УДК 519.6
ББК 22.162
А 247

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российской академии наук по программе целевых расходов Президиума РАН и грантов РФФИ 01-01-00928, 00-15-96003

Агошков В.И. Методы оптимального управления и сопряжённых уравнений в задачах математической физики. – М.: ИВМ РАН, 2003. - 256 с.

Изложены основы методологии, базирующейся на теории оптимального управления, теории некорректных задач, применении сопряженных уравнений и итерационных процедур к изучению класса обратных задач и задач управления и формулировке методов их приближённого решения.

Для студентов старших курсов, аспирантов, научных работников, специализирующихся в области вычислительной и прикладной математики и математического моделирования.

Печатается по решению Ученого совета Института вычислительной математики Российской академии наук.

Рекомендована кафедрой математического моделирования физических процессов Московского физико-технического института для использования в учебном процессе.

ISBN 5-901854-06-3

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

В современном обществе всевозрастающую роль играют разнообразные обратные задачи, задачи управления сложными процессами, задачи идентификации, задачи усвоения данных наблюдений в математических моделях и др. Поэтому насущной проблемой является разработка методологий эффективного решения данных задач. Одна из таких методологий на протяжении ряда лет исследовалась в Институте вычислительной математики Российской академии наук. Она базируется на подходах и результатах нескольких разделов современной математики: теории оптимального управления системами с распределёнными параметрами, теории линейных уравнений в банаховых пространствах, теории некорректно поставленных задач и общих методах их решения, сопряжённых уравнениях и современных итерационных алгоритмах для операторных уравнений. Основные положения этой методологии излагаются в данной книге.

Книга является расширенным изложением курса лекций, прочитанного автором в 2002 году в МФТИ на кафедре математического моделирования физических процессов студентам и группе энтузиастов из числа аспирантов и молодых учёных. Этот курс был прочитан в 2002 году также в университете г.Брешиа (Universitá degli Studi di Brescia, Italia). Написать такой курс предложили Г.И.Марчук и В.П.Дымников, которым автор глубоко благодарен за их инициативу и поддержку во всём процессе написания курса лекций и данной книги.

Большое влияние на формирование подходов, излагаемых в книге, оказали методы, развиваемые научными школами А.Н.Тихонова, М.М.Лаврентьева и Ж.-Л.Лионса (Франция). Значительная часть приложений рассматриваемой методологии к обратным задачам теории переноса частиц была выполнена автором в 1997–1999 гг. в Ecole Normale Supérieure de Cachan (Paris, France). Данные исследования проводились при поддержке Министерства образования Франции. Автор благодарен Министерству образования и CNRS Франции за предоставленную возможность осуществить эти исследования, а также за сотрудничество многим французским коллегам, и прежде всего профессору К.Бардосу (C.Bardos). Автор признателен также Бюро CNRS в Москве за помощь в решении многих текущих проблем, связанных с организацией данных исследований.

Исследования по рассматриваемым в книге проблемам на протяжении ряда лет поддерживались Российским фондом фундаментальных исследований, а издание книги осуществлено при финансировании в рамках программы Президиума Российской академии наук по поддержке деятельности базовых кафедр и при поддержке грантов РФФИ 01-01-00928, 00-15-96003.

Большую помощь в подготовке рукописи к печати оказали С.Л. Герасимова и В.В. Лебедева, которым автор выражает искреннюю признательность.

Автор благодарит всех своих коллег из Института вычислительной математики РАН и из научных школ Ж.-Л.Лионса и Э.Мадженеса за сотрудничество на протяжении многих лет.

Глава 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящем введении мы приведем обозначения и понятия, являющиеся общепринятыми в теории задач математической физики, а также сформулируем некоторые из этих задач. Затем будут даны примеры задач, которые отнесем в дальнейшем к классу обратных задач, исследование и разработка алгоритмов решения которых составляет основную цель настоящей книги. В третьей части введения в виде единой схемы описывается взаимосвязь задач и уравнений, подходов и методов, рассматриваемых и применяемых ниже. Данная схема фактически представляет собой общий план построения книги.

§ 1. Множества и области из R^n

Пусть $\mathbf{R}^n$ ($\mathbf{R}^1 = \mathbf{R}$) есть n-мерное вещественное евклидово пространство, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ – точка в $\mathbf{R}^n$, где x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, – координаты точки x. *Скалярное произведение* и *норму* (*длину*) в $\mathbf{R}^n$ обозначим соответственно через $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$, $|x| = (x, x)^{1/2} = (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2}$. Тогда число $|x - y|$ есть евклидово расстояние между точками x и y.

Множество точек x из $\mathbf{R}^n$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < R$, называется *открытым шаром* радиуса R с центром в точке x_0. Этот шар будем обозначать $U(x_0; R)$, $U_R = U(0; R)$.

Множество называется *ограниченным* в $\mathbf{R}^n$, если существует шар, содержащий это множество.

Точка x_0 называется *внутренней* точкой множества, если существует шар $U(x_0;\varepsilon)$, содержащийся в этом множестве. Множество называется *открытым*, если все его точки внутренние. Множество называется *связным*, если любые две его точки можно соединить кусочно-гладкой кривой, лежащей в этом множестве. Связное открытое множество называется *областью*. Точка x_0 называется *предельной точкой* множества A, если существует последовательность x_k, $k = 1, 2, \ldots$, такая, что $x_k \in A$, $x_k \neq x_0$, $x_k \to x_0$, $k \to \infty$. Если к множеству A добавить все его предельные точки, то полученное множество называется *замыканием* множества A и обозначается $\overline{A}$. Если множество совпадает со своим замыканием, то оно называется *замкнутым*. Замкнутое ограниченное множество называется *компактом*. *Окрестностью* множества A называется всякое открытое множество, содержащее A; *ε-окрестностью* A_ε множества A называется объединение шаров $U(x;\varepsilon)$, когда x пробегает A: $A_\varepsilon = \bigcup\limits_{x\in A} U(x;\varepsilon)$.

Функция $\chi_A(x)$, равная 1 при $x \in A$ и 0 при $x \notin A$, называется *характеристической функцией* множества A.

Пусть Ω – область. Точки замыкания $\overline{\Omega}$, не принадлежащие Ω, образуют замкнутое множество $\partial\Omega$, называемое *границей области* Ω, так что $\partial\Omega = \overline{\Omega}\setminus\Omega$.

Будем говорить, что поверхность $\partial\Omega$ принадлежит *классу* C^p, $p \geq 1$, если в некоторой окрестности каждой точки $x_0 \in \partial\Omega$ она представляется уравнением $\omega_{x_0}(x) = 0$, причем $\operatorname{grad}\omega_{x_0}(x) \neq 0$ и функция $\omega_{x_0}(x)$ непрерывна вместе со всеми производными до порядка p включительно в упомянутой окрестности. Поверхность $\partial\Omega$ называется *кусочно-гладкой*, если она состоит из конечного числа поверхностей класса C^1.

Введем определение *липшицевой границы* (*границы класса* $C^{0,1}$).

Пусть Ω – ограниченная область. Мы говорим, что Ω имеет липшицеву границу $\partial\Omega$ (короче, Ω принадлежит $C^{0,1}$), если существуют вещественные числа $\alpha > 0$, $\beta > 0$, такие, что для каждой точки $x^0 \in \partial\Omega$ декартова система координат может быть повернута и смещена в точку x^0 так, что справедливо следующее утверждение. Положим: $K_{n-1} = \{\mathbf{x}' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \mid |x_i| < \alpha$ при $i = 1, 2, \ldots, n-1\}$ (K_{n-1} есть $n-1$–мерный открытый куб). Тогда существует липшицева функция a, определенная на K_{n-1}, такая, что $a(x_1, \ldots, x_{n-1}) = x_n$ для точек $(x_1, \ldots, x_n) \in \partial\Omega$. Более того, все точки, такие, что $\mathbf{x}' \in K_{n-1}$ и $a(\mathbf{x}') < x_n < a(\mathbf{x}') + \beta$, лежат внутри Ω, а все точки $\mathbf{x} = (\mathbf{x}',\ \mathbf{x}' \in K_{n-1},\ a\mathbf{x}' - \beta < x_n < a\mathbf{x}')$ лежат вне $\bar{\Omega}$.

Далее мы будем иметь дело только с областями Ω, границы которых липшиц-непрерывны.

Если $\partial\Omega$ является кусочно-гладкой класса C^1 (или даже липшицевой), то почти во всех точках $x \in \partial\Omega$ существует единичный вектор внешней нормали $n(x)$ к $\partial\Omega$.

Пусть точка x_0 лежит на кусочно-гладкой поверхности $\partial\Omega$. *Окрестностью точки x_0 на поверхности* $\partial\Omega$ называется та связная часть множества $\partial\Omega \bigcap U(x_0;R)$, которая содержит точку x_0.

Ограниченная область Ω' называется подобластью, строго лежащей в области Ω, если $\overline{\Omega}' \subset \Omega$; при этом пишут $\Omega' \Subset \Omega$.

§ 2. Классы функций $\mathbf{C}^{\mathbf{p}}(\Omega)$, $\mathbf{C}^{\mathbf{p}}(\overline{\Omega})$, $\mathbf{L}_{\mathbf{p}}(\Omega)$

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — целочисленный вектор с неотрицательными составляющими α_j (мультииндекс). Через $D^\alpha f(x)$ обозначают производную функции $f(x)$

порядка $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$:

$$D^\alpha f(x) = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n} f(x) = \frac{D^{|\alpha|} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

$$D^0 f(x) = f(x),$$

$$D = (D_1, D_2, \ldots, D_n), \quad D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Для низших производных употребляют обозначения $f_{x_i}, f_{x_i x_j}$. Пользуются также следующими сокращенными обозначениями:

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}, \quad \alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \ldots \alpha_n!$$

Множество (комплекснозначных) функций f, непрерывных вместе с производными $D^\alpha f(x)$, $|\alpha| \le p$ $(0 \le p < \infty)$ в области Ω, образуют *класс функций* $C^p(\Omega)$. Функции f класса $C^p(\Omega)$, у которых все производные $D^\alpha f(x)$, $|\alpha| \le p$, допускают непрерывное продолжение на замыкание $\overline{\Omega}$, образуют *класс функций* $C^p(\overline{\Omega})$; при этом под значением $D^\alpha f(x)$, $x \in \partial\Omega$, $|\alpha| \le p$, понимают $\lim D^\alpha f(x')$ при $x' \to x$, $x' \in \Omega$. Класс функций, принадлежащих $C^p(\Omega)$ при всех p, обозначают через $C^\infty(\Omega)$; аналогично определяется и класс функций $C^\infty(\overline{\Omega})$. Класс $C(\Omega) \equiv C^0(\Omega)$ состоит из всех непрерывных функций в Ω, а класс $C(\overline{\Omega}) \equiv C^0(\overline{\Omega})$ можно отождествить с множеством всех непрерывных функций на $\overline{\Omega}$.

Пусть функция $f(x)$ задана на некотором множестве, содержащем область Ω. В этом случае принадлежность f классу $C^p(\overline{\Omega})$ означает, что *сужение* f на Ω принадлежит $C^p(\overline{\Omega})$.

Введенные классы функций представляют собой *линейные множества*, т.е. из принадлежности функций f и g какому-либо из этих классов следует принадлежность этому же классу и любой их линейной комбинации $\lambda f + \mu g$, где λ и μ — произвольные комплексные числа.

Функция f называется *кусочно-непрерывной* в $\mathbf{R}^n$, если существует конечное или счетное число областей Ω_k, $k = 1, 2, \ldots$, без общих точек с кусочно-гладкими границами, таких, что каждый шар покрывается конечным числом замкнутых областей $\{\overline{\Omega}_k\}$ и $f \in C(\overline{\Omega}_k)$, $k = 1, 2, \ldots$

Кусочно-непрерывная функция называется *финитной*, если она обращается в нуль вне некоторого шара.

Пусть $\varphi \in C(\mathbf{R}^n)$. *Носителем* $\operatorname{supp}\varphi$ непрерывной функции φ называется замыкание множества тех точек, где $\varphi(x) \ne 0$.

Через $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ обозначают множество бесконечно дифференцируемых функций с финитными носителями, а через $C_0^\infty(\Omega)$ – те из них, носители которых принадлежат $\Omega \subset \mathbf{R}^n$.

Рассмотрим множество $A \subset \mathbf{R}^n$. Говорят, что A имеет *меру нуль*, если для любого $\varepsilon > 0$ оно может быть покрыто шарами суммарного объема меньше ε.

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ есть область. Говорят, что некоторое свойство выполняется *почти всюду* в Ω, если множество точек области Ω, которое не обладает этим свойством, имеет меру нуль

Функция $f(x)$ называется *измеримой*, если она совпадает почти всюду с пределом почти всюду сходящейся последовательности кусочно-непрерывных функций.

Множество $A \subset \mathbf{R}^n$ называется *измеримым*, если его характеристическая функция $\chi_A(x)$ измерима.

Пусть Ω есть измеримое множество из $\mathbf{R}^n$, на котором Ω определен *интеграл Лебега* от функции $f(x)$ (см., например, [13]). Тогда *пространство* $L_1(\Omega)$ *интегрируемых (по Лебегу) функций* – пространство функций $f(x)$, для которых конечна величина (*норма*)

$$\|f\|_{L_1(\Omega)} = \int_\Omega |f(x)|\,dx,$$

где $\int_\Omega$ есть интеграл Лебега.

Функция $f(x)$ называется *локально интегрируемой по Лебегу в области* Ω, $f \in L_{loc}(\Omega)$, если $f \in L_1(\Omega')$ для всех измеримых $\Omega' \Subset \Omega$.

Пусть $1 \le p < \infty$. Множество измеримых по Лебегу функций $f(x)$, определенных на Ω, для которых конечна *норма*

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

образует пространство $L_p(\Omega)$.

Пространство $L_p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, наряду с $C^p(\Omega)$, $C^p(\overline{\Omega})$ широко используется при изучении и численном решении задач математической физики.

§ 3. Понятие о дифференциальном уравнении с частными производными, о краевых и начальных условиях. Типичные примеры задач математической физики

Дифференциальным уравнением с частными производными называется соотношение, содержащее неизвестную функцию от независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и ее частные производные до некоторого порядка.

Порядком уравнения называют порядок наивысшей производной, в него входящей. Следовательно, можно говорить об уравнениях первого, второго и т.д. порядков. Важным классом уравнений являются *линейные*. Общий вид такого уравнения порядка m с коэффициентами a_α задает уравнение

$$\sum_{0 \le |\alpha| \le m} a_\alpha D^\alpha u = f. \tag{1}$$

Основной задачей теории дифференциальных уравнений с частными производными является исследование нахождения решений дифференциальных уравнений. Понятие решения требует уточнения.

Далее будем выделять два вида решения. Под *классическим решением* будем понимать функцию, непрерывно дифференцируемую столько раз, каков порядок уравнения, и удовлетворяющую ему в обычном смысле в каждой рассматриваемой области. Наряду с классическим рассматривают также *различные обобщенные решения* (см.: § 6, гл. 1, п. 1.5, гл. 2; § 1, гл. 4).

Дифференциальные уравнения с частными производными возникают в различных задачах физики.

Классическими примерами являются следующие уравнения:

уравнение Пуассона

$$-\Delta u = f, \tag{2}$$

уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f, \tag{3}$$

волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f. \tag{4}$$

Здесь f – заданная, u – искомая функция. Во втором уравнении они являются функциями от $x \in R^n$, в третьем и четвертом — функциями от $x \in R^n$ и $t \in R$. В физических задачах переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ играют роль пространственных координат, t означает время. В уравнениях (2)-(4) Δ означает *оператор Лапласа*

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

a^2 – некоторую положительную постоянную. Уравнение (2) называют уравнением Пуассона, а *уравнением Лапласа* называют однородное уравнение (2), когда $f = 0$.

Уравнения (2)-(4) описывают различные физические процессы и явления, и они являются классическими примерами *уравнений математической физики.*

Ясно, что дифференциальное уравнение имеет не единственное решение. Если известно, что функция удовлетворяет дифференциальному уравнению, то этим она полностью не определяется. Степень произвола в отыскании этой функции, если она зависит от одной переменной, а уравнение есть обыкновенное дифференциальное уравнение, известна. Общее решение такого уравнения содержит столько произвольных постоянных, каков порядок уравнения. Для нахождения определенного частного решения необходимо соответствующее число дополнительных условий.

При переходе к уравнениям с частными производными ситуация усложняется. Здесь понятие "общее решение"уже теряет свою определенность. Поэтому в теории дифференциальных уравнений с частными производными не ставится задача описания всей совокупности решений уравнения, а находят вполне определенное решение. Для выделения такого решения из всей совокупности решений некоторого уравнения также нужны дополнительные условия. Эти дополнительные условия в случае с частными производными задаются на многообразиях меньшей размерности, чем область, где должно удовлетворяться уравнение. Эти многообразия представляют собой различные поверхности, плоскости, кривые.

Упомянутые дополнительные условия называются *краевыми.* Задача о нахождении функции, удовлетворяющей дифференциальному уравнению и краевым условиям, называется *краевой задачей.* Обычно она ставится следующим образом: задается область, в ней функция должна удовлетворять уравнению, а краевые условия ставятся на границе области. Если одна из независимых переменных играет роль времени, то часто краевые условия задаются при фиксированном значении этой переменной. Тогда они называются

начальными. В противоположность этому краевые условия, не связанные с этой переменной, называют *граничными.*

Приведем примеры краевых задач. Пусть задана область Ω в R^n и функции f, u_0 u_1, φ. Следующие задачи о нахождении функции являются классическими задачами математической физики:

задача Дирихле для уравнения Пуассона

$$-\Delta u = f \quad (x \in \Omega), \quad u = f \quad (x \in \partial\Omega);$$

задача Неймана для уравнения Пуассона

$$-\Delta u = f \quad (x \in \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \varphi \quad (x \in \partial\Omega);$$

задача Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\Delta u = f \quad (x \in R^n, \ t > 0), \quad u = u_o \quad (t = 0);$$

задача Коши для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\Delta u = f \quad (x \in R^n, \ t > 0),$$

$$u = u_o, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = u_1 \quad (t = 0);$$

первая смешанная задача для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\Delta u = f \quad (x \in \Omega, \ t > 0),$$

$$u = u_o \ (x \in \Omega, \ t = 0), \quad u = \varphi \ (x \in \partial\Omega, \ t > 0);$$

вторая смешанная задача для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\Delta u = f \quad (x \in \Omega, \ t > 0),$$

$$u = u_o \ (x \in \Omega, \ t = 0), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \varphi \ (x \in \partial\Omega, \ t > 0);$$

первая смешанная задача для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f \quad (x \in \Omega,\ t > 0),$$

$$u = u_o, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = u_1 (x \in \Omega,\ t = 0), \quad u = \varphi \quad (x \in \partial\Omega,\ t > 0);$$

вторая смешанная задача для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f \quad (x \in \Omega,\ t > 0),$$

$$u = u_o, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = u_1 \quad (x \in \Omega,\ t > 0), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \varphi \quad (x \in \partial\Omega,\ t > 0).$$

Краевые условия при $t = 0$ здесь носят характер начальных, а при $x \in \partial\Omega$ – граничных.

Каждой из приведенных краевых задач можно дать физическую интерпретацию. Например, задача Дирихле для уравнения Лапласа может быть истолкована как задача об отыскании электрического потенциала внутри тела Ω, если потенциал на границе задан. Задача Коши для уравнения теплопроводности может быть истолкована как задача о нахождении температуры пространства R^n, если задана начальная температура при $t = 0$. Первая смешанная задача для волнового уравнения при $n = 2$ и $\varphi = 0$ интерпретируется как задача об исследовании мембраны с закрепленным краем при заданном внешнем воздействии и начальных отклонений u_0 и скорости u_1. Разумеется, эти интерпретации не являются единственно возможными.

Весьма важным и тонким является вопрос о числе и характере тех краевых условий, которые обеспечивают однозначную разрешимость задачи. Условий должно быть "не слишком мало", чтобы устранить неоднозначность решения, и "не слишком много", чтобы решение существовало. Кроме того, краевые условия должны быть согласованы с уравнением. Иногда их можно установить из физических соображений. Но отыскание корректной постановки краевых условий только с помощью физической интуиции в достаточно сложных случаях может привести к ошибкам.

Современная теория дифференциальных уравнений с частными производными располагает средствами для нахождения правильных формулировок краевых задач для достаточно широкого класса уравнений.

§ 4. Понятие об обратных задачах

Введем теперь понятие об обратных задачах математической физики.

Пусть, например, рассматривается задача об отыскании решения стационарного уравнения диффузии

$$-a\Delta u + bu = f(x) \ \text{ в } \ \Omega \tag{5}$$

при граничном условии

$$u = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega \equiv \Gamma, \tag{6}$$

где $a = const > 0$, $b = const \geq 0$, $f(x) \in L_2(\Omega)$ – заданная функция, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, Ω – ограниченная область из $\mathbf{R}^n$ с границей $\partial\Omega \equiv \Gamma$. Уравнение (5) (как равенство) рассматривается в $L_2(\Omega)$. Функцию $u(x)$ ищем среди дважды непрерывно дифференцируемых в Ω функций (т.е. $u \in C^{(2)}(\Omega)$), удовлетворяющих граничному условию (6).

Введем операторную форму записи задачи (5), (6). Для этого обозначим через L *отображение* (*оператор*), задаваемое следующим образом: $Lu \equiv -a\Delta u + bu$, которое определено на множестве $D(L) \equiv \{u(x) : u \in C^{(2)}(\Omega) \bigcap C(\bar{\Omega}),\ u = 0 \text{ на } \Gamma\}$, называемом *областью определения* оператора L. Считаем, что L действует из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ (или, кратко, $L : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$), т.е. и функции из области определения $D(L)$, и функции из области значений $R(L) \equiv$

$\equiv \{v : v \equiv Lu \ \forall u \in D(L)\}$ оператора L рассматриваются как элементы пространства $L_2(\Omega)$. Теперь задачу (5), (6) можно записать в виде одного операторного уравнения:

$$Lu = f \quad \text{в} \quad L_2(\Omega). \tag{7}$$

Задачу отыскания решения уравнения при заданной функции f — функции исходных данных — называют *прямой задачей.*

Но может оказаться, что функция f или часть этой функции также неизвестна. Например, пусть функция $f(x)$ в задаче (5), (6) представляется в виде $f(x) = f_0(x) + \chi_C(x)v(x)$, где $f_0(x)$ — заданная функция на Ω, $\chi_C(x)$ — характеристическая функция подобласти $\Omega_C \subset \Omega$, а $v(x)$ — неизвестная функция, т.е. рассматривается задача, в которой $f_0(x)$ локально возмущается неизвестной функцией $v(x)$. В этом случае уравнение (7) представляет собой задачу с двумя неизвестными $u(x)$ и $f(x) = f_0 + \chi_C v$, т.е. имеем одно уравнение с двумя неизвестными, причем здесь в качестве *дополнительной неизвестной* выступает функция, входившая в исходные данные в прямой задаче. Такие задачи, т.е. задачи, в которых часть исходных данных из прямой задачи также неизвестны, выступают в качестве дополнительных неизвестных, подлежащих определению вместе с решением u уравнения (7), называют *обратными задачами.* Отметим, что в обратных задачах математической физики в качестве дополнительных неизвестных, могут выступать функции *правых частей уравнений, функции начальных или граничных условий, коэффициенты уравнений* и др. Чтобы замкнуть систему уравнений с основными неизвестными (выше это была функция $u(x)$) и дополнительными (это функция $f(x)$, а точнее, ее часть $\chi_C v(x)$), вводят *дополнительные уравнения* (*уравнения замыкания*). Пусть в случае уравнения (7) в качестве такого уравнения принимается уравнение вида

$$Cu = \varphi_{ob} \tag{8}$$

где C — некоторый оператор (оператор наблюдения), φ_{ob} — заданная функция. Оператор C может действовать уже в другом пространстве (отличном от пространства, в котором рассматривается уравнение (7)).

После того как уравнение замыкания введено, *обратная задача формулируется следующим образом*: требуется найти u и v, такие, что выполняются следующие уравнения

$$\begin{cases} Lu = f_0 + Bv \\ Cu = \varphi_{ob}, \end{cases} \tag{9}$$

где B есть оператор (в случае уравнения (7)) умножения на характеристическую функцию χ_C : $Bv \equiv \chi_C v$. Простейшим примером оператора C является тождественный оператор, т.е. $C = I$, когда второе уравнение из (9) принимает вид: $u = \varphi_{ob}$ в Ω, где $\varphi_{ob}(x)$ — заданная функция из $L_2(\Omega)$. И уже в этом простейшем примере возникает трудность, типичная для задач типа (9): так, если $\varphi_{ob} \in L_2(\Omega)$, тогда как u ищется среди функций из $D(L)$, т.е. обладает дополнительной гладкостью по сравнению с φ_{ob} и удовлетворяет определенным граничным условиям, то сразу можно сделать заключение, что задача (9) в общем случае может не иметь классического решения, т.е. решения, удовлетворяющего почти всюду в Ω уравнениям (9). Поэтому для исследования разрешимости такой задачи необходимо вводить обобщения понятия решения, применять специальные подходы в исследованиях и приближенном решении таких задач.

К системе (9) мы пришли, рассматривая обратную задачу для уравнения (7). Однако *в форме* (9) *могут быть записаны многие важные прикладные задачи: разнообразные обратные задачи математической физики, задачи точного управления, задачи идентификации, ..., задачи усвоения данных измерений* (*наблюдений*). В определенном смысле все эти задачи могут рассматриваться как представители класса обратных задач, записанных в операторной форме (9), с операторами L, B, C, действующими в некоторой системе функциональных пространств. Первое уравнение из (9) часто называют *основным уравнением* (*уравнением состояния*), тогда как второе уравнение из (9) — *дополнительным уравнением* (*уравнением замыкания, уравнением наблюдения и др.*) Интерпретация "дополнительной неизвестной" v в этих задачах может быть различной: так, в задачах управления это есть *управление*, тогда как в обратных задачах v представляет собой одно из исходных данных прямой задачи, которое здесь также неизвестно и которое условно можно называть *управлением.* Функция (элемент) φ_{ob} также может иметь различную интерпретацию в задачах вида (9). Так, в задачах усвоения данных измерений элемент φ_{ob} построен на основе реальных данных измерений, тогда как в задачах управления φ_{ob} может рассматриваться как желаемое состояние, т.е. состояние, которое мы хотим иметь в качестве значения оператора C на решении уравнения состояния (другими словами, чтобы имело место уравнение $Cu = \varphi_{ob}$).

Таким образом, система (9) представляет собой класс задач математической физики, который мы будем рассматривать как класс обратных задач. В следующем разделе приводятся простые примеры задач, входящих в этот класс, и которые (при подходящем выборе операторов и пространств) могут быть записаны в виде системы (9).

§ 5. Примеры обратных задач и задач управления

Приведем примеры задач, которые входят в класс задач вида (9) и которые изучаются в последующем. При этом мы будем приводить упрощенные постановки этих задач — с постоянными коэффициентами, гладкими границами областей и т.п. Однако, как будет видно из дальнейшего, переформулировка этих задач для более практического случая не представляет труда.

В качестве первого примера рассмотрим задачу (5), (6),

(8), которая уже обсуждалась выше, и обозначения, применяемые в ней, введены ранее.

Пример 1 ("Задача о внутренних источниках"). Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $\partial\Omega \equiv \Gamma$ — граница области Ω, $\Omega_C \subseteq \Omega$, χ_C — характеристическая функция подобласти Ω_C. Требуется найти $u(x) \in D(L)$ и функцию $v(x)$ в подобласти Ω_C, такие, что $v(x) \in L_2(\Omega)$, и почти всюду удовлетворяются уравнения вида

$$\begin{gathered} Lu \equiv -a\Delta u + bu = f + \chi_C v \text{ в } \Omega, \\ u = 0 \text{ на } \Gamma, \;\; u = \varphi_{ob} \text{ на } \Omega, \end{gathered} \tag{10}$$

где $a, b = const > 0$, $D(L) = \{u : u \in C^{(2)}(\Omega) \bigcap C(\bar{\Omega}),\ u = 0$ на $\Gamma\}$, $L : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$, $f(x)$ — заданная функция "внутренних источников", $v(x)$ — неизвестная функция "дополнительных"источников в Ω_C. $\varphi_{ob} \in L_2(\Omega)$ — заданная, наблюдаемая ("желаемая") функция. (Отметим, что $\chi_C v = 0$ в $\Omega \backslash \Omega_C$, поэтому для определенности в данной задаче можно считать, что $v \equiv 0$ на $\Omega\backslash\Omega_C$, и искать неизвестную v в подпространстве $L_2^{(C)} \equiv \{v \in L_2(\Omega) : v \equiv 0 \text{ на } \Omega\backslash\Omega_C\}$.)

Если ввести операторы (отображения) B, C следующим образом: $Bv \equiv \chi_C v$, $Cu \equiv u$ (т.е. $C = I$ — тождественный оператор), то задачу (10) можно записать в виде

$$Lu = f + Bv, \quad Cu = \varphi_{ob}. \tag{11}$$

Обратим внимание на то, что *если $\varphi_{ob} \in L_2(\Omega)$, то в общем случае нельзя подставлять φ_{ob} непосредственно в первое уравнение из* (11) — *уравнение состояния — с целью отыскания дополнительного неизвестного $v(x)$*. Поэтому исследование разрешимости и построение методов приближенного решения этой задачи требует специальных подходов. ■

Пример 2 ("Задача о локальном граничном управлении", "обратная задача о граничной функции"). Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, $\Gamma \equiv \partial\Omega$ — граница Ω, Γ_1 — часть границы

Γ, $\Gamma_2 \equiv \Gamma \backslash \Gamma_1$, $x = (x_1, x_2) \in \bar{\Omega} \equiv \Omega \bigcup \Gamma$. Рассмотрим следующую задачу: требуется найти $u(x)$ в Ω и $v(x)$ на Γ_1, такие, что

$$-a\Delta u + bu = f(x) \text{ на } \Omega,$$
$$a\frac{\partial u}{\partial n} = v \text{ на } \Gamma_1, \quad a\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma_2,$$

где $a, b = const > 0$, $f(x)$ — заданная функция из $L_2(\Omega)$. При этом требуется удовлетворение почти всюду на Γ_2 следующему дополнительному условию вида:

$$u = \varphi_{ob} \text{ на } \Gamma_2.$$

В обобщенной форме эту задачу можно записать следующим образом: требуется найти $u \in W_2^1(\Omega), v$, такие, что

$$\begin{gathered} a(u,w) \equiv (a\nabla u, \nabla w)_{L_2(\Omega)} + (bu, w)_{L_2(\Omega)} = \\ = (f, w)_{L_2(\Omega)} + (v, w)_{L_2(\Gamma_1)}, \ \forall w \in W_2^1(\Omega), \\ u = \varphi_{ob} \text{ на } \Gamma_2, \end{gathered} \tag{12}$$

где

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right), \quad (u,w)_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega uw\,dx,$$

$$W_2^1(\Omega) \equiv H^1(\Omega) = \{u(x) : \|u\|_{W_2^1}(\Omega) \equiv$$
$$\equiv (\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u\|^2_{L_2(\Omega)})^{1/2} < \infty\},$$

или в операторной форме вида (11), где операторы L, B, C определяются следующим образом:

$$(Lu, w) \equiv a(u,w) \ \forall u, w \in W_2^1(\Omega).$$

$$(Bv, w) \equiv (v, w)_{L_2(\Gamma_1)} = \int_{\Gamma_1} vw\,d\Gamma \ \forall v, w \in W_2^1(\Omega),$$

$$Cu \equiv u \text{ на } \Gamma_2. \ \blacksquare$$

Пример 3 ("Задача точного управления").
Рассматривается нестационарная задача: требуется найти $u(x,t)$, $v(x)$ такие, что

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (\underline{U}, \nabla)u - a\Delta u + bu = f(x,t) \\ \qquad\qquad \text{в } Q_T \equiv \Omega \times (0,T), \\ u = 0 \text{ на } \Gamma, \quad \forall t \in (0,T), \\ u(x,0) = v(x) \text{ в } \Omega, \ u(x,T) = \varphi_{ob}(x), \end{cases} \tag{13}$$

где $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $\Gamma \equiv \partial\Omega$, $T < \infty$, $\underline{U} = (U_1, U_2, \ldots, U_n)$ — заданная вектор-функция, $(\underline{U}, \nabla) = \sum_{i=1}^n U_i \partial/\partial x_i$, $a, b = const > > 0$, $f(x,t)$, $\varphi_{ob}(x)$ — заданные функции. Последнее уравнение здесь есть дополнительное уравнение, требующее, чтобы траектория, описываемая решением уравнения состояния $u(x,t)$, попала в заданное состояние φ_{ob} в момент времени $t = T$ (Рис. 1).

