вектора $\vec{r}$ на плоскость, ортогональную оси вращения системы координат.

Итак, уравнения Эйлера во вращающейся системе координат имеют вид (для простоты записи штрихи опущены):

$$\frac{d\vec{u}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{u} = \Omega^2 \vec{R} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla\Phi.$$

Остальные (скалярные) уравнения остаются неизменными.

**3.** Пусть дана одномерная система уравнений мелкой воды:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial h}{\partial x},$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0.$$

Выписать дивергентную и полудивергентную формы этих уравнений для $h > 0$ и систему законов сохранения.

## *Решение*

Первое уравнение системы с учетом второго можно привести к виду
$$\frac{\partial hu}{\partial t}+\frac{\partial hu\cdot u}{\partial x}=-\frac{\partial h^2/2}{\partial x}.$$
Закон сохранения энергии получается из следующей цепочки равенств:
$$\frac{\partial h\,u^2/2}{\partial t}+\frac{\partial hu\cdot u^2/2}{\partial x}=-hu\,\frac{\partial h}{\partial x},$$
$$h\,\frac{\partial h}{\partial t}=-h\frac{\partial hu}{\partial x}.$$
Следовательно,
$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{x_1}^{x_2}h\left(\frac{u^2}{2}+\frac{h}{2}\right)\,dx=h^2u|_{x=x_1}-h^2u|_{x=x_2}.$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{x_1}^{x_2}h\,dx=hu|_{x=x_1}-hu|_{x=x_2}.$$

Для простоты выпишем полудивергентную форму уравнения только для $h$. Пусть $h_1=\sqrt{h}$. Тогда
$$\frac{\partial h_1^2}{\partial t}+\frac{\partial h_1^2u}{\partial x}=0,$$
или
$$2h_1\,\frac{\partial h_1}{\partial t}+h_1\,\frac{\partial h_1u}{\partial x}+h_1u\,\frac{\partial h_1}{\partial x}=0,$$
или сокращая на $h_1$, получаем:
$$\frac{\partial h_1}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(u\,\frac{\partial h_1}{\partial x}+\frac{\partial h_1u}{\partial x}\right)=0.$$

Это и есть искомая полудивергентная форма уравнения для $h$.

## Глава 4.

# Кинематика потоков жидкости

## Анализ относительных движений вблизи точки

Пусть скорость жидкости в точке $\vec{x}$ в момент времени $t$ есть $\vec{u}(\vec{x}, t)$ и одновременно в точке $\vec{x} + \vec{r}$ есть $\vec{u} + \delta\vec{u}$. Тогда (в декартовой системе координат) справедливо соотношение (при условии, что $|r|$ достаточно малая величина):

$$\delta u_i = r_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \tag{1}$$

$\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$ есть тензор второго ранга, и его можно разложить на симметричную и антисимметричную части:

$$\delta u_i = \delta u_i^{(s)} + \delta u_i^{(a)}, \tag{2}$$

где

$$\delta u_i^{(s)} = r_j l_{ij}, \qquad \delta u_i^{(a)} = r_j \zeta_{ij},$$

$$l_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad \zeta_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right).$$

Симметричный тензор $l_{ij}$ можно привести к главным осям. В этом представлении он будет диагональным с действительными элементами на диагонали. Сумма диагональных элементов будет инвариантом, так что

$$l_i' = l_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \equiv \operatorname{div} \vec{u}. \tag{3}$$

В этом смысле симметричная часть тензора будет представлять растяжения (или сжатия) вдоль главных осей без всякого вращения – сфера должна превратиться в эллипс.

Антисимметричный тензор $\zeta_{ij}$ можно записать в следующем виде:

$$\zeta_{ij} = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\omega_k,$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – компоненты вектора $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$. (Тензор $\epsilon_{ijk}$ определен в главе 1.) Следовательно,

$$\delta u_i^{(a)} = r_j \zeta_{ij} = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk} r_j \omega_k. \tag{3'}$$

Отметим кстати, что $\zeta_{ij}$ имеет всего три независимые компоненты, т.к. диагональные элементы тензора равны 0. Но (3') есть просто $i$-я компонента вектора $\frac{1}{2}\vec{\omega} \times \vec{r}$, то есть:

$$\delta u_i^{(a)} = \left(\frac{1}{2}\vec{\omega} \times \vec{r}\right)_i.$$

Таким образом, действие антисимметричного тензора эквивалентно вращению частицы жидкости как твердого тела вокруг ее центра с угловой скоростью $\frac{1}{2}\vec{\omega}$.

Если $\vec{\omega} \equiv 0$, то жидкость называется безвихревой. Отметим, что $\vec{\omega}$, как и в случае твердого тела, есть удвоенная угловая скорость вращения.

Итак, любое движение в малой окрестности точки $\vec{x}$ можно представить в виде трех компонент: однородного переноса со скоростью $\vec{u}$, растяжения вдоль главных осей тензора деформации и поворота, как твердого тела с угловой скоростью $\dfrac{\nabla \times \vec{u}}{2}$.

Таким образом, мы формально определили кинематику потока жидкости в каждой точке через две фундаментальные характеристики, определяемые скоростью, – дивергенцию скорости и ее вихрь.

Пусть в каждой точке $\nabla\cdot\vec{u}=\Delta$ и $\nabla\times\vec{u}=\vec{\omega}$. ($\Delta$, $\omega$ – функции координат и времени.) Нашей задачей теперь является получение представления скорости через $\Delta$ и $\vec{\omega}$. Определим некоторую скорость (безвихревую) $\vec{u}_g$, которая удовлетворяет соотношениям:

$$\nabla\cdot\vec{u}_g=\Delta, \qquad \nabla\times\vec{u}_g=0. \tag{4}$$

Чтобы удовлетворить второму соотношению в (4), положим $\vec{u}_g=\nabla\varphi$, и тогда из первого соотношения получим уравнение Пуассона:

$$\nabla^2\varphi=\Delta.$$

Для его решения мы должны задать граничные условия для $\varphi$. Определим теперь скорость $\vec{u}_\omega$, такую что:

$$\nabla\times\vec{u}_\omega=\vec{\omega}, \qquad \nabla\cdot\vec{u}_\omega=0. \tag{5}$$

Естественно представить здесь

$$\vec{u}_\omega=\nabla\times\vec{B}_\omega,$$

где $\vec{B}_\omega$ – векторный потенциал. Если положить $\nabla\cdot\vec{B}_\omega=0$, то уравнение для векторного потенциала будет иметь вид:

$$\nabla^2\vec{B}_\omega=-\vec{\omega}. \tag{6}$$

Для его решения также требуются соответствующие краевые условия.

Таким образом, если положить

$$\vec{v}=\vec{u}-\vec{u}_g-\vec{u}_\omega,$$

то вектор $\vec{v}$ должен одновременно быть и соленоидальным, и безвихревым:

$$\nabla\cdot\vec{v}=0, \qquad \nabla\times\vec{v}=0.$$

При соответствующих нулевых граничных условиях этот вектор тождественно обращается в нулевой вектор. Следовательно, при этих условиях

$$\vec{u} = \vec{u}_g + \vec{u}_\omega.$$

## Задачи

**1.** Получить выражение для углового момента сферического элемента жидкости однородной плотности относительно его центра, находящегося в точке $\vec{x}$.

### *Решение*

Запишем искомый момент в виде:

$$M_i = \int \epsilon_{ijk} r_j \left( u_k + r_l \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) \rho \, dv(\vec{r}).$$

Мы считаем, что в малой области интегрирования $u_k$ и $\dfrac{\partial u_k}{\partial x_l}$ есть константа. Следовательно,

$$u_k \int \epsilon_{ijk} r_j \rho \, dv(r) = 0$$

в силу антисимметричности $r_j$ и

$$M_i = \int \epsilon_{ijk} r_j r_l \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \rho \, dv(r) = \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \int r_j r_j \, \rho \, dv(r) =$$

$$\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} I \cdot \delta_{jl} = \frac{1}{2} \omega_i I,$$

где $I$ есть момент инерции сферического элемента относительно произвольных осей. Выражение для $\vec{M}$ точно совпадает с угловым моментом сферического твердого тела, вращающегося с угловой скоростью $\dfrac{\vec{\omega}}{2}$. Но этот вывод не годится для жидкого элемента произвольной формы из-за зависимости от $\delta u^{(s)}$.

**2.** Пусть твердое тело вращается с угловой скоростью $\vec{\Omega}$. Чему равен вихрь скорости частиц твердого тела?

## *Решение*

Скорость точки на расстоянии $\vec{r}$ от начала координат есть $\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$. Компоненты скорости $\vec{v}$ есть $\{\Omega_2 x_3 - \Omega_3 x_2,\ \Omega_3 x_1 - \Omega_1 x_3,\ \Omega_1 x_2 - \Omega_2 x_1\}$, где $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ – компоненты $\vec{\Omega}$, а так как $\vec{\omega} = \mathrm{rot}\,\vec{v}$, то $\vec{\omega} = 2\vec{\Omega}$.

**3.** Пусть дано двумерное векторное поле $\vec{u}$ с компонентами $(u, v)$ в единичном квадрате и пусть $\mathrm{div}\vec{u} = -\sin 2\pi x \sin 2\pi y$ внутри квадрата и 0 на границе, $\mathrm{rot}\vec{u} = \sin 2\pi x \sin 2\pi y$ внутри квадрата и 0 на границе. Определить $u$ и $v$, если потенциал скорости $\varphi$ и $z$-компонента векторного потенциала $B_\omega$ обращается в 0 на границе области.

## Глава 5.

# Динамика баротропной жидкости

В этой лекции мы рассмотрим классические теоремы, которые доказываются для идеальной баротропной жидкости. Под баротропной жидкостью понимается жидкость, в которой уравнение состояния имеет вид:

$$p = p(\rho) \qquad \rho = \rho(p), \quad \frac{\partial p}{\partial \rho} \neq 0.$$

Рассмотрим уравнения движения идеальной баротропной жидкости в поле потенциальных сил:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla\Phi. \tag{1}$$

Эту систему можно преобразовать в форму Громеки-Лэмба:

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \operatorname{rot}\vec{u}\times\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla E + \nabla\Phi, \tag{2}$$

где $E = (\vec{u}\cdot\vec{u})/2$.

Так как мы исследуем баротропную жидкость, то $1/\rho\,\nabla p = \nabla P$, где  определяется из соотношений:

$$\frac{\partial P}{\partial p} = \frac{1}{\rho(p)}, \qquad P = \int\frac{dp}{\rho(p)}.$$

Таким образом, уравнение (2) может быть переписано в следующем виде:

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \operatorname{rot}\vec{u}\times\vec{u} = -\nabla(P + E - \Phi). \tag{3}$$

Отметим, что если жидкость несжимаема и однородна, то $P = p/\rho_0$, $\rho_0 =$const.

Рассмотрим поле стационарных движений – $\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0$. Спроектируем уравнение (3) на линии тока – линии, касательные к которым совпадают с направлением скорости. Получим:

$$\nabla_l (P + E - \Phi) = 0, \tag{4}$$

или $E + P - \Phi = \mathrm{const}_l$ вдоль линий тока. Это утверждение представляет хорошо известную теорему Бернулли.

Аналогичный результат получится, если мы спроектируем уравнение (3) на вихревые линии – линии, касательные к которым совпадают с направлением вектора вихря скорости, или винтовые линии $\mathrm{rot}\vec{u} = -\lambda \vec{u}$. Если течение безвихревое, т.е. если $\mathrm{rot}\vec{u} = 0$, то $E + P - \Phi = \mathrm{const}$ везде в жидкости (константа будет одна и та же для всей жидкости).