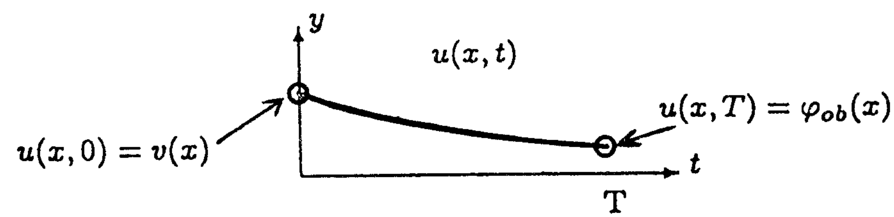

Рис. 1

Задачу (13) называют также задачей идентификации начального условия или задачей о финальном наблюдении. Ее можно также записать в операторной форме (11). Однако для простоты здесь (так же как и в следующих двух примерах) мы этого делать не будем, а сделаем в четвертой главе данной книги при изучении подобных задач. $\blacksquare$

Пример 4 ("Задача усвоения данных измерений").
Пусть рассматривается нестационарная задача вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (\underline{U}, \nabla)u - a\Delta u + bu = f(x,t) \text{ в } Q_T, \\ u = 0 \text{ на } \Gamma, \ u(x,0) = v(x) \text{ в } \Omega, \end{cases} \tag{14}$$

(где основные обозначения введены в примере 3) с дополнительной неизвестной $v(x)$ — функцией начального состояния. Предположим, что имеются данные измерений $\varphi_{ob}^{(i,j)}$, $i = 1, 2, \ldots, I$, $j = 1, 2, \ldots, J$, которые здесь для простоты будем считать значениями решения $u(x,t)$ задачи (14) в точках $\{(x_i, t_j)\}$. На основе этих данных измерений можно ввести следующее уравнение замыкания

$$Cu = \varphi_{ob} \tag{15}$$

где

$$Cu \equiv (u(x_1, t_1), u(x_2, t_1), \ldots, u(x_I, t_J)),$$
$$\varphi_{ob} \equiv (\varphi_{ob}^{(1,1)}, \varphi_{ob}^{(2,1)}, \ldots, \varphi_{ob}^{(I,J)}).$$

(Обратим внимание на то, что здесь оператор C имеет область определения $D(C) \equiv D(L)$, состоящую из достаточно гладких функций, и действует из $L_2(\Omega)$ в евклидово пространство $\mathbf{R}^N$, где $N = I \cdot J$.) Теперь задача формулируется так: требуется найти решение уравнения состояния $u(x,t)$, функцию начального состояния $v(x)$ так, чтобы выполнялись уравнения (14), (15).

Отметим, что формулировка "задача усвоения данных измерений" исходит из задач геофизической гидродинамики, в которых на основе спутниковых и других измерений (наблюдений) необходимо восстановить (хотя бы приближенно!) те или иные данные задач, в частности функции начального состояния рассматриваемой системы. Однако в прикладных проблемах из других областей "задача усвоения данных измерений"может носить название "задача идентификации начального состояния"или "обратная задача о начальном состоянии"(см. пример 3). ■

Пример 5 ("Задача управления интенсивностью источников"). В проблемах охраны окружающей среды представляют практический интерес задачи следующего типа. Предположим, что концентрация некоторых частиц (загрязнений и т.п.) в области $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ при $t \in (0,T)$ задается решением $u(x,t)$ задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (\underline{U}, \underline{\nabla})u - a\Delta u + bu = f + \chi_C(x)v(x,t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{в } Q_T = \Omega(0,T), \\ u = 0 \text{ на } \Gamma, \quad t \in (0,T), \\ u(x,0) = u_{(0)}(x) \text{ в } \Omega, \end{cases} \tag{16}$$

где основные обозначения введены в примере 3; $f(x,t)$ — заданная функция (функция основных источников в Q_T); $u_{(0)}(x)$ — заданная функция начального распределения частиц в Ω; $\chi_C(x)$ — характеристическая функция некоторого множества Ω_C (не обязательно связного!) из Ω, в котором действуют источники частиц интенсивности $v(x,t)$, которую необходимо определить вместе с $u(x,t)$. При этом требуется выбрать $v(x,t)$ в $\Omega_C \times (0,T)$ такой, чтобы выполнялось условие $u(x,t) = \varphi_{ob}(x,t)$ в $\Omega_{ob} \times (0,T)$, где Ω_{ob} — некоторое другое множество из Ω (вообще говоря, не совпадающее с Ω_C) (характеристическую функцию которой обозначим через $\chi_{ob}(x)$), $\varphi_{ob}(x,t)$ — заданная функция. Например, φ_{ob} есть безопасный уровень концентрации частиц в $\Omega_{ob} \times (\Omega, T)$. На основе этого уравнения введем следующее дополнительное уравнение (уравнение замыкания):

$$Cu = \chi_{ob}\varphi_{ob} \text{ в } Q_T, \tag{17}$$

где $Cu \equiv \chi_{ob}u$. Окончательно задача о выборе интенсивности источников — "задача управления интенсивностью источников", формулируется так: требуется найти $u(x,t)$ в Q_T, $v(x,t)$ в $\Omega_C \times (0,T)$ такие, что выполняются уравнения (16) и дополнительное уравнение (17).

Если функция φ_{ob} есть *реально* наблюдаемая концентрация частиц в $\Omega_{ob} \times (0,T)$, вызванная неизвестными источниками в $\Omega_C \times (0,T)$ с неизвестной интенсивностью $v(x,t)$, то *задача* (16), (17) *представляет собой обратную задачу об определении интенсивности локализованных источников частиц.* Таким образом, эту задачу можно рассматривать как задачу управления или как обратную задачу, в зависимости от интерпретации функций $\varphi_{ob}(x,t)$ и $v(x,t)$. ■

Задачи в приведенных примерах 1–5 легко можно переформулировать для уравнений состояний с переменными коэффициентами, для систем уравнений, для других дополнительных уравнений и т.д., с учетом специфики исследуемой проблемы.

§ 6. Задачи оптимального управления как форма обобщенных постановок задач

Рассмотрим систему уравнений типа (9) или (11)

$$Lu = f + Bv, \quad Cu = \varphi_{ob} \tag{18}$$

с неизвестными u, v, с операторами L, B, C, действующими в некоторой системе пространств с заданными f и φ_{ob}. Будем считать, что области определения операторов L, C совпадают, эти операторы действуют в одном и том же пространстве $L_2(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, а областью определения оператора B является либо все пространство $L_2(\Omega)$, либо множество $D(B)$, плотное в $L_2(\Omega)$.

Если считать элемент v известным, $F \equiv f + Bv$ принадлежащим области значений оператора L, а оператор L обратимым[1], можно представить решение первого уравнения из (18) как $u = L^{-1}(f + Bv)$, где L^{-1} – оператор, обратный к L (разрешающий оператор). Если элемент v неизвестен, но на элементе $F = f + Bv$ возможно обращение оператора L, пусть даже в некотором обобщенном смысле, то можно снова записать в виде $u = L^{-1}(f + Bv)$. Подставив это выражение во второе уравнение из (18), получаем уравнение

[1]Это предположение для уравнения состояния, как правило, вводится для всех дальнейших рассуждений в книге, это относит проблему разрешимости уравнений вида $Lu = F$ к проблемам, связанным с обычными прямыми задачами.

для дополнительной неизвестной v

$$Av = g, \tag{19}$$

где $A = CL^{-1}B$, $g = \varphi_{ob} - CL^{-1}f$. Таким образом, при сделанном выше предположении о разрешимости уравнения $Lu = F$ для фиксированного элемента F, задачи (18), (19) можно считать эквивалентными. Действительно, если u, v удовлетворяют системе (18), то v удовлетворяет (19). С другой стороны, если v есть решение уравнения (19), т.е. $CL^{-1}(f + Bv) = \varphi_{ob}$, то, вводя обозначение $u \equiv L^{-1}(f + Bv)$, заключаем, что u, v есть решение системы (18). Из изложенного следует, что *исследование задачи* (18) *и построение методов ее приближенного решения можно осуществить, изучая уравнение для дополнительной переменной* v.

Как отмечалось в примере 1, задачи вида (18), а значит и уравнение (19), даже в простых случаях могут не иметь классического решения. Поэтому возникает естественная необходимость введения обобщенной постановки задачи. Рассматривая первое уравнение – уравнение состояния в прежней форме $Lu = f + Bv$, второе уравнение из (18) заменим соотношением вида $\inf\limits_v = \|Cu - \varphi_{ob}\|^2$, где зависимая переменная $u = u(v)$ связана с независимой переменной v уравнением состояния, $\|\cdot\| \equiv \|\cdot\|_{L_2}$. Таким образом, *задача* (18) *заменяется простейшей задачей оптимального управления* вида: требуется найти u и управление (дополнительное неизвестное) v такие, что

$$Lu = f + Bv, \quad \inf_v = J_0(u(v)) \tag{20}$$

при специальном функционале стоимости (функции стоимости) $J_0(u(v)) \equiv \|Cu - \varphi_{ob}\|^2 \geq 0$. Легко заметить, что задача (20) может рассматриваться как *обобщенная постановка задачи* (18). Действительно, если u, v есть решение задачи (18), то $J_0(u(v))$ принимает на u, v наименьшее значение $J_0(u(v)) = 0$, т.е. решение u, v включается во множество решений задачи (20), которое может быть не пустым и содержать более чем одну пару элементов u, v даже в случае, когда задача (18) не имеет классического решения.

Поскольку $u = L^{-1}(f + Bv)$, $J_0(u(v)) \equiv J_0(v) \equiv \equiv \|Av - g\|^2$, то заключаем, что задача (20) есть запись уравнения (19) в виде *проблемы минимизации функционала невязки:*

$$\inf_v = \|Av - g\|^2. \tag{21}$$

Задачу (20) можно рассматривать в качестве одного представителя *следующего семейства задач оптимального управления:*

$$Lv_\alpha = f + Bv_\alpha, \quad \inf_{v_\alpha} = J_\alpha(v_\alpha, u_\alpha), \tag{22}$$

зависящго от числового параметра $\alpha \geq 0$ с функционалом стоимости $J_\alpha(v_\alpha, u_\alpha)$ вида

$$J_\alpha(v_\alpha, u(v_\alpha)) \equiv \alpha\|v_\alpha\|^2 + \|Cu_\alpha - \varphi_{ob}\|^2, \tag{23}$$

где $u_\alpha \equiv u(v_\alpha)$, поскольку задачи (20), (22) при $\alpha = 0$ совпадают. В свою очередь, поскольку $u_\alpha = L^{-1}(f + Bv_\alpha)$, то задачу (22) можно записать в виде следующей проблемы минимизации:

$$\inf_{v_\alpha} = \alpha\|v_\alpha\|^2 + \|Av_\alpha - g\|^2 \equiv J_\alpha(v_\alpha). \tag{24}$$

Итак, из изложенного выше следует, что *задачи* (22), (23) *при* $\alpha = 0$ *можно рассматривать как обобщенные постановки задач* (18), (19). *Кроме того, как мы установим в дальнейшем, решения задач* (22), (23) *при положительном, но достаточно малом значении* α, *при выполнении некоторых дополнительных ограничений могут браться в качестве приближений к обобщенным решениям задач* (18), (19).

Отметим принципиальные особенности задачи (22). В классических задачах оптимального управления функционал стоимости $J_\alpha(v_\alpha, u_\alpha)$ может иметь вид, отличный

от (23). Кроме того, слагаемое $\alpha\|v_\alpha\|^2$ в этих задачах часто имеет физическую (экономическую и т.п.) интерпретацию. При этом параметр α нередко является фиксированным и положительным. В задачах, которые будут изучаться в дальнейшем, функционал стоимости $J_\alpha(v_\alpha, u_\alpha)$ имеет специальный вид (типа (23)), но параметр α здесь не фиксируется и особенно важным является изучение проблемы сходимости решений задач (22), (23) при $\alpha \to +0$, т.к. именно при $\alpha = 0$ могут существовать обобщенные решения задач (18), (19). Таким образом, *задачи оптимального управления "специального"вида* (22) *и задачи минимизации* (24) *выступают в наших рассматриваемых проблемах как составляющие общей методологии исследования и приближенного решения класса задач вида* (18).

Отметим, что существенную роль в этой методологии будут играть *сопряженные операторы* $L^*, B^*, \ldots, A^*$ (определения и свойства которых будут даны в следующей главе) и *сопряженные уравнения.* Предположим, что v_α есть решение задачи (24), тогда необходимым условием будет

$$dJ_\alpha(v_\alpha + \varepsilon w)/d\varepsilon = 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon = 0$$

при произвольном элементе w из области определения $D(B)$ оператора B. Учитывая сделанные ранее предположения о $D(B)$ и вычисляя эту производную, получаем уравнение, которому удовлетворяет v_α (уравнение Эйлера, условие оптимальности)

$$\alpha v_\alpha + A^*Av_\alpha = A^*g, \tag{25}$$

где $A = CL^{-1}B$, A^* – оператор, сопряженный к A. Считая, что $(CL^{-1}B)^* = B^*L^{*-1}C^*$ и вводя функции $u_\alpha \equiv L^{-1}(f + Bv_\alpha)$, $q_\alpha \equiv L^{*-1}C^*(Cu_\alpha - \varphi_{ob})$, уравнение (25) можно переписать в виде следующей *системы прямых и сопряженных уравнений* (вариационных уравнений, необходимых условий оптимальности, уравнений Эйлера) вида:

$$Lu_\alpha = f + Bv_\alpha, \quad L^* q_\alpha = C^*(Cu_\alpha - \varphi_{ob}), \quad \alpha v_\alpha + B^* q_\alpha = 0. \quad (26)$$

Обратим внимание на то, что в (26) *не присутствуют обратные операторы* L^{-1}, L^{*-1}. Это дает нам возможность рассматривать широкий класс задач с операторами L, B, C достаточно общего вида. При этом переход к задачам (21), (24) и уравнению (25) (и его частному случаю $A^*Av_0 = A^*g$ при $\alpha = 0$) есть один из этапов изучения исходной задачи. Формулировка итерационных алгоритмов построения приближенных решений этих задач можно осуществить, используя ту же самую идею: *рассматривая уравнение* (25), *записываем и исследуем подходящий итерационный алгоритм, а затем записываем его в виде систем типа* (26), *которые и реализуются подходящими методами решения "обычных"задач математической физики.*

Таким образом, взаимосвязь рассматриваемых нами задач, уравнений, методов их исследования и решения можно представить в виде схемы на рис. 2.

Особо обратим внимание на то, что уравнение (25) возникает в известном *методе регуляризации А.Н. Тихонова* в применении к уравнению $Av = g$. Это говорит не только о глубокой взаимосвязи рассматриваемого нами класса задач с общей теорией обратных и некорректно поставленных задач, но и о том, что *при изучении и численном решении задач вида* (18): *задачи точного управления, задачи оптимального управления, ..., задачи усвоения данных измерений и др., необходимо учитывать и применять многие положения и подходы этой теории. С другой стороны, обратные задачи (даже достаточно общего вида!) можно изучать и решать, применяя методы оптимального управления с активным использованием теории сопряженных уравнений.*

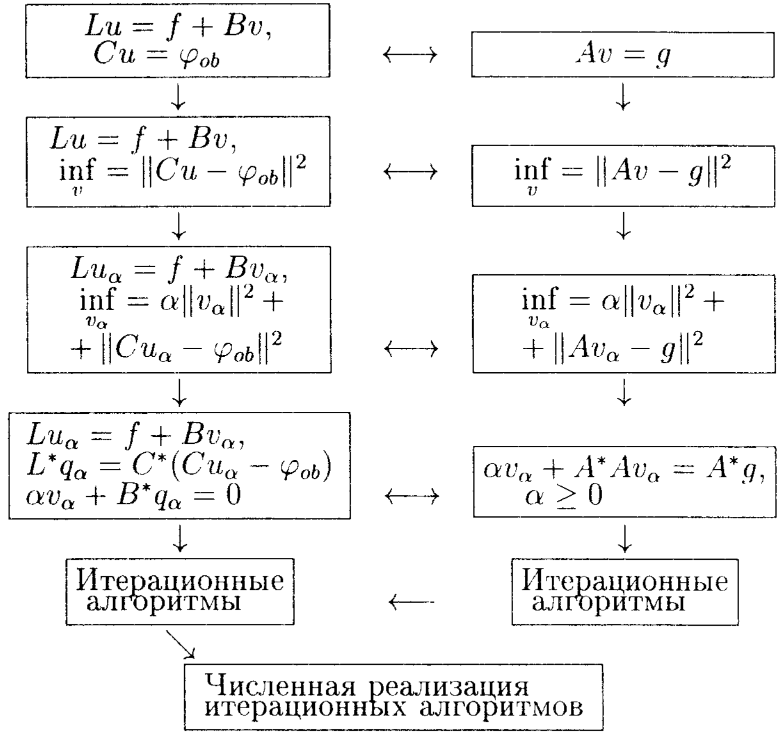

Рис. 2. Схема взаимосвязи задач и уравнений.

§ 7. Основные этапы исследования задач

Из предыдущего раздела уже можно наметить следующие основные этапы исследования и решения задач вида (18), которые будут применяться нами в дальнейшем.

1. После формулировки рассматриваемой задачи в виде (18) - выбора пространств, в которых действуют операторы L, B, C, задания области определения этих операторов и т.д. -- она переформулируется как задача оптимального управления и включается в семейство задач типа (22).

2. Исследуется проблема разрешимости задач (22), (24), а также вопросы существования решений уравнения (25)

при $\alpha = 0$ и делаются соответствующие выводы о разрешимости системы (26) и задачи (18).

3. При необходимости проводится изучение дополнительных свойств операторов $A, A^*, \alpha I + A^*A$ и формулируется подходящий итерационный алгоритм в применении к уравнению (25); оценивается и оптимизируется скорость сходимости этого алгоритма; в последующем данный алгоритм выписывается в терминах уравнений системы (26) и, как следствие полученных для (25) результатов, делаются соответствующие выводы о сходимости решений, получаемых в итерационном процессе к решению исходной задачи (18).

При рассмотрении отмеченных выше основных этапов, применяемых в данной книге, используются факты и положения из ряда разделов математики: функционального анализа, теории разрешимости операторных уравнений в банаховых пространствах, теории оптимального управления, теории обратных задач, общей теории итерационных алгоритмов. Эти факты и положения в основном приводятся без доказательств во второй главе настоящей книги.

В третьей главе изучается разрешимость рассматриваемого нами класса задач при введении подходящих ограничений. Устанавливается сходимость (в том или ином смысле!) решений $u_\alpha, q_\alpha, v_\alpha$ при $\alpha \to +0$ к решению исходных задач и формулируются итерационные алгоритмы решения рассматриваемых задач.

Четвертая глава посвящена приложению общей методологии, используемой в настоящей книге, к изучению и формулировке методов приближенного решения ряда конкретных обратных задач математической физики, задач управления, задач усвоения данных измерений.

В заключительной главе формулируются некоторые из подходов распространения рассматриваемых в книге методов на нелинейные задачи.

В список литературы включены в основном учебники и монографии, в которых можно найти факты и положения, приводимые без доказательств во второй главе книги, а также оригинальные статьи, которые легли в основу многих разделов настоящей книги.

Глава 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ, ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ И ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Приведём вспомогательные сведения из ряда разделов математики, которые используются в подходах и методах, рассматриваемых в последующих главах. Доказательства приводимых в этой главе утверждений можно найти в соответствующей научной литературе [7–10, 13, 17, 18, 21, 22, 26, 32, 46, 60].

§ 1. Сведения из теории линейных пространств

1.1. Нормированные пространства

Пусть X есть линейное множество. Говорят, что на X введена норма $\|\cdot\|_X$, если каждому элементу $f \in X$ поставлено в соответствие неотрицательное число $\|f\|_X$ (*норма* f) так, что выполнены следующие три аксиомы: а) $\|f\|_X \geq 0$, $\|f\|_X = 0$ тогда и только тогда, когда $f = 0$; б) $\|\lambda f\|_X = |\lambda|\|f\|_X$, где λ – любое комплексное число; в) $\|f+g\|_X \leq \|f\|_X + \|g\|_X$ (неравенство треугольника). Всякое линейное множество, снабженное нормой, называется *линейным нормированным пространством*.

Пусть X – линейное нормированное пространство. Последовательность $x_n \in X$ называется *фундаментальной* (*сходящейся в себе*), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N = N(\varepsilon)$, что для любого $n > N$ и для всех натуральных p выполняется неравенство $\|f_{n+p} - f_n\| < \varepsilon$. Пространство X называется *полным*, если в нем всякая фундаментальная последовательность сходится. Полное линейное нормированное пространство называется *банаховым*.

Пусть X линейное нормированное пространство. Множество $A \subset X$ называется *компактным*, если каждая последовательность его элементов содержит подпоследовательность, сходящуюся к элементу из X.

Две нормы $\|f\|_1$ и $\|f\|_2$ в линейном пространстве X называются *эквивалентными*, если существуют такие числа $\alpha > 0$, $\beta > 0$, что для любого $f \in X$ выполняется неравенство $\alpha\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \beta\|f\|_1$

Линейные нормированные пространства X и Y называются *изоморфными*, если на всем X определено отображение $J: X \to Y$, являющееся линейным, осуществляющее изоморфизм X и Y как линейных пространств и такое, что существуют такие постоянные $\alpha > 0$, $\beta > 0$, что для любого $f \in X$ выполняется неравенство $\alpha\|f\|_X \leq \|J(f)\|_Y \leq \beta\|f\|_X$. Если $\|J(f)\|_Y = \|f\|_X$, то пространства X и Y называются *изометричными*.

Линейное нормированное пространство X называется *вложенным* в линейное нормированное пространство Y, если на всем X определено отображение $J: X \to Y$, являющееся линейным и взаимно однозначным на области значений причем существует такая постоянная $\beta > 0$, что для любого $f \in X$ выполняется неравенство $\|J(f)\|_Y \leq \beta\|f\|_X$.

Банахово пространство $\widehat{X}$ называется *пополнением* линейного нормированного пространства X, если X – линейное многообразие, всюду плотное в пространстве $\widehat{X}$. Каждое линейное нормированное пространство X имеет пополнение, и это пополнение единственно с точностью до изометрического отображения, переводящего X в себя.

Пример 1 (Пространство непрерывных функций $C(\overline{\Omega})$). Пусть Ω есть область из $\mathbf{R}^n$. Множество непрерывных на

$\overline{\Omega} = \partial\Omega \bigcup \Omega$ функций, для которых конечна норма

$$\|f\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |f(x)|,$$

называют *нормированным пространством* $C(\overline{\Omega})$. Известно, что пространство $C(\overline{\Omega})$ банахово. Очевидно, сходимость $f_k \to f$, $k \to \infty$ в $C(\overline{\Omega})$ эквивалентна *равномерной сходимости* последовательности функций f_k, $k = 1, 2, \ldots$, к функции $f(x)$ на множестве $\overline{\Omega}$. ■

1.2. Гильбертовы пространства

Пусть X есть линейное множество (вещественное или комплексное). Каждой паре элементов f, g из X поставим в соответствие комплексное число $(f, g)_X$, удовлетворяющее следующим аксиомам: а) $(f, f)_X \geq 0$; $(f, f)_X = 0$ при $f = 0$ и только в этом случае; б) $(f, g)_X = \overline{(g, f)}_X$ (черта означает комплексное сопряжение); в) $(\lambda f, g)_X = \lambda (f, g)_X$ для любого числа λ; г) $(f + g, h)_X = (f, h)_X + (g, h)_X$. При выполнении а)–г) число $(f, g)_X$ называется *скалярным* произведением элементов f, g из X.

Если $(f, g)_X$ есть скалярное произведение, то на X можно ввести норму, положив $\|f\|_X = (f, f)_X^{1/2}$. Аксиомы нормы а), б) очевидно выполнены, а третья аксиома вытекает из *неравенства Коши-Буняковского*

$$|(f, g)_X| \leq \|f\|_X \|g\|_X,$$

справедливого для произвольного скалярного произведения $(f, g)_X$ и нормы $\|f\|_X = (f, f)_X^{1/2}$, *порожденной скалярным произведением* $(f, g)_X$.

Если линейное пространство X с нормой $\|f\|_X = (f, f)_X^{1/2}$ является полным относительно этой нормы, то X называется *гильбертовым.*

Пусть X – пространство со скалярным произведением $(f, g)_X$. Если $(f, g)_X = 0$, то элементы f, g называются ортогональными и пишут $f \perp g$. Очевидно, что нуль пространства X ортогонален любому элементу из X.

Теорема 1. *Пусть M – замкнутое выпуклое множество в гильбертовом пространстве X и элемент $f \notin M$. Тогда существует такой единственный элемент $g \in M$, что*

$$\rho(f, M) = \|f - g\| \equiv \inf_{\tilde{g} \in M} \|f - \tilde{g}\|_X.$$

Элемент g называется *проекцией* элемента f на M.

Пример 2 (Пространство $L_2(\Omega)$). Совокупность всех функций $f(x)$, для которых функция $|f(x)|^2$ интегрируема по Лебегу на области Ω, обозначается через $L_2(\Omega)$. Скалярное произведение и норма в $L_2(\Omega)$ определяются по формулам

$$(f, g) = \int_\Omega f(x)\overline{g}(x)dx, \quad \|f\| = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} = (f, f)^{1/2},$$

после чего $L_2(\Omega)$ превращается в линейное нормированное пространство. *Пространство $L_2(\Omega)$ является гильбертовым пространством.* ■

1.3. Линейные операторы и функционалы

Пусть X, Y – линейные нормированные пространства, $D(A)$ – некоторое линейное множество из X, а $R(A)$ – линейное множество из Y. Пусть по некоторому правилу (закону) элементы из $D(A)$ переводятся в элементы $R(A)$. Тогда говорят, что задан оператор A с областью определения $D(A)$ и областью значений $R(A)$, действующий из X в Y, т.е. $A : X \to Y$. Если $Af = f$ при всех $f \in D(A)$, то A называется *тождественным* (*единичным*) оператором и обозначается через I.

Пусть X, Y – линейные нормированные пространства, A: $X \mapsto Y$ – отображение или *оператор*, определенный в окрестности точки $f_0 \in X$. Он называется *непрерывным в точке* f_0, если $Af \to Af_0$ при $f \to f_0$.

Пусть A – оператор с *областью определения* $D(A) \subset X$ и с *областью значений* $R(A) \subset Y$. Он называется *ограниченным*, если переводит любое ограниченное множество из $D(A)$ в множество, ограниченное в пространстве Y.

Пусть X, Y - линейные нормированные пространства, оба вещественные или оба комплексные. Оператор $A : X \to \to Y$ с областью определения $D(A) \subset X$ называется линейным, если $D(A)$ - линейное многообразие в X и для любых $f_1, f_2 \in D(A)$ и любых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ ($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}$) выполняется равенство $A(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 A f_1 + \lambda_2 A f_2$.

Множество $N(A) \equiv \ker(A) = \{f \in D(A) : Ax = 0\}$ называется *множеством нулей* или *ядром* оператора A.

Теорема 2. *Линейный оператор $A : X \mapsto Y$, заданный на всем X и непрерывный в точке $0 \in X$, непрерывен в любой точке $f_0 \in X$.*

Линейный оператор $A : X \mapsto Y$ с $D(A) = X$ называется *непрерывным*, если он непрерывен в точке $0 \in X$. Линейный оператор $A : X \to Y$ с $D(A) = X$ называется *ограниченным*, если существует $c \in \mathbf{R}$, $c > 0$ такое, что для любого $f \in \overline{S}_1(0) \equiv \{f : \ \|f\|_X \leq 1\}$ справедливо неравенство $\|Af\| \leq c$.

Теорема 3. *Линейный оператор $A : X \mapsto Y$ с $D(A) = X$ ограничен тогда и только тогда, когда для любого $f \in X$ выполняется неравенство $\|Af\| \leq c\|f\|$.*

Теорема 4. *Линейный оператор $A : X \mapsto Y$ с $D(A) = X$ непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.*

Нормой ограниченного линейного оператора $A : X \mapsto Y$ с $D(A) = X$ называется число $\|A\| = \sup\limits_{f \in X, \|f\| \leq 1} \|Af\|$.

Совокупность операторов из X в Y с конечной нормой образует линейное нормированное пространство ограниченных линейных операторов $\mathcal{L}(X, Y)$. Если $X = Y$, то пишут $\mathcal{L}(X, Y) \equiv \mathcal{L}(X)$.

Линейный оператор из X в Y называется *вполне непрерывным*, если он переводит каждое ограниченное множество из X в компактное множество из Y.

Отметим для дальнейшего следующие свойства вполне непрерывных операторов: 1) *если A – отличный от конечномерного вполне непрерывный оператор, действующий из X в Y, причем X, Y - бесконечномерны, а Y - банахово, то область значений оператора A не является замкнутым множеством, т.е. $R(A) \neq \overline{R(A)}$;* 2) *если A - вполне непрерывный оператор из бесконечномерного пространства X в нормированное пространство Y, причем на $R(A)$ существует A^{-1}, то A^{-1} неограничен на $R(A)$.*

Частным случаем линейных операторов являются линейные функционалы. Если линейный оператор l преобразует множество элементов $M \subset X$ в множество комплексных чисел lf, $f \in M$, т.е. $l : X \to \mathbf{C}$, то l называется *линейным функционалом* на множестве M; значение функционала l на элементе f - комплексное число lf будем обозначать через $(l, f) \equiv l(f) \equiv < f, l >$. Непрерывность линейного функционала l означает следующее: если $f_k \to 0$, $k \to \infty$ в M, то последовательность комплексных чисел (l, f_k), $k \to \infty$, стремится к нулю.