Для баротропной жидкости можно сформулировать еще несколько замечательных теорем.

Подействуем на (3) оператором ротора. Так как $\mathrm{rot}\vec{u} = \vec{\omega}$, то будем иметь:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{\omega} \times \vec{u}) = 0. \tag{5}$$

В силу соотношения

$$\nabla \times (\vec{\omega} \times \vec{u}) = (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{u}$$

получим:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{u},$$

или

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = +(\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{u}. \tag{6}$$

Из (6) следует, что если жидкость двумерна (например, нет зависимости от координаты $z$), то из трех компонент вектора ненулевой будет только вертикальная компонента

$\omega = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}$, член $(\vec{\omega}\cdot\nabla)\vec{u}$ обращается в 0, и, следовательно, уравнение (6) сведется к скалярному уравнению:

$$\frac{d\omega}{dt} = 0, \tag{7}$$

которое означает сохранение завихренности в частице жидкости.

Рассмотрим циркуляцию вокруг замкнутого контура, образованного частицами баротропной жидкости (рассматривается материальный контур – контур, образованный одними и теми же частицами)

$$C = \oint \vec{u}\cdot d\vec{l},$$

здесь $d\vec{l} = |dl|\cdot\vec{s}$, где $|dl|$ – бесконечномалый элемент контура, а $\vec{s}$ – единичный вектор, совпадающий с касательной к контуру в точке, определяющей $|dl|$.

Вычислим скорость изменения этой циркуляции

$$\frac{dC}{dt} = \frac{d}{dt}\oint \vec{u}\cdot d\vec{l} = \oint \frac{d\vec{u}}{dt}\cdot d\vec{l} + \oint \vec{u}\cdot\frac{d}{dt}(d\vec{l}).$$

Так как

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\nabla(E + P - \Phi),$$

то первый интеграл в правой части обращается в нуль. Справедливо соотношение (задача 1):

$$\frac{d}{dt}\,d\vec{l} = (d\vec{l}\cdot\nabla)\vec{u}.$$

Следовательно,

$$\oint \vec{u}\cdot\frac{d}{dt}\,d\vec{l} = \oint \vec{u}\cdot(d\vec{l}\cdot\nabla)\vec{u} = \oint d\vec{l}\cdot\nabla E = 0.$$

Таким образом, циркуляция вдоль замкнутого материального контура, образованного баротропной жидкостью, сохраняется. Поскольку по теореме Стокса

$$\oint \vec{u}\cdot d\vec{l} = \iint \vec{\omega}\cdot\vec{n}\cdot ds,$$

то отсюда следует, что и поток вихря через поверхность, натянутую на материальный контур, будет также сохраняться во времени (при условии, что область односвязна – нет "выколотых"точек. Это условие справедливости теоремы Стокса). Отсюда также следует еще одно важное утверждение для баротропной жидкости:
*если вихрь в материальном объеме равен нулю в какой-то момент времени, то он будет равен нулю всегда.*
Это утверждение легко доказывается от противного. Мы выделяем в объеме замкнутый материальный контур, и, следовательно, поток вихря через поверхность, на него натянутую, равен нулю. В силу сохранения циркуляции этот поток будет равен нулю всегда. Стягивая контур в точку, получим искомое утверждение.

## Задачи

**1.** Доказать, что справедливо соотношение

$$\frac{d}{dt}\,d\vec{l} = (d\vec{l}\cdot\nabla)\vec{u},$$

где $d\vec{l}$ – элемент материального контура.

*Решение*

Выберем для простоты малый элемент контура $\delta x$, параллельный оси x. Изменения $\delta x$ есть

$$\frac{d}{dt}\delta x = \delta u = \frac{\delta u}{\delta x}\cdot\delta x = \frac{\partial u}{\partial x}\delta x + 0(\delta x^2).$$

Устремляя $\delta x$ к нулю, получим:

$$\frac{d}{dt}\,dx = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot dx.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\,d\vec{l} = (d\vec{l}\cdot\nabla)\vec{u}.$$

**2.** Доказать, что баротропные винтовые движения могут быть только стационарными.

*Решение*

Пусть $\mathrm{rot}\vec{u} = \vec{\omega}$.

Винтовые движения определяются соотношением:

$$\mathrm{rot}\,\vec{u} = \lambda\vec{u}.$$

Для баротропных движений справедливо уравнение:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = (\vec{\omega}\cdot\nabla)\vec{u}.$$

Подставляя сюда соотношение для винтовых движений, получим

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}.$$

Поскольку

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u},$$

то

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = 0.$$

**3.** При установившемся истечении газа из тонкой конической трубки траектории частиц представляют собой прямые, сходящиеся к вершине конуса. Предполагая, что движение совершается изотермически, найти соотношение между скоростями $V$ и $v$ в сечениях AB и ab, площади которых есть $S$ и $s$ (рис. 3).

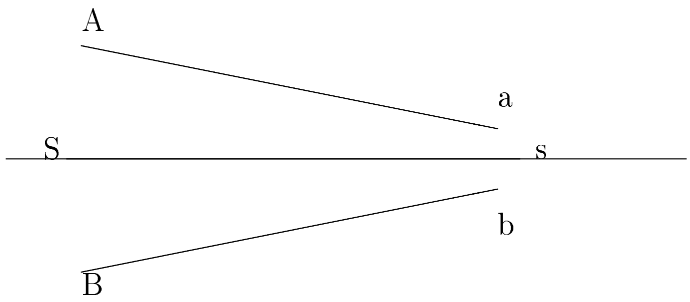


Рис. 3

## *Решение*

Так как течение изотермическое, то уравнение состояния будет $p = k\rho$, где $k = RT$ =const. Из уравнения Бернулли имеем:

$$\frac{1}{2}v^2 + \int \frac{dp}{\rho} = C_l.$$

Применяя это уравнение к сечениям AB и ab (считая, что сечения достаточно малы, так что скорость на сечении постоянна), получим:

$$\frac{1}{2}V^2 + k \ln P = \frac{1}{2}v^2 + k \ln p.$$

Из уравнения неразрывности имеем:

$$VSP = vsp.$$

Отсюда

$$\frac{P}{p} = \frac{vs}{VS}.$$

С использованием этого соотношения уравнение Бернулли преобразуется к виду:

$$k \ln \frac{vs}{VS} = \frac{v^2 - V^2}{2},$$

или

$$\frac{v}{V} = \frac{S}{s}\, e^{(v^2 - V^2)/2k}.$$

## Глава 6.

# Теория безвихревой (потенциальной) баротропной жидкости

Рассмотрим систему уравнений баротропной жидкости в поле потенциальных сил в форме Громеки-Лэмба:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{u} = -\nabla(E + P - \Phi). \tag{1}$$

Назовем потенциальными течениями течения, у которых

$$\vec{\omega} \equiv \operatorname{rot} \vec{u} = 0. \tag{2}$$

Условие (2) тождественно удовлетворяется, если вектор $\vec{u}$ есть градиент некоторой функции $\varphi$, которая называется потенциалом скорости:

$$\vec{u} = \nabla \varphi.$$

В этом случае уравнение (1) примет вид:

$$\nabla \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + E + P - \Phi \right) = 0. \tag{3}$$

Из (3) следует, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + E + P - \Phi = C(t). \tag{4}$$

Мы можем переопределить потенциал скорости, добавив к нему интеграл от $C(t)$. Это возможно, т.к. сам потенциал скорости определен с точностью до произвольной функции времени. Пусть

$$\varphi_1 = \varphi + \int C(t)\,dt.$$

Тогда имеет место равенство:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + E + P - \Phi = 0. \tag{5}$$

Если жидкость несжимаема, т.е. $\mathrm{div}\vec{u} = 0$, то, применяя оператор дивергенции к выражению для скорости $\vec{u}$, получим:

$$\mathrm{div}\,\vec{u} = \mathrm{div}\,\nabla\varphi_1 = \Delta\varphi_1 = 0. \tag{6}$$

Следовательно, потенциал скорости должен удовлетворять уравнению Лапласа. Зная $\varphi_1$, из уравнения (5) можно найти давление (для этого, конечно, нужно задать краевые условия для $\varphi_1$).

Отметим, что потенциальные течения не могут иметь замкнутых линий тока, на которые могут быть натянуты односвязные жидкие поверхности. Справедливость этого утверждения следует из теоремы Стокса:

$$\oint \vec{u}\cdot d\vec{l} = \iint\limits_s \vec{\omega}\cdot\vec{n}\,ds.$$

Линии тока в потенциальной жидкости могут начинаться или кончаться только на границах. Отметим также, что поскольку для несжимаемой жидкости потенциал $\varphi$ удовлетворяет уравнению Лапласа, он не может иметь экстремумов внутри области (свойства гармонических функций).

Рассмотрим теперь двумерную несжимаемую потенциальную баротропную жидкость. Из уравнения неразрывности, которое для двумерной несжимаемой жидкости в декартовых координатах имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

следует, что $d\psi = v{\cdot}dx - u{\cdot}dy$ есть полный дифференциал. Полагая $v = \dfrac{\partial\psi}{\partial x}$ и $u = -\dfrac{\partial\psi}{\partial y}$, мы автоматически удовлетворяем уравнению неразрывности. Функция $\psi$ называется функцией тока. Ее смысл заключается в том, что она постоянна вдоль линий тока. Действительно, если $\psi =$const, то $d\psi = 0$, и мы имеем уравнение для линии тока в случае двумерной жидкости:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}.$$

Соединим две точки $A$ и $B$ поля течения некоторой кривой и вычислим поток жидкости через эту кривую:

$$\int_A^B (\vec{u}\cdot\vec{n})\, dl = Q.$$

Простые вычисления показывают (см. задачу 1), что этот поток равен $\psi_B - \psi_A$ и, следовательно, не зависит от вида кривой.

Итак, для двумерных потенциальных потоков несжимаемой жидкости мы имеем уравнения для определения потенциала и функции тока:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\varphi = 0, \\ \Delta\psi = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Второе уравнение в (7) эквивалентно определению вихря через функцию тока для двумерной жидкости $\omega = \Delta\psi$. Поскольку

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

то функции $\varphi$ и $\psi$ удовлетворяют хорошо известным в теории функций комплексного переменного соотношениям Коши-Римана.

Если $u(z) = \varphi + i\psi$, $z = x + iy$, то условие дифференцируемости $u$ по $z$ есть:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Таким образом, для потенциального течения двумерной несжимаемой жидкости можно ввести комплексный потенциал

$$u(z) = \varphi + i\psi, \tag{8}$$

реальная часть которого представляет потенциал скорости, а мнимая часть – функцию тока. Другими словами, каждой аналитической функции комплексного переменного мы можем поставить в соответствие некоторое течение двумерной несжимаемой потенциальной жидкости, и наоборот. Возможность введения такого потенциала дает мощное средство для решения целого класса практических задач обтекания тел потенциальной несжимаемой жидкостью. Идея этого метода заключается в следующем.

Пусть нам нужно решить задачу нахождения поля скорости в какой-то области. Если мы подберем конформное отображение, которое преобразует данную область в какую-то другую, в которой течение построить нетрудно, то, отображая полученное решение обратно, мы получим решение исходной задачи. Соотношение (8) позволяет ввести так называемое сопряженное течение $\tilde{u} = -iu = \psi - i\varphi$, у которого потенциалом будет функция тока исходного течения, и наоборот. Нетрудно видеть, что изолинии потенциала и функции тока образуют семейства взаимно локально ортогональных линий:

$$(\nabla\varphi \cdot \nabla\psi) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = (-uv + vu) = 0.$$

## Задачи

**1.** Показать, что для двумерной несжимаемой жидкости поток жидкости через произвольную кривую, соединяющую две точки $A$ и $B$, равен разности функции тока, вычисленной в этих точках.

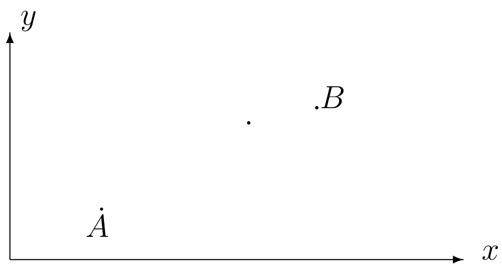


Рис. 4

## *Решение*

$$Q = \int\limits_A^B \vec{u} \cdot \vec{n}\, dl$$

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = u_x \cos\widehat{nx} + u_y \cos\widehat{ny}$$

$$dl \cos\widehat{nx} = dy; \qquad dl \cos\widehat{ny} = -dx.$$

$$Q = \int\limits_A^B \frac{\partial\psi}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial\psi}{\partial x} \cdot dx = \int\limits_A^B d\psi = \psi(B) - \psi(A).$$

**2.** Решить задачу о стационарном обтекании кругового цилиндра потенциальной жидкостью. (Считать, что цилиндр имеет бесконечную протяженность вдоль оси $z$, так что задачу можно считать двумерной).

## *Решение*

Пусть на плоскости $(x, y)$ задана окружность радиуса $R$. Будем искать решение уравнения Лапласа $\Delta\varphi = 0$ при следующих граничных условиях:

$\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r=R} = 0$ (условие непротекания).

$\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{r\to\infty} = -V_0, \ \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{r\to\infty} = 0.$

Пусть $z = x + iy = re^{i\Theta}$. Отобразим область вне круга $|z| > R$ на плоскость $\zeta$ с разрезом от -1 до +1. Это есть преобразование Жуковского:

$$\zeta = \xi + i\eta = \left(z/R + R/z\right)/2.$$

При этом $z = Re^{i\Theta}$ отображается на отрезок [-1,1], проходимый дважды.

Итак,

$$\Phi(\zeta) = \Phi\left[\left(z/R + R/z\right)/2\right] = \varphi_1(\xi, \eta) + i\psi_1(\xi, \eta).$$

Так как конформное преобразование сохраняет углы, то $\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r=R} = 0$ переходит в $\left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\eta}\right)_{\eta=0} = 0.$

При $r \to \infty$

$$\zeta = \xi + i\eta \to \frac{1}{2}\cdot\frac{z}{R} = \frac{x}{2R} + i\,\frac{y}{2R}$$

и

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{r\to\infty} = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi}\right)_{\kappa\to\infty}\cdot\frac{1}{2R} = -V_0,$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{r\to\infty} = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta}\right)_{\kappa\to\infty}\cdot\frac{1}{2R} = 0,$$

$$\kappa = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

Отсюда получаем условия на бесконечность:

$$\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi}\right|_{\kappa\to\infty} = -2RV_0, \qquad \left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta}\right|_{\kappa\to\infty} = 0.$$

Таким образом, мы получили задачу обтекания бесконечно узкой полосы со скоростью – $2RV_0$. Комплексный потенциал при этом равен:

$$\Phi(\zeta) = -2RV_0\zeta.$$

Вернемся обратно в плоскость $z$:

$$F(z) = -2RV_0\,\zeta(z) = -RV_0\left(\frac{z}{R}+\frac{R}{z}\right) = -V_0\left[re^{i\Theta}+\frac{R^2}{r}\,e^{-i\Theta}\right].$$

Потенциал

$$\varphi = \operatorname{Re}F(z) = -V_0\left[r+\frac{R^2}{r}\right]\cos\Theta.$$

Следовательно,

$$V_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = -V_0\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\cos\Theta,$$

$$V_\Theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\Theta} = V_0\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)\sin\Theta.$$

На поверхности цилиндра имеем

$$V_r = 0, \qquad V_\Theta = 2V_0\sin\Theta.$$

Давление в любой точке можно найти, используя уравнение Бернулли:

$$p_0+\rho\,\frac{V_0^2}{2} = p+\rho\,\frac{V^2}{2}.$$

Распределение давления на поверхности цилиндра есть

$$p = p_0+\rho\,\frac{V_0^2-V^2}{2} = p_0+\rho V_0^2\,\frac{1-4\sin^2\Theta}{2}.$$

Давление в лобовой точке $\Theta=0$ равно $p_0+1/2\,\rho V_0^2$ и, следовательно, превышает давление на бесконечности. Точно такое же давление в симметричной точке за цилиндром, т.е. сила лобового сопротивления цилиндра потоку равна 0.

**3.** Построить течение двумерной потенциальной жидкости, соответствующее комплексным потенциалам $F(z)=az$, где $a$ – вещественная постоянная, $F(z)=m\ln z$, $z\neq 0$, $m$ – положительное число.

*Решение*

$$F(z) = az:$$

$$\varphi + i\psi = ax + iay.$$

Отсюда:

$$\varphi = ax, \qquad \psi = ay.$$

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = a, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad .$$

Сопряженное течение:

$$F(z) = -iaz = ay - iax.$$

$$\varphi = ay, \qquad \psi = -ax.$$

$$u = 0, \qquad v = a.$$

Пусть $F(z) = m \ln z$, $z \neq 0$, $m > 0$. Введем цилиндрические координаты:

$$x = r\cos\Theta, \qquad y = r\sin\Theta, \qquad z = x + iy = re^{i\Theta}.$$

$$F(z) = m(\ln r + i\Theta);$$

Следовательно,

$$\varphi = m\ln r, \qquad \psi = m\Theta.$$

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{m}{r} \quad u_\Theta = 0.$$

Поток жидкости через круг радиуса $r$

$$Q = \int \frac{m}{r}\, r\, d\Theta = 2\pi m = \mathrm{const}(r)$$

– это есть мощность источника.
Сопряженное течение:

$$F(z) = -im\ln z = m(\Theta - i\ln r);$$

$$\varphi = m\Theta, \quad \psi = -m \ln r.$$

$$V_r = 0, \qquad V_\Theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} = \frac{m}{r}.$$

Это вихревой источник с циркуляцией

$$L = V_\Theta \cdot 2\pi r = 2\pi m.$$

(Это не противоречит теореме Томпсона, т.к. $r = 0$ – особая точка, и область неодносвязна.)

**4.** Решить задачу о течении потенциальной жидкости внутри клиновидной области.

## *Решение*

Пусть $F(z) = V_0 z$. Возьмем преобразование $z = R(\xi/R)^\alpha$, $\alpha > 0$, $R > 0$. Это преобразование преобразует верхнюю полуплоскость в клиновидную область. Имеем:

$$\Phi(\xi) = V_0 R(\xi/R)^\alpha;$$

Пусть $\xi = re^{i\Theta}$. Тогда

$$\Phi(\xi) = V_0 R(r/R)^\alpha e^{i\alpha\Theta} = V_0 R(r/R)^\alpha(\cos\alpha\Theta + i\sin\alpha\Theta).$$

Отсюда:

$$\varphi = V_0 R(r/R)^\alpha \cos\alpha\Theta, \quad \psi = V_0 R(r/R)^\alpha \sin\alpha\Theta.$$

Следовательно,

$$V_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = V_0 \alpha (r/R)^{\alpha-1}\cos\alpha\Theta,$$

$$V_\Theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} = -V_0\alpha(r/R)^\alpha \sin\alpha\Theta.$$

Нетрудно видеть, что $V_\Theta$ обращается в 0 на лучах $\Theta = 0$ и $\Theta = \pi/\alpha$. (Здесь можно поставить условие непротекания.) Если $\alpha > 1$, то при $r \to 0$ $V_r, V_\Theta \to 0$.

**5.** Пусть жидкость вращается вокруг вертикальной оси так, что частота вращения цилиндрического слоя радиуса $r$ равна $\Omega(r)$. При какой зависимости $\Omega(r)$ течение будет потенциальным?

## *Решение*

Скорость вращения есть:

$$\vec{v} = \{u, v\} = \vec{\Omega} \times \vec{r} = \{-\Omega y, \Omega x\},$$

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \Omega + x \cdot \Omega'_r \cdot \frac{x}{r} + \Omega + y \cdot \Omega'_r \cdot \frac{y}{r} = 2\Omega + r\Omega'_r.$$

При потенциальном течении $\omega = 0$, следовательно,

$$\Omega'_r = -\frac{2\Omega}{r}; \qquad \Omega(r) = \Omega_0 \frac{a^2}{r^2}.$$

# Глава 7.

# Динамика двумерной несжимаемой идеальной жидкости

Мы посвящаем этой частной проблеме отдельную лекцию, поскольку эта задача очень важна для понимания крупномасштабной динамики атмосферы и океана, которая является квазидвумерной.

Уравнения двумерной несжимаемой баротропной жидкости имеют вид:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\nabla P, \qquad \mathrm{div}\vec{u} = 0, \qquad \vec{u} = (u, v). \tag{1}$$

Ранее нами было показано, что в случае двумерной жидкости мы имеем закон сохранения вихря в частице

$$\frac{d\omega}{dt} = 0, \qquad \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Отметим, что поскольку $\omega$ является в данном случае лагранжевым инвариантом, то в частице сохраняется и любая гладкая функция от $\omega$. Пусть $\psi$ – функция тока, так что

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \omega = \Delta\psi.$$

Уравнение для вихря можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + J(\psi, \Delta\psi) = 0, \tag{2}$$

где $J$ – двумерный якобиан:

$$J(\varphi, \eta) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

Рассмотрим задачу (2) в прямоугольнике с периодическими краевыми условиями по обеим переменным.

Пусть

$$\bar{A} = \iint\limits_D A\,dD,$$

где $D$ – область определения решения задачи (2). В рамках нашей постановки справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &\overline{J(\psi, \Delta\psi)} = 0, \\ &\overline{J(\psi, \Delta\psi) \cdot F(\psi)} = 0, \\ &\overline{J(\psi, \Delta\psi) \cdot F(\Delta\psi)} = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

где $F$ – достаточно гладкая функция своего аргумента (см. задачу 1). Из первого соотношения (3) следует закон сохранения вихря. Если мы положим $F(\psi) \equiv \psi$, то получим закон сохранения кинетической энергии. Если мы положим $F(\psi) \equiv \equiv \Delta\psi$, то получим очень важный закон сохранения интеграла от квадрата вихря – энстрофии. Сейчас мы покажем, почему существование этого инварианта очень важно для динамики двумерной жидкости. Пусть кинетическая энергия системы есть

$$\bar{E} = -\iint \psi \cdot \Delta\psi\,dD \equiv -(\psi, \Delta\psi).$$

(Мы опускаем множитель 1/2 для сокращения записи).

Пусть $\bar{\Omega} = \overline{\omega^2}$ – энстрофия системы. Мы знаем, что $\bar{\Omega}$ и $\bar{E}$ есть инварианты системы. Следовательно, инвариантом системы будет также величина

$$\overline{K^2} \equiv \frac{\bar{\Omega}}{\bar{E}}.$$

Назовем ее средним квадратом волнового числа, смысл которого будет пояснен ниже.