Пусть на линейном пространстве всех линейных функционалов на X вводится норма $\|l\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |(l, x)|$. Тогда совокупность ограниченных функционалов на X, т.е. таких функционалов, у которых норма конечна, образует банахово пространство, называемое *сопряженным* к X и обозначаемое через X^*.

Будем говорить, что последовательность $l_1, l_2, \ldots$ линейных функционалов на M *слабо сходится* к (линейному) функционалу l на M, если она сходится к l на каждом элементе f из M, т.е. $(l_k, f) \to (l, f)$, $k \to \infty$.

Последовательность $\{f_n\}$ элементов из X называется *слабо сходящейся* к $f_0 \in X$, если $\lim\limits_{n\to\infty}(l, f_n) = (l, f_0)$ для любого $l \in X^*$.

Пусть A — линейный оператор, определенный на множестве $D(A) \subset X$ и действующий в Y. Оператор A называется *замкнутым*, если для любой последовательности $\{f_n\}$ элементов $D(A)$, такой, что $f_n \to f_0 \in X$, $Af_n \to g_0 \in Y$, будет $f_0 \in D(A)$ и $Af_0 = g_0$. Оператор A называют *слабо замкнутым*, если для любой последовательности элементов $\{f_n\}$, такой, что f_n слабо сходится к $f_0 \in X$, а Af_n слабо сходится к $g_0 \in Y$, следует, что $f_0 \in D(A)$ и $Af_0 = g_0$.

Имеет место следующее утверждение: *если $D(A) = X$ и A ограничен, т.е. $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, то A замкнут.*

Если A — незамкнутый, то он может допускать замыкание. Оператор A называется *замыкаемым* (*или допускающим замыкание*), если он имеет замкнутое расширение. Наименьшее замкнутое расширение замыкаемого оператора называется *замыканием* этого оператора и обозначается символом $\bar{A}$. Замыкание $\bar{A}$ ограниченного оператора A с $\overline{D(A)} = \mathbf{X}$ можно осуществить следующим образом: для $u \in \mathbf{X}$ существует последовательность $\{u_n\}$ из $D(A)$ такая, что $u_n \to u$; тогда в силу ограниченности A имеем $Au_n \to g$ — некоторый элемент; полагают $\bar{A}u \overset{def}{=} g$. Может оказаться, что по этой же процедуре можно строить замыкания для неограниченных операторов.

Отметим также следующий факт: *линейный непрерывный оператор замкнут тогда и только тогда, когда замкнута область его определения.*

Если A незамкнут, но можно построить $\bar{A}$, то решение уравнения $\bar{A}u = f$ нередко называют обобщенным решением уравнения $Au = f$.

Приведем некоторые примеры линейных операторов и функционалов.

Пример 3. Линейный оператор вида

$$Kf = \int\limits_{\Omega} \mathcal{K}(x, y) f(y) dy, \quad x \in \Omega,$$

называется (линейным) *интегральным оператором*, а функция $\mathcal{K}(x, y)$ — его *ядром*. Если ядро $\mathcal{K} \in L_2(\Omega \times \Omega)$, т.е.

$$\int\limits_{\Omega\times\Omega} |\mathcal{K}(x, y)|^2 dx dy = C^2 < \infty,$$

то оператор K ограничен (и, следовательно, непрерывен) из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. ■

Пример 4. Линейный оператор вида

$$Af = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha D^\alpha f(x), \qquad \sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha(x)| \not\equiv 0, \quad m > 0,$$

называется (линейным) *дифференциальным оператором порядка* m, а функция $a_\alpha(x)$ – его *коэффициентами*. Если коэффициенты $a_\alpha(x)$ – непрерывные функции на области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, то оператор A переводит $C^m(\overline{\Omega}) = D(A)$ в $C(\overline{\Omega}) = R(A)$. Однако оператор A не является непрерывным из $C(\overline{\Omega})$ в $C(\overline{\Omega})$. Отметим также, что оператор A определен не на всем пространстве $C(\overline{\Omega})$, а лишь на его части – на множестве функций $C^m(\overline{\Omega})$. ■

Пример 5. Линейный оператор

$$Af = \sum_{|\alpha|\le m} \left[\int\limits_{\Omega} \mathcal{K}_\alpha(x, y) f(y) dy + a_\alpha(x) D^\alpha f(x) \right]$$

называется (линейным) *интегро-дифференциальным* оператором. ■

Пример 6. Примером линейного непрерывного функционала l на $L_2(\Omega)$ служит скалярное произведение $(l, f) = (f, g)$, где g - фиксированная функция из $L_2(\Omega)$. Линейность этого функционала следует из линейности скалярного произведения по первому аргументу, а в силу неравенства Коши-Буняковского он ограничен: $|(l, f)| = |(f, g)| \le \|g\| \cdot \|f\|$ и, следовательно, непрерывен. ■

Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, A: $X \mapsto Y$ — линейный оператор, отображающий $D(A)$ на $R(A)$ взаимнооднозначно. Тогда существует *обратный оператор* $A^{-1} : Y \to X$, отображающий $R(A)$ на $D(A)$ взаимно однозначно и также являющийся линейным.

Линейный оператор $A : X \to Y$ называется *непрерывно обратимым*, если $R(A) = Y$, A^{-1} существует и ограничен, т.е. $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

Теорема 5. *Оператор A^{-1} существует и ограничен на $R(A)$ тогда и только тогда, когда для некоторой постоянной $m > 0$ и любого $x \in D(A)$ выполняется неравенство $\|Ax\| \ge m\|x\|$.*

Теорема 6. *Пусть X, Y - банаховы пространства, $A \in \mathcal{L}(Y, X)$, $R(A) = Y$ и A обратим. Тогда A непрерывно обратим.*

Следующая теорема является одной из основных теорем функционального анализа, и она находит многочисленные приложения.

Теорема 7 (Ф. Рисса). *Пусть H — гильбертово пространство (комплексное или вещественное). Для любого линейного ограниченного функционала l, заданного всюду на H, существует единственный элемент $y \in H$ такой, что для всех $x \in H$ имеет место представление: $l(x) = (x, y)$. При этом $\|l\| = \|y\|$.*

Замечание. Теорема Рисса указывает на возможность установления взаимнооднозначного соответствия между пространствами H и H^*, сохраняющего норму. В вещественном случае это соответствие линейно. В комплексном случае это соответствие является полулинейным в следующем смысле: если $l_1 \longleftrightarrow y_1$, а $l_2 \longleftrightarrow y_2$, то $\beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 \longleftrightarrow \bar{\beta}_1 y_1 + \bar{\beta}_2 y_2$.

С точностью до этого взаимнооднозначного соответствия можно принять $H^* = H$, т.е. пространство, сопряженное к гильбертовому пространству H, совпадает с H. В этом смысле можно говорить о самосопряженности гильбертова пространства. Однако в ряде случае удобно работать с H и H^*, не отождествляя их. В случае, если $H \equiv H^*$, говорят, что гильбертово пространство H является *основным*. ■

Теорема Вишика-Лакса-Мильграма является обобщением теоремы Ф.Рисса о представлении линейного ограниченного функционала.

Теорема 8 (Вишика-Лакса-Мильграма). *Пусть H — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $\|\cdot\| = (\cdot, \cdot)^{1/2}$ и пусть $a(x, y)$ — билинейная форма, заданная на пространстве $H \times H$ и обладающая свойствами:*

1) *полуторалинейности*

$$a(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 a(x_1, y) + \alpha_2 a(x_2, y),$$
$$a(x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) = \bar{\beta}_1 a(x, y_1) + \bar{\beta}_2 a(x, y_2);$$

2) *ограниченности (H–ограниченности)*

$$|a(x, y)| \le r\|x\| \cdot \|y\|, \quad r = const;$$

3) *положительности (H–эллиптичности, H положительности)*

$$a(x, x) \ge s\|x\|^2, \quad s = const > 0.$$

Тогда каждый линейный ограниченный на H функционал $f(y)$ представляется единственным образом в виде $f(y) = a(y, u)$ с некоторым $u \in H$. При этом существует определенный единственным образом ограниченный линейный оператор A, обладающий ограниченным обратным оператором A^{-1}, такой, что $(y, Ax) = a(y, x)$ для всех x, y из H и $\|A^{-1}\| \le s^{-1}$, $\|A\| \le r$. ■

1.4. Сопряженные, симметричные и самосопряженные операторы

Важным в теории линейных операторных уравнений и их приложений является понятие *сопряженного оператора* A^*. В зависимости от типа рассматриваемых пространств оно может вводиться разными способами.

Пусть H — гильбертово пространство, $A : H \to H$ есть линейный оператор с областью определения $D(A)$, плотной в H, т.е. $\overline{D(A)} = H$. Рассмотрим линейный (по x) функционал вида $v(x) \equiv (Ax, v)$, где $(\cdot,\cdot) \equiv (\cdot,\cdot)_H$, $v \in H$. Может оказаться, что при некоторых v (например, при $v \equiv 0$) этот функционал будет линейным и ограниченным над $D(A)$, т.е. $|(Ax,v)| \le C\|x\|$, где $C = const < \infty$, $\|\cdot\| \equiv \equiv (\cdot,\cdot)^{1/2}$. Тогда в силу плотности $D(A)$ в H и теоремы Рисса о представлении линейного ограниченного функционала имеем $(Ax, v) = (x, U)$ с некоторым элементом U, единственным для каждого из таких v. Таким образом, на этих элементах v задается оператор, который обозначаем через $A^* : A^*v = U$, называемый оператором, *сопряженным к* A, и имеет место равенство

$$(Ax, v) = (x, A^*v) \tag{1}$$

– соотношение сопряженности. Множество таких элементов v обозначается через $D(A^*)$ и называется областью определения сопряженного оператора A^*. В силу того что $\overline{D(A)} = H$, получаем, что A^* — *единственный*.

Пусть теперь $A : X \to Y$, где X, Y — банаховы пространства и $\overline{D(A)} = X$. Рассмотрим линейный по x функционал $v \in Y^* : v(Ax) \equiv< Ax, v >$. Поскольку $x \in D(A)$, $Ax \in \in R(A) \subseteq Y$, $v \in Y^*$, то значение функционала $v(Ax)$ ограничено. Однако может оказаться, что при некоторых v функционал $v(Ax)$ будет ограниченным над X, т.е. будет иметь место соотношение $|< Ax, v >| \le C\|x\|_X$, где $C = const$, $\forall x \in D(A)$, т.е. $< Ax, v >$ есть линейный ограниченный

функционал над $X :< Ax, v >=< x, U >$, где $U \in X^*$. Элемент U единственный для каждого v (т.к. $\overline{D(A)} = X$). Следовательно, каждому элементу v поставлен в соответствие единственный элемент U. Это соответствие задает оператор A^*, *сопряженный к* A : $A^*v = U$, который действует из Y^* в X^*, и имеет место равенство

$$\begin{gathered}< Ax, v >=< x, A^*v >, \quad A : X \to Y, \quad A^* : Y^* \to X^* \\ \forall x \in D(A), \quad \forall v \in D(A^*),\end{gathered} \tag{2}$$

где $D(A^*)$ *есть область определения сопряженного оператора*, состоящая из множества элементов $\{v\}$, для которых это равенство имеет место. Отметим, что в редких случаях можно описать структуру $D(A^*)$ и свойства $D(A^*)$ (плотность в Y^* и т.п.). В связи с этой проблемой могут оказаться полезными следующие утверждения: 1) *если Y рефлексивно, то оператор A^*, сопряженный к замкнутому оператору A с плотной областью определения, имеет также плотную в Y^* область определения;* 2) *если $\overline{D(A)} = X$, то равенство $D(A^*) = Y^*$ имеет место тогда и только тогда, когда A ограничен на $D(A)$* (см. [26], § 5; [60], § 18.4). Далее, нередко можно построить *сужение* $\tilde{A}^*$ оператора A^* на заранее выбранное множество $\tilde{D} \subseteq D(A^*)$, для которых имеет место равенство (2) при $x \in D(A)$, $v \in \tilde{D}$. В этом случае получаем *сужение* $\tilde{A}^*$ оператора A^* на множество $\tilde{D} \equiv D(\tilde{A}^*)$. Оператор $\tilde{A}^*$ часто называют также *формально сопряженным* (*сопряженным по Лагранжу, ассоциированным*).

Теорема 9. A^* — *замкнутый линейный оператор.*

Теорема 10. *Равенство $D(A^*) = Y^*$ имеет место тогда и только тогда, когда A ограничен на $D(A)$. В этом случае $A^* \in \mathcal{L}(X^*, Y^*)$, $\|A^*\| = \|A\|$.*

Важными представителями линейных операторов являются *симметричные* и *самосопряженные* операторы.

Линейный оператор A называется *симметричным*, если $A \subset A^*$ (т.е. $D(A) \subset D(A^*)$ и $A = A^*$ на $D(A)$) и замыкание $D(A)$ совпадает с X, т.е. $\overline{D(A)} = X$. Линейный оператор A с

$\overline{D(A)} = X$ называется *самосопряженным*, если $A = A^*$, т.е. $A = A^*$ на $D(A)$ и $D(A) = D(A^*)$.

Если $A: H \to H$, H – гильбертово пространство, $\overline{D(A)} = H$, то равенство (1) для симметричного оператора принимает вид

$$(Ax, v) = (x, Av) \quad \forall x, v \in D(A). \tag{3}$$

которое часто принимается за определение симметричного оператора.

1.5. Положительные операторы и энергетическое пространство

Симметричный оператор A, действующий в некотором гильбертовом пространстве, называется *положительным*, если для любого элемента из области определения оператора справедливо неравенство: $(Au, u) \geq 0$, причем знак равенства имеет место только тогда, когда $u = 0$, т.е. когда u – нулевой элемент пространства.

Если A – положительный оператор, то скалярное произведение (Au, u) называется *энергией* элемента u по отношению к A.

Симметричный оператор A называется *положительно определенным*, если существует такая положительная постоянная γ, что для любого элемента u из области определения оператора A справедливо неравенство $(Au, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2$. Со всяким положительным (в частности, положительно определенным) оператором можно связать особое гильбертово пространство, которое называют *энергетическим пространством*. Пусть A – положительный оператор, действующий в некотором гильбертовом пространстве H, и пусть $M = D(A)$ область определения этого оператора. Введем на M новое скалярное произведение (которое будем обозначать квадратными скобками): если u и v элементы M, то положим $[u, v] = (Au, v)$. Величину $[u, v]$ назовем *энергетическим произведением* элементов u и v. Легко проверяется, что энергетическое произведение удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения.

В общем случае M неполное, по норме $|u| = [u, u]^{1/2}$ пополним его. Построенное таким образом новое гильбертово пространство называют *энергетическим пространством* и обозначают через H_A. Норму в энергетическом пространстве называют *энергетической нормой* и обозначают символом $|u|$. Для элементов области определения M оператора A энергетическая норма определяется формулой: $|u| = \sqrt{(Au, u)}$. Сходимость в энергетическом пространстве называется *сходимостью по энергии*. В случае положительной определенности оператора A имеем: $|u| \geq \gamma \|u\| \; \forall u \in D(A)$, то предельным переходом доказывается также соотношение $|u| \geq \gamma \|u\| \; \forall u \in H_A$, т.е. $H_A \hookrightarrow H$: H_A непрерывно и плотно вложено в H. (Если же оператор A является только положительным, то этого вложения в общем случае нет.)

Переход к энергетическому пространству часто осуществляют для доказательства существования обобщенного решения уравнения

$$Au = f \tag{4}$$

с симметричным положительно определенным оператором A с $\overline{D(A)} = H$ (где H считаем для простоты вещественным). При этом обобщенное решение можно ввести следующими двумя эквивалентными определениями.

Определение 1. Элемент $u \in H_A$ называется обобщенным решением уравнения (4), если

$$[u, v] = (f, v) \; \forall v \in H_A. \tag{5}$$

Определение 1$'$. Элемент $u \in H_A$ называется обобщенным решением уравнения (4), если

$$J(u) = \inf_{v \in H_A} J(v), \quad J(v) = [v, v] - (f, v) - (v, f). \tag{6}$$

Соотношение (5) получаем после скалярного умножения в H уравнения (4) на $v \in H_A$ и последующего предельного перехода от $u \in D(A)$ к $u \in H_A$ в полученном соотношении. Разрешимость (5) легко устанавливается на основе теоремы Рисса при $f \in (H_A)^*$, причем для обобщенного решения справедлива оценка: $|u| \le C\|f\|_{(H_A)^*}$. Это же обобщенное решение $u \in H_A$ является *критической точкой* функционала $J(v): \ J(u) = \inf_{v\in H_A} J(v)$, и на нем имеет место равенство нулю первой вариации функционала $J(v)$:

$$\delta J(u,v) \equiv \frac{dJ(u+\varepsilon v)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = 2([u,v]-(f,v)) = 0 \quad \forall v \in H_A, \tag{7}$$

т.е. *уравнение Эйлера* $\delta J(u,v)=0$ (*в обобщенной форме записи*) *совпадает с уравнением* (5) (с точностью до умножения на ненулевую постоянную).

1.6. Ортогональные дополнения

Пусть $X \equiv H$ — гильбертово пространство, причем $H \equiv H^*$, а L — линейное многообразие в H. Совокупность всех элементов из H к L называется *ортогональным дополнением к* L *и обозначается* $L^\perp$. Отметим следующие свойства $L^\perp$: 1) $L^\perp$ *является подпространством в* H; 2) L *плотно в* H *тогда и только тогда, когда* $L^\perp = \{0\}$.

Пусть теперь X - банахово пространство, M — линейное многообразие в X, а N — линейное многообразие в X^*. Вводят два типа ортогональных дополнений. Через $M^\perp$ обозначается множество элементов из X^*, ортогональных к M:

$$M^\perp = \{f \in X^* : < x, f >= 0 \ \forall x \in M\}.$$

Через ${}^\perp N \subset X$ обозначается множество элементов из X, ортогональных к N:

$${}^\perp N = \{x \in X : < x, f >= 0 \ \forall f \in N\}.$$

Если $X = H (\equiv H^*)$ — гильбертово пространство, то оба типа ортогональных дополнений совпадают с обычным ортогональным дополнением в самосопряженном гильбертовом пространстве.

С помощью ортогональных дополнений можно получить некоторые общие свойства линейных операторов.

Пусть X, Y — банаховы пространства, $A : X \to Y$ — линейный оператор, причем $\overline{D(A)} = X$, а A^* есть сопряженный оператор.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 11. *Нуль-пространство оператора A^* является ортогональным дополнением к области значений оператора A.*

Доказательство. Пусть $g \in N(A^*)$. Тогда если $u \in D(A)$, то $< u, A^*g >=< Au, g >= 0$, т.е. $g \in R(A)^\perp$. Наоборот, если $g \in R(A)^\perp$, то $< Au, g >= 0$ для всех $u \in D(A)$. Следовательно, $g \in D(A^*)$ и $A^* = 0$. Таким образом, $N(A^*) = R(A)^\perp$.

Следствие. *Ортогональное дополнение к нуль-пространству $N(A^*)$ оператора A^* совпадает с замыканием области значений оператора A.*

(**Доказательство:** ${}^\perp N(A^*) = {}^\perp(R(A)^\perp) = \overline{R(A)}$.)

Однако отметим, что множества $N(A)$ и $R(A^*)$ могут не являться ортогональными дополнениями друг к другу. Если же A ограниченный, то имеет место соотношение: $N(A) = {}^\perp R(A^*)$ (откуда еще не вытекает, что $N(A^*)^\perp$ совпадает с $\overline{R(A^*)}$!). Но справедливы следующие утверждения.

Теорема 12 [17, 26]. *Пусть X, Y — самосопряженные гильбертовы пространства, а $A : X \to Y$ — линейный ограниченный оператор с $D(A) = X$. Тогда:* 1) $R(A)^\perp = \overline{N(A^*)}$; 2) $R(A^*)^\perp = N(A)$; 3) $N(A)^\perp = \overline{R(A^*)}$; 4) $N(A^*) = \overline{R(A)}$ *и справедливы разложения X и Y в ортогональные суммы:* $X = \overline{R(A^*)} \oplus N(A)$ *и* $Y = \overline{R(A)} \oplus N(A^*)$.

§ 2. Линейные уравнения в банаховых пространствах

2.1. Линейные уравнения

Пусть A – линейный оператор с областью определения $D(A) \subset X$ и областью значений $R(A) \subset Y$. Уравнение

$$Au = f \tag{8}$$

называется *линейным* (неоднородным) уравнением. В уравнении (8) заданный элемент f называется *свободным членом* (или *правой частью*), а неизвестный элемент u из $D(A)$ - *решением* этого уравнения. Если в уравнении (8) свободный член f положить равным нулю, то полученное уравнение

$$Au = 0 \tag{9}$$

называется линейным *однородным уравнением*, соответствующим уравнению (8). В силу линейности оператора A совокупность решений однородного уравнения (9) образует линейное множество; в частности, $u = 0$ всегда является решением этого уравнения.

Всякое решение и линейного неоднородного уравнения (8) *(если оно существует) представляется в виде суммы частного решения u_0 этого уравнения, и общего решения $\tilde{u}$ соответствующего линейного однородного уравнения* (9): $u = u_0 + \tilde{u}$. Отсюда непосредственно заключаем: *для того чтобы решение уравнения* (8) *было единственным в* $D(A)$, *необходимо и достаточно, чтобы соответствующее однородное уравнение* (9) *имело только нулевое решение в* $D(A)$.

Пусть однородное уравнение (9) имеет только нулевое решение в $D(A)$. Тогда для любого $f \in R(A)$ уравнение (8) имеет единственное решение $u \in D(A)$ и тем самым задан оператор A^{-1} – оператор, обратный к A, так что $u = A^{-1}f$. Из этого соотношения и из (8) заключаем: $AA^{-1}f = f$; $f \in R(A)$; $A^{-1}Au = u$, $u \in D(A)$, т.е. $AA^{-1} = I$ и $A^{-1}A = I$.

Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$Au = \lambda u, \tag{10}$$

где λ – числовой параметр. Это уравнение имеет нулевое решение при всех λ. Может случиться, что при некоторых λ оно имеет ненулевые решения из $D(A)$. Те комплексные значения λ, при которых уравнение (10) имеет ненулевые решения из $D(A)$, называются *собственными значениями* оператора A, а соответствующие решения – *собственными элементами* (функциями), соответствующими этому собственному значению. Полное число r $(1 \le r \le \infty)$ линейно независимых собственных элементов, соответствующих данному собственному значению λ, называется *кратностью* этого собственного значения; если кратность $r = 1$, то λ называется *простым* собственным значением.

Совокупность собственных значений (чисел) оператора A называется его *точечным спектром.*

Корректность или некорректность постановки задачи в виде уравнения (8) является одной из основных характеристик математических моделей, используемых при изучении явлений физики, теории управления и в других науках.

Определение 1. Задача (8) называется *корректно поставленной* по Адамару или просто *корректной* на паре пространств X, Y, если выполнены следующие три условия: 1) при каждом $f \in Y$ существует решение $u \in X$; 2) это решение единственно; 3) решение непрерывно зависит от f: из $f_n \to f$ (по метрике Y) следует сходимость соответствующих решений $u_n \to u$ (по метрике X). Если же нарушается любое из перечисленных трех условий, то задача (8) называется *некорректно поставленной* или просто *некорректной.* (Другими словами, задача (8) поставлена корректно, если оператор A имеет непрерывный обратный $A^{-1} : Y \to X$, и некорректно – в противном случае.)

Замечание. Уравнение (8) с линейным вполне непрерывным оператором A обычно называют *линейным опера-*

торным уравнением 1-го рода, а уравнение $u + Au = f$ – *линейным операторным уравнением 2-го рода.* ■

В приложениях типичны задачи (8), в которых $\dim X = \infty$ и оператор A вполне непрерывен (т.е. (8) есть уравнение 1-го рода). В силу свойств вполне непрерывных операторов (см. п.1.3) можно сделать заключение, что такие задачи некорректны. То же самое можно сказать об уравнении (8) с незамкнутой областью значений $R(A) = AX$ оператора A (нарушены условия 1 и 3). Иногда задача (8) с незамкнутой областью значений $R(A)$ называется *существенно некорректно поставленной.*

2.2. Теория разрешимости линейных операторных уравнений

Рассмотрим уравнение (8), считая X, Y банаховыми, а $D(A)$ плотной в X : $\overline{D(A)} = X$. Различают следующие виды разрешимости этого уравнения.

Определение 2. Уравнение (8): 1) *везде разрешимо*, если $R(A) = Y$; 2) *плотно разрешимо*, если $\overline{R(A)} = Y$; 3) *нормально разрешимо*, если $\overline{R(A)} = R(A)$; 4) *однозначно разрешимо на* $R(A)$, если $N(A) = \{0\}$; 5) *корректно разрешимо на* $R(A)$, если существует постоянная $k > 0$ такая, что $\|u\|_X \le k\|Au\|$ при всех $u \in D(A)$.

Одновременно с (8) рассмотрим сопряженный оператор $A^* : Y^* \to X^*$ и *сопряженное уравнение*

$$A^* u^* = g, \tag{11}$$

где $u^* \in D(A^*) \subset Y^*$, $g \in X^*$. Для уравнения (11) также можно сформулировать приведенные выше типы разрешимости. Однако здесь (в силу специфики свойств оператора A^*) вводят два, вообще говоря, разных понятия: 1) уравнение (11) *замкнуто разрешимо*, если $R(A^*)$ замкнуто; 2) уравнение (11) *нормально разрешимо*, если оно разрешимо для всех правых частей, ортогональных ко всем решениям однородного уравнения $Au = 0$, т.е. если $R(A^*) = N(A)^{\perp}$. (Конечно, из нормальной разрешимости (11) следует замкнутая разрешимость. Обратное, вообще говоря, не верно.)

Обратимся к уравнению (8). Если оно однозначно разрешимо, то существует A^{-1} : $u = A^{-1}f$ при $f \in R(A)$. Если (8) корректно разрешимо, то оператор A имеет обратный, причем $\|A^{-1}\| \le k$. Таким образом, из корректной разрешимости следует однозначная разрешимость. Привлекая даже общие свойства операторов, можно установить некоторые типы разрешимости уравнений (8), (11). Так, например, поскольку ${}^{\perp}N(A^*) = \overline{R(A)}$ (см. теорему 11), то заключаем: *для того чтобы уравнение* (8) *было плотно разрешимо* ($\overline{R(A)} = Y$), *необходимо и достаточно, чтобы уравнение* (11) *было однозначно разрешимо* ($N(A^*) = \{0\}$). Существует ряд теорем о разрешимости (8), (11) и связи между различными видами разрешимости этих уравнений. Они доказаны в [26]. Утверждения этих теорем представим здесь в следующей таблице:

Уравнения с плотной областью определения $\mathbf{D(A)}$:

$\mathbf{Au = f}$		$\mathbf{A^*u^* = g}$
однозначно	$\longleftarrow$	плотно
плотно	$\longleftrightarrow$	однозначно
корректно	$\longleftrightarrow$	везде
везде	$\longrightarrow$	корректно
нормально	$\longrightarrow$	замкнуто

Уравнения в случае замкнутого оператора $\mathbf{A}$ с $\overline{\mathbf{D}(\mathbf{A})} = \mathbf{X}$:

$\mathbf{Au = f}$		$\mathbf{A^*u^* = g}$
однозначно	$\longleftarrow$	плотно
плотно	$\longleftrightarrow$	однозначно
корректно	$\longleftrightarrow$	везде
везде	$\longleftrightarrow$	корректно
нормально	$\longleftrightarrow$	замкнуто≡нормально

Если X рефлексивно (в частности, если X гильбертово), а A замкнут и $\overline{D(A)} = X$, то первая стрелка в этих таблицах обратима: *из однозначной разрешимости $Au = f$ следует плотная разрешимость $A^*u^* = g$.*

Из приведенных таблиц (из взаимосвязи корректной разрешимости одного уравнения с везде разрешимостью другого) следует важность априорных оценок вида

$$\begin{aligned} &\|u\|_X \le C_1\|Au\|_Y, \quad \forall u \in D(A),\\ &\|u^*\|_{Y^*} \le C_2\|A^*u^*\|_{X^*}\ \forall u^* \in D(A^*),\ C_1, C_2 = const. \end{aligned} \qquad (12)$$

Теорема 13 [26]. *Если A замкнут, то априорные оценки* (12) *являются необходимыми и достаточными условиями везде разрешимости уравнений* (8), (11).

Уравнение (8) можно рассматривать как аналог системы линейных алгебраических уравнений с n неизвестными Приведем основные свойства такой системы:

1) система уравнений разрешима при любой правой части тогда и только тогда, когда однородная система имеет только тривиальное решение;

2) система разрешима при любой правой части и тогда и только тогда, когда сопряженная система разрешима при любой правой части;

3) однородная и ей сопряженная системы имеют одинаковое число линейно независимых решений.

Линейное уравнение (8) в общем случае бесконечномерных пространств X и Y не сохраняет эти свойства. Однако интересно выделить те классы операторов и уравнений, которые сохраняют эти свойства в максимальной степени Такой класс образуют *фредгольмовы* уравнения и операторы Они вводятся следующим образом.

Будем говорить, что уравнение (8) *n-нормально*, если оператор A замкнут, уравнение (8) нормально разрешимо, а размерность нуль-пространства $N(A)$ конечна: $n(A) \equiv \equiv \dim N(A) < \infty$. Уравнение (8) назовем *d-нормальным*, если оно нормально разрешимо, оператор A замкнут, а размерность $d(A)$ ортогонального дополнения $\overline{R(A)^\perp}$ к $\overline{R(A)}$ конечна

Если оператор A имеет плотную область определения, то существует сопряженный оператор и $d(A) = \dim N(A^*) = = n(A^*)$. В этом случае для d-нормальности уравнения (8) необходимо и достаточно, чтобы (11) было n-нормальным.

Уравнение (8) называется *нетеровым*, если оно n-нормально и d-нормально; в этом случае оператор A называют нетеровым. Величина $æ(A) = n(A) - d(A)$ называется индексом уравнения. Если оператор A нетеров, то и оператор A^* нетеров. При этом $æ(A^*) = n(A^*) - d(A^*) = d(A) - n(A) = = -æ(A)$.

Уравнение (8) называется *фредгольмовым*, если оно нетерово и его индекс равен нулю. Уравнение $Au = f$ с фредгольмовым оператором A является аналогом системы n алгебраических уравнений с n неизвестными. Перечисленные выше свойства 1)–3) разрешимости сохраняются. Напротив, нетерово уравнение является аналогом системы n уравнений с m неизвестными, где $m \ne n$. Так как фредгольмовы и нетеровы уравнения имеют оптимальные по разрешимости свойства, то представляют интерес признаки фредгольмовости и нетеровости. Ограничимся некоторыми простейшими сведениями; подробно этот вопрос рассмотрен в [26, 60].