Рассмотрим в прямоугольнике с условиями периодичности всех искомых функций в качестве краевых условий спектральную задачу:

$$\Delta\varphi_{n,m} = \lambda_{n,m}\varphi_{n,m}. \tag{4}$$

Пусть размеры прямоугольника будут $2\pi$ по обоим направлениям, т.е.

$$D = [2\pi \times 2\pi].$$

Нетрудно убедиться, что собственные функции задачи (4) будут иметь вид

$$\sin nx \sin my, \quad \cos nx \cos my, \quad \sin nx \cos my, \quad \cos nx \sin my,$$

а собственные числа – $\lambda_{n,m} = -(n^2 + m^2)$.

Будем искать решение задачи (1) в виде ряда по собственным функциям задачи (4) и ортогональным константе, поскольку функция тока определена с точностью до константы:

$$\psi = \sum \alpha_{n,m}\varphi_{n,m}.$$

Для сокращения записи введем некоторый обобщенный индекс $l = \{n, m\}$, так что

$$\psi = \sum_l \alpha_l\varphi_l.$$

Тогда

$$\bar{E} = -(\psi, \Delta\psi) = \sum |\lambda_l| \cdot \alpha_l^2$$

в силу ортогональности собственных функций, и

$$\bar{\Omega} = (\Delta\psi, \Delta\psi) = \sum \lambda_l^2\alpha_l^2.$$

Введем обозначение $|\lambda_l| \cdot \alpha_l^2 = E_l$. В рамках этих обозначений выражение для $\overline{K^2}$ примет вид:

$$\overline{K^2} = \frac{\sum |\lambda_l| \cdot E_l}{\sum E_l}. \tag{5}$$

$E_l$ можно трактовать как энергию, приходящуюся на одномерное подпространство, связанное с собственной функцией $\varphi_l$. Мы можем также отметить, что пространственный масштаб, определенный соотношением

$$L_{m,n} = \frac{2\pi}{\sqrt{m^2 + n^2}},$$

стремится к нулю при $m, n \to \infty$. Далее, если ряды в (5) сходятся, то $E_l \to 0$ при $l \to \infty$, т.к. $|\lambda_l| \to \infty$ при $l \to \infty$. Поскольку $\lambda_l$ можно трактовать как квадрат волнового числа, соответствующего длине волны с индексом $l$, то $\overline{K^2}$ можно трактовать как средний квадрат волнового числа, взвешенного по энергии. Так как $\overline{K^2}$ есть инвариант системы, то из его сохранения следуют замечательные выводы о возможных переходах энергии из одних масштабов в другие.

Пусть распределение энергии в какой-то момент времени по волновым числам имеет вид, представленный на рис. 5.

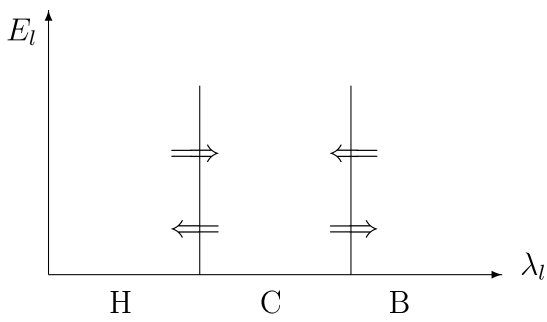


Рис. 5

Разделим условно интервал всех волновых чисел на три диапазона: – низкие волновые числа – (н), средние – (с) и высокие – (в), как это показано на рис. Из закона сохранения среднего квадрата волнового числа очевидно следует, что энергия одновременно может идти только либо из среднего масштаба в высокий и низкий, либо из высокого и низкого в средний, т.е. в двумерной жидкости осуществляется поток энергии не только от больших масштабов к маленьким (большие вихри разрушаются, образуя малые вихри), но и поток энергии от малых масштабов к большим (малые вихри, сливаясь, образуют большие). В реальности в присутствии малой диссипации на мелких масштабах этот процесс усложняется. Это связано с тем, что мы должны указать масштаб, на котором идет подкачка энергии, и масштаб, на котором идет ее диссипация. Промежуточные масштабы определяют в этом случае каскады энстрофии и энергии по спектру, если эти масштабы разделены.

## Задачи

**1.** Показать, что в прямоугольной области $[0,1] \times [0,1]$ выполняется соотношение

$$\int_0^1\int_0^1 J(\psi,\eta)F(\psi)\,dxdy = 0,$$

где $J(\psi,\eta)$ – двумерный якобиан

$$J(\psi,\eta) = \frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x},$$

$\psi$, $\eta$ – двоякопериодические достаточно гладкие функции, а $F$ – также достаточно гладкая функция своего аргумента.

### *Решение*

$$J(\psi,\eta)F(\psi) = F(\psi)\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y} - F(\psi)\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial\varphi(\psi)}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\varphi(\psi)}{\partial y}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x},$$

где $\varphi(\psi) = \int F(\psi)\,d\psi$. Далее, имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\eta\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\eta\frac{\partial\varphi}{\partial y};$$

Поскольку $\dfrac{\partial}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$, то

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1\left(\frac{\partial}{\partial y}\eta\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\eta\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dxdy=0$$

в силу условий периодичности.

**2.** Решить проблему на собственные значения:

$$\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial x^2}=-\lambda_n\varphi_n,\quad x=[0,1],\quad \varphi_n(0)=\varphi_n(1)=0.$$

*Решение*

Будем искать решение в виде

$$\varphi_n=e^{inx}.$$

Подставляя это решение в уравнение, получим

$$-n^2=-\lambda_n,\qquad \lambda_n=\pm n.$$

Общее решение будет иметь вид:

$$\varphi_n=Ae^{i\sqrt{\lambda_n x}}+Be^{-i\sqrt{\lambda_n x}}.$$

Удовлетворяя краевым условиям, получим:

$$A+B=0,\qquad A=-B,$$

$$0=A(e^{i\sqrt{\lambda}}-e^{-i\sqrt{\lambda}}),$$

отсюда

$$\sin\sqrt{\lambda_n}=0;\quad \sqrt{\lambda_n}=n\pi;\quad \lambda_n=n^2\pi^2.$$

Следовательно,

$$\lambda_n=n^2\pi^2,$$

$$\varphi_n=A\cdot\sin\pi nx.$$

**3.** Выписать три формы двумерного якобиана.

$$J(\psi, \eta) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

– это известная форма.
Если $\psi, \eta$ – достаточно гладкие функции, такие, что

$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\, \psi = \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\, \psi, \qquad \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\, \eta = \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\, \eta,$$

то нетрудно убедиться, что

$$J(\psi, \eta) = \frac{\partial}{\partial x}\, \psi\, \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\, \psi\, \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

$$J(\psi, \eta) = \frac{\partial}{\partial y}\, \eta\, \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\, \eta\, \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

# Глава 8.

# Теория устойчивости течений двумерной баротропной несжимаемой жидкости

Прежде чем перейти к изучению проблемы устойчивости стационарных и нестационарных баротропных потоков, мы приведем необходимые определения и теоремы, касающиеся устойчивости по Ляпунову решений дифференциальных уравнений. Отметим, что в данном случае мы имеем дело с уравнениями с частными производными, решения которых принадлежат в общем случае бесконечномерным функциональным пространствам. Исследование устойчивости решений уравнений в бесконечномерных пространствах обладает по сравнению с конечномерным случаем рядом особенностей, связанных, главным образом, с неэквивалентностью норм в бесконечномерных пространствах и с существованием и единственностью решения на бесконечных интервалах времени.

Пусть исходная начально-краевая задача порождает задачу Коши в некотором банаховом пространстве $B$:

$$\frac{du}{dt} = L(u), \qquad u(0) = u_0, \qquad u \in B. \tag{1}$$

Мы будем считать, что решение $u$ существует и единственно при $t > 0$.

*Определение* 1

Решение $u(t)$ задачи (1) называется устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что всякое решение задачи (1), удовлетворяющее при $t = 0$ условию $\tilde{u}(0) = \tilde{u}_0$ такому, что $\|\tilde{u}(0) - u(0)\|_B < \delta$, определено при всех $t > 0$ и

$$\|\tilde{u}(t) - u(t)\|_B < \varepsilon \qquad t > 0.$$

*Определение* 2

Решение $u(t)$ называется асимптотически устойчивым по Ляпунову, если:
а) оно устойчиво,
в) существует $\Delta$ – окрестность $u_0$ такая, что если $\|u_0 - \tilde{u}_0\|_B < \Delta$, то $\|u(t) - \tilde{u}(t)\|_B \to 0$ при $t \to \infty$.
Если $\Delta$ – все пространство, то решение называется глобально асимптотически устойчивым, в противном случае – локально асимптотически устойчивым.

*Определение* 3

Решение $u(t)$ называется неустойчивым по Ляпунову, если для некоторого $\varepsilon > 0$ и любого $\delta > 0$ найдутся $\tilde{u}(t)$ и $t = t*$ такие, что $\|u_0 - \tilde{u}_0\|_B < \delta$, но $\|\tilde{u}(t*) - u(t*)\|_B > \varepsilon$.

Нетрудно видеть, что исследование устойчивости любого решения можно свести к исследованию устойчивости нулевого решения. Достаточно перейти к задаче

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = L(u + u') - L(u), \qquad u'_0 = 0.$$

Как известно, А.М. Ляпунов предложил два метода исследования устойчивости решений систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Первый метод основан на изучении спектра линеаризованного оператора задачи (1) и наиболее часто используется физиками при исследовании устойчивости решений уравнений с частными производными. Мы в данном курсе будем в основном использовать первый метод Ляпунова, однако для полноты картины приведем несколько теорем, в которых второй метод Ляпунова сформулирован для задач, рассматриваемых в бесконечномерных пространствах.

В дальнейшем все теоремы будут сформулированы (если нет специальных оговорок) относительно нулевого решения.

Под функцией Ляпунова будем понимать вещественнозначную непрерывную функцию $V(u)$, определенную в некоторой окрестности нуля пространства $B$, причем $V(0) = 0$. Свойства знакоопределенности и дифференцируемости этой функции будут оговариваться в условиях соответствующих теорем. Производную по $t$ от функции $V(u)$ на решении $u(t)$ будем вычислять по формуле:

$$\dot{V}(u) = \overline{\lim} \frac{V(u + hL(u)) - V(u)}{h}, \qquad h \to 0. \tag{2}$$

Т е о р е м а 1 (устойчивость).
*Пусть существует непрерывная в окрестности* $\|u\|_B < h$ *функция Ляпунова, такая что:*

1. $V(u) \geq \varphi(\|u\|_B)$,

*где* $\varphi(r)$ *– строго возрастающая положительная непрерывная функция,* $\varphi(r) > 0, \; r > 0, \; \varphi(0) = 0$.

2. $\dot{V}(u) \leq 0$.

*Тогда нулевое решение задачи* (1) *устойчиво по Ляпунову.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Обозначим через $\alpha = \varphi(\varepsilon)$. Так как $V(u)$ непрерывна, то пусть $V(u) < \alpha$, если $\|u\|_B < \delta$. Предположим, что в $t = t* \;\; u(t) = \varepsilon$. Тогда, полагая $\|u_0\|_B < \delta$, получим

$$\alpha > V(u_0) \geq V(u(t*)) = V(\varepsilon) \geq \varphi(\varepsilon) = \alpha$$

(в силу условий 2 и 1).