В случае $X = Y$ примером фредгольмова оператора является оператор $I+T$, где I – тождественный, а T — вполне непрерывный операторы. Этот оператор называется *каноническим фредгольмовым*. Примером уравнений с таким оператором являются интегральные уравнения Фредгольма второго рода. Именно это обстоятельство объясняет термин "фредгольмов оператор". Теоремы Фредгольма о разрешимости интегральных уравнений второго рода утверждают, что для интегральных уравнений имеют место свойства 1)–3) разрешимости систем линейных алгебраических уравнений.

Уравнение $Au = f$, $A : X \to Y$ можно привести к уравнению с каноническим фредгольмовым оператором. Существуют два способа. Первый состоит в том, что рассматривается уравнение $BAu = Bu$, где оператор $B : Y \to X$ подбирается специально. Если оператор $BA : X \to X$ оказывается каноническим фредгольмовым, то B называется левым *регуляризатором*. Второй способ состоит в том, что u ищут в виде $u = Cs$, где s — элемент некоторого пространства G, а $C : G \to X$. Для s получим уравнение $ACs = f$. Если оператор AC оказывается каноническим фредгольмовым в Y, то C называется правым регуляризатором. Известны теоремы [26] о том, что наличие регуляризатора позволяет судить о нетеровости уравнения.

2.3. Линейные преобразования уравнений

Под линейным преобразованием уравнения (8) мы здесь будем понимать переход от этого уравнения к уравнению

$$CAu = Cf \tag{13}$$

с помощью линейного оператора C, действующего из пространства Y в банахово пространство G. Однако чтобы при этом не потерять решений уравнения (8) и не появилось "лишних"решений уравнения (13), надо требовать от этих уравнений (8), (13) *эквивалентности, т.е. чтобы решение*

одного из этих уравнений было решением другого и обратно. Имеет место утверждение [26]: *чтобы* (8),(13) *были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы* $R(A) \subset D(C)$ и $N(C) = \{0\}$. Заметим, что первое условие заведомо выполнено, если C — ограниченный на Y оператор. Кроме того, всегда $N(A) \subseteq N(CA)$. При эквивалентном преобразовании $N(A) = N(CA)$. Однако нужно иметь в виду следующее важное обстоятельство: даже при эквивалентном преобразовании уравнение с замкнутым оператором A может перейти в уравнение с незамкнутым оператором (см. [26]).

2.4. Уравнение $\mathbf{A^*Au = A^*f}$

Частных и важным для дальнейшего случаем уравнения (13) является случай, когда $C = A^*$.

Пусть X, Y есть (самосопряженные) гильбертовы пространства, а A — линейный непрерывный оператор из X в Y, причем $D(A) = X$ (отметим, что не требуется замкнутости области значений $R(A)$ или тривиальности $N(A) \equiv \ker(A)$). Таким образом, задача (8):

$$Au = f, \tag{14}$$

вообще говоря, некорректна. Поскольку при сделанных ограничениях для сопряженного оператора A^* имеем $D(A^*) = Y^* \equiv Y$, то применяя к (14) оператор $A^* : Y \to X$, приходим к уравнению

$$A^*Au = A^*f \tag{15}$$

(симметризации Гаусса), являющемуся частным случаем уравнения (13). Здесь оператор A^*A симметричен и неотрицателен (если $D(A) = X$, то и самосопряжен).

Пусть Q есть оператор на $\overline{R(A)} \subseteq Y$ (замыкание $R(A)$). Связь решений уравнений (14), (15) устанавливает следующее известное предложение ([9], стр. 16).

Лемма 1. *Множества решений уравнения* (15) *и уравнения*

$$Au = Qf \qquad (16)$$

совпадают.

Доказательство. Пусть $A^*Au_* = A^*f$, тогда $< Au_* - -f, Av >= 0$ $\forall v \in D(A)$, т.е. элемент $(Au_* - f)$ ортогонален $R(A)$, а значит, и $\overline{R(A)}$. Поэтому $Q(Au_* - f) = 0$, а поскольку $QA = A$, то $Au_* = Qf$, т.е. u_* – решение уравнения (16).

Обратно, пусть $Au_* = Qf$. Поскольку $A^*Q = A^*$, то применение оператора A^* дает $A^*Au_* = A^*f$, т.е. u_* есть решение уравнения (15). ■

Решения уравнения (15) называют *квазирешениями* или *решениями в смысле наименьших квадратов уравнения* (14). Последнее название связано с тем, что решения уравнения (15) (уравнения (16)) минимизирует функционал (см. § 3)

$$J(u) \equiv \|Au - f\|^2 = \|Au - Qf\|^2 + \|f - Qf\|^2.$$

Из леммы 1 следует, что в случае $f \in R(A)$ множество квазирешений уравнения (14) совпадает с множеством его решений (и здесь $J(u) = 0$). Если $f \notin R(A)$, но $Qf \in R(A)$, то уравнение (14) не имеет решения, но имеет квазирешение. Если $Qf \notin R(A)$, а $Qf \in R(A)^{\perp}$, то $(Qf, Av)_Y = (A^*Qf, v)_X = (A^*f, v)_X = 0$ $\forall v \in D(A)$. Следовательно: $f \in N(A^*)$; уравнение (15) принимает вид $A^*Au = = 0$, а функционал $J(u)$ есть $J(u) = \|Au\|^2 + \|f\|^2$. Последнее означает, что решениями задачи минимизации $J(u)$ и уравнения (15) являются функции из $N(A) = N(A^*A)$.

В случае $f \in R(A)$ особый интерес представляет решение задачи (14) наименьшей нормы, называемое *нормальным решением. Нормальное решение ортогонально* $N(A)$.

Аналогично в случае $Qf \in R(A)$ особый интерес представляет квазирешение уравнения (14) наименьшей нормы: оно называется *псевдорешением* или *нормальным квазирешением.* Обратим внимание, что поскольку псевдорешение ортогонально $N(A)$, то оно принадлежит $\overline{R(A^*)}$.

Исследование разрешимости уравнения (15) и его свойств нередко осуществляют, используя *сингулярное разложение оператора* A. Введем это разложение.

Предположим, что спектр оператора A^*A содержит собственные значения σ_k^2, $k = 1, 2, \ldots$, которым соответствуют собственные элементы f_k, т.е. $A^*Af_k = \sigma_k^2 f_k$. Числа $\sigma_k > 0$ называются *сингулярными числами* оператора A. Отметаем, что возможно присутствие собственного значения $\sigma_0 \equiv \equiv 0$, кратность которого может быть бесконечной. Система $\{f_k\}$ является нормированной ортогональной системой в X. То же самое справедливо для оператора AA^* с собственными элементами g_k : $AA^*g_k = \sigma_k^2 g_k$, которые образуют нормированную ортогональную систему в гильбертовом пространстве Y. При этом собственные элементы связаны соотношениями

$$A^*g_k = \sigma_k f_k, \quad Af_k = \sigma_k g_k. \qquad (17)$$

Сингулярным разложением оператора A называется его представление

$$Au = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k (u, f_k)_X g_k. \qquad (18)$$

Отметим, что *вполне непрерывные операторы всегда допускают сингулярное разложение.*

Лемма 2 [49]. Псевдорешение уравнения (14) имеет вид

$$u^+ = A^+f = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^{-1}(f, g_k)_Y f_k. \qquad (19)$$

Доказательство. Представим f в виде $f = Av + U$, где $U \in R(A)^{\perp}$, $v \in D(A)$. Тогда

$$(f, g_k)_Y = (Av + U, g_k)_Y = (v, A^*g_k)_X + (U, g_k)_Y,$$

но $g_k \in R(A)$, поэтому $(U, g_k) = 0$. Учитывая (17), имеем: $(f, g_k) = \sigma_k(v, f_k)_X$. Следовательно,

$$u^+ = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^{-1}(f, g_k)_Y f_k = \sum_{k=1}^{\infty}(v, f_k) f_k,$$

откуда получаем сходимость ряда (19). Теперь в результате почленного применения оператора A^*A получаем

$$A^*Au^+ = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^{-1}(f, g_k)_Y A^*A f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(f, g_k)_Y f_k = A^* f.$$

Поскольку $u^+ \in \overline{R(A^*)}$, заключаем, что $u^+ = A^+ f$. ■

Из леммы 2 получаем

Следствие. *Оператор A^+ не ограничен в том и только в том случае, если $\sigma_{k_j} \to 0$ для некоторой последовательности $k_j \to \infty$.* ■

Замечание. К сожалению, во многих интересных прикладных задачах искать псевдорешение u^+ в виде (19) для практических применений невозможно, поскольку не представляется возможным строить необходимое число собственных функций и собственных значений. Однако при изучении многих аспектов теории представление (19) может оказаться полезным. ■

2.5. Уравнение $\alpha \mathbf{u} + \mathbf{A^*Au} = \mathbf{A^*f}$

Совместно с уравнением (15) уравнение вида

$$\mathcal{A}_\alpha u \equiv \alpha u + A^*Au = A^*f, \quad \alpha > 0, \tag{20}$$

играет большую роль в связи с задачами, изучаемыми в дальнейшем. Здесь предполагается, что $A : X \to Y$, $\overline{D(A)} = X$, X, Y – вещественные самосопряженные гильбертовы пространства. Уравнение (20) тесно связано с проблемой минимизации функционала вида

$$J_2(u) = \alpha\|u\|_X^2 + \|Au - f\|_Y^2. \tag{21}$$

Если A^*A является вполне непрерывной, то уравнение (20) относится к классу уравнений 2-го рода (в отличие от (15), являющегося уравнением 1-го рода) и теория разрешимости (20) существенно проще, чем для (15).

Оператор $\mathcal{A}_\alpha$ уравнения (20) является симметричным и положительно определенным. Поэтому можно ввести энергетическое пространство $H_\mathcal{A}$ со скалярным произведением $[u, v] = \alpha(u, v)_X + (Au, Av)_Y$ и нормой $[u] = [u, u]^{1/2}$. Задача (20) при $f \in Y$ имеет единственное обобщенное решение $u \equiv u(\alpha) \in H_\mathcal{A})$, на котором функционал

$$\tilde{J}(u) = \alpha(u, u)_X + (Au, Au) - (Au, f)_Y - (f, Au)_Y \tag{22}$$

принимает линейное значение среди всех функций из $H_\mathcal{A}$ (см. п. 1.5) и является обобщенным решением уравнения (20), удовлетворяя равенству

$$[u, v] = (f, Av)_Y \quad \forall v \in H_\mathcal{A}. \tag{23}$$

Поскольку $(f, Av)_Y = (Qf, Av)_Y$, где Q – ортопроектор на $\overline{R(A)}$, то полагая $v = u$ и проводя элементарные оценки правой части из (23), получаем неравенство

$$2\alpha\|u\|_X^2 + \|Au\|_Y^2 \le \|Qf\|_Y^2. \tag{24}$$

Отсюда, в частности, заключаем, что *если $\alpha > 0$, то $u \in X$ и $\|u\|_X \le \|Qf\|_Y/\sqrt{2\alpha}$*. Отметим, что функционалы $\tilde{J}(u)$, $J(u)$ отличаются на постоянную. Поэтому обобщенное решение уравнения (20) минимизирует также функционал $J(u)$, т.е. является решением задачи вида

$$J(u) = \inf_{v \in H_\mathcal{A}} J(v). \tag{25}$$

Из (23) также следует: *если $f \in R(A)^\perp$, то при $\alpha > 0$ уравнение (20) имеет только тривиальное решение $u \equiv 0$.*

Предположим, что A^*A допускает сингулярное разложение (см. п. 2.4). Отыскивая u в виде $u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k f_k$ и принимая

$v = f_k$, из (23) находим: $u_k = \sigma_k(f, g_k)_Y/(\alpha + \sigma_k^2)$, при этом имеем $u_0 = 0$. Таким образом, решение уравнения (30) в данном случае задается выражением

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(f, g_k)_Y f_k}{\alpha + \sigma_k^2}. \tag{26}$$

Заметим, что если в (26) формально принять $\alpha = 0$, то получим выражение для псевдорешения u^+ уравнения (14) (см. (19)). Если $f \in (R(A))^\perp$, то $u(\alpha) = 0\ \forall\alpha \geq 0$ и $u^+ = 0$ Поэтому заключаем, что практический интерес в первую очередь представляют решения задач (15), (20) при ограничении $Qf \in R(A)$. В данном случае при некоторых дополнительных ограничениях можно доказать, что $u \equiv u(\alpha)$ сходится к решению уравнения (15) при $\alpha \to +0$.

Лемма 3. *При любой заданной $f \in R(A)$ решения $u = u(\alpha)$ задачи (20) сходятся к решению u^+ уравнения (15) при $\alpha \to +0$ по норме пространства X.*

Доказательство. Если $f \in R(A)$, то псевдорешение u^+ будет нормальным решением уравнения (14), т.е. обычным решением этого уравнения с наименьшей нормой. Поэтому существует функция $U \in D(A) \subset X$ такая, что $\|U\|_X = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(f, g_k)_Y^2/\sigma_k^2 < \infty$.

Для разности $(u(\alpha) - u^+)$ имеем

$$\|u(\alpha) - u^+\|_X^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^2}{\sigma_k^2(\alpha + \sigma_k^2)^2}(f, g_k)^2 \equiv \\ \equiv \sum_{k=1}^{K} \cdots + \sum_{k=K+1}^{\infty} \cdots. \tag{27}$$

Выберем производное $\varepsilon > 0$, а K столь большим, чтобы вторая сумма была меньше $\varepsilon/2$ (что можно сделать в силу $\|U\|_X^2 < \infty$ и поскольку $(\alpha^2/(\alpha + \sigma_K^2)^2) < 1$). Фиксируем K и выбираем α столь малым, чтобы первая сумма в (27) была меньше $\varepsilon/2$. Таким образом подобрано $\alpha = \alpha(u)$ такое что $\|u(\alpha) - u\|_X^2 < \varepsilon$ и справедливо утверждение леммы. ■

Замечание 1. Из (27) легко получить следующее утверждение: если f такова, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(f, g_k)^2/\sigma_k^6 < \infty$, то $\|u(\alpha) - u^+\|_X \leq C, \alpha \to 0\ \ \alpha \to +0$. Однако, к сожалению, в практических задачах подобные ограничения на f не выполняются. ■

Замечание 2. Проведенное выше доказательство разрешимости уравнения (23) осуществимо и при $(\alpha = 0) \bigcap \bigcap (N(A^*A) = \{0\})$. Здесь также можно ввести энергетическое пространство $H_{\mathcal{A}_0}$ оператора $\mathcal{A}_0 \equiv A^*A$. Однако пространство $H_{\mathcal{A}_0}$, вообще говоря, уже может не быть вложенным в X (например, когда A – вполне непрерывный оператор и $\dim(X) = \infty$). ■

2.6. Об итерационных методах решения линейных операторных уравнений

Рассмотрим некоторые из известных итерационных методов решения линейного уравнения вида

$$\mathcal{A}u = g$$

с симметричным ограниченным положительно определенным оператором $\mathcal{A}$, действующим в гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\| = (\cdot,\cdot)^{1/2}$.

Метод 1 (Простейший итерационный метод). Рассмотрим итерационный процесс вида

$$u^{j+1} = u^j - \tau(\mathcal{A}u^j - g), \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

где u^0 – начальное приближение, τ – параметр итерационного процесса. Известно, что если $0 < \tau < (2/\|\mathcal{A}\|)$, то данный метод сходится: $\|u - u^j\| \to 0$, $j \to \infty$. Если предположить, что спектр оператора $\mathcal{A}$ принадлежит отрезку $[C_0, C_1]$, т.е. $\mathrm{Sp}(\mathcal{A}) \subset [C_0, C_1]$, где $C_0, C_1 = const > 0$, а параметр τ выбирается в виде $\tau = \tau_{opt} = 2/(C_0 + C_1)$, то справедлива оценка скорости сходимости вида

$$\|u - u^j\| \leq C\left(\frac{C_1 - C_0}{C_1 + C_0}\right)^j \to 0, \quad j \to \infty,$$

где постоянная C не зависит от j (см. [38, 43, 56]).

Метод 2. Пусть B есть симметричный положительный оператор такой, что существует B^{-1} и для оператора $B^{-1}\mathcal{A}$ имеем: $\mathrm{Sp}\,(B^{-1}\mathcal{A}) \subset [C_0, C_1]$, $C_0, C_1 = const \to 0$. Рассмотрим итерационный алгоритм вида

$$B\left(\frac{u^{j+1} - u^j}{\tau}\right) = g - \mathcal{A}u^j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

который можно записать также в форме

$$\xi^j = \mathcal{A}u^j - g, \quad w^j = B^{-1}\xi^j, \quad u^{j+1} = u^j - \tau w^j,$$

где τ — параметр итерационного процесса. Перепишем этот алгоритм для $U^j \equiv B^{1/2}u^j$:

$$U^{j+1} = U^j - \tau(\tilde{\mathcal{A}}U^j - \tilde{g}), \quad j = 0, 1, \ldots,$$

где $\tilde{g} = B^{-1/2}g$, $\tilde{\mathcal{A}} = B^{-1/2}\mathcal{A}B^{-1/2}$. Если теперь применить утверждения из метода 1, то заключаем: если выбирать $\tau = \tau_{opt} = 2/(C_0 + C_1)$, то данный итерационный метод сходится и справедлива следующая оценка скорости сходимости:

$$\|u - u^j\|_B \equiv \|B^{1/2}(u - u^j)\| \leq C\left(\frac{C_1 - C_0}{C_1 + C_0}\right)^j \to 0, \quad j \to \infty,$$

где постоянная C не зависит от j.

Замечание. Обратим внимание, что в методе 2 операторы B, $\mathcal{A}$ могут быть даже неограниченными. ■

Метод 3 (Метод минимальных невязок). Рассмотрим итерационный процесс, задаваемый уравнением

$$u^{j+1} = u^j - \tau_j(\mathcal{A}u^j - g), \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

где

$$\tau_j = \frac{(\mathcal{A}\xi^j, \xi^j)}{(\mathcal{A}\xi^j, \mathcal{A}\xi^j)}, \quad \xi^j = \mathcal{A}u^j - g.$$

Известно, что если $\mathcal{A}$ — симметричный и положительно определенный и $\mathrm{Sp}\,(\mathcal{A}) \subset C[C_0, C_1]$, $C_0, C_1 = const > 0$, то скорость сходимости этого метода не медленнее, чем скорость сходимости метода 1. Однако отметим, что метод минимальных невязок может применяться для решения уравнения $\mathcal{A}u = g$ с ограниченным положительно определенным оператором (т.е. без требования симметричности для $\mathcal{A}$).

Исследование приведенных здесь итерационных методов читатель может найти в [38, 43, 56], где рассмотрены многие другие алгоритмы современной теории итерационных процессов решения линейных операторных уравнений.

Пример. Пусть метод 1 применяется к решению уравнения (20) с оператором $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}_\alpha = \alpha I + A^*A$, где A — ограниченный оператор ($\|A\| < \infty$), где $\alpha = const > 0$. В этом случае, даже если $N(A) \equiv \ker(A) \neq \{0\}$, имеем $\mathrm{Sp}\,(\mathcal{A}_\alpha) \subset [\alpha + C_0, \alpha + C_1]$, где $C_0 = const \geq 0$. А тогда при $\tau = 2/(2\alpha + C_0 + C_1)$ скорость сходимости метода характеризуется оценкой вида

$$\|u - u^j\| \leq C\left(\frac{C_1 - C_0}{2\alpha + C_0 + C_1}\right)^j \to 0, \quad j \to \infty,$$

то есть метод обладает скоростью сходимости геометрической прогрессии, даже если оказывается, что $C_0 = 0$. ■

§ 3. Экстремальные задачи и методы их решения

Приведем ряд понятий и результатов из теории экстремальных задач [10, 24].

3.1. Определения и сведения из нелинейного анализа

3.1.1. Запишем некоторые определения и факты дифференциального исчисления нелинейных операторов в банаховом пространстве. Пусть $F : X \to Y$ – нелинейное отображение, X, Y – банаховы пространства, $D(F) \subseteq$ есть область определения F, являющаяся линейным множеством. Оператор F называется дифференцируемым по Фреше в точке $x \in D(F)$, если существует такой линейный оператор $F'_\Phi(x) \in L(X, Y)$, что

$$F(x+h) - F(x) = F'_\Phi(x)h + \omega(x,h) \quad \forall\, (x+h) \in D(F),$$

где

$$\lim_{\|h\|_X \to 0} \frac{\|\omega(x,h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$$

Выражение $F'_\Phi(x)h$ называется дифференциалом Фреше, а оператор $F'_\Phi(x)$ — производной Фреше оператора F в точке x. Дифференциалом Гато оператора F в точке x называется предел

$$DF(x,h) = \lim_{t\to 0} \frac{F(x+th) - F(x)}{t},$$

понимаемый в смысле сходимости по норме пространства Y. Если дифференциал Гато линеен по h, т.е. $DF(x,h) = F'(x)h \ \forall\, (x+h) \in D(F)$ для некоторого линейного оператора $F'(x) \in L(X,Y)$, то $F'(x)$ называется производной Гато оператора F в точке x. Известно, что если оператор F обладает производной Фреше в точке x, то он имеет и производную Гато в этой точке, причем $F'(x) = F'_\Phi(x)$. Более того, если производная Гато $F'(x)$ существует для всех x из

окрестности точки x_0 и отображение $x \to F'(x)$ непрерывно в метрике $L(X,Y)$ в этой точке, то существует производная Фреше $F'_\Phi(x_0)$. Старшие производные отображений определяются индуктивно как производные (Фреше или Гато) от производной рассматриваемого отображения на единицу меньшего порядка. Например, вторая производная Гато определяется равенством

$$F''(x)h = \lim_{t\to 0} \frac{F'(x+th) - F'(x)}{t},$$

где оператор $F''(x) \in L(X, L(X,Y))$ и предел в правой части вычисляется в норме $L(X,Y)$. При работе с гладкими операторами широко используются следующие оценки

$$\|F(x) - F(x_0)\|_Y \le \sup_{t\in[0,1]} \|F'(x + t(x_0 - x))\|_{L(X,Y)} \|x - x_0\|_X,$$

$$\|F(x) - F(x_0) - F'(x)(x - x_0)\|_Y \le \sup_{t\in[0,1]} \|F'(x + t(x_0 - x)) - \\ - F'(x)\|_{L(X,Y)} \|x - x_0\|_X.$$

Если отображение $z \to F'(z)h$ $(h \in X)$ являются непрерывным на отрезке $[x, x+h]$, то

$$F(x+h) - F(x) = \int_0^1 F'(x+th)h\,dt.$$

3.1.2. Если $Y \equiv \mathbf{R} \equiv \mathbf{R}^1$, то $F \equiv J$ - функционал. Пусть в точке $x \in D(J)$ для всех $h \in D(J)$ существует предел

$$\lim_{t\to 0} \frac{J(x+th) - J(x)}{t} = \delta J(x;h);$$

он называется *вариацией функционала* J. Эта вариация есть однородный функционал от h: $\delta J(x;\alpha h) = \alpha \delta J(x;h)$, но она может и не быть аддитивным по h функционалом. Если

$\delta J(x;h)$ — линейный по h функционал, то ее называют *дифференциалом Гато*, пишут $\delta J(x;h) = DJ(x;h) \equiv J'(x)h$ и говорят, что $J'(x)$ — *производная Гато* от J в точке x. Если $J'(x)$ есть линейный ограниченный функционал, т.е. $J'(x) \in X^*$, то производную $J'(x)$ называют *градиентом функционала* J в точке x и обозначают $\operatorname{grad} J(x)$. В этом случае $DJ(x;h) =< h, \operatorname{grad} J(x) >$. Здесь $< h, \operatorname{grad} J(x) >$ есть значение непрерывного линейного функционала $J'(x) = \operatorname{grad} J(x)$ на векторе $h \in D(J)$. Если $D(J)$ плотно в X, то по непрерывности функционал можно продолжить с $D(J)$ на все X и (для простоты) обозначать также $\operatorname{grad} J(x)$.

Функционал $f(x)$ называется *непрерывно дифференцируемым* на множестве $U \equiv D(f) \subseteq X$, если он дифференцируем во всех точках $x \in U$ и $\|f'(x+h) - f'(x)\|_{X^*} \to 0$ при $\|h\|_X \to 0$ для всех $x, x+h \in U$. Множество всех функционалов, непрерывно дифференцируемых на U, будем обозначать $C^1(U)$. (Отметим, что приведенное определение предполагает, что если $J(x)$ дифференцируем в точке $x \in U$, то J определен в некоторой окрестности этой точки; поэтому, говоря о принадлежности $J(x)$ множеству $C^1(U)$, обычно подразумевают существование некоторого открытого множества $W \subseteq X$, которое содержит U и на котором также определен функционал $J(x)$.)

Аналогично множеству $C^k(U)$ вводятся множества $C^k(U)$, $k > 1$.

Приведем примеры дифференцируемых функционалов и их градиентов.

Пример 1. Пусть $J(u) = \|Au - f\|_Y^2$, $u \in X$, где X банахово пространство, Y — самосопряженное гильбертово пространство, $f \in Y$, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Здесь $A^* \in \mathcal{L}(Y, X^*)$, $J(u) \in C^1(X)$ и $J'(u) = \operatorname{grad} J(u) = 2A^*(Au - f)$. ■

Пример 2. Пусть $J_\alpha(u) = \alpha\|u\|_X^2 + \|Au - f\|_Y^2$, $\alpha = const$ и выполнены условия примера 1. Тогда $J'_\alpha(u) = \operatorname{grad} J_\alpha(u) = 2(\alpha u + A^*(Au - f))$. ■

3.1.3. При исследовании экстремальных задач в банаховых пространствах важную роль играют такие понятия, как *выпуклые множества, выпуклые функционалы, ..., монотонные операторы.*

Определение 1. Множество U из линейного пространства называется *выпуклым*, если оно содержит вместе с любыми своими точками u, v и точку $u\alpha = \alpha v + (1-\alpha)u$ при любом $\alpha \in [0,1]$.

Определение 2. Функционал $J(u)$, определенный на выпуклом множестве U, называется *выпуклым* на U, если $J(\alpha u + (1-\alpha)v) \le \alpha J(u) + (1-\alpha)J(v)\ \forall\, u, v \in U$, $\forall \alpha \in [0,1]$. Если в последнем неравенстве равенство возможно только при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$, то $J(u)$ называется *строго выпуклым* на U.

Пример 3. В банаховом пространстве X аффинный функционал $J_1(u) \equiv < g, u > +C$, где $g \in X^*$, $C = const$ и норма $J_2(u) \equiv \|u\|_X$ являются выпуклыми функционалами. ■

Определение 3. Функционал $J(u)$, определенный на выпуклом множестве U из гильбертова пространства H, называется *сильно выпуклым* на U, если существует $æ = const > 0$, что

$$J(\alpha u + (1-\alpha)v) \le \alpha J(u) + (1-\alpha)J(v) - \alpha(1-\alpha)æ\|u - v\|_H^2,$$

$$\forall\, u, v \in U, \quad \forall\, \alpha \in [0,1].$$

Пример 4. Если H гильбертово, то $J(0) \equiv \|u\|_H^2 = (u,u)_H$ сильно выпуклый. ■

Свойства выпуклости функционалов тесно связаны с монотонностью их градиентов.

Определение 4. Оператор $F : X \to X^*$ называется *монотонным* на множестве $D(F) \subset X$, если $< u - v, F(u) - F(v) > \ge 0\ \forall u, v \in D(F)$, и *строго монотонным*, если равенство выполняется лишь при $u = v$.

Приведем критерии выпуклости и сильной выпуклости гладких функционалов [8, 10, 60].

Теорема 14. *Пусть U – выпуклое множество из банахова пространства X. Тогда для того чтобы функционал $J(u)$ из $C^1(U)$ был выпуклым на U, необходимо и достаточно, чтобы при всех $u, v \in U$ выполнялось одно из следующих двух неравенств:* 1) $J(u) \geq J(v) + < J'(v), u - v >$; 2) $< J'(u) - J'(u), u - v > \geq 0$ (*т.е. чтобы градиент* $J'(u) \equiv \equiv \operatorname{grad} J(u)$ *был монотонным*).

Если $\operatorname{int} U \neq \{0\}$ (*т.е. U имеет внутренние точки*) *и $J(u) \in C^2(U)$, то для выпуклости $J(u)$ на U необходимо и достаточно, чтобы* $< J''(u)\xi, \xi > \geq 0 \quad \forall \xi \in X, \quad u \in U$.

Теорема 15. *Пусть U – выпуклое множество из гильбертова пространства H и пусть функция $J(u)$ принадлежит $C^1(U)$. Тогда для того чтобы $J(u)$ была сильно выпуклой на U, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих двух условий:* 1) *существует постоянная* $æ > 0$ *такая, что* $J(u) \geq J(v) + \langle J'(v), u - v \rangle + æ\|u - v\|_H^2$, $u, v \in U$; 2) *существует постоянная* $\mu > 0$ *такая, что* $\langle J'(u) - J'(v), u - v \rangle \geq \mu\|u - v\|_H^2$, $u, v \in U$. *Если* $intU \neq \varnothing$ *и $J(u) \in C^2(U)$, то для сильной выпуклости $J(u)$ на U необходимо и достаточно существование постоянной $\mu > 0$ такой, что* $\langle J''(u)\xi, \xi \rangle \geq \mu\|\xi\|_H^2$ *при всех* $\xi \in H$, $u \in U$.

Пример 5. Функционал $J(u) = \|Au - f\|_Y^2$ из примера 1 выпуклый на X. ■

3.2. Экстремальные задачи и критические точки функционалов

Пусть J – вещественный функционал, заданный в нормированном пространстве X. Точка $u_0 \in X$ называется *экстремальной точкой* (*точкой локального экстремума*) *функционала* J, если в некоторой окрестности $U(u_0)$ этой точки выполняется одно из следующих неравенств: 1) $J(u) \leq \leq J(u_0)$, 2) $J(u) \geq J(u_0)$ для всех $u \in U(u_0)$.

Если второе неравенство справедливо для всех $u \in X$, то u_0 называется *точкой абсолютного (глобального) минимума функционала* J. Далее, если J дифференцируем по Гато в точке u_0, то при выполнении условия $DJ(u_0, h) = 0$ точка u_0 называется *критической точкой* функционала J. Так как из равенства нулю дифференциала следует его непрерывность по h, то последнее равенство принимает вид $\langle \operatorname{grad} J(u_0), h \rangle = 0$, и так как это равенство справедливо для произвольного $h \in X$, то можно сказать, что u_0 – критическая точка J, если $\operatorname{grad} J(u_0) = 0$.

Пусть U – некоторое множество из X, а $J(u)$ – функционал, определенный на U. Задачи минимизации или максимизации функционала $J(u)$ на множестве U называют *экстремальными задачами*. Для задачи минимизации $J(u)$ на U будем пользоваться следующей краткой записью: $J(u) = = \inf$, $u \in U$, или $\inf J(u)$. Нижнюю грань $J(u)$ на U обозначим $J_* = \inf\limits_U J(u)$. (Если $J(u)$ неограничен снизу на U, то принимают $J_* = -\infty$.) Точки множества $U_* = \{u \in U : J(u) = J_*\}$ называют *точками минимума* $J(u)$ на U (их еще называют также *точками глобального минимума* $J(u)$ *на* U).

Последовательность $\{u_k\} \subset U$ называют *минимизирующей* для $J(u)$ на U, если $\lim\limits_{k \to \infty} J(u_k) = J_*$.

Выпуклый функционал на выпуклом множестве не может иметь локальных минимумов, отличных от глобального минимума. Точнее, верна

Теорема 16 [10]. *Пусть U – выпуклое множество из банахова пространства X, а функционал $J(u)$ определен и выпуклый на U. Тогда всякая точка локального минимума $J(u)$ одновременно является точкой ее глобального минимума на U, причем множество U_* выпукло. Если $J(u)$ строго выпуклый на U, то U_* содержит не более одной точки.*

Сформулируем некоторые теоремы, дающие условия экстремума функционала $J(u)$. Первая из этих теорем обобщает известную теорему Ферма, дающую необходимое условие экстремума.

Теорема 17. *Пусть функционал $J(u)$ определен в окрестности точки u_0 нормированного пространства X, достигает в u_0 локального экстремума и имеет в точке u_0 первую вариацию $\delta J(u_0; h)$. Тогда $\delta J(u_0; h) = 0$.*

Следствие. *Если в условиях теоремы пространство X банахово, а функционал $J(u)$ дифференцируем в точке u_0 в смысле Гато (Фреше), то u_0 удовлетворяет уравнению $J'(u_0) = 0$ — уравнению Эйлера.*

Теорема 18. *Пусть функционал J задан в области ω нормированного пространства X и u_0 — внутренняя точка области ω, в которой существует линейный дифференциал Гато. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Для того чтобы точка u_0 была экстремальной, необходимо, чтобы она была критической, т.е. чтобы*

$$\operatorname{grad} J(u_0) = 0. \tag{28}$$

2. *Если дополнительно в некоторой выпуклой окрестности $U(u_0) \subset \omega$ точки u_0 функционал J выпуклый (или $\operatorname{grad} J(u)$ — монотонный оператор), то равенство (28) необходимо и достаточно для того, чтобы точка u_0 была точкой минимума функционала J. Если J строго выпуклый, то u_0 точка строгого локального минимума.*

Теорема 19. *Пусть U — выпуклое множество из банахова пространства B, $J(u) \in C^1(U)$ и пусть $U_* = \{u \in \in U : J(u) = J_* = \inf\limits_U J(u)\}$. Тогда в любой точке $u_* \in U_*$ необходимо выполняется неравенство*

$$\langle J'(u_*), u - u_* \rangle \geq 0 \text{ при всех } u \in U, \tag{29}$$

которое в случае $u_* \in int U$ эквивалентно равенству $J'(u_*) = 0$. Если, кроме того, $J(u)$ выпукла на U, то условие (29) является достаточным для того, чтобы $u_* \in U_*$.

Пример 6. Пусть в примере 1 $X = Y$ гильбертово пространство. Тогда согласно последней теореме условие $\langle A^*(Au_* - f), u - u_* \rangle \geq 0 \ \forall u \in U$ необходимо и достаточно для того, чтобы функционал $J(u) = \|Au - f\|_Y^2$ достигал на выпуклом множестве $U \subseteq Y$ своей нижней грани; если $U = Y$ или $U_* \subset intU$, то это условие эквивалентно равенству $A^*Au = A^*f$. ■

Приведем теперь несколько более тонких фактов об экстремуме функционалов, в частности, формулируемых в *теоремах Вейерштрасса* (так называют утверждение о достижении нижней грани некоторой функции на каком-либо множестве). Они используют следующие важные понятия, связанные с понятием слабой сходимости в банаховом пространстве.

Определение 5. Множество U из банахова пространства B называется *слабо компактным*, если из любой последовательности $\{u_k\} \in U$ можно выбрать хотя бы одну последовательность $\{u_{k_m}\}$, которая слабо в B сходится в некоторой точке $v \in U$.

Определение 6. Функционал $J(u)$, определенный на некотором множестве U из банахова пространства B, называют *слабо полунепрерывным снизу (сверху) в точке $u \in U$*, если для любой последовательности $\{u_k\} \in U$, которая слабо в B сходится к точке u, имеет место неравенство

$$\varliminf_{k\to\infty} J(u_k) \equiv \lim_{k\to\infty} \inf J(u_k) \geq J(u)$$

$$(\varlimsup_{k\to\infty} J(u_k) \equiv \lim_{k\to\infty} \sup J(u_k) \leq J(u)).$$

Если $J(u)$ слабо полунепрерывен снизу (сверху) в каждой точке $u \in U$, то говорят, что $J(u)$ *слабо полунепрерывен снизу (сверху) на U*. Если $J(u)$ слабо полунепрерывен снизу и сверху в точке u на U, то функционал $J(u)$ называется *слабо полунепрерывным в точке $u \in U$*.

Определение 7. Пусть B — банахово пространство. Скажем, что *последовательность* $\{u_k\} \in B$ *сходится к множеству* U *слабо* в B, если $\{u_k\}$ имеет хотя бы одну слабо сходящуюся подпоследовательность, причем все точки v, являющиеся слабым пределом какой-либо последовательности $\{u_k\}$, принадлежат U.

Теорема 20. *Пусть U — слабо компактное множество из банахова пространства B, функционал $J(u)$ определен, конечен и слабо полунепрерывен снизу на U. Тогда $J_* = \inf\limits_U J(u) > -\infty$, множество $U_* = \{u \in U : J(u) = J_*\}$ непусто, слабо компактно и любая минимизирующая последовательность $\{u_k\}$ слабо сходится к U_*.*

Теорема 21. *Слабо полунепрерывный снизу функционал $J(u)$, заданный в рефлексивном банаховом пространстве X, ограничен снизу и достигает наименьшего значения на каждом ограниченном слабо замкнутом множестве $M \subset X$.*

В приложениях иногда удобнее применять не собственно теорему 21, а следствия из нее.

Следствие 1. *Слабо полунепрерывный снизу функционал в рефлексивном банаховом пространстве достигает своего наименьшего значения на каждом ограниченном замкнутом выпуклом множестве.*

(Доказательство следует из того факта, что всякое выпуклое замкнутое подмножество банахова пространства является слабо замкнутым.)

Следствие 2. *Всякий заданный всюду в банаховом пространстве, дифференцируемый по Гато выпуклый функционал $J(u)$ слабо полунепрерывен снизу.*

Следствие 3. *Точка x_0 является точкой минимума функционала $J(0) \equiv \varphi(u) - \langle u, f\rangle$, где $f \in X^*$, а φ — выпуклый и дифференцируемый в точке u_0 по Гато, когда u_0 является решением уравнения $\varphi'(u) = f$.*

Для удобства пользования приведенными теоремами желательно иметь набор сравнительно легко проверяемых достаточных условий слабой компактности множеств и слабой полунепрерывности снизу функций в банаховых пространствах. Приведем несколько таких условий.

Определение 8. Множество U из банахова пространства называется *слабо замкнутым* (*секвенциально слабо замкнутым*), если оно содержит любую точку, являющуюся слабым пределом какой-либо последовательности $\{u_k\} \in U$.

Теорема 22. *Всякое ограниченное слабо замкнутое множество из рефлексивного банахова пространства слабо компактно.*

Поскольку проверка слабой замкнутости множества не всегда проста, то на практике вместо теоремы 22 может оказаться более удобной следующая

Теорема 23. *Всякое ограниченное замкнутое выпуклое множество U из рефлексивного банахова пространства B слабо компактно.*

(Подчеркнем, что в этой теореме замкнутость множества понимается в сильном смысле, т.е. в смысле метрики B — это обстоятельство часто облегчает проверку условий теоремы 4 в приложениях.)

Пример 7. В любом гильбертовом пространстве шар слабо компактен, но в бесконечномерном гильбертовом пространстве шар не может быть сильно компактным. ■

Следующая теорема дает достаточные условия слабой полунепрерывности функционала.

Теорема 24 [8, 11]. 1) *Пусть на открытом выпуклом множестве U нормированного пространства задан выпуклый и дифференцируемый по Гато функционал $J(u)$. Тогда если $DJ(u; h)$ непрерывен по h, то J слабо полунепрерывен на U.*

2) *Для слабой полунепрерывности снизу на выпуклом множестве U вещественного дифференцируемого $J(u)$ достаточно, чтобы его градиент был монотонным оператором.*

3) *Если градиент $F(u) \equiv \operatorname{grad} J(u)$ вещественного функ-*

ционала $J(u)$ имеет производную Гато $F'(u)$, причем $\langle F'(u)h, h \geq 0$, то функционал $J(u)$ слабо полунепрерывен снизу.

4) *Для того чтобы функционал $J(u)$, заданный в нормированном пространстве, был слабо полунепрерывен снизу, необходимо и достаточно, чтобы множество $U_C = \{u;\ J(u) \leq C\}$ было слабо замкнуто, каково бы ни было вещественное число C.*

Пример 8. Пусть $J(u) = \|u\|^\gamma$, $\gamma \geq 1$, где $\|u\|$ — норма в банаховом пространстве X. Тогда $J(u)$ слабо полунепрерывен на X [10]. ■

Приведем также следующие теоремы об экстремальных точках и теорему Вейерштрасса [8, 10].

Теорема 25 (обобщенная теорема Вейерштрасса). *Если на ограниченном слабо замкнутом множестве U в рефлексивном банаховом пространстве X задан конечный слабо полунепрерывный снизу функционал $J(u)$, то он ограничен снизу и достигает на U своей нижней грани.*

Теорема 26 [8]. *Пусть вещественный функционал $J(u)$, заданный в вещественном рефлексивном банаховом пространстве X, дифференцируем по Гато и $\operatorname{grad} J(u) = F(u)$ удовлетворяет условиям: 1) функция $\langle F(tu), u\rangle$ непрерывна по t на $[0,1]$ при любом $u \in X$, 2) $\langle F(u+h) - F(u), h\rangle \geq 0\ \forall u, h \in X$; 3) $\lim\limits_{R\to\infty}(\langle F(u), u\rangle)/R = +\infty$ $\|u\| = R$. Тогда существует точка минимума u_0 функционала $J(u)$ и $\operatorname{grad} J(u_0) = 0$. Если $F(u)$ — строго монотонный, то точка минимума функционала единственная и в ней $J(u)$ принимает абсолютный (глобальный) минимум.*

Теорема 27. *Пусть $J(u)$ - вещественный дифференцируемый по Гато функционал, задан в вещественном рефлексивном банаховом пространстве, слабо полунепрерывен снизу и $\langle F(u), u\rangle > 0\ \forall u \in X$, если $\|u\| = R > 0$, где R - некоторое число и $F(u) \equiv \operatorname{grad} J(u_0)$. Тогда существует внутренняя точка u_0 шара $\|u\| \leq R$, в которой $J(u)$ имеет локальный минимум. а следовательно,* $\operatorname{grad} J(u_0) = 0$.

В качестве примера к последней теореме рассмотрим следующий пример.

Пример 9. Пусть $J(u) = \|Au - f\|_H^2$, где $A: H \to H$ вполне непрерывный оператор, действующий в вещественном гильбертовом пространстве H, причем $D(A) = H$. Предположим, что $N(A) \equiv \ker(A) = \{0\}$. Обозначим через H_A пополнение H по норме $[u] \equiv \|Au\|$. Рассмотрим элемент f такой, что $\|f\| < R$, где R какое-либо число. Тогда при $[u] = R$ имеем $\langle \operatorname{grad} J(u), u\rangle \geq 2([u]^2 - \|f\|[u]) = 2R(R - \|f\|) > 0$, и из последней теоремы вытекает существование внутренней точки u_0 шара $[u] \leq R$, в которой $J(u)$ принимает минимум, причем $(Au, Av)_H = (f, Av)_H\ \forall v \in H_A$. ■

Ряд глубоких теорем о минимизации выпуклых функционалов (равномерно выпуклых и др.) приводится в [10, 24].

3.3. Методы минимизации функционалов

Приведем некоторые из методов минимизации функционалов. Исследование их сходимости и формулировки соответствующих оценок скорости сходимости читатель может найти в [10] (где приведен также ряд других методов минимизации функционалов в банаховых и гильбертовых пространствах). Здесь мы ограничимся рассмотрением лишь формулировок этих методов и простейших рекомендаций по их практическому применению [8, 10].

3.3.1. Градиентный метод может применяться для приближенного решения задачи

$$J(u) \to \inf; \quad u \in H,$$

где H - гильбертово пространство, $J(u) \in C^1(H)$. Этот метод заключается в построении последовательности $\{u_k\}$ по правилу

$$u_{k+1} = u_k - \alpha_k J'(u_k), \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{30}$$

где u_0 – некоторая заданная начальная точка, α_k - положительная величина. Если $J'(u_k) \neq 0$, то α_k можно выбрать так, чтобы $J(u_{k+1}) < J(u_k)$.

Существуют различные способы выбора величины α_k в методе (30). Перечислим некоторые из них:

1) α_k выбирается из условия

$$f_k(\alpha_k) = \inf_{\alpha \geq 0} f_k(\alpha) = f_{k*}, \quad f_k(\alpha) = J(u_k - \alpha J'(u_k)); \tag{31}$$

этот вариант градиентного метода принято называть *методом скорейшего спуска*. Точное определение величины α_k из (31) не всегда возможно;

2) α_k выбирают из условия монотонности: $J(u_{k+1}) < J(u_k)$ Для этого задают какую-либо постоянную $\alpha > 0$ и в методе (30) на каждой итерации берут $\alpha_k = \alpha$. Затем проверяют условие монотонности и в случае его нарушения величину $\alpha_k = \alpha$ дробят до тех пор, пока не выполнится условие монотонности;

3) если $J(u) \in C^{1.1}(H)$ и постоянная $L > 0$ из неравенства $\|J'(u) - J'(v)\| \leq L\|u - v\|$, $u, v \in H$, известна, то величину α_k в (30) можно взять из условий

$$0 < \varepsilon_0 \leq \alpha_k \leq 2/(L + 2\varepsilon),$$

где $\varepsilon, \varepsilon_0$ — положительные числа, являющиеся параметрами метода;

4) возможно априорное задание величин α_k из условий

$$\alpha_k > 0, \quad k = 0, 1, \ldots, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty.$$

Например, можно принять $\alpha_k = c(k + 1)^{-\alpha}$, $c = const > 0$. $1/2 < \alpha \leq 1$. Такой выбор α_k прост для реализации, но не гарантирует выполнения условия монотонности $J(u_{k+1}) < < J(u_k)$ и, вообще говоря, сходится медленно;

5) в тех случаях, когда заранее известна величина $J_* = \inf_H J(u) > -\infty$, в (30) можно принять

$$\alpha_k = (J(u_k) - J_*)/\|J'(u_k)\|^2.$$

На практике итерации (30) продолжают до тех пор, пока не выполнится какой-либо критерий окончания счета. Здесь возможно использование таких критериев: $\|u_k - u_{k+1}\| \leq \varepsilon$, или $\|J(u_k) - J(u_{k+1})\| \leq \delta$, или $\|J'(u_k)\| \leq \gamma$. где $\varepsilon, \delta, \gamma$ — заданные числа; иногда заранее задают число итераций.

3.3.2. Метод проекции градиента может применяться для приближенного решения задачи

$$J(u) \to \inf; \quad u \in U, \tag{32}$$

где U — выпуклое замкнутое множество из гильбертова пространства H, $J(u) \in C^1(U)$. Проекцию точки u на множество U обозначим через $P_U(u)$.

Метод проекции градиента для решения задачи (32) заключается в построении последовательности $\{u_k\}$ по правилу

$$u_{k+1} = P_U(u_k - \alpha_k J'(u_k)), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{33}$$

где α_k — положительная величина. Если при некотором k оказалось, что $u_{k+1} = u_k$, процесс (33) прекращают.

Если $J(u) \in C^{1.1}(U)$ и константа Липшица L для градиента известна, то в (33) в качестве α_k можно взять любое число, удовлетворяющее условиям: $0 < \varepsilon_0 \leq \alpha_k \leq 2/(L+2\varepsilon)$, где $\varepsilon, \varepsilon_0$ -- положительные числа, являющиеся параметрами метода.

Возможно априорное задание величин α_k из условий

$$\alpha_k > 0, \quad k = 0, 1, \ldots, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty.$$

Заметим, что описанные здесь варианты метода (33) при $U = H$ переходят в соответствующие варианты градиентного метода.

Методом (33) удобно пользоваться лишь в тех случаях, когда имеется явная формула для проекции точки на множество.

§ 4. Некорректные задачи и методы их решения

Приведем ряд понятий и результатов из теории некорректных задач, следуя [4, 5, 9, 18, 48, 59].

4.1. Некорректные, условно корректные задачи и понятие регуляризирующего оператора

Пусть X, Y — банаховы пространства. Рассмотрим уравнение

$$Au = g \tag{34}$$

с линейным оператором $A : X \to Y$.

Из-за неточностей математической модели описываемых явлений и в результате погрешностей дискретизации задачи при подготовке её к решению на вычислительных машинах вместо точного уравнения с $g \in R(A)$ мы можем получить некоторое возмущённое уравнение

$$A_\eta u = g_\delta \tag{35}$$

с некоторыми операторами A_η и правой частью g_δ. В дальнейшем мы всегда будем ограничиваться случаем, когда оператор A_η действует в тех же пространствах X, Y и $A_\eta \in L(X, Y)$, причём $\|g_\delta - g\|_\xi \leq \delta$, $\|A_\eta - A\| \leq \eta$, где δ, η — малые положительные числа.

Задачи, записанные в виде операторного уравнения (34) могут быть некорректными (некорректно поставленными). Напомним, что задача определения $u \in X$ по исходным данным $g \in Y$ называется корректно поставленной на паре пространств X, Y, если удовлетворяются следующие условия: 1) для всякого $g \in Y$ существует решение $u \in X$; 2) решение единственно; 3) задача устойчива на пространствах X, Y. Если не выполнено хотя бы одно из этих условий, то задача называется некорректно поставленной. Отметим, что определение некорректно поставленных задач относится к выбранной паре пространств X, Y, т.к. в других пространствах та же самая задача может оказаться корректно поставленной.

К некорректно поставленным задачам приводят многие задачи оптимального управления, задачи минимизации функционалов, обратные задачи и многие другие. Одной из типичных трудностей решения этих задач является следующая. Как правило, в приложениях вместо элемента $g \in R(A)$ известно лишь его приближение $g_\delta \in Y$, $\|g_\delta - g\| \leq \delta$, например, при решении обратных задач, когда g_δ есть результат измерений (наблюдений) с точностью δ; при этом g_δ может не принадлежать $R(A)$. Приближённая задача $Au = g_\delta$ может быть, таким образом, неразрешимой. Но даже если $g_\delta \in R(A)$, то всё равно решения этого уравнения нельзя брать в качестве приближённого решения уравнения (34) это связано с отсутствием непрерывной зависимости решения от правой части. Поэтому возникает проблема построения решения уравнения (34) с приемлемой точностью, если правая часть задана с малой погрешностью. Важными в решении указанной проблемы являются понятия *условно корректной задачи и регуляризирующего оператора* (*регуляризатора*).

В основе понятия условно корректной задачи лежит *идея сужения области определения $D(A)$ исходного оператора.*

Определение 1. Задача (34) называется условно корректной (корректной по Тихонову А.Н.), если: 1) априори известно, что решение задачи (34) существует для некоторого класса данных из Y и принадлежит априори заданному множеству $M \subset D(A)$; 2) решение единственно в классе M; 3) бесконечно малым вариациям правой части (34), не выводящим решение из класса M, соответствуют бесконечно малые вариации решения. (Множество M называют *множеством корректности.*)

В основе приведённого определения условно корректной задачи лежит следующая теорема, дающая условия для корректности задачи (в смысле приведённого определения) и играющая важную роль в теории методов решения некорректных задач.

Теорема 28 (Теорема А.Н.Тихонова об устойчивости обратного оператора). *Если непустое множество $M \subseteq D(A)$ удовлетворяет условиям 2), 3), то при непрерывном операторе A обратный к нему оператор A^{-1}, рассматриваемый на образе множества M, является непрерывным.*

Если выполнены условия этой теоремы и X, Y – нормированные пространства, то возможно даже построение оценок устойчивости решения задачи. Эта возможность базируется на следующей теореме.

Теорема 29 (М.М.Лаврентьева). *Пусть A отображает компакт $M \subset X$ непрерывно и взаимно однозначно на множество $N = AM \subset Y$. Тогда существует непрерывная в нуле функция $\omega(\tau)$, $\omega(0) = 0$ такая, что $\|u_1 - u_2\|_X \le \le \omega(\|Au_1 - Au_2\|_Y)$ $\forall u_1, u_2 \in M$.*

Если теорема 28, показывая возможность устойчивого решения (34), ещё не определяет метода решения (т.к. на практике g_δ не принадлежит $R(A)$, т.е. (34) не разрешимо при заданном g_δ), то на основании теоремы 29 при определённых условиях на A, задачу (34) можно заменить на близкую, но уже разрешимую при любых $g \in Y$. При этом существенным моментом приближённого решения (34) является необходимость знания как точности задания g, т.е. оценки $\|g - g_\delta\|_Y \le \delta$, так и функции $\omega(\tau)$ (функции корректности).

Но при приближённом решении (34) можно избавиться от задания функции корректности $\omega(\tau)$ и не требовать знания δ, характеризующего точность задания правой части

(34). Эти свойства метода приближённого решения (34) присущи *методу квазирешений* (метод В.К.Иванова). Однако в этом методе требуется задание компактного множества M, т.е. множества корректности задачи (34). Приближённые решения, названные *квазирешениями*, определяются как элементы $u \in M$, на которых

$$\|Au - g_\delta\|_Y = \inf_{v \in M} \|Av - g_\delta\|_Y.$$

Существование квазирешений для любого $g_\delta \in Y$ при непрерывном A и условии компактности M следует из того, что непрерывный функционал $J(u) = \|Au - g_\delta\|_Y$ $(u \in M)$ на компакте достигает своей нижней границы. Сходимость метода непосредственно следует из теоремы о непрерывности обратного оператора.

Нетрудно заметить, что метод квазирешения обобщает понятие классического решения уравнения $Au = g$ $(u \in M)$. Этот метод допускает ряд обобщений в различных направлениях (например, можно отказаться от требования единственности решения (34), от непрерывности оператора A, не требовать компактности M и др.).

Существенный класс алгоритмов решения некорректных задач базируется на методе использования *регуляризирующего оператора* (*регуляризатора*), предложенного А.Н.Тихоновым (метод регуляризации, метод Тихонова). Дадим одно из определений регуляризирующего оператора [18, 59].

Пусть рассматривается задача (34) и пусть эта задача некорректна. Предположим, что для точно заданной правой части $\bar{g}$ существует единственное решение $\bar{u}$ уравнения (34). Однако $\bar{g}$ может оказаться неизвестным, тогда как заданы g_δ и величина погрешности δ такие, что $\|g_\delta - \bar{g}\|_Y \le \delta$. Требуется построить приближённое решение u_δ уравнения — элемент u_δ, который бы стремился к точному решению $\bar{u}$ при $\delta \to 0$. (Как отмечалось выше, в качестве u_δ нельзя брать элемент $A^{-1}g_\delta$, даже если $g_\delta \in R(A)$.) Построение u_δ

можно осуществить, если для задачи (34) существует регуляризирующий оператор (регуляризатор).

Определение 2. *Оператор $R(g,\delta)$, действующий из пространства Y в пространство X, называется регуляризирующим для уравнения $Au = g$ (относительно элемента $\bar{g}$), если обладает свойствами:*

1) *существует число $\delta_1 > 0$ такое, что оператор $R(g,\delta)$ определён для всех $\delta \in [0,\delta_1]$ и $g_\delta \in Y$, удовлетворяющих неравенству $\|g_\delta - \bar{g}\|_Y \le \delta$;*

2) *для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta_0(\varepsilon, g_\delta)$ такое, что из неравенства*

$$\|g_\delta - \bar{g}\|_Y \le \delta \le \delta_0$$

следует неравенство $\|u_\delta - \bar{u}\|_X \le \varepsilon$, где $z_\delta = R(g_\delta,\delta)$.

В этом определении допускается многозначность оператора $R_\delta \equiv R(g,\delta)$. Через u_δ обозначается произвольный элемент из множества значений $R(g,\delta)$.

Для теории приближённых методов типичной является ситуация, когда конкретный метод приближённого решения задачи зависит от некоторого параметра. Это может быть шаг сетки, номер числа итераций и т.д. В связи с этим часто используется следующая схема построения регуляризирующего оператора. Задаётся некоторое семейство операторов $R(g,\alpha)$, действующих из Y в X и зависящих от некоторого другого параметра α. Затем параметр α выбирается в зависимости от δ и g_δ: $(\alpha = \alpha(\delta, g_\delta))$ так, чтобы $R_\delta \equiv R(g_\delta, \alpha(\delta, g_\delta)) \to \bar{u}$ при $\delta \to 0$. (Отмечаем, что если $\alpha = \delta$, то получаем оператор R_δ, введённый в определении 2.)

Регуляризатор называется непрерывным, линейным и т.д., если каждый оператор R_δ $(0 < \delta \le \delta_1)$ непрерывен и т.д. Задача (34) называется *регуляризуемой* (непрерывно регуляризуемой, линейно регуляризуемой), если для нее существует хотя бы один регуляризатор (непрерывный регуляризатор, линейный регуляризатор). Наличие регуляризатора позволяет при любом $g \in R(A)$, известном приближённо с точностью $\delta(\|g_\delta - g\|_Y \le \delta)$, восстановить точное решение u в пределе при $\delta \to 0$. В реальных задачах, хотя δ и мало, как правило, предельный переход $\delta \to 0$ неосуществим. Тем не менее есть надежда, что $R_\delta g_\delta$ будет хорошим приближением к точному решению. Поэтому построение регуляризаторов некорректных задач представляет не только большой теоретический интерес, но и даёт ключ к устойчивому решению таких задач.

Задачу приближённого решения уравнения $Au = g$ можно рассматривать в более общем случае приближённого задания исходных данных, когда не только правая часть g, но и оператор A заданы с погрешностью.

Для решения некорректной задачи можно применять специальные итерационные методы, в которых (как и в корректном случае) основная задача состоит в построении аппроксимирующей последовательности $\{u^n\}$. Однако *для некорректных задач число итераций n необходимо согласовывать с погрешностью δ*, т.е. каждому δ нужно поставить в соответствие $n = n(\delta)$, носящий роль параметра регуляризации, такой, чтобы $u_n \to \bar{u}$ при $\delta \to 0$. Итерационные методы такого типа относятся к классу *методов итеративной регуляризации*, и они позволяют решать широкий класс задач с возмущением входных данных, т.к. при подходящем выборе $n(\delta)$ порождают регуляризирующий алгоритм для задачи (34).

Некоторые из методов решения некорректно поставленных задач, принадлежащих перечисленным выше классам методов, приводятся в следующих разделах этого параграфа.

4.2. Метод М.М.Лаврентьева

Метод М.М.Лаврентьева применяют для решения некорректно поставленных задач с самосопряжёнными неотрицательными операторами. Будем считать, что в уравнении (34) $A = A^* \geq 0$. *Метод М.М.Лаврентьева* заключается в переходе к регуляризованному уравнению

$$\alpha u + Au = g, \tag{36}$$

где α — малый положительный параметр (параметр регуляризации). Обозначая через I тождественный оператор, имеем $((\alpha I + A)u, u) \geq \alpha\|u\|^2 \ \forall\, u \in H$, поэтому оператор $\alpha I + A$ обратим, $\|(\alpha I + A)^{-1}\| \leq \alpha^{-1}$. Задача (36), таким образом корректна, и некорректная задача (34) вкладывается в семейство корректных как предельный случай при $\alpha \to 0$ Решение $u_\alpha = (\alpha I + A)^{-1} g$ минимизирует функционал

$$J_\alpha(u) = \alpha\|u\|^2 + (Au, u) - (u, g) - (g, u).$$

Опишем одну *итеративную модификацию* метода М.М Лаврентьева, рассматривая сразу случай, когда вместо g задано приближение g_δ (см. (35)). Зафиксируем натуральное число $m \geq 1$. Пусть u_0 — некоторое априори известное приближение к решению уравнения (34). Положив $u_{0,\alpha} = u_0$ последовательно вычислим $u_{1,\alpha}, \ldots, u_{m,\alpha}$ как решения уравнений

$$\begin{gathered} u_{0,\alpha} = u_0, \quad \alpha u_{n,\alpha} + Au_{n,\alpha} = \alpha u_{n-1,\alpha} + g_\delta, \\ n = 1, \ldots, m \quad (m \geq 2). \end{gathered} \tag{37}$$

В качестве приближённого решения уравнения (34) примем элемент $u_{m,\alpha}$. Заметим, что в случае $m = 1$, $u_0 = 0$ получаем уравнение (36); обратим внимание на то, что число итераций m *в* (37) *фиксировано.*

Относительно сходимости (37) имеет место следующее утверждение.

Лемма 1 [9]. *Пусть $X = Y \equiv H$, $A = A^*$ — неотрицательный оператор, $g \in R(A)$, $\|g_\delta - g\| \leq \delta$. Подберём параметр $\alpha = \alpha(\delta)$ в методе* (37) *таким образом, что $b_1\delta \leq \|Au_{m,\alpha} - g_\delta\| \leq b_2\delta$, $1 < b_1 \leq b_2$. Тогда $\delta/\alpha(\delta) \to 0$*

$u_{m,\alpha(\delta)} \to u_*$ при $\delta \to 0$, где u_* – решение уравнения $Au = g_\delta$, ближайшее к u_0.