Мы получили противоречие, следовательно, $u(t) < \varepsilon$ всегда, если

$$\|u_0\|_B < \delta.$$

Т е о р е м а 2 (асимптотическая устойчивость).
*Пусть* $V(u)$ *такая, что:*

1. $V(u) \geq \varphi_1(\|u\|_B)$,
2. $\dot{V}(u) \leq -\varphi_2(\|u\|_B)$,

*где* $\varphi_i(r)$, $(r \geq 0)$ *– строго возрастающие положительные функции. Тогда решение* $u = 0$ *уравнения* (1) *асимптотически устойчиво.*

Т е о р е м а 3 (неустойчивость).
*Пусть*

1. $V(u) \geq \varphi_1(\|u\|_B)$,
2. $\dot{V}(u) \geq \varphi_2(\|u\|_B)$,

*где* $\varphi_i$ *– функции из предыдущей теоремы. Тогда решение* $u = 0$ *задачи* (1) *неустойчиво по Ляпунову.*

Перейдем теперь к первому методу Ляпунова (по линейному приближению). В конечномерном случае устойчивость по линейному приближению решается на основе теорем следующего типа.

Пусть в $R^N$ задана система уравнений:

$$\dot{x} = Ax + f(x), \qquad x(0) = x_0, \tag{3}$$

где $A$ – постоянная матрица, $f(0) = 0$.
Нулевое решение системы (3) асимптотически устойчиво, если

$$\operatorname{Re}\lambda(A) < 0 \qquad \|f(x)\|/\|x\| \to 0, \quad \|x\| \to 0$$

($\lambda(A)$ – собственные значения матрицы $A$). Нулевое решение системы (3) неустойчиво, если есть хотя бы одно собственное число

$$\lambda(A) \qquad \operatorname{Re}\lambda(A) > 0.$$

В случае наличия в спектре матрицы $A$ чисто мнимых собственных чисел вопрос об устойчивости в общем случае не может быть решен по линейному приближению (он может быть решен, если $f(x) \equiv 0$, – в этом случае задача сводится к определению полноты системы собственных векторов).

Мы не будем в данном курсе обсуждать теоремы об устойчивости и неустойчивости по линейному приближению систем уравнений с частными производными. Такие теоремы существуют для специального класса секториальных операторов (например, для двумерных уравнений Навье-Стокса). Однако отметим, что линейное приближение дает возможность установить достаточное условие неустойчивости или необходимое условие устойчивости. Поэтому изучение устойчивости баротропных двумерных потоков идеальной жидкости мы начнем с исследования линейных приближений.

## Задачи

**1.** Пусть дана система уравнений

$$\dot{x} = Ax,$$

где $A$ – постоянная матрица. Исследовать устойчивость нулевого решения данной задачи для следующего вида матриц:
а)

$$A \equiv - \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \mathbf{0} \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ \mathbf{0} & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

б)

$$A \equiv - \begin{pmatrix} 2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.3 & 4 & 0.4 \\ 0.1 & 0.1 & 5 \end{pmatrix}$$

в)

$$A \equiv - \begin{pmatrix} 2 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.1 & 4 \end{pmatrix}$$

г)

$$A \equiv \begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 \\ -5 & -2 & -6 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

д)

$$A \equiv \left( \begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{array} \right)^2 .$$

**2.** Исследовать устойчивость нулевого решения следующей задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u^3, \quad 0 \le x \le 1, \quad t \ge 0;$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0.$$

*Решение*

Определим функцию Ляпунова (в $L_2$) следующим образом:

$$V(u) = \int_0^1 u^2\, dx \equiv \|u\|^2_{L_2}.$$

Умножим уравнение на $u$ и проинтегрируем от 0 до 1. Получим:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial t} = \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot u - \int_0^1 u^4\, dx = -\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx - \int_0^1 u^4\, dx.$$

Из неравенства Пуанкаре-Стеклова-Фридрихса имеем:

$$\int_0^1 u^2\, dx \le \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx.$$

Следовательно,

$$-\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \le -\int_0^1 u^2\, dx$$

и

$$\frac{\partial V}{\partial t} < 2\int_0^1 u^2\, dx = 2\|u\|^2_{L_2}.$$

Решение асимптотически устойчиво.

# Глава 9.

## Устойчивость стационарных течений двумерной идельной несжимемой жидкости

Рассмотрим уравнения вихря для двумерной несжимаемой жидкости:
$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + J(\psi, \Delta\psi) = 0 \tag{1}$$
с краевыми условиями периодичности по переменной $x$ и условиями
$$v \equiv \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \qquad y = y_1, y_2$$
(для корректности постановки нам необходимо еще условие сохранения циркуляции вдоль границ).

Нетрудно видеть, что $\bar{\psi} = \bar{\psi}(y)$ есть решение задачи (1). Устойчивость именно таких решений мы будем исследовать в этой лекции.

Пусть $\psi = \bar{\psi} + \psi'$, $\Delta\psi \equiv q = \bar{q} + \xi'$, $\bar{q} = \Delta\bar{\psi}$, где $\psi', \xi'$ – малые возмущения. Линеаризуем уравнение (1) относительно $\bar{\psi}, \bar{q}$.

Получим
$$\frac{\partial \xi'}{\partial t} + J(\bar{\psi}, \xi') + J(\psi', \bar{q}) = 0. \tag{2}$$
Используя соотношения
$$\bar{u} = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y}, \quad v' = \frac{\partial \psi'}{\partial x},$$

можно написать:

$$\frac{\partial \xi'}{\partial t} + \bar{u}\,\frac{\partial \xi'}{\partial x} + v'\,\frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = 0,$$

$$\xi' \equiv \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} = \Delta \psi'. \tag{3}$$

Определим скалярное призведение следующим образом:

$$(\varphi, \eta) = \int\limits_L \int\limits_{y_1}^{y_2} dxdy,$$

где $L$ – период по $x$.
Умножим (3) скалярно на $v'$. Получим

$$-\iint v' \left( \frac{\partial \xi'}{\partial t} + \bar{u}\,\frac{\partial \xi'}{\partial x} \right) dxdy = \iint v'^2 \frac{\partial \bar{q}}{\partial y}\, dxdy. \tag{4}$$

Левую часть (4) можно переписать следующим образом:

$$-\iint v' \left( \frac{\partial \xi'}{\partial t} + u\,\frac{\partial \xi'}{\partial x} \right) dxdy = -\iint \left( \frac{\partial \xi' v'}{\partial t} + \bar{u}\,\frac{\partial \xi' v'}{\partial x} \right) dxdy +$$

$$+ \iint \xi' \left( \frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u}\,\frac{\partial v'}{\partial x} \right) dxdy.$$

Очевидно, что в силу условия периодичности по $x$

$$\iint \bar{u} \frac{\partial \xi' v'}{\partial x}\, dxdy = 0.$$

Покажем, что $\iint \xi v'\, dxdy = 0$. Действительно,

$$\iint \xi' v'\, dxdy = \iint \left( \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right) v'\, dxdy = \iint \frac{\partial v'^2/2}{\partial x}\, dxdy -$$

$$-\iint v' \frac{\partial u'}{\partial y} u\, dxdy = \iint \frac{\partial}{\partial y} u' v'\, dxdy + \iint u' \frac{\partial v'}{\partial y} u\, dxdy =$$

$$= -\iint u' \frac{\partial u'}{\partial x}\, dxdy = -\iint \frac{\partial u'^2/2}{\partial x}\, dxdy = 0$$

в силу условий периодичности по $x$ и условия $v' = 0$ при $y = y_1, y_2$, и условия несжимаемости $\dfrac{\partial u'}{\partial x} + \dfrac{\partial v'}{\partial y} = 0$.

Полагая

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u}\, \frac{\partial v'}{\partial x} \simeq a',$$

где $a'$ есть ускорение частицы с точностью до членов второго порядка малости, получим:

$$\iint \xi' a'\, dxdy = \iint v'^2 \frac{\partial \bar{q}}{\partial y}\, dxdy. \tag{5}$$

Пусть частица жидкости перемещается из точки $y_0$ в точку $y$, так что $y - y_0 = \Delta y$, $\Delta y$ – мало. Поскольку в точке $y_0$ завихренность частицы была $\bar{q}(y_0)$, а в точке $y : \bar{q}(y) + \xi'$ и завихренность частицы есть инвариант, то

$$\xi' + \bar{q}(y) = \bar{q}(y_0)$$

и, следовательно,

$$\xi' = -\frac{\partial \bar{q}}{\partial y}\, \Delta y = -\frac{\partial \bar{q}}{\partial y} \cdot v' \cdot \Delta t.$$

Подставляя это выражение для $\xi'$ в формулу (5), получим:

$$-\iint \frac{\partial \bar{q}}{\partial y}\, v' a' \Delta t\, dxdy = .\iint v'^2 \frac{\partial \bar{q}}{\partial y}\, dxdy. \tag{6}$$

Из (6) видно, что если $\partial \bar{q}/\partial y$ не меняет знака, то $v'$ и $a'$ имеют противоположные знаки и можно ожидать, что такое течение будет устойчивым. То, что $\partial \bar{q}/\partial y$ не меняет знака, означает, что $\partial \bar{q}(y)$ не имеет экстремумов внутри области, т.е. частицы не могут перемещаться из одной точки в другую без изменения $\bar{q}$. Сделаем еще одно замечание. Поскольку $\xi' = -\dfrac{\partial \bar{q}}{\partial y} v' \Delta t$, то $\xi' v' = -\dfrac{\partial \bar{q}}{\partial y} v'^2 \Delta t$, и, следовательно, локальный поток завихренности направлен всегда против градиента завихренности основного потока. Этот вывод об ограниченности бесконечномалых возмущений при $\dfrac{\partial \bar q}{\partial y}$ можно получить более простым способом. Выпишем снова уравнение для возмущения завихренности:

$$\frac{\partial \xi'}{\partial t} + \bar u \, \frac{\partial \xi'}{\partial x} + v' \, \frac{\partial \bar q}{\partial y} = 0.$$

Пусть $\dfrac{\partial \bar q}{\partial y} > 0$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \xi'}{\partial \bar q / \partial y} + \frac{\bar u}{\partial \bar q / \partial y} \frac{\partial \xi'}{\partial x} + v' = 0. \tag{7}$$

Умножим (7) скалярно на $\xi'$. Получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint \frac{\xi' 2}{\partial \bar q / \partial y} \, dxdy = 0,$$

поскольку $\iint v' \xi' \, dxdy = 0$, что было показано нами ранее.

$\iint (\dfrac{\xi^{12}}{\partial \bar q / \partial y}) \, dxdy$ можно принять за норму решения. Таким образом, мы показали, что в рамках линейного приближения

$$\|\xi'(t)\| = \|\xi'(0)\|.$$

Чтобы изучить более тщательно процессы возбуждения неустойчивости, рассмотрим метод нормальных мод, т.е. проблему на собственные значения для пространственного оператора задачи (3). Поскольку коэффициенты в исследуемом уравнении не зависят от $x$ и $t$, решение задачи (3) можно искать в виде:

$$\psi' = \psi'(y) e^{ik(x-ct)}, \tag{8}$$

сводя ее к проблеме на собственные значения

$$(\bar u - c)(\psi'_{yy} - k^2 \psi') + \bar q_y \psi' = 0. \tag{9}$$

$\psi' = 0$ при $y = y_1, y_2$.
Поскольку задача (9) имеет вещественные коэффициенты, то комплексные значения $c$ будут возникать парами, одно из которых будет соответствовать экспоненциально растущему (неустойчивому) решению, другое – экспоненциально затухающему решению.