Замечание. В (37) можно принять $m = 1$; здесь $u_\alpha = u_{\alpha,1} = (\alpha I + A)^{-1}(\alpha u_0 + g_\delta)$, а $\alpha = \alpha(\delta)$ можно выбирать из условия $b_1\delta^s \leq \|Au_\alpha - g_\delta\| \leq b_2\delta^s$, $0 < b_1 \leq b_2$, $0 < s < 1$ [9]. ■

Замечание. В дальнейшем при формулировке результатов сходимости рассматриваемых методов решения некорректных задач мы будем ограничиваться приведением лишь части данных результатов, полученных для этих методов. Более полная информация об оценках их скорости сходимости можно найти в цитируемой литературе. Однако отметим, что ряд утверждений о сходимости, выбора параметра α или числа итераций n в рассматриваемых нами задачах в следующих главах практически труднореализуемы, поскольку в этих задачах операторы A, A^*, AA^* задаются неявно. ■

4.3. Метод регуляризации А.Н.Тихонова

4.3.1. Метод регуляризации А.Н.Тихонова в применении к уравнению (34) (без требования самосопряжённости A) в одном из простейших вариантов заключается в том, что вместо (34) рассматривается уравнение

$$\alpha u + A^*Au = A^*g, \tag{38}$$

где α – малый положительный параметр; $A : X \to Y$, X, Y — гильбертовы пространства. Уравнение (38) является уравнением Эйлера для функционала

$$J_\alpha(u) = \alpha\|u\|_X^2 + \|Au - g\|_Y^2, \tag{39}$$

который принимает наименьшее значение на решении $u_\alpha = (\alpha I + A^*A)^{-1}A^*g$ уравнения (38). Как уже показано в п. 2.5., гл.1, если $g \in R(A)$, *то $u_\alpha \to u^*$ при $\alpha \to +0$, где u^+*

псевдорешение уравнения (34). Оператор

$$R_\alpha \equiv (\alpha I + A^*A)^{-1}A^* = A^*(AA^*g + \alpha I)^{-1} \qquad (40)$$

является примером регуляризирующего оператора.

Если вместо точной правой части g уравнения (34) задана приближённая правая часть g_δ и величина погрешности δ : $\|g - g_\delta\|_Y \leq \delta$, то уравнение (38) и функционал $J_\alpha(u)$ задаются теми же выражениями (38), (39), в которых вместо g стоит g_δ. Задача (38) с возмущённой правой частью g_δ по-прежнему имеет единственное решение $u_{\alpha,\delta} = (\alpha I + A^*A)^{-1}A^*g_\delta$. Однако чтобы иметь сходимость $u_{\alpha,\delta}$ к решению уравнения (34), необходимо изменять характер поведения параметра регуляризации α в зависимости от δ, т.е. иметь $\alpha = \alpha(\delta)$ (иначе сходимость в общем случае отсутствует). Имеет место следующая

Теорема 30 [18]. *Пусть $g \in R(A)$, $N(A) = \{0\}$, $\alpha(\delta) > 0$ при $\delta > 0$, $\alpha(\delta) \to 0$ и $\delta^2/\alpha(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Тогда $\|u_{\alpha,\delta} - u\|_X \to 0$ при $\delta \to 0$.*

Замечание. В [18, с. 32] приводится пример, показывающий необходимость условия $\delta^2/\alpha(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$ для сходимости $u_{\alpha,\delta}$ к u при $\delta \to 0$. ■

Приведём некоторые результаты, касающиеся свойств решений уравнения (38) и поведения функционала (39), которые представляют определённый независимый интерес.

Введём при $\alpha > 0$ следующие функции:

$$\begin{gathered} m_\alpha \equiv \|Au_\alpha - g\|_Y^2 + \alpha\|u_\alpha\|^2, \\ \varphi(\alpha) = \|Au_\alpha - g\|_Y^2, \quad \psi(\alpha) = \|u_\alpha\|_X^2, \end{gathered} \qquad (41)$$

где $u_\alpha = (\alpha I + A^*A)^{-1}A^*g$ — элемент, на котором достигается нижняя грань функционала $J_\alpha(u)$. Справедлива следующая

Лемма [18, 59]. *Пусть $A : X \to Y$ есть линейный, вполне непрерывный оператор, X, Y – сепарабельные гильбертовы пространства, $N(A) \equiv \ker(A) = \{0\}$ и $R(A) = Y$. Тогда:*

1) *если $g \neq 0$ и $\alpha_1 \neq \alpha_2$, то $u_{\alpha_1} = u_{\alpha_2}$;*

2) *если $g \neq 0$ и $0 < \alpha_1 < \alpha_2$, то $m(\alpha_1) < m(\alpha_2)$, $\varphi(\alpha_1) < \varphi(\alpha_2)$, $\psi(\alpha_1) > \psi(\alpha_2)$;*

3) *при $\alpha > 0$ оператор $B_\alpha \equiv (\alpha I + A^*A)$ отображает пространство X на X и имеет определённый на всём X ограниченный обратный B_α^{-1};*

4) *функции $m(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$ при $\alpha > 0$ непрерывны;*

5) *если $g \neq 0$, то $\lim\limits_{\alpha\to+0}\varphi(\alpha) = 0$, $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\varphi(\alpha) = \|g\|_Y^2$.*

На основе утверждений приведённой выше леммы базируется один из самых распространённых методов выбора параметра α в зависимости от α — *выбор параметра регуляризации по невязке.*

Теорема 31 [18, 59]. *Пусть выполнены условия леммы, $f \in R(A)$, и есть решение (34), а $u_{\alpha,\delta}$ есть решение (38) при замене g на g_δ, где $\|g - g_\delta\|_Y \leq \delta$, $0 < \delta < \|g_\delta\|_Y$. Тогда для любого $\delta \in (0, \|g_\delta\|_Y)$ существует единственное значение $\alpha = \alpha(\delta)$, удовлетворяющее уравнению $\|Au_{\alpha,\delta} - g_\delta\|_Y^2 = \delta^2$, при этом $\|u_{\alpha(\delta),\delta} - u\|_Y \to 0$ при $\delta \to 0$.*

4.3.2. Наряду с описанным вариантом метода А.Н.Тихонова можно применять его *итерированный вариант.* Зададим начальное приближение $u_{0,\alpha} \equiv u_0 \in X$ и натуральное число $m \geq 1$ и последовательно вычислим $u_{1,\alpha}, \ldots, u_{m,\alpha}$, решая уравнения

$$\alpha u_{n,\alpha} + A^*Au_{n,\alpha} = \alpha u_{n-1,\alpha} + A^*g_\delta; \quad n = 1, 2, \ldots, m, \qquad (42)$$

элемент $u_{m,\alpha}$ принимается за приближённое решение уравнения $Au = g$. Здесь g_δ — приближение к g такое, что $\|g_\delta - g\|_Y \leq \delta$.

Теорема 32 [9]. *Пусть $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ и $g \in R(A)$. Подберём параметр $\alpha = \alpha(\delta)$ в алгоритме (42) таким образом, что*

$$b_1\delta \leq \|Au_{m,\alpha} - g_\delta\|_Y \leq b_2\delta, \quad 1 < b_1 \leq b_2. \qquad (43)$$

Тогда $\delta^2/\alpha(\delta) \to 0$, $u_{m,\alpha(\delta)} \to u_*$ при $\delta \to 0$, где u_* – ближайшее к u_0 квазирешение уравнения $Au = g$.

4.3.3. Выше рассматривался один из простейших вариантов метода регуляризации А.Н.Тихонова. Однако ряд вариантов этого метода базируется на глубокой идее о стабилизации минимума уклонения значений Au от заданной правой части g_δ при помощи некоторого вспомогательного неотрицательного (сглаживающего) функционала $\Omega(u)$ — стабилизирующего функционала, определённого на некоторой части $U \subseteq D(A)$, которая плотна в X и сама является метрическим пространством. Требуется, чтобы множества $X_C \equiv \{u \in U : \Omega(u) \le C\}$ были компактны в U, при этом $C \ge 0$.

Определение 1 [59]. Неотрицательный функционал $\Omega(u)$, определённый на всюду плотном в X подмножестве U множества X, называется *стабилизирующим функционалом,* если: 1) $U \subseteq D(A)$; 2) множество X_C компактно в X.

Ограничимся рассмотрением таких стабилизирующих функционалов Ω, что на элементах $u \in U \subseteq D(A)$ функционал $\|u\|_{X_C} = (\Omega(u))^{1/2}$ обладает свойствами нормы, причем $\|u\|_{X_C} \ge \|u\|_X \ \forall u \in U$ и норма $\|u\|_{X_C}$, определённая на U, порождает гильбертово пространство X_C с нормой $\|u\|_{X_C}$. Тогда можно ввести самосопряжённый положительно определённый оператор Λ_C такой, что $\|u\|_{X_C} = (\Lambda_C^{1/2}u, \Lambda_C^{1/2}u)_X^{1/2}$.

Пусть $\Omega(u) \equiv \|u\|^2_{X_C}$ — стабилизирующий функционал, определённый на подмножестве $U \subset X$ (U может совпадать с X, например, в конечномерном случае). Рассмотрим задачу минимизации функционала вида

$$J_\alpha(u,\delta) \equiv \alpha\Omega(u) + \|Au - g_\delta\|^2_Y, \tag{44}$$

где $g_\delta \in Y$, $\|g - g_\delta\|_Y \le \delta$, $\alpha > 0$. Эта задача имеет единственное решение $u_{\alpha,\delta} \in X_C$ при любом $\alpha > 0$. Если ввести обозначения $u_1 \equiv \Lambda_C^{1/2}u$, $A_1 \equiv A\Lambda_C^{-1/2}$, то рассмотрение проблемы минимизации функционала (44) сводится к задачам, рассмотренным в п. 4.3.1. Поэтому здесь можно также переформулировать многие утверждения из п. 4.3.1. В частности, имеет место следующая теорема [9, 18, 48, 59].

Теорема 33. *Пусть $g \in R(A)$, $N(A) = \{0\}$ и решение уравнения* (34) *принадлежит X_C. Тогда если $\alpha(\delta) > 0$ при $\delta > 0$, $\alpha(\delta) \to 0$ и $\delta^2/\alpha(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, то $\|u_{\alpha,\delta} - u\|_{X_C} \to$ $\to 0$ при $\delta \to o$.*

Замечание. Если $\Omega(u) = (\Lambda_C u, u)_X$, а параметр регуляризации α выбирается методом невязки, то для α справедливы оценки ([59], с. 80):

$$\alpha \le \frac{\|A\Lambda_C^{-1}A^*\|\delta}{\|g_\delta\|_Y - \delta}, \quad \alpha \le \frac{\|A^*A\|\,\|A^*\|\,\|g_\delta\|_Y}{2\|A^*g_\delta\| - \|A^*\|\,\|g_\delta\|_Y}.$$

При некоторых дополнительных предположениях можно пользоваться оценкой

$$\alpha \le \frac{\|A\|^2\delta}{\|g_\delta\|_Y - \delta}. \ \blacksquare$$

4.4. Итерационные методы решения некорректных задач

В предыдущих разделах этого параграфа регуляризация некорректной задачи достигалась её включением как некоторого предельного случая ($\alpha = 0$) в семейство корректно поставленных задач. Теперь обратимся к итерационным методам регуляризации. Параметром регуляризации в них является номер итерации. Дадим описание простейших итерационных методов сперва в самосопряжённом случае, когда $X = Y = H$, $A = A^* \ge 0$. Зададимся начальным приближением $u_0 \in H$; его разумно брать ближе к искомому точному решению задачи (34); при отсутствии всякой информации о точном решении можно положить $u_0 = 0$. По u_0 последовательно вычислим

$$u_n = u_{n-1} - \tau(Au_{n-1} - g), \ n = 1,2,\dots \ (0 < \tau < 2/\|A\|). \tag{45}$$

Здесь τ — постоянная. Вот другая итерационная схема:

$$\alpha u_n + Au_n = \alpha u_{n-1} + g, \quad n = 1, 2, \ldots \quad (\alpha = const > 0); \quad (46$$

каждый шаг итерации заключается в решении корректн поставленной задачи. Постоянная α здесь не обязательн мала, регуляризация достигается за счёт многократного ите рирования. При меньших α для достижения цели хотя требуется меньшее число итераций, но сами итерации осу ществить труднее — ухудшается мера устойчивости зада чи (46). Стоит обратить внимание на формальное сходств итерационного метода (46) с итерированным вариантом ме тода М.М.Лаврентьева. Однако регуляризация в этих дву методах достигается по-разному: в итерированном вариант метода М.М.Лаврентьева за счёт малости α при фиксиро ванном числе итераций, а в итерированном методе (46) — з счёт большого числа итераций при фиксированном α.

В общем случае несамосопряжённой задачи с $A \in L(X, Y$ предварительно симметризуем задачу (переходим от (34) к задаче $A^*Au = A^*g$) и затем применяем те же итерационны схемы, что и выше. Таким образом, приходим к итерационным схемам

$$u_n = u_{n-1} - \tau A^*(Au_{n-1} - g), \ n = 1, 2, \ldots \ (0 < \tau < 2/\|A\|^2) \quad (47)$$

и

$$\alpha u_n + A^*Au_n = \alpha u_{n-1} + Ag, \ n = 1, 2, \ldots \ (\alpha = const > 0). \quad (48)$$

Методы (45) и (47) называют *явными* итерационными процессами, а (46), (48) — *неявными.*

В случае несамосопряжённой задачи можно рассмотреть также следующий итерационный алгоритм:

$$u_n = u_{n-1} - \tau(\mathcal{A}_\alpha u_{n-1} - A^*g), \quad n = 1, 2, \ldots, \quad (49)$$

где $\mathcal{A}_\alpha = \alpha I + A^*A, \ 0 < \tau < 2/(\alpha + \|A\|^2)$.

Метод (49) рассмотрен в п. 2.6 настоящей главы, где приведены способы оптимизации выбора параметра τ и даны соответствующие оценки скорости сходимости метода. В силу ограничений на τ в (45), (47) эти алгоритмы согласно общей теории итерационных процессов также являются сходящимися [38, 56]. Изучение вопросов сходимости алгоритмов (45)–(48) можно найти в [9].

Особый интерес представляют итерационные алгоритмы решения некорректных задач в случае, когда вместо A, g известны их приближения A_η, g_δ, такие, что $\|A - A_\eta\| \le \eta$, $\|g - g_\delta\|_Y \le \delta$, где η, δ — малые положительные величины. Кроме того, из-за погрешностей определения и каких-либо других "помех"на каждом шаге итераций допускаются неточности, характеризуемые элементами $\omega_n, \ n = 1, 2, \ldots$ такие, что $\|\omega_n\|_X \le \varepsilon$ — малый положительный параметр (обычно $\varepsilon \ll \delta + \eta$). В силу сделанных предположений итерационный процесс (47) (мы ограничимся рассмотрением только этого метода) примет вид

$$\tilde{u}_n = \tilde{u}_{n-1} - \tau A_\eta^*(A_\eta \tilde{u}_{n-1} - g_\delta) + \omega_n, \quad n = 1, 2, \ldots \quad (50)$$

Относительно сходимости данного итерационного метода справедлива

Теорема 34 [9]. *Пусть* $A, A_\eta \in L(X, Y)$, $\|A_\eta - A\| \le \eta$ $(0 < \eta \le \eta_0)$, $\|g_\delta - g\|_Y \le \delta$, $g \in R(A)$, $\|\omega_n\|_X \le \varepsilon \le C(\delta + +\eta)^2$, $n = 1, 2, \ldots$, $(C = const)$, $0 < \tau < 2/\|A_\eta\|^2$. *Тогда если итерации* (50) *останавливаются при таком* $n = n(\delta, \eta)$, *что* $n(\delta, \eta) \to \infty$, $(\delta + \eta)^2 n(\eta, \delta) \to 0$ *при* $\delta \to 0$, $\eta \to 0$, *то* $\tilde{u}_n \to u_*$ *при* $\delta \to 0$, $\eta \to 0$, *где* u_* *- ближайшее к* $\tilde{u}_0 \equiv u_0$ *решение уравнения* $Au = g$.

Замечание. В работе [18, с. 42] для алгоритма при $A = = A_n, \omega_n \equiv 0$ устанавливается следующее утверждение: *если* $g \in R(A)$, $N(A) = \{0\}$, $u_0 = \tau A^* g_\delta$, $0 < \tau < (2/\|A^*A\|)$, *то, если* $n(\delta) \to \infty$, $\delta \cdot n(\delta) \to 0$ *при* $\delta \to 0$, *имеет место сходимость* $\tilde{u}_n$ *к и решению уравнения* $Au = g$. ■

Рассмотрим теперь алгоритм (49) при $A = A_\eta$, $\omega_n \equiv 0$:

$$\tilde{u}_n = \tilde{u}_{n-1} - \tau(\mathcal{A}_\alpha \tilde{u}_{n-1} - A^* g_\delta), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{51}$$

в котором примем $\alpha > 0$, $\tilde{u}_0 \equiv u_0 = \tau A^* g_\delta$, а параметр τ выбирается оптимальным: $\tau = \tau_{opt} = 2/(2\alpha + \|A^*A\|)$. Установим сходимость $\tilde{u}_n$ к решению u уравнения $\alpha u_\alpha + A^*Au_\alpha = A^*g$ и оценим погрешность $(\tilde{u}_n - u_\alpha)$.

Заметим, что $\tilde{u}_n$ при $\tilde{u}_0 = \tau A^* g_\delta$ представляется в виде $\tilde{u}_n = R_n g_\delta$, где $R_n \equiv \tau \sum\limits_{i=0}^{n} (I - \tau \mathcal{A}_\alpha)^i A^*$, тогда как u_α есть $u_\alpha = R_\infty g$. Следовательно,

$$\|\tilde{u}_n - u_\alpha\|_X \le \|R_n(g_\delta - g)\|_X + \|R_n g - R_\infty g\|_X \le$$
$$\le \|R_n\| \, \|g_\delta - g\|_Y + \|R_n - R_\infty\| \, \|g\|_Y$$

Поскольку при $\tau = \tau_{opt}$ имеем

$$\|I - \tau \mathcal{A}_\alpha\| \le q_\alpha, \quad q_\alpha = \frac{\|A^*A\|}{2\alpha + \|A^*A\|} < 1,$$

то

$$\|R_n\| \le \tau \|A^*\| \sum_{i=0}^{n} q_\alpha^i \le \frac{\tau\|A^*\|}{1 - q_\alpha} = \frac{\tau\|A^*\| \, (\|A^*A\| + 2\alpha)}{2\alpha} = \frac{\|A^*\|}{\alpha}$$

$$\|R_n - R_\infty\| \le \tau \|A^*\| \sum_{i=n+1}^{\infty} q_\alpha^i \le \frac{\|A^*\|}{\alpha} q_\alpha^{n+1}$$

$$\|\tilde{u}_n - u_\alpha\|_X \le \frac{\|A^*\|}{\alpha}(\delta + \|g\|_Y q_\alpha^{n+1}).$$

Пусть n достаточно большое, причём $n \cong |\ln\delta|/\alpha$ при $\delta \to 0$, $\alpha \to 0$. Тогда $\delta \cong q_\alpha^n$, а значит, $\|\tilde{u}_n - u\|_X \le C\delta/\alpha$, где постоянную C можно считать не зависящей от α, δ, n. Выбирая $\alpha = \alpha(\delta)$ так, чтобы $(\delta/\alpha(\delta)) \to 0$ при $\delta \to 0$ получаем как сходимость $\tilde{u}_n$ к u_α, так и оценку погрешности $(\tilde{u} - u_\alpha)$. Сформулируем установленные результаты в виде следующего утверждения:

Лемма. *Если в методе* (51) *выбрать* $\tau = \tau_{opt} = 2/(2\alpha + \|A^*A\|)$, *а* $\alpha = \alpha(\delta)$ *и число итераций* $n = n(\delta, \alpha)$ *такие, что*

$$\begin{gathered} \alpha = \alpha(\delta) \to 0, \quad n(\delta,\alpha) \cong |\ln\delta|/\alpha(\delta) \to \infty, \\ \delta/\alpha(\delta) \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to \infty, \end{gathered} \tag{52}$$

то $\tilde{u}_n \to u_\alpha$ *при* $\delta \to 0$, *причём*

$$\|\tilde{u}_n - u_\alpha\|_X \le C\delta/\alpha(\delta), \tag{53}$$

где $C = const$.

Следствие 1. *Если в* (51) *принято* $\alpha(\delta) = \delta^s$, *где* $0 < s < 1$, *то утверждения леммы справедливы при* $n \cong |\ln\delta|/\delta^s \to \infty$, $\delta/\alpha(\delta) = \delta^{1-s} \to 0$, *а также* $\delta \cdot n(\delta) = \delta^{1-s}|\ln\delta| \to 0$ *при* $\delta \to 0$.

На основе (53) и подходящих ограничений на решение (или исходные данные) задачи $Au = g$ можно установить сходимость $\tilde{u}_n$ к u или $A\tilde{u}_n$ к g. Например, имеем

Следствие 2. *Пусть* $u \in X$ *и выполнены условия следствия 1. Тогда при* $s = 2/3$ *получаем сходимость невязки* $(A\tilde{u}_n - g)$ *к нулю при* $\delta \to 0$, *причём* $\|A\tilde{u}_n - g\|_Y \le C\delta^{1/3}$, $C = const$.

Доказательство. Если $u \in X$, то из уравнений $A^*Au = A^*g$, $\alpha u_\alpha + A^*Au_\alpha = A^*g$ легко получаем оценки вида

$$\begin{gathered} 2\alpha\|u - u_\alpha\|_X^2 + \|A(u - u_\alpha)\|_Y^2 \le \alpha\|u\|_X^2 \\ \|Au_\alpha - g\|_Y \le \sqrt{\alpha}\|u\|_X. \end{gathered}$$

При ограничениях следствия 1 имеем также

$$\begin{aligned} \|A\tilde{u}_n - g\|_Y &\le \|Au_\alpha - g\|_Y + \|A\tilde{u}_n - Au_\alpha\|_Y \le \\ &\le \sqrt{\alpha}\|u\|_X + \|A\| \, \|\tilde{u}_n - u_\alpha\|_X \le C\delta^{1/3}, \end{aligned}$$

где $C = const < \infty$. ■

На основе полученных ранее утверждений получаем следующий результат сходимости.

Следствие 3. *Если $A \in L(X, Y)$ и выполнены условия следствия 1, то $\{\tilde{u}_n\}$ сходятся к псевдорешению u^+ уравнения $Au = g$, если $Qg \in R(A)$, где Q — ортопроектор на $R(A)$, и к нормальному решению, если $g \in R(A)$.*

§ 5. Некоторые понятия теории оптимального управления

5.1. Понятие о задаче оптимального управления

Задачи оптимального управления можно рассматривать как специальный случай экстремальных задач. Это есть задачи о выборе наилучшего в заранее предписанном списке способа осуществления некоторого управляемого процесса. Этот (стационарный или нестационарный) *процесс* может быть, как правило, описан при помощи дифференциальных, интегральных, функциональных, конечно-разностных или иных формализованных соотношений, зависящих от системы функций или параметров, называемых *управляющими* и подлежащих определению. Искомые управления, а также реализацию самого процесса следует в общем случае выбирать с учётом ограничений. Если в заданном классе управлений требуется выбрать управление, оптимизирующее заданный показатель (критерий) качества процесса и представимый в виде функционала (от независимых переменных задачи, управления и др.), то управление, решающее проблему оптимизации (минимизации, максимизации и т.д.) показателя качества процесса, называется*оптимальным управлением*, а всю задачу называют *задачей оптимального управления*.

Задача оптимального управления в общем виде может быть описана следующим образом.

1. Пусть задана некоторая управляемая система (процесс) S, состояние которой описывается некоторой функцией ϕ (вектор-функцией, элементом некоторого функционального пространства и т.д.), зависящей от независимых переменных (пространственных переменных, времени и др.). Предполагается, что к системе S приложены некоторые управляющие воздействия u (функции, описывающие воздействие "сил", функции температурных или электрических потенциалов, капиталовложения и т.д.).

2. Дано уравнение — *уравнение состояния*, связывающее независимые переменные, ϕ, u и описывающее поведение системы. Одним из случаев этого уравнения может быть некоторое операторное уравнение $L(\phi, u, f) = 0$, где L — оператор, действующий в подходящих пространствах, а f — заданная функция.

3. Известен характер информации, которая может быть использована для формирования управляющих воздействий (например, задается функция φ_{ob}, построенная на основе экспериментальных измерений функций ϕ во всей области, где оператор ϕ, или на какой-то её подобласти). Оговаривается класс функций, среди которых будут описываться управления.

4. Устанавливаются ограничения на процесс, подлежащий реализации. Сюда прежде всего входят дополнительные ограничения, которые могут быть наложены на величины управляющих воздействий u, на область их определения (локализованные управления, неотрицательность управлений и т.п.).

5. Задаётся показатель (критерий) качества процесса, представимый в виде функционала $J(\phi, \ldots, u)$ (функционал стоимости, функция стоимости и др.) от рассматриваемых переменных $\phi, \ldots, u$ (возможно, как независимых переменных, так и зависимых ϕ, u). Условия 1)–4) дополняются условием оптимальности процесса - минимума, максимума и т.д. J. Например, этим условием может быть

$$\inf_u J(\phi, \ldots, u, \varphi_{ob}).$$

После того как задача оптимального управления описана (см. 1)–5)), она формулируется так: *в выбранных функциональных пространствах требуется найти решение уравнения состояния* ϕ *и управление* u *такие, чтобы* (при выполнении дополнительных ограничений на управления) выполнялся критерий оптимальности процесса. Если задача рассматривается без дополнительных ограничений (на управления), то её называют ещё задачей без ограничений. Если задача оптимального управления имеет решение, то пару ϕ, u называют *оптимальным решением*, а управление u — *оптимальным управлением.*

В изучении задачи оптимального управления выделяют вопросы существования решения, вывод необходимых условий экстремума (оптимальности управления) — *условий оптимальности*, исследование достаточных условий, построение численных алгоритмов.

Описанный вариант постановки задач оптимального управления предполагает существование корректной математической модели процесса. Однако в приложениях доступной информации о системе (коэффициенты уравнения состояния, данные измерений и характер функции φ_{ob} могут обладать характером неопределённости и т.д.) может оказаться недостаточно для прямого использования отмеченных выше постановок задач оптимального управления. Поэтому возникает потребность в модификации этих постановок, что приводит к *задачам оптимального управления в условиях неопределённости*, задачам приближённого управления, задачам плотной управляемости и т.д.

Формализуем теперь ряд изложенных выше понятий и этапов в постановке задачи оптимального управления, причём в качестве управления состояния и критерия оптимальности будем брать частные их случаи, при этом дополнительные ограничения на управления будут отсутствовать.

Пусть рассматривается некоторая система (процесс), состояние которой описывается элементом ϕ и которая является решением *уравнения состояния* вида

$$L\phi = f + Bu, \tag{54}$$

где L, B — линейные операторы $L : W \to Y$, $B : H_C \to \to Y, W, Y, H_C$ — гильбертовы пространства, $D(L)$ – область определения оператора L, $D(B)$ — область определения B. Считаем $\overline{D(L)} = W$, $\overline{D(B)} = H_C$, f — заданный элемент пространства Y, u — управление, подлежащее определению вместе с ϕ. Отметим, что операторы L, B могут быть неограниченными и несимметричными.

Пусть рассматривается некоторый функционал $J(u, \phi)$ класса C^1, зависящий от u, ϕ и, возможно, от независимых переменных, а также от некоторых заданных элементов (например, функции φ_{ob}, построенной на основе данных измерений, или φ_{ob} есть функция конечного состояния, в которое должна перейти описанная система в момент времени $t = T$ и т.д.). Область определения $D(J)$ функционала J считаем выпуклым и плотным в H_C. Элемент u считаем *управлением*; если он определён, то функция ϕ определяется как решение уравнения (54), т.е. имеем зависимость ϕ от u. Поэтому можно писать $\phi \equiv \phi(u)$, $J(u) \equiv J(u, \phi(u))$.

Пусть функционал J принимается в качестве критерия качества процесса (функционала стоимости, функции стоимости и т.д.). Чтобы найти ϕ вместе с u, введём условие вида

$$J(u, \phi(u)) = \inf_v J(v, \phi(v)), \tag{55}$$

которое можно также рассматривать как дополнительное уравнение, которое замыкает задачу определения неизвестных ϕ, u из соотношений (54), (55).

Определение. Если задача (54), (55) имеет решение ϕ, u, где $\phi = \phi(u)$, то элемент u называется *оптимальным управлением*, а пару ϕ, u называют *оптимальным решением.*

Если уравнение (54) корректно разрешимо при заданном u, то существует обратный оператор L и $\phi = L^{-1}(f + Bu)$.

Поэтому функцию ϕ можно, как уже отмечалось выше, исключить и рассматривать функционал $J(v) \equiv J(v, \phi(v))$ (даже не требуя явного вида L^{-1}!), и проблему минимизации по одной переменной v. В дальнейшем в данной книге при *рассмотрении задач типа* (54), (55) *мы всегда будем считать, что если управление v задано, то уравнение* (54) *имеет единственное решение $\phi = L^{-1}(f + Bv)$ и разрешимость* (54) *является корректной, т.е. в подходящих пространствах $\|L^{-1}\| < \infty$.* В силу данного предположения и того, что $J \equiv J(v)$, мы часто будем принимать $D(B) = D(J)$.

5.2. Условия оптимальности

Предположим, что задача (55) исследована и доказано существование непустого множества U_* оптимальных управлений. Если некоторый элемент $u \in U_*$ является внутренней точкой из U_*, то согласно теории экстремальных задач она принадлежит множеству критических точек задачи (55) и должно выполняться условие:

$$\delta J(u, \delta u) \equiv \frac{dJ(u + \varepsilon\delta u, \phi(u + \varepsilon\delta u))}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = 0$$

при $\forall\, (u + \delta u) \in D(J)$, т.е. первая вариация функционала должна равняться нулю в точке u. Это условие приводит к уравнению вида

$$\langle J'_u(u, \phi(u), \delta u\rangle + \langle J'_\phi(u, \phi(u)), \delta\phi\rangle = 0, \tag{56}$$

— *необходимому условию оптимальности*, где J_u, J_ϕ — частные производные функционала J по u и ϕ, а зависимая вариация $\delta\phi$ связана с независимой вариацией δu посредством уравнения

$$L\delta\phi = B\delta u, \tag{57}$$

полученного из (54) при переходе[1] от u к $u + \delta u$, т.е. $\delta\phi = L^{-1}B\delta u$. Если подставить это выражение для $\delta\phi$ в (56) и предположить, что $(L^{-1}B)^* = B^*L^{*-1}$, то из (56) получаем следующие выражения необходимого условия оптимальности

$$\langle J'_u(u, \phi), \delta u\rangle + \langle J'_\phi(u, \phi), L^{-1}B\delta u\rangle = 0,$$
$$\langle J'_u(u, \phi) + B^*L^{*-1}J'_\phi(u, \phi), \delta u\rangle = 0$$

при любых δu, таких, что $(u + \delta u) \in D(J)$. В силу условия плотности $D(J)$ в пространстве H_C из последнего соотношения получаем *уравнение Эйлера*

$$J'_u(u, \phi) + B^*L^{*-1}J'_\phi(u, \phi) = 0, \tag{58}$$

задающее *необходимое условие оптимальности*, как уравнение в пространстве H_C.

Таким образом, если $u, \phi \equiv \phi(u)$ есть решение задачи оптимального управления (54), (55), причём u — внутренняя точка из $D(J)$, то необходимо выполняются уравнения вида

$$L\phi = f + Bu, \quad J'_u(u, \phi) + B^*L^{*-1}J'_\phi(u, \phi) = 0. \tag{59}$$

Если ввести элемент $q \equiv L^{*-1}J'_\phi(u, \phi)$, который, как легко заметить, есть решение *сопряженного уравнения* $L^*q = J'_\phi(u, \phi)$, то систему (59) можно представить в форме системы *прямых и сопряженных уравнений и условия оптимальности*:

$$\begin{cases} L\phi = f + Bu, \\ L^*q = J'_\phi(u, \phi), \\ J'_u(u, \phi) + B^*q = 0, \end{cases} \tag{60}$$

где L^* — *сопряжённый оператор*, действующий из Y^* в X^* и имеющий область определения, которую обозначим через $D(L^*)$. Систему (60) будем называть также *системой вариационных уравнений* или *системой условий оптимальности*-

[1] В случае нелинейного уравнения состояния $L(\phi, u) = 0$ с гладким оператором уравнение для вариаций $\delta\phi, \delta u$ имеет вид $L'_\phi\delta\phi + L'_u\delta u = 0$.

сти. (Обратим внимание на то, что в системе (60) не требуется знания явного вида обратных операторов $L^{-1}, \ldots L^{*-1}$.)

Приведём некоторые примеры функционалов $J(u, \phi)$ и соответствующих им задач оптимального управления.

Пример 1. Пусть уравнение (54) описывает некоторый нестационарный процесс, t — время — является одной из независимых переменных, $t \in [0, T]$. Предположим, что при $\forall t \in [0, T]$ функция $\phi \equiv \phi(\delta)$ принадлежит некоторому гильбертову пространству H. Требуется найти такое управление u, чтобы решение ϕ уравнения состояния в конечный момент времени отклонялось от некоторого заданного состояния, описываемого функцией φ_{ob}, наименьшим образом по норме $\|\cdot\|_H$. Данная задача является задачей управления — задачей о финальном наблюдении. Для формулировки её как задачи оптимального управления примем $C\phi \equiv \phi|_{t=T} = \phi(T)$, т.е. C есть оператор "взятия следа"при $t = T$, и пусть $J(u, \phi) \equiv J(\phi(u)) = \|\phi(T) - \varphi_{ob}\|_H^2$. Тогда задача оптимального управления имеет вид: требуется найти φ, u такие, что

$$L\phi = f + Bu, \quad \|\phi(T) - \varphi_{ob}\|_H^2 = \inf_u .$$

Отмечаем, что если множество решений U_* этой задачи не пусто, то решение (если оно существует!) *задачи точного управления* вида

$$L\phi = f + Bu, \quad \phi(T) = \varphi_{ob}$$

заведомо включено в U_*. ■

Пример 2. Пусть решение ϕ уравнения (54) описывает состояние некоторой системы с заданной функцией источника f и дополнительными источниками вида Bu, генерируемых управлением u. Необходимо подобрать дополнительные источники (т.е. фактически функцию u) так, чтобы состояние системы ϕ наименьшим образом отклонялось по норме $\|\cdot\|_W$ от заданного желаемого состояния φ_{ob}. Однако за включение дополнительных источников необходимо вносить "дополнительную плату", которая пусть задаётся выражением $J_0 \equiv \alpha\|u\|_{H_C}^2$, где $\alpha = const > 0$ (удельная себестоимость включения управления u). Пусть также, если $\phi \neq \varphi_{ob}$, мы вынуждены нести издержки, величина которых измеряется величиной $J_1 \equiv \beta\|\phi - \varphi_{ob}\|_W^2$, где $\beta = const > 0$. И если мы примем $u \equiv 0$, то величина J_1 может оказаться неприемлемо большой. Поэтому ставится следующая задача оптимального управления: требуется найти управление u такое, чтобы полный функционал стоимости $J \equiv J_0 + J_1$, принимал наименьшее значение, т.е. чтобы ϕ, u были решением задачи вида

$$L\phi = f + Bu, \quad \alpha\|u\|_{H_C}^2 + \beta\|\phi - \varphi_{ob}\|_W^2 = \inf_u . \ ■$$

Отметим, что в задачах такого типа α, β есть положительные постоянные, и по физическому смыслу они не могут быть сколь угодно малыми. Такие задачи часто встречаются среди классических задач оптимального управления; нередко они являются корректными или могут быть переформулированы так, чтобы они стали корректными, а значит, можно предположить, что и решать их проще по сравнению, например, со случаем задачи, записанной формально в том же виде, но где $\alpha \to +0$. Задачи последнего типа нас и будут интересовать в дальнейшем.

5.3. О подходах к решению задач оптимального управления

Среди общих подходов к решению задач оптимального управления выделим следующие два.

I. В первом подходе задача (54), (55) рассматривается в первую очередь как экстремальная задача о минимизации функционала $J(u)$, при этом уравнение (54) трактуется даже как ограничение в форме уравнения. После установления существования этой задачи её численное решение осуществляется методами минимизации функционала и применяются методы решения экстремальных задач [10, 24, 3].

II. Второй подход в целом базируется на исследовании системы вариационных уравнений (60), являющихся необходимыми условиями оптимальности. При определённых ограничениях (на функционал $J(u)$, область $D(J)$ и некоторые другие) удовлетворение функциями ϕ, q, u является также достаточным условием того, что ϕ, u будет оптимальным решением.

Во втором подходе выделяются следующие два направления исследования и решения задачи. Так, можно попытаться исключить управление u из уравнений, используя уравнение $J'_u(u, \phi)+B^*q = 0$ и получая систему для функций ϕ и q (см., например, классическую книгу [34]). Однако заметим, что здесь, как правило, возникает система с несимметричным оператором, а если весовые коэффициенты (типа коэффициента α в примере 2) стремятся к нулю, то система может быть сингулярно возмущенной. Малый коэффициент возникает также в известном методе приближенного решения задач оптимального управления — *методе штрафа*, когда в задаче (54), (55) функционал $J(u)$ приближённо заменяется функционалом $J_\alpha(u) \equiv \alpha\|u\|^2_{X_C}+J(u)$, где $\|u\|_{X_C}$ — норма гильбертова пространства $X_C \subset H_C$, $\alpha = const \geq 0$.

В другом направлении второго подхода исключают функции ϕ, q из (60) и получают одно операторное уравнение для управления u, *считая при этом* $L^{-1}, (L^*)^{-1}$ *заданными неявно* (т.е. отыскание явного вида $L^{-1}, (L^*)^{-1}$ не предполагается). После исключения ϕ, q уравнение для u имеет вид типа уравнений $\alpha u + A^*Au = A^*g$ с некоторым (часто непрерывным) оператором A. Переход к уравнению для управления позволяет (нередко достаточно просто) ответить на принципиальный вопрос: является ли задача (60) корректно поставленной? Очевидно, что ответ на этот вопрос определяет дальнейший ход исследования и численного решения всей задачи. После установления разрешимости уравнения для управления можно сформулировать подходящий итерационный алгоритм, а затем выписать этапы этого алгоритма в терминах операторов системы (60). В дальнейшем мы в основном следуем именно этому направлению исследования и решения рассматриваемых задач [68, 72, 73].

Глава 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ И МЕТОДОВ ИХ РЕШЕНИЯ

§ 1. Описание класса задач и этапы их исследований

Запишем в операторной форме класс задач, который будем рассматривать в дальнейшем. Сформулируем основные ограничения на операторы уравнений и пространства, в которых эти операторы действуют, а также перечислим основные этапы процесса изучения и решения рассматриваемых задач.

1.1. Описание класса задач

Пусть X_C, H_0, H_C, H_{ob} — гильбертовы пространства, а W, Y — банаховы, причём имеют место вложения

$$W \subseteq Y \subseteq H_0 \equiv H_0^* \subsetneq Y^* \subseteq W^*$$
$$X_C \subseteq H_C \equiv H_C^* \subseteq X_C^*,$$

при этом каждое вложение предполагается плотным и непрерывным (т.е. если, например, $W \subset Y$, то все элементы φ из W являются также элементами из Y, причём $\|\phi\|_Y \leq \leq C\|\phi\|_W$, $C = const$, а также W плотно в Y). Далее, только пространства H_0, H_C предполагаются самосопряжёнными (т.е. являются основными). В дальнейшем пространство W всегда считается рефлексивным (т.е. $W = W^{**}$).

Рассмотрим *класс обратных задач*, каждая из которых формулируется в следующей операторной форме: найти ϕ (функцию состояния) и u (дополнительное неизвестное) такие, что

$$L\phi = f + Bu, \quad C\phi = \varphi_{ob}, \tag{1}$$

где f, φ_{ob} — заданные элементы, L, B, C — линейные операторы, причём:

$L : W \to Y^*$, $\overline{D(L)} = W$, L — замкнут, существует L^{-1} и $\|L^{-1}\| < \infty$,

$C : W \to H_{ob}$, $D(C) = D(L)$, $C \in L(W, H_{ob})$,

$B : H_C \to Y^*$, $\overline{D(B)} = H_C$, $B \in L(H_C, Y^*)$.

Относительно $D(B)$ будем рассматривать только один из следующих случаев: а) $D(B)$ — некоторое выпуклое множество, плотное в $X_C \subseteq H_C$, т.е. $\overline{D(B)} = X_C$; б) $D(B) = X_C$; $D(B) = X_C^{(0)}$ — некоторое подпространство из X_C, причём в этом случае считаем, что $B : H_C^{(0)} \to Y^*$. Оператор проектирования X_C на $X_C^{(0)}$ в пространстве H_C будем обозначать P_C.

Обращаем внимание на то, что P_C не обязательно является ортопроектором, от него требуется выполнение лишь двух следующих свойств: 1) $P_C X_C = X_C^{(0)}$; 2) $P_C^2 = P_C$. Через P_C^* обозначаем оператор, сопряжённый к P_C.

Отмечаем некоторые следствия, вытекающие из сделанных выше ограничений на операторы и пространства при формулировке уравнений (1).

Отметим, что в зависимости от соотношений пространств $W, \ldots, H_{ob}$ каждый из операторов L, B, C может быть ограниченным, неограниченным или даже вполне непрерывным.

Поскольку считается, что W — рефлексивное банахово пространство, L — замкнут, $\overline{D(B)} = W$ и существует L^{-1}, то всегда будем иметь равенство $(L^*)^{-1} = (L^{-1})^*$. Кроме того, область определения сопряжённого к L оператора $D(L^*)$ плотна в Y^*, т.е. $\overline{D(L^*)} = Y^*$.

В силу сделанных ограничений всегда существуют единственным образом определённые операторы L^*, B^*, C^* Кроме того, мы всегда в дальнейшем будем считать, что либо операторы L^{-1}, B, C ограничены, либо два из этих операторов подчинены третьему. В этом случае выполняется равенство $(BL^{-1}C)^* = C^* L^{*-1} B^*$. (Выполнение этого равенства всегда в дальнейшем предполагается.)

Если элемент $u \in D(B)$ задан (или уже определён), то в силу существования оператора L^{-1} и его ограниченности первое из уравнений (1) есть обычное прямое уравнение и оно корректно разрешимо, причём справедлива оценка $\|\phi\|_W \le C(\|f\|_{Y^*} + \|Bu\|_{Y^*})$, где $C = const$. Если оператор $B : H_C \to Y^*$ является ограниченным, то имеем также оценку вида $\|\phi\|_W \le C(\|f\|_{Y^*} + \|u\|_{H_C})$, $C = const$.

В форме (1) могут быть записаны многие задачи управления, где u есть управление, задачи идентификации и др., а также ряд обратных задач, где u — дополнительное неизвестное, которое в этих задачах будем условно называть "управлением".

1.2. Этапы исследования и решения задач

К изучению и решению можно применить следующие подходы. Исключая ϕ из (1) с помощью представления $\phi = L^{-1}(f + Bu)$, получим уравнение для u

$$Au = g \tag{2}$$

где

$$g \equiv \varphi_{ob} - CL^{-1}f, \quad A \equiv CL^{-1}B.$$

Если операторы L^{-1}, A известны в явном виде, то можно решать непосредственно уравнение (2). И если эта задача для одной неизвестной u оказывается некорректной, то построение решения (2) осуществляется с привлечением подходов и методов теории некорректно поставленных задач [12, 18, 59]. Очевидно, что данный подход применим к классу задач, в которых операторы L^{-1}, A известны в явном виде.

Можно поступать и другим образом. Включим (1) в семейство задач оптимального управления вида

$$\begin{cases} L\phi = f + Bu \\ J_\alpha(u, \phi(u)) = \inf\limits_{v \in D(B)} J_\alpha(v, \phi(v)), \end{cases} \tag{3}$$

где $\alpha = const \ge 0$, $u_C \in X_C$ — некоторый заданный элемент из X_C, например $u_C \equiv 0$, а функционал J_α есть

$$J_\alpha(v, \phi(v)) = \alpha\|v - u_C\|^2_{X_C} + \|C\phi - \varphi_{ob}\|^2_{H_{ob}}. \tag{4}$$

Замечаем, что решение задачи (1) является решением (3) при $\alpha = 0$. Таким образом, *задача* (3) *при* $\alpha = 0$ *является одной из обобщённых постановок задачи* (1). Семейство задач (3) при различных значениях параметра α (в том числе при $\alpha \to +0$) может быть изучено методами теории экстремальных задач и оптимального управления с привлечением результатов из теории некорректных задач. Решение (3) можно осуществить итерационными алгоритмами на базе теории итерационных методов. Перечисленное выше составляет суть второго подхода к исследованию и решению задачи (1). Подчеркнём, что *здесь не требуется знания операторов* $L^{-1}, CL^{-1}B$ *в явной форме*, а требуется исследование их общих свойств и свойств сопряжённых к ним операторов на основе свойств операторов L, B, C и выбранных пространств $W, \ldots, H_{ob}$. Поэтому можно предположить, что данный подход применим к задачам достаточно общего вида, и в дальнейшем будем применять именно этот подход к изучению и решению рассматриваемых нами задач.

Сформулируем основные этапы исследования и решения задачи (1) выбранным способом.

Этап 1. Формулируем рассматриваемую задачу в виде (1).

Этап 2. Переформулируем (1) как задачу оптимального управления (точнее, включаем (1) в семейство задач (3)).

Этап 3. Вычисляем необходимые условия оптимальности и системы вариационных уравнений, зависящих от параметра $\alpha \ge 0$. Как будет показано в следующем разделе, одной из форм этих уравнений будет система вида

$$L\phi = f + Bu, \quad L^*q = C^*(C\phi - \varphi_{ob}),$$
$$\alpha\Lambda_C u + B^*q = \alpha\Lambda_C u_C, \tag{5}$$

где Λ_C – канонический изоморфизм X_C на X_C^*, т.е. $(u,v)_{X_C} = (\Lambda_C u, v)_{H_c}$ $\forall u, v \in X_C$, $\|u\|_{X_C} = \|\Lambda_C^{1/2} u\|_{H_C}$, или (после исключения ϕ и q) уравнение для одной неизвестной u:

$$\mathcal{A}_\alpha u = g_\alpha \tag{6}$$

где

$$\mathcal{A}_\alpha \equiv \alpha\Lambda_C + A^*A, \quad A = CL^{-1}B,$$
$$g_\alpha = A^*g + \alpha\Lambda_C u_C, \quad g = \varphi_{ob} - CL^{-1}f.$$

Этап 4. Исследуется проблема существования и единственности решения задач (3), ((5), (6)) при $\alpha \geq 0$ (отметим что при $\alpha > 0$ это сделать совсем просто).

Этап 5. Изучаем сходимость решений $\phi \equiv \phi(\alpha)$, $u \equiv u(\alpha)$ задач (3) при $\alpha \to +0$: $\phi_\alpha \to \phi(0) \equiv \phi_0$, $u(\alpha) \to u(0) \equiv u_0$ при $\alpha \to +0$, в подходящем смысле и устанавливаем, какое отношение имеют функции ϕ_0, u_0 к решению (псевдорешению, нормальному решению и др.) задачи (1).

Этап 6. Фиксируя достаточное малое α, когда имеем $\phi(\alpha) \cong \phi_0$, $u(\alpha) \cong u_0$, применяем подходящий итерационный метод к решению уравнения (6), например алгоритм вида

$$u^{k+1} = u^k - \tau_k(\mathcal{A}_\alpha u^k - g_\alpha), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{7}$$

оптимизируем выбор параметров $\{\tau_k\}$ и переформулируем этапы итерационного метода в терминах уравнений (5), которые в случае алгоритма (7) есть

$$\begin{cases} L\phi^k = f + Bu^k, \\ L^*q^k = C^*(C\phi^k - \varphi_{ob}), \\ \Lambda_C u^{k+1} = \Lambda_C u^k - \tau_k(\alpha\Lambda_C + B^*q^k), \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

Формулируем результаты сходимости к ϕ, u и оцениваем результирующие погрешности $(u^k - u_0), (\phi^k - \phi_0)$.

Этап 7. Применяем классические численные методы (метод конечных разностей, проекционно-сеточные методы и др.) для решения последовательности задач (8).

В дальнейшем мы будем рассматривать более подробно этапы 1–6 как в общей форме (в данной главе), так и в применении к конкретным задачам математической физики, считая, что этап 7 может быть известен читателям из курсов, читаемых студентам старших курсов, или из монографий и учебников, список которых в настоящее время весьма обширен [2, 6, 15, 25, 38, 43, 44].

Отметим, что принципиальными из перечисленных выше этапов являются этапы 4, 5, а именно исследование существования решений при $\alpha = 0$ и сходимости решений $\phi(\alpha), u(\alpha)$ при $\alpha \to +0$ к решению задачи (1). *Изучение именно этих вопросов и получаемые здесь результаты составляют бо́льшую часть фундамента всего алгоритма решения задач вида* (1).

Отметим также, что практическая реализация всех алгоритмов зависит от погрешностей применяемых численных методов на этапе 7. И здесь может оказаться, что ошибки аппроксимации и погрешности вычислений будут превышать или будут сравнимы с погрешностями регуляризации задач, обусловленными присутствием слагаемого $\alpha\|v - u_C\|^2_{X_C}$ в функционале J_α. Поэтому возможны ситуации, когда из-за погрешностей методов применения численных методов на этапе 7 итерационные алгоритмы типа (8) могут оказаться расходящимися, если решаемые задачи (т.е. задача (2)!) являются некорректными. Поэтому в данном случае необходимо привлекать результаты и рекомендации из общей теории решения некорректно поставленных задач, ряд которых приведён в предыдущей главе.

1.3. Формы записи вариационных уравнений

Пусть $\phi \equiv \phi(\alpha), u \equiv u(\alpha)$ есть решение экстремальной задачи (3) и $\overline{D(B)} = X_C$ или $D(B) = X_C$. Вычисляем первую вариацию функционала J_α и приравниваем её к нулю (что является необходимым условием экстремальности точки u при сделанных ограничениях на $D(B) \equiv D(J_\alpha)$). В результате получаем систему уравнений вида

$$\left\{\begin{array}{l} L\phi = f + Bu, \\ \alpha(u,w)_{X_C} + (C\phi - \varphi_{ob}, CL^{-1}Bw)_{H_{ob}} = 0, \\ \hfill \forall\, w \in X_C. \end{array}\right. \tag{9}$$

Если представить ϕ в форме $\phi = L^{-1}(f+Bu)$ и подставить это выражение в (9), то получим равенство

$$a_\alpha(u,w) = g_\alpha(w) \quad \forall\, w \in X_C, \tag{10}$$

где

$$a_\alpha(u,w) = \alpha(u,w)_{X_C} + ((CL^{-1}B)u, (CL^{-1}B)w)_{H_{ob}},$$
$$g_\alpha(w) = \alpha(u_C,w)_{X_C} + (\varphi_{ob} - CL^{-1}f, (CL^{-1}B)w)_{H_{ob}}$$

Поскольку

$$((CL^{-1}B)u, (CL^{-1}B)w)_{H_{ob}} = ((CL^{-1}B)^*(CL^{-1}B)u, w)_{H_C},$$

то, учитывая плотность X_C в H_C, из (10) получаем следующее операторное уравнение для u:

$$\mathcal{A}_\alpha u = g_\alpha, \quad \alpha \geq 0, \tag{11}$$

где

$$\mathcal{A}_\alpha = \alpha\Lambda_C + A^*A, \quad A = CL^{-1}B,$$
$$g_\alpha = A^*g + \alpha\Lambda_C u_C, \quad g \equiv \varphi_{ob} - CL^{-1}f,$$

и в силу принятых нами условий на $L, \dots, D(C)$ имеем $A^* = B^*L^{*-1}C^*$.

При $\alpha = 0$ уравнение (11) примет вид

$$\mathcal{A}_0 u \equiv A^*Au = A^*g \tag{12}$$

— "уравнение (2) в смысле наименьших квадратов".

Наконец, если использовать представление $\phi = L^{-1}(f + Bu)$, и ввести обозначение $q \equiv L^{*-1}C^*(C\phi - \varphi_{ob})$ — решение сопряжённой задачи, то уравнение (11) можно записать в виде системы прямых, сопряжённых уравнений и уравнения Эйлера для u:

$$\left\{\begin{array}{l} L\phi = f + Bu, \\ L^*q = C^*(C\phi - \varphi_{ob}), \\ \alpha\Lambda_C u + B^*q = \alpha\Lambda_C u_C \end{array}\right. \tag{13}$$

т.е. получим полную *систему вариационных уравнений.*

В том случае, если $D(B) = X_C^{(0)}$ — подпространство из X_C, а P_C — проектор (в H_C!) пространства X_C на $X_C^{(0)}$, то в (9)–(10) элементы u, w будут из $X_C^{(0)}$. И хотя для них $P_C u = u$, $P_C w = w$, тем не менее будем писать $P_C u$ вместо u, w заменим везде на $P_C\tilde{w}$, где $\tilde{w}$ — произвольный элемент из X_C (если $\tilde{w} \in X_C^{(0)}$, то имеем $P_C\tilde{w} = \tilde{w}$). Теперь с помощью проведённых выше рассуждений получаем модификации уравнений (9)–(13), соответствующие рассматриваемому случаю. Так, например, оператор $\mathcal{A}_\alpha$ и g_α имеют вид

$$\mathcal{A}_\alpha \equiv \alpha P_C^*\Lambda_C P_C + P_C^*A^*AP_C, \quad g_\alpha = P_C^*(A^*g + \alpha\Lambda_C u_C), \tag{14}$$

а система (13) заменяется на систему

$$\left\{\begin{array}{l} L\phi = f + BP_C u, \\ L^*q = C^*(C\phi - \varphi_{ob}), \\ \alpha P_C^*\Lambda_C P_C u + P_C^*B^*q = \alpha P_C^*\Lambda_C u_C. \end{array}\right. \tag{15}$$

Обратим внимание на то, что даже если подпространство $X_C^{(0)}$ может быть конечномерным (что нередко бывает при решении практических задач!), элементы ϕ, q в общем случае принадлежат бесконечномерным пространствам W, Y соответственно.

Уравнения (9)–(13), (15) являются различными формами записи вариационных уравнений. Использование той или иной из них зависит от изучаемой проблемы. Поэтому в дальнейшем мы будем применять все данные представления вариационных уравнений.

1.4. Обсуждение понятия "решение задачи"

Обсудим вопрос: что понимать под решением задачи (1) и вариационных уравнений в зависимости от значения $\alpha \geq 0$.

Прежде всего из (11) замечаем, что уравнение (11) для u имеет вид уравнения в методе регуляризации А.Н.Тихонова, а *параметр α есть параметр регуляризации* (поэтому мы его так и будем называть в дальнейшем).

Рассмотрим сначала случай $\alpha > 0$. Как легко заметить из (11), оператор $\mathcal{A}_\alpha$ является симметричным и положительно определённым в H_{ob}. Поэтому введём энергетическое пространство $H_\mathcal{A}$ оператора $\mathcal{A}_\alpha$ (как пополнение $D(B)$) со скалярным произведением $[u,v]_\alpha \equiv a_\alpha(u,v)$ и нормой $[u]_\alpha = [u,v]_\alpha^{1/2}$. Тогда уравнение (10) есть постановка задачи (11) в обобщённой форме. Согласно теории вариационных постановок задач (см. гл. 2, п. 1.5) уравнение (11) имеет *единственное обобщённое решение* $u \equiv u(\alpha) \in H_\mathcal{A}$ при $g \equiv (\varphi_{ob} - CL^{-1}f) \in H_{ob}$, $u_C \in X_C$, причём справедливы оценки

$$\begin{gathered}\alpha\|u\|^2_{X_C} + \|Au\|^2_{H_{ob}} \leq \alpha\|u_C\|^2_{X_C} + \|\varphi_{ob} - CL^{-1}f\|_{H_{ob}} \\ \|u\|^2_{X_C} \leq \|u_C\|^2_{X_C} + \|\varphi_{ob} - CL^{-1}f\|_{H_{ob}}/\alpha.\end{gathered} \qquad (16)$$

Если окажется, что $u \in D(B)$, то можно ввести обычные решения ϕ, q первых двух уравнений из (13) (поскольку будем иметь $Bu \in Y^*$ и т.д.). Если же $u \notin D(B)$, то существует

последовательность $\{u_n\}$ из $D(B)$, сходящаяся по норме $[\cdot]_\alpha$ к u. Для каждого u_n можно определить решения ϕ_n, q_n первых двух уравнений из (13), которые будут сходящимися в W, Y, соответственно, к некоторым элементам $\phi \in W$, $q \in Y$. В этом случае *тройку ϕ, q, u назовём обобщённым решением* системы (13). В силу единственности $u \in X_C$ обобщённое решение системы (13) также единственное.

Рассмотрим теперь случай $\alpha = 0$. Обратимся сначала к задаче (1). Если она имеет решение, то $u \in D(B)$ является решением уравнения (2). Обратно, если (2) имеет решение $u \in D(B)$, то $\phi = L^{-1}(f + Bu)$ вместе с u есть решение задачи (1). Таким образом, при введённых условиях на операторы L, B, C задачи (1), (2) эквивалентны. Поэтому если уравнение (2) не имеет решения, то и задача (1) также не имеет решения.

Как отмечалось ранее, уравнение (12) является обобщённой постановкой задачи (2) в смысле наименьших квадратов. Если оказывается, что $g \equiv (\varphi_{ob} - CL^{-1}f) \in R(A)$, то существует (возможно, неединственное) решение $u \in D(B)$ уравнения $Au = g$ (а также и уравнения (12)), и можно определить элемент $\phi = L^{-1}(f + Bu)$, который вместе с u будет решением задачи (1). Среди таких решений u выделим элемент с наименьшей нормой, который вместе с соответствующим ему элементом назовём *нормальным решением* задачи (1).

Пусть теперь $g \notin R(A)$, однако выполнено условие вида

$$Q(\varphi_{ob} - CL^{-1}f) \in R(CL^{-1}B), \qquad (17)$$

где Q — ортопроектор на $\overline{R(CL^{-1}B)}$. В этом случае уравнение (2) не имеет решения, в то время как (12) имеет. Решения уравнения (12) являются квазирешениями уравнения (2). Множество этих квазирешений обозначим U_*. Квазирешение из U_* с минимальной нормой называется псевдорешением, и его мы обозначим u^+. Итак, если выполнено условие (17), то (12) имеет решение $u \in U_*$. Но тогда данное решение удовлетворяет также уравнению $Au = Qg$ (см. гл. 2, п 2.4). В силу (17) заключаем, что $u \in D(CL^{-1}B)$, а значит по элементу u однозначно определяется $\phi = L^{-1}(f + Bu)$ *Пару ϕ, u назовём квазирешением задачи* (1). Если $u \equiv u^+$ то определяем $\phi^+ \equiv L^{-1}(f + Bu^+)$ *и пару ϕ^+, u^+ называем псевдорешением задачи* (1).

Если $Qg \notin \overline{R(CL^{-1}B)}$, то в силу представления $H_{ob} = \overline{R(A)} \oplus N(A^*)$ заключаем, что $g \in N(A^*)$, $Qg = 0$, а решением (2), (12) является любая функция $u \in (N(A^*A) = N(A))$, причём $u^+ = 0$.

Функционал $J_0(u) = \|Au - g\|^2_{H_{ob}}$ в рассмотренных выше случаях на решениях уравнения (12) принимает следующие значения:

1) $J_0(u) = 0$, если $g \in R(A)$;
2) $J_0(u) = \|g - Qg\|^2_{H_{ob}}$, если $Qg \in R(A)$;
3) $J_0(u) = \|g\|^2_{H_{ob}}$, если $Qg \notin \bar{R}(A)$.

Замечание. Можно рассмотреть также случай, когда $Qg \notin R(A)$, однако $Qg \in \bar{R}(A)$. Для определения решения задач (1), (2), (12) здесь необходимо ввести некоторые дополнительные предположения относительно операторов C, L, B и провести специальные построения, которые в практических задачах будут трудно реализуемыми. Поэтому мы ограничимся рассмотрением изложенного выше и в последующем будем часто вводить ограничение $g \in R(A)$ или ограничение (17). ■

§ 2. Некоторые условия разрешимости задач и единственности решений

Рассмотрим некоторые случаи рассматриваемых задач когда имеет место разрешимость и единственность решений

2.1. Условие единственности решений

Наряду с задачами (1), (2)

$$L\phi = f + Bu, \quad C\phi = \varphi_{ob} \tag{18}$$

$$Au = g, \quad A = CL^{-1}B, \quad g = \varphi_{ob} - CL^{-1}f. \tag{19}$$

сформулируем их обобщённые постановки:

$$L\phi = f + Bu, \quad J_0(u, \phi) = \inf_{v \in D(B)} J_0(v, \phi(v)), \tag{20}$$

$$A^*Au = A^*g, \tag{21}$$

где

$$J_0(u, \phi(u)) = \|C\phi(u) - \varphi_{ob}\|^2_{H_{ob}} = \|Au - g\|^2_{H_{ob}}.$$

Поскольку нуль-пространства операторов A, A^*A совпадают, то условия единственности решений задач (18)–(21) совпадают и имеют вид требования, чтобы $N(A) = \{0\}$. Но последнее условие в другой форме (которая и рассматривается при решении задач) имеет вид: решение ϕ, u системы

$$L\phi = Bu, \quad C\phi = 0 \tag{22}$$

является тривиальным. Итак, *если система* (22) *имеет только тривиальное решение: $\phi \equiv 0$, $u \equiv 0$, то каждая из задач* (18)–(21) *может иметь только единственное решение.*

Пример 1. Пусть Ω — ограниченная область из $\mathbf{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$. $W = Y = H_0 = \cdots = H_{ob} = L_2(\Omega)$. Рассмотрим задачу определения решения ϕ и функции источника u в задаче

$$L\phi \equiv -\Delta\phi = u, \quad \phi = 0 \text{ на } \partial\Omega,$$

если в Ω задана функция $\phi_{ob} \in L_2(\Omega)$ и дополнительное условие вида

$$\phi = \varphi_{ob} \quad \text{на} \quad \Omega.$$

Здесь все пространства принимаются равными $L_2(\Omega)$ $D(L) = \{\phi : \phi \in C^{(2)}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}),\ \phi = 0$ на $\partial\Omega\}$, $B = C = I$ — тождественный оператор. Очевидно, что поскольку $\varphi_{ob} \in L_2(\Omega)$, то задачу определения u нельзя решать подстановкой φ_{ob} в уравнение состояния. Однако в данной задаче условие единственности решения имеет вид: задача $-\Delta\phi = u$ в Ω, $\phi = 0$ на $\partial\Omega$, $\phi = 0$ в Ω должна иметь тривиальное решение, что здесь является очевидным. ■

Пример 2. Рассмотрим задачу определения решения $\phi(t,x)$ параболического уравнения и начального условия $u(x)$ таких, что $\phi(t,x)$ в конечный момент времени принимала заданное состояние $\varphi_{ob}(x)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\phi}{\partial t} - \Delta\phi = f(t,x), \quad (t,x) \in Q_T \equiv (0,T) \times \Omega, \\ \phi = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega, \quad \phi = u \text{ при } t = 0, \\ \phi(T,x) = \varphi_{ob}(x), \end{cases}$$

где f — заданная функция из $L_2(\Omega)$, Ω — выпуклая область из $\mathbf{R}^n$, а функции u, φ_{ob} считаем из класса $L_2(\Omega)$.