Пусть $\bar{u} \neq c$ ни в одной точке области. Тогда поделив (9) на $\bar{u} - c$, получим:

$$\psi'_{yy} - k^2\psi' = -\frac{\bar{q}_y \cdot \psi'}{\bar{u} - c}. \tag{10}$$

Умножим (10) на $\psi'^*$ и проинтегрируем от $y_1$ до $y_2$. Получим

$$\int\limits_{y_1}^{y_2} \left( \left| \frac{\partial \psi'}{\partial y} \right|^2 + k^2 |\psi'| \right)^2 dy = \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{\bar{q}_y |\psi'|^2 (\bar{u} - c^*)}{|\bar{u} - c|^2}\, dy. \tag{11}$$

Приравнивая вещественные и мнимые части правой и левой сторон соотношения (11), будем иметь:

$$\int\limits_{y_1}^{y_2} \left( \left| \frac{\partial \psi'}{\partial y} \right|^2 + k^2 |\psi'| \right)^2 dy = \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{\bar{q}_y |\psi'|^2 (\bar{u} - c_r)}{|\bar{u} - c|^2}\, dy,$$

$$c_i \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{\bar{q}_y |\psi'|^2}{|\bar{u} - c|^2}\, dy = 0, \tag{12}$$

где $c = c_r + ic_i$. Если $c_i \neq 0$, т.е. мы имеем неустойчивую моду, то из (12) следует, что $\bar{q}_y$ должно менять знак внутри интервала $(y_1, y_2)$. Приведенное выше доказательство необходимого условия неустойчивости принадлежит Рэлею.

## Задачи

**1.** Получить оценку фазовой скорости неустойчивых мод линеаризованного относительно стационарного решения $\psi = \psi(y)$ оператора, описывающего динамику двумерной баротропной несжимающей идеальной жидкости в канале на плоскости $(x, y)$ с периодическими условиями по $x$ и условиями непротекания по $y$.

## *Решение*

Пусть $c_i \neq 0$. Тогда функция $\varphi = \psi'/(\bar{u} - c)$ является регулярной функцией. Следовательно, справедливы соотношения:

$$\psi' = (\bar{u} - c)\,\varphi,$$

$$\frac{\partial \psi'}{\partial y} = (\bar{u} - c)\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\,\varphi,$$

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} = (\bar{u} - c)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}\,\varphi.$$

Основная задача на собственные значения имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} - k^2 \psi' = -\frac{\partial \bar{q}/\partial y \cdot \psi'}{\bar{u} - c}.$$

Следовательно,

$$(\bar{u} - c)\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}\,\varphi - k^2(\bar{u} - c)\,\varphi = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}\,\varphi,$$

или

$$(\bar{u} - c)\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y} - k^2(\bar{u} - c)\,\varphi = 0.$$

Умножим последнее уравнение на $(\bar{u} - c)$ и результат перепишем в виде:

$$\frac{\partial}{\partial y}\,(\bar{u} - c)^2\,\frac{\partial \varphi}{\partial y} - k^2(\bar{u} - c)^2\,\varphi = 0.$$

Умножим это уравнение на $\varphi^*$ и проинтегрируем от $y_1$ до $y_2$. С учетом краевых условий получим:

$$-\int\limits_{y_1}^{y_2} (\bar{u} - c)^2 \left|\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right|^2 dy - \int\limits_{y_1}^{y_2} (\bar{u} - c)^2\, k^2 |\varphi|^2\, dy = 0.$$

Мнимая часть этого соотношения будет иметь вид:

$$c_i \int\limits_{y_1}^{y_2} (\bar{u} - c_r) \left( \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|^2 + k^2 |\varphi|^2 \right) dy = 0.$$

Отсюда

$$c_r = \frac{\int\limits_{y_1}^{y_2} \bar{u} \left( \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|^2 + k^2 |\varphi|^2 \right) dy}{\int\limits_{y_1}^{y_2} \left( \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|^2 + k^2 |\varphi|^2 \right) dy}.$$

Следовательно, $c_r$ принадлежит интервалу $(\bar{u}_{\min}, \bar{u}_{\max})$, то есть

$$\bar{u}_{\min} < c_2 < \bar{u}_{\max}.$$

**2.** При условиях задачи 1 выписать уравнение для энергии возмущений

$$E' = \iint \frac{u'^2 + v'^2}{2}\, dxdy \equiv \iint \frac{|\nabla \psi'|^2}{2}\, dxdy.$$

## *Решение*

Исходное уравнение для $\Delta \psi'$ имеет вид:

$$\frac{\partial \Delta \psi'}{\partial t} + \bar{u}\, \frac{\partial \Delta \psi'}{\partial x} + \frac{\partial \psi'}{\partial x} \cdot \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = 0.$$

Умножая скалярно на $\psi'$, получим

$$\frac{\partial E'}{\partial t} = \iint \bar{u}\, \frac{\partial \Delta \psi'}{\partial x} \cdot \psi' = \iint \bar{u}\, \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right) \psi' =$$

$$= - \iint \bar{u} \left( \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right) v' = \iint \bar{u}\, \frac{\partial u'}{\partial y} \cdot v' = \iint \bar{u}\, \frac{\partial u'v'}{\partial y} -$$

$$- \iint \bar{u} u'\, \frac{\partial v'}{\partial y} = \iint \bar{u}\, \frac{\partial u'v'}{\partial y} + \iint \bar{u} u'\, \frac{\partial u'}{\partial x} = \iint \bar{u}\, \frac{\partial u'v'}{\partial y} =$$

$$= - \iint u'v'\, \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}.$$

**3.** Для условий задачи 1 получить выражение для $\tau = -\overline{u'v'}^{\,x}$ для растущих возмущений типа нормальных мод.

*Решение*

$$\tau = -\overline{\operatorname{Re} u' \cdot \operatorname{Re} v'}^{\,x} = -\frac{1}{4}\overline{\left[\frac{\partial\psi'}{\partial y}\cdot e^{ik(x-ct)} + \frac{\partial\psi'^*}{\partial y}\cdot e^{-ik(x-c^*t)}\right]}^{x} \times$$
$$\times\overline{[ik\psi'(e^{ik(x-ct)} - ik\psi'^* e^{-ik(x-c^*t)}]}^{\,x} =$$
$$= -\frac{ik}{4}\left(\psi'\cdot\frac{\partial\psi'^*}{\partial y} - \psi'^*\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)e^{2kc_i t}.$$

Отсюда также можно получить

$$\frac{\partial\tau}{\partial y} = \frac{k}{2}\frac{(\partial\bar{q}/\partial y)\,|\psi'|^2 c_i e^{2kc_i t}}{|\bar{u}-c|^2}.$$

Если $\tau$ на границах обращается в нуль, то $\partial\bar{q}/\partial y$ должно внутри области менять знак (это теорема Рэлея).

Если $c_i = 0$ и $\bar{u} \neq c$ нигде внутри области, при условии обращения в нуль $\tau$ на границах, мы получаем, что $\tau \equiv 0$ внутри области.

**4.** Определить наклон линий постоянных $\psi'$ для растущих возмущений (при условиях задачи 1).

*Решение*

Для нарастающих возмущений имеем $(\partial E'/\partial t) > 0$, т.е.

$$-\iint \frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\,v'u'\,dxdy = \iint \frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi'}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi'}{\partial y}\,dxdy > 0.$$

Но

$$\frac{\partial\psi'}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi'}{\partial y}\cdot\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial\psi'/\partial x}{\partial\psi'/\partial y}\cdot\left(\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right)^2\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} = -\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\psi'=\mathrm{const}}\left(\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right)^2\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}.$$

Итак, если $(\partial\bar{u}/\partial y) > 0$, то

$$-\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\psi'=\mathrm{const}} > 0 \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\psi'=\mathrm{const}} < 0.$$

(При $\partial\bar{u}/\partial y < 0$ соотношение обратное.)

# Глава 10.

# Теорема об устойчивости стационарных баротропных потоков двумерной идеальной жидкости

Рассмотрим снова уравнение, описывающее динамику двумерной баротропной жидкости:

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + J(\psi, \Delta\psi) = 0. \qquad (1)$$

Будем рассматривать задачу в периодическом канале с условием непротекания на границах и условием сохранения циркуляции:

$$y = y_1, y_2: \quad v = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\int_x u\,dx = 0. \qquad (1')$$

Стационарное решение задачи $(1')$ удовлетворяет уравнению

$$J(\bar\psi, \Delta\bar\psi) = 0. \qquad (2)$$

Это соотношение означает, что $\bar\psi = F(\Delta\bar\psi)$, где $F$ – гладкое отображение.

Мы докажем следующее утверждение.

У т в е р ж д е н и е. Если $F(q)$ – непрерывно дифференцируемое отображение и $(\partial F/\partial q) > 0$, то решение $\bar\psi$ устойчиво по Ляпунову. Идея доказательства (принадлежащая Арнольду) основана на доказанном в предыдущих лекциях утверждении, что сформулированное выше уравнение с граничными условиями $(1')$ обладает бесконечным множеством инвариантов вида:

$$\iint_D \Phi(\Delta\psi)\,dxdy = \mathrm{const},$$

где $\Phi$ – гладкое отображение.

Поскольку уравнение (1) при данных краевых условиях сохраняет также энергию

$$\iint \frac{|\nabla\psi|^2}{2}\,dxdy \equiv E,$$

то функционал

$$I = E + \iint \Phi(q)\,ds, \quad q \equiv \Delta\psi, \quad ds = dxdy$$

будет также инвариантом. Для $\psi = \bar\psi$:

$$I = \bar I \equiv \bar E + \iint \Phi(\bar q)\,ds.$$

Если при $t = 0$ положить $\psi = \bar\psi + \psi_0'$, то

$$I = \iint \frac{\nabla(\bar\psi + \psi')\cdot\nabla(\bar\psi + \psi')}{2}\,ds + \iint \Phi(\bar q + q')\,ds.$$

Поскольку $I$ и $\bar I$ от времени не зависят, то инвариантом будет и $I - \bar I$, величина, которую можно сделать достаточно малой, беря достаточно малые $\psi_0'$ (в смысле выбранной нормы). Функционал $I$ может быть представлен в виде

$$I = \bar I + \delta I + \delta^2 I + \dots,$$

где $\delta I$ – первая вариация функционала, $\delta^2 I$ – вторая вариация, и т.д. Итак, будем иметь

$$I - \bar I = \iint \frac{\nabla(\bar\psi + \psi')\cdot\nabla(\bar\psi + \psi')}{2}\,ds + \iint \Phi(\bar q)\,ds + \iint \frac{\partial\Phi}{\partial\bar q}\delta q\,ds +$$

$$+\iint \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\bar{q}^2}\cdot(\delta q)^2\,ds + 0(\delta q^3) - \iint \frac{\nabla\cdot(\bar{\psi})\cdot\nabla\bar{\psi}}{2}\,ds - \iint \Phi(\bar{q})\,ds =$$

$$= \iint \nabla\bar{\psi}\cdot\nabla\psi'\,ds + \iint \frac{(\nabla\psi')^2}{2}\,ds + \iint \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial\bar{q}^2}\cdot(\delta q)^2\,ds + 0(\delta q^3),$$

где $\delta q = \Delta\psi'$. Нетрудно видеть, что

$$\iint \nabla\bar{\psi}\cdot\nabla\psi'\,ds = -\iint \bar{\psi}\cdot\Delta\psi'\,ds = -\iint \bar{\psi}\delta q\,ds.$$

Итак, имеем

$$\delta I = \iint \nabla\bar{\psi}\cdot\nabla\psi'\,ds + \iint \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{q}}\,\delta q\,ds = \iint \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{q}} - \bar{\psi}\right)\delta q\,ds.$$

Поскольку функция $\Phi$ произвольна, то ее можно выбрать так, чтобы первая вариация функционала обращалась в 0:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{q}} = \bar{\psi}.$$

В условиях теоремы мы положили, что $\bar{\psi} = F(\bar{q})$ и $\dfrac{\partial F}{\partial q} > 0$. Следовательно,

$$\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\bar{q}} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\bar{q}^2} > 0.$$

Эти соотношения показывают, что функционал $I$ имеет в точке $\psi = \bar{\psi}$ минимум. Выберем $\psi'_0$ при $t = 0$ так, чтобы

$$0(\delta q^3) < \varepsilon_1\delta^2 I. \tag{4}$$

Величину

$$\delta^2 I = \frac{1}{2}\iint |\nabla\psi'|^2\,ds + \iint \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\bar{q}^2}(\Delta\psi')^2\,ds \equiv \|\psi'\|^2_\Phi$$

можно выбрать в качестве нормы, т.к. $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\bar{q}^2} > 0$. Поскольку по условию $I - \bar{I}$ – величина малая, то из (4) следует, что

$$(1-\varepsilon_1)\|\psi'\|^2_\Phi \le \gamma \le (1+\varepsilon_1)\|\psi'\|^2_\Phi. \tag{5}$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\frac{\gamma}{1+\varepsilon_1} \leq \|\psi'\|^2_\Phi \leq \frac{\gamma}{1-\varepsilon_1}. \tag{6}$$

Соотношение (6) эквивалентно определению устойчивости, в котором зависимость между $\varepsilon$ и $\delta$ определяется следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{1+\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1}\,\delta.$$

## Задачи

**1.** Показать, что в рамках линейной теории возможно существование волн с отрицательной энергией, если энергию волн определить как разность между энергиями возмущенного и невозмущенного потоков.

### Решение

Определим энергию волновых движений следующим образом:

$$E = \iint \frac{|\nabla(\bar{\psi}+\psi')|^2}{2}\,ds - \iint \frac{|\nabla\bar{\psi}|^2}{2}\,ds = \iint \frac{|\nabla\psi'|^2}{2}\,ds + \\ + \iint (\nabla\psi' \cdot \nabla\bar{\psi})\,ds.$$

Выражение для $E$ может быть меньше нуля, если

$$\iint (\nabla\psi' \cdot \nabla\bar{\psi})\,ds < 0 \quad \text{и} \quad \left|\iint \nabla\psi'; \nabla\bar{\psi}\,ds\right| > \iint \frac{|\nabla\psi'|^2}{2}\,ds.$$

Поскольку $E$ – инвариант, то

$$\iint \frac{|\nabla\psi'|^2}{2} + (\nabla\psi' \cdot \nabla\bar{\psi}) = \iint \frac{|\nabla\psi'_0|^2}{2} + (\nabla\psi'_0 \cdot \nabla\bar{\psi}).$$

**2.** Пусть дано нелинейное уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} = 0.$$

Выписать уравнение для основного потока и возмущений, если оператор усреднения (получения основного потока) определяется следующим образом:

$$u = \bar{u} + u',$$

так что $\bar{u}' = 0$, $\overline{\bar{u} \cdot u'} = 0$ и оператор "$^{-}$" и $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial t}$ коммутируют друг с другом.

## Решение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} = 0.$$

Проводим усреднение

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{uu}}{\partial x} = 0.$$

Пусть $u = \bar{u} + u'$. Тогда

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} = 0.$$

Далее:

$$\frac{\partial (\bar{u} + u')}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u} + u')(\bar{u} + u') = 0.$$

Отсюда получаем уравнение для $u'$:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + 2\frac{\partial \bar{u}u'}{\partial x} + \frac{\partial u'u'}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} = 0.$$

## Глава 11.

# Уравнения Навье–Стокса

В первой лекции было показано, что тензор напряжений может быть выражен следующим образом:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + d_{ij}, \tag{1}$$

где – давление, а $d_{ij}$ есть девиатор.

Неизотропность тензора напряжений может возникнуть, если только существует относительная скорость частиц. Ясно, что если жидкость движется как одно целое, то девиатор должен быть равен нулю. Мы будем в дальнейшем рассматривать ньютоновскую жидкость – жидкость, в которой тензор вязких напряжений (девиатор) линейно зависит от градиента скоростей $\partial u_i/\partial x_j$. Другими словами, мы пренебрегаем нелинейными членами в разложении тензора напряжений по градиентам скоростей. То, что поверхностные силы зависят от разности скоростей, есть эмпирический факт.

Как мы уже упомянули выше, при движениях жидкости как твердого тела девиатор должен обращаться в 0. В частности, некоторые заключения можно получить из рассмотрения твердого вращения жидкости. Покажем, что из условия обращения девиатора в 0 при твердом вращении будет следовать, что тензор вязких напряжений должен зависеть только от комбинаций вида $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_i}$.

Действительно, пусть жидкость вращается как твердое тело с угловой скоростью $\vec{\Omega}$. Тогда скорость частиц будет определяться соотношением $\vec{u} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$. Пусть

$$\vec{\Omega} = \{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}.$$

Так как

$$u_1 = \Omega_2 x_3 - \Omega_3 x_2, \quad u_2 = \Omega_3 x_1 - \Omega_1 x_3, \quad u_3 = \Omega_1 x_2 - \Omega_2 x_1,$$

то

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} = 0.$$

Ясно также, что $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0.$

Таким образом, мы можем написать, что

$$d_{ik} = a\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) + b\,\frac{\partial u_n}{\partial x_n}\,\delta_{ik}. \qquad (2)$$

Следуя идеологии вывода уравнений Эйлера, мы можем выписать следующее уравнение, предполагая, что $a$ и $b$ не зависят от координат:

$$\rho\frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k}\,d_{ik},$$

или

$$\rho\frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + a\sum_k \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + a\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} + b\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_i \partial x_n},$$

или

$$\rho\frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + a\Delta u_i + (a+b)\frac{\partial}{\partial x_i}\operatorname{div}\vec{u}. \qquad (3)$$

Найдем соотношение между $a$ и $b$. Это соотношение можно получить из предположения, что давление $p$ должно быть равно статистически равновесному давлению, что эквивалентно условию, что шпур девиатора должен быть равен нулю:

$$S_p d_{ij} = 0.$$

Но шпур девиатора, согласно нашему определению, равен:

$$S_p d_{ij} \equiv d_{ii} = 2a\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + 3b\frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

Следовательно, $2a+3b = 0$, $b = -\frac{2}{3}a$, $a + b = \frac{1}{3}a$, и уравнения вязкой жидкости примут вид:

$$\rho\frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + a\Delta u_i + \frac{1}{3}\,a\,\frac{\partial}{\partial x_i}\,\mathrm{div}\,\vec{u}.$$

Если определить коэффициент вязкости как $\mu = \frac{a}{\rho}$, то уравнения будут иметь вид:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mu\Delta\vec{u} + \frac{\mu}{3}\nabla\,\mathrm{div}\,\vec{u}. \tag{4}$$

Для несжимаемой жидкости система уравнений Навье–Стокса перепишется следующим образом:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla\rho + \mu\Delta\vec{u}, \quad \mathrm{div}\,\vec{u} = 0. \tag{5}$$

Рассмотрим несколько классических примеров течений вязкой жидкости.

1. *Течение Пуазейля между двумя пластинами.*

Задача состоит в том, что нужно описать течение вязкой жидкости между двумя параллельными пластинами, находящимися на расстоянии друг от друга. Течение поддерживается продольным градиентом давления. Течение стационарное. Жидкость несжимаема и однородна.

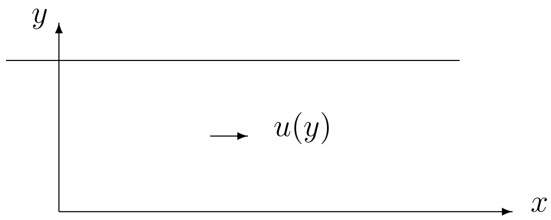


Рис. 6

Поскольку течение описывается лишь одной компонентой скорости $u = u(y)$, то уравнения Навье–Стокса в данном случае будут иметь вид:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

Из второго уравнения следует, что $p = p(x)$. Из первого уравнения в силу независимости $p$ от $y$ и $u$ от $x$ получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = \lambda = \text{const}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lambda y + a; \quad u = \frac{\lambda y^2}{2} + ay + b.$$

Краевые условия: $u = 0$ при $y = 0, h$. Следовательно, $b = 0$, $(\lambda h^2)/2 + ah = 0$; $a = -(\lambda h)/2$, $u = \lambda/2(y-h)y$, или $u = 1/2\mu \cdot \partial p/\partial x(y-h)y$. Чтобы $u$ было $> 0$, нужно, чтобы $\partial p/\partial x < 0$.

2. *Вязкие волны.*

Мы приведем этот пример в силу его нетривиальности – в данной задаче вязкость выступает как физический механизм, ответственный за возбуждение волновых движений в жидкости. Такое явление возможно, если мы зададим продольное колебание бесконечной пластины

$$u|_{z=0} = u_0 e^{-i\omega t}, \quad v = 0, \ w = 0.$$

Приведенные выше соотношения могут быть рассмотрены в качестве краевых условий для однородной жидкости, заполняющей, например, полупространство. Ясно, что для идеальной жидкости мы могли поставить только условие $w = 0$ – условие скольжения. Уравнение, которое мы должны решить, имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{6}$$

В качестве второго краевого условия примем условие $u \to 0$ при $z \to \infty$ (это условие эквивалентно условию конечности волновой энергии). Решение будем искать в виде

$$u = u_0 \exp(i(kz - \omega t)).$$

Подставляя это решение в уравнение (6), получим:

$$-i\omega = -k^2\mu, \quad k = \pm\sqrt{\frac{i\omega}{\mu}} = \pm\left[\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right]\sqrt{\frac{\omega}{\mu}}.$$

В силу второго краевого условия мы можем выбрать только

$$k = +\left[\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right]\sqrt{\frac{\omega}{\mu}}.$$

Таким образом, искомое решение будет иметь вид:

$$u = u_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\mu}} \cdot z\right) \exp\left(i\left\{\sqrt{\frac{\omega}{2\mu}} \cdot z - \omega t\right\}\right).$$

Интересно отметить, что это именно вязкие волны, т.к. чем больше вязкость, тем на большую глубину проникают волны. Причиной этого явления является увеличение длины вязкой волны с увеличением вязкости.

**Задачи**

**1.** Выписать силу, действующую в плоском течении Пуазейля со стороны жидкости на единицу площади каждой из пластин.

*Решение*

Для определенности будем рассматривать пластину при $y = 0$. Искомая сила по определению напряжения трения есть:

$$f_x = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}.$$

Так как $u = -\dfrac{1}{2\mu}\dfrac{\partial p}{\partial x}(h - y)y$, то $f_x = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial p}{\partial x}h$. Так как $\dfrac{\partial p}{\partial x} < 0$, то $f_x > 0$.

**2.** Рассчитать течение Пуазейля в круглой трубе радиуса $R$.

*Решение*

Направим ось $x$ вдоль трубы. Будем использовать цилиндрическую систему координат $(x, r, \varphi)$. Так как течение симметрично по $\varphi$, то

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \lambda = \text{const}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} = \lambda.$$

Отсюда
$$\frac{du}{dr} = \lambda\,\frac{r}{2} + \frac{a}{r}.$$

Чтобы $\partial u/\partial r$ было конечно везде (краевые условия для $r = 0 \to r(\partial u/\partial r) \to 0$ при $r \to 0$), нужно положить $a = 0$. Итак,
$$u = \frac{\lambda r^2}{4} + b.$$
Второе краевое условие: $u = 0$ при $r = R$. Отсюда
$$b = -\frac{\lambda R^2}{4}.$$

Таким образом,
$$u = \frac{\lambda}{4}(r^2 - R^2), \quad \text{и т.к.} \quad \lambda = \frac{1}{\mu}\,\frac{\partial p}{\partial x},$$
то
$$u = -\frac{\partial p/\partial x}{4\mu}(R^2 - r^2).$$

**3.** Выписать полную силу, действующую со стороны жидкости на единицу длины трубы. (Задача 2).

*Решение*

Сила, действующая на единицу длины окружности трубы, есть $f_x = -\mu\,\dfrac{\partial u}{\partial r}$ (знак "$-$" использован, т.к. $\dfrac{\partial u}{\partial r} < 0$). Следовательно,
$$f_x = -\frac{\partial p/\partial x}{2} \cdot R.$$
Полная сила
$$f = 2\pi R f_x = \pi R^2 \left|\frac{\partial p}{\partial x}\right|.$$
Как и следовало ожидать, эта сила уравновешивается градиентом давления.

## Глава 12.

# Устойчивость течений вязкой несжимаемой жидкости

При исследовании устойчивости вязкой несжимаемой жидкости возникает ряд особенностей. Например, если мы изучаем течения в канале с условиями прилипания на стенках, то нетрудно понять, что течения идеальной жидкости не будут предельными течениями вязкой жидкости при коэффициенте вязкости, стремящемся к нулю, из-за условий прилипания – в малой окрестности стенки будет образовываться пограничный слой. В случае отсутствия специальных краевых условий (например, для двумерных течений на сфере или в торе) предельные переходы возможны.

Далее, для вязкой жидкости в случае отсутствия внешней возбуждающей силы и однородных краевых условий асимптотическим решением будет нуль, и это решение, следовательно, асимптотически устойчиво.

Действительно, рассмотрим для простоты двумерные уравнения вязкой несжимаемой жидкости с $\rho = \rho_0 =$const

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \mu\Delta\vec{u}, \quad \operatorname{div}\vec{u} = 0. \tag{1}$$

Задачу будем рассматривать в канале с периодическими условиями и условиями прилипания по $y$: $u, v = 0$ при $y = y_1, y_2$. Получим уравнение для энергии. С этой целью систему (1) умножим скалярно в $R^2$ на $\vec{u}$ и проинтегрируем по области $D$.

Получим:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\iint \frac{1}{\rho_0}\nabla p\cdot\vec{u}\,dD + \iint \mu\Delta\vec{u}\cdot\vec{u}\,dD = -\iint \frac{1}{\rho_0}\operatorname{div} p\vec{u}\,dD +$$

$$+\frac{1}{\rho_0}\iint p\operatorname{div}\vec{u}\,dD + \mu\iint \nabla\cdot(\nabla\cdot\vec{u}\cdot\vec{u})\,dD - \mu\iint \nabla\vec{u}\cdot\nabla\vec{u}\,dD,$$

где $E = \iint(\vec{u}\cdot\vec{u})\,dD$

Отсюда в силу краевых условий будем иметь:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\iint \mu\nabla\vec{u}\cdot\nabla\vec{u}\,dD. \qquad (2)$$

В силу теоремы вложения

$$\iint(\vec{u}\cdot\vec{u})\,dD \le c\iint \nabla\vec{u}\cdot\nabla\vec{u}\,dD.$$

Таким образом, справедливо неравенство:

$$\frac{\partial E}{\partial t} \le -2c\mu E,$$

т.е. энергия стремится к нулю экспоненциально.

Чтобы исследовать устойчивость произвольных решений, мы должны в общем случае ввести возбуждающую силу либо неоднородные краевые условия:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \mu\Delta\vec{u} + \vec{f}, \quad \operatorname{div}\vec{u} = 0. \qquad (3)$$

Пусть $\vec{f}$ не зависит от времени. Тогда исследуемое на устойчивость стационарное решение должно удовлетворять уравнению:

$$\vec{u}\cdot\nabla\vec{u} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \mu\Delta\vec{u} + \vec{f}, \quad \operatorname{div}\vec{u} = 0.$$

Поскольку мы рассматриваем двумерную несжимаемую жидкость, то можно ввести функцию тока

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \omega \equiv \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \Delta\psi$$

и свести уравнение (3) к уравнению для вихря, как мы это делали в случае идеальной жидкости:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\psi, \omega) = \mu \Delta \omega + \mathrm{rot}_z \vec{f}. \tag{4}$$

При этом, конечно, нужно сформулировать новые краевые условия. Чтобы исключить эту проблему, будем рассматривать течения двумерной жидкости в двоякопериодическом канале (торе).

Пусть $\bar{\omega}, \bar{\psi}$ есть завихренность и функция тока стационарного решения задачи (4):

$$J(\bar{\psi}, \bar{\omega}) = \mu \Delta \omega + \mathrm{rot}_z \vec{f}.$$

Пусть

$$\psi' = \psi - \bar{\psi}, \qquad \omega' = \omega - \bar{\omega} \equiv \Delta \vec{\psi} - \Delta \bar{\psi} \equiv \Delta \psi'.$$

Тогда уравнение для $\omega'$ будет иметь вид:

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t} + J(\bar{\psi}, \omega') J(\Delta^{-1} \omega', \bar{\omega}) + J(\psi', \omega') = \mu \Delta \omega'. \tag{6}$$

Так как $\psi$ определена с точностью до константы, мы можем рассматривать решение (6) в подпространстве, ортогональном константе, и, следовательно, считать оператор $\Delta^{-1}$ ограниченным.

Пусть

$$L\omega' \equiv \mu \Delta \omega' - J(\bar{\psi}, \omega') - J(\Delta^{-1} \omega', \bar{\omega}). \tag{7}$$

Оператор $L$ линеен и имеет компактную резольвенту. Определим обычным образом скалярное произведение:

$$(\eta, \xi) = \iint \eta \xi \, dD.$$

Умножим (6) скалярно на $\omega'$. Получим:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\omega', \omega') = (L\omega', \omega'), \tag{8}$$

поскольку нами уже было установлено, что

$$(J(\psi', \omega'), \omega') = 0.$$

Так как

$$(L\omega', \omega') = (S\omega', \omega'), \quad S = \frac{L + L^*}{2},$$

где $S$ самосопряженный оператор, имеющий компактную резольвенту и, следовательно чисто дискретный спектр, и порождающий полную ортонормальную систему собственных функций.

Таким образом, мы можем утверждать, что решение $\bar{\omega}$ будет устойчиво по Ляпунову, если оператор $S$ отрицательно полуопределен – $(S\varphi, \varphi) \leq 0$ или, что эквивалентно, если все собственные числа оператора $S \rightarrow \lambda(S) \leq 0$.

Исторически устойчивость стационарных вязких течений, зависящих только от координаты $y$, исследовалась с помощью линейного приближения, которое сводится к так называемому уравнению Орра-Зоммерфельда. Решению этой задачи посвящена обширная литература.

## Приложение

# Принципы классической термодинамики

В настоящем приложении мы будем рассматривать основные положения равновесной термодинамики, предполагая, что в движущейся жидкости соотношения равновесной термодинамики меняются мало.

Первый принцип равновесной термодинамики гласит, что все термодинамические параметры определяются двумя независимыми параметрами, например удельным обьемом и давлением $(V, p)$. Следовательно, для каждой жидкости необходимо выписать уравнение состояния, связывающее третий термодинамический параметр с этими двумя: $f(p, V, T) = 0$. Вид уравнения состояния не может быть произвольным – он обусловлен корректной разрешимостью сформулированной системы уравнений гидротермодинамики.

Второй принцип сводится к тому, что состояние жидкости характеризуется ее внутренней энергией. Эта внутренняя энергия изменяется за счет притока тепла и произведенной работы, причем изменения внутренней энергии зависят только от начального и конечного состояния системы, в то время как работа и подводимое тепло могут зависеть от пути, по которому система идет к конечному состоянию.

Пусть

$$\Delta E = Q + W,$$

где $\Delta E$ – изменение внутренней энергии, $Q$ – подводимое тепло, $W$ – работа, совершаемая системой. Если $Q = 0$, то такие изменения состояния системы называются адиабатическими.

Обратимые процессы - это процессы, которые идут так медленно, что можно считать, что система всегда находится в равновесии. Для процесса сжатия жидкости (обратимого) можно написать:

$$\delta E = \delta Q - p\delta V.$$

Удельной теплоемкостью называется величина, определяемая соотношением:

$$c = \frac{\delta Q}{\delta T}.$$

Ясно, что это определение не дает единственности. Действительно,

$$\delta Q = \left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)_V \delta p + \left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)_p \delta V + p\delta V,$$

$$\delta T = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V \delta p + \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_p \delta V.$$

Тогда

$$c_p = \left(\frac{\delta Q}{\delta T}\right)_{\delta p=0} = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_p + p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p,$$

$$c_V = \left(\frac{\delta Q}{\delta T}\right)_{\delta V=0} = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V.$$

Второй закон термодинамики определяет энтропию через соотношение

$$T\delta S = \delta Q.$$

(Это соотношение справедливо только для обратимых процессов.) Следовательно,

$$T\delta S = \delta E + p\delta V.$$

Другая функция состояния, удобная для описания жидкостей, есть энтальпия:

$$I = E + pV.$$

Энтальпия имеет размерность энергии на единицу массы. Имеем:

$$\delta I = \delta E + p\delta V + V\delta p = T\delta S + V\delta p.$$

Для обратимых процессов, происходящих при постоянном давлении, $\delta I = \delta Q$. Еще одна функция, имеющая размерность энергии на единицу массы, – это свободная энергия Гельмгольца:

$$F = E - TS.$$

Для нее справедливо соотношение:

$$\delta F = -p\delta V - S\delta T.$$

Следовательно, при изотермическом процессе (обратимом и необратимом)

$$\delta F = -p\delta V,$$

и если процесс обратимый, то это работа.

Четыре полезных тождества, известных как термодинамические соотношения Максвелла, имеют следующий вид:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V = -\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T,$$

Первое получено из соотношений:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S = -p, \qquad \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V = T,$$

остальные три из функций:

$$E + pV, \quad E - TS, \quad E + pV - TS.$$

**Задачи**

**1.** Получить уравнение сухой адиабаты для идеального газа.

*Решение*

Для адиабатического процесса $dQ = 0$. Следовательно,

$$c_V dT + p dV = 0.$$

Так как $p = RT/V$, то $c_p = c_V + R$:

$$\lg T + \frac{R}{c_p} \lg V = \mathrm{const} \equiv c.$$

Отсюда

$$T(V)^{R/c_V} = c_1, \quad \text{или} \quad \frac{T^{c_p/c_V}}{p^{R/c_V}} = c_1.$$

**2.** Доказать, что $dS = \dfrac{dQ}{T}$ есть полный дифференциал.

Учебное пособие

Валентин Павлович Дымников

# Избранные главы гидродинамики

Институт вычислительной математики

Российской академии наук

Оригинал-макет изготовлен в ИВМ РАН С.Л. Герсимовой.
ЛР №021026 от 04.01.96. Компьютерный набор. Подписано в
печать 19.02.98. Формат 60x90/16. Бумага кн.-журн. Печать
офсетная. Усл. печ. л. 6. Тираж 100 экз. Заказ № 3866.
Инстит Вычислительной математики РАН
117951, ГСП-1, Москва, ул. Губкина, 8
Отпечатано в типографии ПИК ВИНИТИ
140010 г.Люберцы Моск. обл., Октябрьский просп., 403
Тул. 554-21-86