Чтобы установить единственность возможных решений данной задачи: 1) примем в задаче $f \equiv 0$, $\varphi_{ob} \equiv 0$; 2) применим для решения возникающей задачи метод разложения по собственным функциям $\{\varphi_j\}$ задачи $-\Delta\varphi_j = \lambda_j\varphi_j$, $\varphi_j = 0$ на $\partial\Omega$ $\|\varphi_j\|_{L_2(\Omega)} = 1$; 3) решение ϕ имеет вид $\phi = \sum\limits_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t}(u,\varphi_j)_{L_2(\Omega)}\varphi_j(x)$. В силу условия $\phi(T,x) = 0$ ортогональности $\{\varphi_j\}$ и плотности этой системы функций в $L_2(\Omega)$ получаем $(u,\varphi_j)_{L_2(\Omega)} = 0\ \forall j$, $u = 0$ и $\phi(t,x) = 0$. Итак, рассматриваемая задача может иметь не более одного решения. ■

2.2. Условия разрешимости задач

С учётом условия единственности $N(A) = \{0\}$ можно сформулировать также некоторые условия разрешимости рассматриваемых задач.

2.2.1. Предположим, что $D(B) = H_C$, оператор $A = CL^{-1}B$ является непрерывным, а его нуль-пространство тривиально: $N(A) = \{0\}$. Рассмотрим функционал $J_0(v) = \|Av - g\|^2_{H_{ob}}$. Этот функционал непрерывно дифференцируем, $F(v) \equiv \operatorname{grad} J_0(v) = 2A^*(Av - g)$, является строго выпуклым: $(u - v, F(u) - F(v))_{H_{ob}} = 2\|A(u-v)\|^2_{H_{ob}} > 0$ при $u \neq v$. Поскольку $N(A) = \{0\}$, то можно ввести пространство H_A как пополнение $D(B)$ по норме $[u] = \|Av\|_{H_{ob}}$. Справедлива оценка

$$(F(v), v)_{H_{ob}} = 2(Av - g, Av)_{H_{ob}} \geq 2[v]([v] - \|g\|_{H_{ob}}) =$$
$$= 2R(R - \|g\|_{H_{ob}}),\ R \equiv [v].$$

Выбирая $R < \|g\|_{H_{ob}}$, получаем $(F(v),v)_{H_{ob}} > 0$, и из теоремы 27 (гл. 2, § 3; см. там же пример 9) следует существование единственной внутренней точки u в шаре $[v] \leq R$, в которой функционал $J_0(v)$ имеет минимум. В этой точке выполняется уравнение Эйлера — уравнение (21). *В том случае, если $g \equiv (\varphi_{ob} - CL^{-1}f) \in R(CL^{-1}B)$, то u, $\phi = L^{-1}(f + Bu)$ есть решение задачи* (18). *Если $g \notin R(CL^{-1}B)$, но $Qg \in R(CL^{-1}B)$, то u, ϕ есть квазирешение этой задачи.*

Если оператор $CL^{-1}B$ является вполне непрерывным, отличным от конечномерного, а пространство H_C бесконечномерно, то задача (18) является некорректной.

2.2.2. Рассмотрим теперь задачу (18) при ограничениях, которые могут выполняться во многих прикладных задачах.

Пусть оператор $A = CL^{-1}B$ непрерывен, $N(A) = \{0\}$ и $D(B) \equiv X_C^{(0)}$ — конечномерное подпространство из $X_C \subseteq H_C$ размерности $K < \infty$ с базисом φ_k, $k = 1, 2, \ldots, K$.

Оператор ортогонального проектирования в H_C на $X_C^{(0)}$ обозначим P_C.

Поскольку $P_C v = v\ \forall\, v \in X_C^{(0)}$, то функционал $J_0(v)$ можно записать в виде $J_0(v) = \|AP_C v - g\|^2_{H_{ob}}$. Этот функционал, как и в предыдущем разделе, является выпуклым, непрерывным, монотонным, а его производные есть

$$(J_0'(v), h_1) = 2(AP_Cv - g, AAP_Ch_1)_{H_{ob}},$$
$$(J_0''(v)h_1, h_2) = 2(AP_Ch_1, AP_Ch_2)_{H_{ob}},$$

где h_1, h_2 можно считать произвольными элементами из X_C, поскольку $P_Ch_1 \in X_C^{(0)}$, $P_Ch_2 \in X_C^{(0)}$. Если $h \in X_C$, то элемент P_Ch представим в виде $P_Ch = \sum_{k=1}^{K} a_k\varphi_k$ с некоторыми коэффициентами. Тогда

$$(J_0''(v)h, h) = 2\sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{K} a_k a_m (A\varphi_k, A\varphi_m)_{H_{ob}} \geq \gamma^2\|P_Ch\|_H^2,$$

где $\gamma \equiv \gamma(K)$ — положительное (возможно, малое!) число, зависящее от K, но не от h. Последнее соотношение следует из тривиальности нуль-пространства оператора A, линейной независимости системы $\{A\varphi_k\}$ и свойств симметричных положительно определённых матриц с элементами $\{(A\varphi_k, A\varphi_m)_{H_{ob}}\}$, $(\varphi_k, \varphi_m)_{H_C}$. Выполнение этого соотношения вместе с уравнением Эйлера

$$P_CA^*(AP_Cu - g) = 0 \tag{23}$$

даёт нам достаточные условия того, что решение u уравнения (22) сообщает минимальное значение функционалу $J_0(u)$. В свою очередь, из этого заключаем: *при выполнении сделанных выше ограничений задача* (18) *имеет единственное решение $\phi \in W$, $u \in X_C^{(0)}$; если $(\varphi_{ob} - CL^{-1}f) \in R(CL^{-1}BP_C)$, то ϕ, u — обычное решение* (18), *если $Q(\varphi_{ob} - CL^{-1}f) \in R(CL^{-1}BP_C)$, то ϕ, u — квазирешение.*

Отмечаем также, что *если $N(CL^{-1}B) = \{0\}$, а число K конечно, то задача* ((20), (21)) *здесь является корректно поставленной* (в силу ограниченности обратного оператора в уравнении (23)), даже если оператор $A = CL^{-1}B$ является вполне непрерывным.

2.2.3. Рассмотрим теперь семейство задач оптимального управления (3):

$$L\phi = f + Bu, \quad J_\alpha(u, \phi(u)) = \inf_{v \in D(B)} J_\alpha(v, \phi(v)), \tag{24}$$

где $\alpha > 0$, $D(B) = X_C$, а функционал J_α есть

$$J_\alpha(v, \phi(v)) = \alpha\|v - u_C\|_{X_C}^2 + \|C\phi(v) - \varphi_{ob}\|_{H_{ob}}^2 =$$
$$= \alpha\|v - u_C\|_{X_C}^2 + \|Av - g\|_{H_{ob}}^2 \equiv J_\alpha(v).$$

Необходимое условие минимума $J_\alpha(u)$ имеет вид

$$(J_\alpha'(u), v) = 2\alpha(\Lambda_C(u - u_C), v)_{H_C} + 2(A^*(Au - g), v)_{H_C} = 0 \quad \forall v \in X_C,$$

откуда, в силу плотности X_C в H_C, получаем вариационное уравнение (6)

$$\mathcal{A}_\alpha u = g_\alpha, \tag{25}$$

где

$$\mathcal{A}_\alpha = \alpha\Lambda_C + A^*A, \quad A + CL^{-1}B,$$
$$g_\alpha = A^*g + \alpha\Lambda_C u_C, \quad g = \varphi_{ob} - CL^{-1}f.$$

Оператор $\mathcal{A}_\alpha$ является симметричным и положительно определённым:

$$(\mathcal{A}_\alpha u, v) = (u, \mathcal{A}_\alpha v)_{H_C}, \quad (\mathcal{A}_\alpha u, u) \geq \alpha\|u\|_{H_C}^2, \ \forall u, v \in X_C.$$

А поскольку $(J_\alpha''(u)v, v) = 2(\mathcal{A}_\alpha v, v)_{H_C}$, то заключаем, что если некоторый элемент $u \in X_C$ удовлетворяет уравнению, то u вместе с $\phi \equiv L^{-1}(f + Bu)$ есть решение экстремальной задачи (24), т.к. в данном случае уравнение (25) является также достаточным условием того, что u, ϕ являются решением (24).

Существование единственного *обобщённого решения* $u \equiv \equiv u(\alpha)$ уравнения (25) при $\forall g \in H_{ob}$, $u_C \in X_C$ установлено в п. 1.4. Это решение удовлетворяет равенству (10), и справедлива оценка

$$\alpha\|u\|^2_{X_C} + \|Au\|^2_{H_{ob}} \le \alpha\|u_C\|^2_{X_C} + \|\varphi_{ob} - CL^{-1}f\|^2_{H_{ob}}.$$

На основе $u \in X_C$ определяем $\phi \equiv L^{-1}(f + Bu)$, $q \equiv \equiv L^{-1}C^*(C\phi - \varphi_{ob})$, которые являются решением системы (13):

$$\begin{cases} L\phi = f + Bu \\ L^*q = C^*(C\phi - \varphi_{ob}) \\ \alpha\Lambda_C u + B^*q = \alpha\Lambda_C u_C. \end{cases} \qquad (26)$$

Итак, *если $g \in H_{ob}$, $u_C \in X_C$, $\alpha > 0$, система* (26) (*задача*(24)) *имеет единственное обобщённое решение $\phi \in W$ $q \in Y$, $u \in X_C$,* при этом справедливы оценки вида

$$\|\phi\|^2_W \le c \cdot (\|f\|^2_{Y^*} + \|Bu\|^2_{Y^*}) \le c \cdot (\|f\|^2_{Y^*} + \|u\|^2_{H_C});$$

$$\begin{aligned} \|q\|^2_Y \le c \cdot \|C\phi - \varphi_{ob}\|^2_{H_{ob}} = c\|Au - g\|^2_{H_{ob}} \le \\ \le c \cdot \left(\alpha\|u_C\|^2_{X_C} + \|\varphi_{ob} - CL^{-1}f\|^2_{H_{ob}}\right); \end{aligned} \qquad (27)$$

$$\alpha\|u\|^2_{X_C} + \|Au\|^2_{H_{ob}} \le \alpha\|u_C\|^2_{X_C} + \|\varphi_{ob} - CL^{-1}f\|^2_{H_{ob}},$$

где $c = const > 0$. Если первое уравнение из (26) умножить скалярно в H_0 на q и из результата вычесть результат скалярного умножения в H_0 второго уравнения из (26) на ϕ, то после простых вычислений с учётом третьего уравнения из (26) получаем неравенство

$$\|C\phi\|^2_{W^*} + \alpha\|u\|^2_{X_C} \le c \cdot (\|\varphi_{ob}\|^2_{H_{ob}} + \alpha\|u_C\|^2_{X_C} + \|f\|^2_{Y^*}). \quad (28)$$

где постоянная c не зависит от α.

2.2.4. Основной проблемой в изучаемых задачах является проблема сходимости решений $\phi_\alpha \equiv \phi(\alpha)$, $u_\alpha \equiv u(\alpha)$ системы (26) к решению задачи (18), которую ниже будем обозначать ϕ_0, u_0 для случая непрерывного оператора A.

Изучение проблемы начнём с уравнений (21),(25). Пусть сначала $\Lambda_C \equiv I$, а $g \in R(A)$. Тогда оператор $R_\alpha = = (\alpha I + A^*A)^{-1}A^*$ является регуляризатором, и из теории некорректных задач ([9, 22. 49]; см. также гл. 2, п. 2.5) известно, что $\|u_\alpha - u_0\|_{H_C} \to 0$ при $\alpha \to +0$, где u_0 — нормальное решение уравнения $Au = g$. Если же $Qg \in \overline{R(A)}$ (напомним, что Q — ортопроектор на $\overline{R(A)}$), то $\|u_\alpha - u_0^+\|_{H_C} \to 0$, $\alpha \to +0$, где u_0^+ — псевдорешение уравнения $Au = g$, т.е. решение уравнения (21) с минимальной нормой.

Элементы u_α, u_0 однозначно определяют ϕ_α, ϕ_0 — решения первых уравнений из (18), (26). Из первого неравенства (27) получаем: $\|\phi_\alpha - \phi_0\|_W \to 0$ или $\|\phi_\alpha - \phi_0^+\|_W \to 0$ при $\alpha \to +0$.

Сходимость невязки $Au_\alpha - g = C\phi_\alpha - \phi_{ob}$ устанавливается на основе сингулярного разложения оператора A (см. гл. 2, п. 2.4):

$$\|C\phi_\alpha - g\|^2_{H_{ob}} = \|Au_\alpha - g\|^2_{H_{ob}} = \|A(\alpha I + A^*A)^{-1}A^*g - g\|^2_{H_{ob}} =$$

$$= \|AA^*(\alpha I + AA^*)^{-1}g - g\|^2_{H_{ob}} = \alpha\|(\alpha I + AA^*)^{-1}g\|^2_{H_{ob}} =$$

$$= \alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(g, g_k)^2}{(\alpha + \sigma_k^2)^2} \to 0, \quad \alpha \to +0.$$

При $g \in R(A)$ сходимость невязки к нулю есть следствие сходимости $u_\alpha \to u_0$ и ограниченности A:

$$\|C\phi_\alpha - \varphi_{ob}\|_{H_{ob}} = \|Au_\alpha - g\|_{H_{ob}} = \|A(u_\alpha - u_0)\|_{H_{ob}} \le$$

$$\le \|A\|\|u_\alpha - u_0\|_{H_{ob}} \to 0, \quad \alpha \to +0.$$

При дополнительных ограничениях на u_0 можно получить оценки скорости. Так, если $\|u_0\|_{H_C} \le C_0 = const < \infty$, то из (21), (25) легко получаем следующее равенство (напомним, что рассматривается случай $\Lambda_C \equiv I$):

$$\alpha\|u-u_0\|^2_{H_C}+\|A(u-u_0)\|^2_{H_{ob}}=-\alpha(u_0,u-u_0)_{H_C}.$$

Из этого соотношения после оценки правой части по неравенству Коши-Буняковского имеем (учитывая то, что $Au_0 = Qg$):

$$\alpha\|u_\alpha-u_0\|^2_{H_C}+2\|A(u_\alpha-u_0)\|^2_{H_{ob}}\le\alpha\|u_0\|^2_{H_C}\le\alpha C_0^2,$$

$$\|Au_\alpha-Qg\|^2_{H_{ob}}=\|Au_\alpha-g\|^2_{H_{ob}}-\|g\|^2_{H_{ob}}+\|Qg\|^2_{H_{ob}}, \qquad (29)$$

$$\|C\phi_\alpha-\varphi_{ob}\|^2_{H_{ob}}=\|Au_\alpha-g\|^2_{H_{ob}}\le\|g\|^2_{H_{ob}}-\|Qg\|^2_{H_{ob}}+\alpha C_0^2,$$

где $g=\varphi_{ob}-CL^{-1}f$. Если $g\in R(A)$, то получаем

$$\|C\phi_\alpha-\varphi_{ob}\|_{H_{ob}}\le\sqrt{\alpha}\cdot C_0. \qquad (30)$$

Отметим, что если $\|u_0\|_{H_C}\le C_0$, то из первого соотношения(29) *следует также, что $\|u_\alpha\|_{H_C}<C_0\ \forall\alpha>0$.*

Пример 3. Предположим, что $R(A)=\overline{R(A)}$, тогда псевдобратный оператор A^+ ограничен. Поэтому $\|u_0\|_{H_C} = \|A^+g\|_{H_C}\le\|A^+\|\,\|g\|_{H_{ob}}\le C\|\varphi_{ob}-CL^{-1}f\|_{H_{ob}}\equiv C_0<\infty$.

Если вводить дополнительные ограничения на u_0 (а значит, и на $g\equiv\varphi_{ob}-CL^{-1}f$), то можно получить ряд других оценок скорости сходимости. Однако необходимо обратить внимание, что в классе задач, рассматриваемых нами, очень часто элементы $\varphi_{ob},\dots,f$ известны приближённо. Поэтому чрезмерные предположения о гладкости элементов $u_0,g,\dots,\varphi_{ob}$ редко выполняются при решении практических задач. ■

Перейдём теперь к случаю, когда $\Lambda_C\not\equiv I$. Если ввести $\tilde u_\alpha\equiv\Lambda_C^{1/2}u_\alpha$, $\tilde w\equiv\Lambda_C^{1/2}w$, то уравнение (10) примет вид

$$\alpha(\tilde u_\alpha,\tilde w)_{H_C}+(A\Lambda_C^{-1/2}\tilde u_\alpha,A\Lambda_C^{-1/2}\tilde w)_{H_{ob}}=$$

$$=(g,A\Lambda_C^{-1/2}\tilde w)_{H_{ob}}+\alpha(\Lambda_C^{-1/2}u_C;\tilde w)_{H_C}\ \forall\tilde w\in H_C.$$

Одновременно, вместо уравнения $Au_0=g$ будем рассматривать уравнение $A\Lambda_C^{-1/2}\tilde u_0=g$, где *непрерывным считать будем оператор* $\tilde A\equiv A\Lambda_C^{-1/2}$ (хотя уже формально допускается, что каждый из операторов $A,\Lambda_C^{1/2}$ может быть неограниченным!). Таким образом, случай $\Lambda_C\not\equiv I$ сводится к случаю $\Lambda_C=I$. Переформулируя полученные ранее $\tilde u_\alpha = \Lambda_C^{1/2}u_\alpha,\dots,\phi_\alpha$, заключаем, что если $(\varphi_{ob}-CL^{-1}f)\in R(CL^{-1}B\Lambda_C^{-1/2})$, то $u_0,u_\alpha\in X_C$, а также

$$\|u_\alpha-u_0\|_{X_C}\to0,\ \|\phi_\alpha-\phi_0\|_W\to0,\ \|C\phi_\alpha-\varphi_{ob}\|_{H_{ob}}\to0 \quad (31)$$

$$\text{при } \alpha\to+0,$$

где u_0 — нормальное решение уравнения $Au=g$. Если $\|u_0\|_{X_C}\le C_0<\infty$, то $\|C\phi_\alpha-\varphi_{ob}\|_{H_{ob}}\le\sqrt{\alpha}\cdot C_0$.

Аналогичные утверждения имеют место и для псевдорешения u_0^+,ϕ_0^+ (вместо u_0,ϕ_0), если $Q(\varphi_{ob}-CL^{-1}f)\in\overline{R(A\Lambda_C^{-1/2})}$, где Q — оператор ортогонального проектирования на $R(A\Lambda_C^{-1/2})$.

Сформулируем некоторые из приведённых выше утверждений в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть операторы L,B,C таковы, что оператор $A\equiv CL^{-1}B$ непрерывен, и пусть $g\equiv\varphi_{ob}-CL^{-1}f\in H_{ob}$. Тогда:*

1) *Если система* (22) *имеет только тривиальное решение, то нуль-пространство $N(A)$ оператора $A\equiv CL^{-1}B$ тривиально и каждая из задач* (18)–(21) *может иметь не более одного решения.*

2) *Если $g\in R(A)$, то множество решений задачи* (18) *непусто; если же $Qg\in R(A)$, где Q — оператор ортогонального проектирования на $R(A)$, то множество U_* квазирешений задачи* (18) *непусто.*

3) *Если $N(A)=\{0\}$ и $D(B)=X_C^{(0)}$ — конечномерное подпространство из $X_C\subseteq H_C$, то задача* (20) *имеет единственное решение и является корректно поставленной.*

4) *Система вариационных уравнений* (26) *задачи* (24) *при любом* $\alpha > 0$ *имеет единственное решение* $(\phi_\alpha, q_\alpha, u_\alpha) \in \in W \times Y \times X_C$, *для которого справедливы оценки* (27), (28) *Пары* (ϕ_α, u_α) *при* $\alpha \to +0$ *сходятся к нормальному решению* ϕ_0, u_0 *задачи* (18) *при* $g \in R(A\Lambda_C^{-1/2})$ *и к псевдорешению* ϕ_0^+, u_0^+ *при* $Qg \in R(A\Lambda_C^{-1/2})$, *где* Q — *ортопроектор на* $R(A\Lambda_C^{-1/2})$, *и справедливы соотношения* (31).

5) *Если* $\|u_0\|_{H_C} \le C_0 < \infty$, *то справедлива также оценка* (30). ■

Одним из основных следствий из данной теоремы является следующее: если при выполнении соответствующих ограничений имеют место соотношения (31), то, выбрав достаточно малым, но положительным параметр регуляризации α, можно принять пару (ϕ_α, u_α), ходящую в решение системы (26), в качестве приближённого решения исходной задачи (18). И, если теперь подходящим итерационным процессом построим приближения $\phi_\alpha^k, u_\alpha^k$ к ϕ_α, u_α, то $\phi_\alpha^k, u_\alpha^k$ будут также приближениями к решению задачи (18).

§ 3. Условие плотной ("аппроксимативной") разрешимости задач

Плотная разрешимость задач является важным понятием при изучении многих прикладных проблем, особенно в которых исходные данные задач известны приближённо.

3.1. Условие плотной разрешимости

Пусть рассматривается задача об отыскании ϕ, u таких что

$$L\phi = f + Bu, \quad C\phi = \varphi_{ob} \qquad (32)$$

и уравнение для u

$$Au = g, \qquad (33)$$

где $A = CL^{-1}B$ есть непрерывный оператор $g = \varphi_{ob} - CL^{-1}f$

f — заданный элемент из Y^*, а φ_{ob} — элемент из H_{ob}, который в общем случае не принадлежит $D(B)$ — области определения оператора B. Поэтому, вообще говоря, задача (32), (33) не имеет "обычного"решения. Однако эта задача может быть плотно разрешима.

Определение 1. Задача (32) называется плотно разрешимой, если для любого заданного $\varphi_{ob} \in H_{ob}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое $u_\delta \in D(B)$, что для решения $\phi_\delta = L^{-1}(f + Bu_\delta)$ первого уравнения из (32) при $u \equiv u_\delta$ имеем $\|C\phi_\delta - \varphi_{ob}\|_{H)_{ob}} \le \varepsilon$.

Обратим внимание, что мы говорим о плотной разрешимости задачи (32) только по отношению к правой части φ_{ob} второго уравнения из (32), считая первое уравнение из (32) везде разрешимым в Y^* (хотя определение плотной разрешимости можно сформулировать для системы (32) в целом, т.е. по отношению к обоим элементам f, φ_{ob}, когда оно будет классическим определением плотной разрешимости (32)).

Переформулируем приведённое определение в применении к уравнению (33). Замечаем, что

$$\|C\phi_\delta - \varphi_{ob}\|_{H_{ob}} = \|Au_\delta - g\|_{H_{ob}} = \|g_\delta - g\|_{H_{ob}},$$

где $g = (\varphi_{ob} - CL^{-1}f) \in H_{ob}$, $g_\delta \equiv Au_\delta \in R(A)$, поскольку $u_\delta \in D(A) = D(B)$. Поэтому приведённое определение означает, что *если* $g \in H_{ob}$, *то для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $g_\delta \in R(A)$ *такой, что* $\|g_\delta - g\|_{H_{ob}} \le \varepsilon$. Однако данная формулировка означает, что плотная разрешимость имеет место, если $\overline{R(A)} = H_{ob}$, что является общепринятым определением плотной разрешимости уравнения (33) ([26], см. также п. 2.2, гл. 2). Поэтому в дальнейшем будем придерживаться данной терминологии. Отметим также, что плотную разрешимость можно назвать "приближённой разрешимостью", а в задачах управления её называют "приближённой управляемостью"("аппроксимативной управляемостью"), поскольку в этих задачах неизвестная u является управлением.

Формулировка плотной разрешимости задачи (32) к уравнению (33) даёт возможность сформулировать условие плотной разрешимости на основе тривиальности нуль-пространства $N(A^*) \equiv \ker(A^*)$ оператора A^*, сопряжённого к A. Действительно, поскольку из теории операторных уравнений в гильбертовых пространствах известно, что $H_{ob} = \overline{R(A)} \oplus N(A^*)$ (см. теоремы 11, 12 из § 1, § 2 гл. 2), то заключаем: *плотная разрешимость уравнения* (33) (*и задачи* (32)) *имеет место, если и только если* $N(A^*) = \{0\}$. Следовательно, плотная разрешимость рассматриваемых задач имеет место, если $N(A^*) = \{0\}$, что приводит к следующему условию: *плотная разрешимость задачи* (32) *имеет место тогда и только тогда, когда однородная система сопряжённых уравнений вида*

$$L^*q = C^*w, \quad B^*q = 0 \tag{34}$$

имеет только тривиальное решение $q = 0,\ w = 0$.

Частной реализацией сформулированного выше определения плотной разрешимости (32) является следующее.

Пусть $\varphi_{ob}^{(0)}$ — некоторый элемент из H_{ob}, а $U(\varphi_{ob}^{(0)};\delta)$ есть шар в H_{ob} с центром в $\varphi_{ob}^{(0)}$: $U(\varphi_{ob};\delta) = \{\varphi_{ob} \in H_{ob} : \|\varphi_{ob}^{(0)} - \varphi_{ob}\|_{H_{ob}} \le \delta\}$, где $\delta > 0$.

Определение 2. Задача (32) называется плотно разрешимой, если для любого $\varphi_{ob} \in U(\varphi_{ob}^{(0)};\delta)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $u_\delta \in D(B)$ такой, что $\|C\phi_\delta - \varphi_{ob}\|_{H_{ob}} \le \varepsilon$, где $\phi_\delta = L^{-1}(f + Bu_\delta)$.

В отличие от первого определения в определении 2 конкретизируется множество элементов $\{\varphi_{ob}\}$, для которых рассматривается задача (32). В ряде прикладных задач такая конкретизация может быть обусловлена рассматриваемой задачей, например: если $\varphi_{ob}^{(0)}$ есть некоторый заданный элемент, а $\varphi_{ob} \in U(\varphi_{ob}^{(0)};\delta)$ является реально наблюдаемым (измеряемым) элементом с точностью δ. Заметим также, что элементы $\varphi_{ob} \in U(\varphi_{ob}^{(0)};\delta)$ даже могут быть неизвестными. В этом случае, если будут построены u_δ, $\phi_\delta = L^{-1}(f + Bu_\delta)$ такие, что $\|C\phi_\delta - \varphi_{ob}^{(0)}\|_{H_{ob}} \le \varepsilon$, то

$$\begin{aligned} &\|C\phi_\delta - \varphi_{ob}\|_{H_{ob}} \le \\ &\le \|C\phi_\delta - \varphi_{ob}^{(0)}\|_{H_{ob}} + \|\varphi_{ob}^{(0)} - \varphi_{ob}\|_{H_{ob}} \le \varepsilon + \delta \equiv \varepsilon_1 \\ &\qquad\qquad \forall\, \varphi_{ob} \in U(\varphi_{ob}^{(0)};\delta), \end{aligned} \tag{35}$$

т.е. решение ϕ_δ, u_δ задачи (32), построенное на основе знания лишь элемента $\varphi_{ob}^{(0)}$ и точности наблюдений δ может быть принято в качестве приближённого решения рассматриваемой задачи при любом $\varphi_{ob} \in U(\varphi_{ob}^{(0)};\delta)$, если ε, δ достаточно малы.

Итак, для установления плотной разрешимости задачи (32) достаточно показать, что задача (34) имеет только тривиальное решение. Изучение данной задачи осуществляется в каждом конкретном случае с привлечением операторов вида $L, \ldots, C^*$ и необходимых сведений из теории краевых задач. Иногда тривиальность решения задачи (34) доказывается совсем просто.

Пример 1. Пусть рассматривается задача из примера 1 п. 2.1 предыдущего параграфа. Тогда задача (34) будет иметь вид

$$L^*q \equiv -\Delta q = w \ \text{ в } \ \Omega, \ q = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega, \ B^*q \equiv q = 0 \ \text{ в } \ \Omega.$$

Очевидно, что она имеет только тривиальное решение $q = 0$, $w = 0$. А значит, некорректная задача из примера 1 п. 2.1 является плотно разрешимой: для любой заданной функции $\varphi_{ob}(x) \in L_2(\Omega)$ можно подобрать классическое решение задачи $-\Delta\phi_\delta = u_\delta$ в Ω, $\phi_\delta = 0$ на $\partial\Omega$ такое, что $\|\phi_\delta - \varphi_{ob}\|_{L_2\Omega} \le \varepsilon$ для любого заданного $\varepsilon > 0$. ■

Пример 2. Рассмотрим задачу из примера 2 п. 2.1 предыдущего параграфа. Можно показать, что задача (34) здесь имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial q}{\partial t} - \Delta q = 0 \ \text{ в } \ Q_T, \\ q = 0, \ \text{на} \ \partial\Omega, \ q(0, x) = 0, \\ q(T, x) = w(x), \end{cases}$$

Тем же способом, что и в примере 2 из п. 2.1 устанавливается, что $q = 0$, $w = 0$, т.е. задача из примера 2 из п. 2 2 плотно разрешима (при $\varphi_{ob} \in L_2(\Omega)$ она может не иметь решения, а значит, является некорректной). ■

3.2. Решения системы вариационных уравнений в задаче о плотной разрешимости

Рассмотрим семейство задач оптимального управления (24) и соответствующую систему вариационных уравнений (26) при $\alpha > 0$. Для любого $\varphi_{ob} \in H_{ob}$ и $\alpha > 0$ эта система имеет единственное решение $(\phi_\alpha, q_\alpha, u_\alpha) \in W \times Y \times X_C$ и справедливы оценки (27), (28). Покажем, что при достаточно малом α пара ϕ_α, u_α может быть принята в качестве приближённого решения задачи (32) в том смысле, что будет удовлетворять уравнению $L\phi_\alpha = f + Bu_\alpha$; при этом будем иметь $\|C\phi_\alpha - \varphi_{ob}\|_{H_{ob}} \le \varepsilon$ для любого наперёд заданного $\varepsilon > 0$, т.е. пара ϕ_α, u_α решает проблему о плотной разрешимости (32).

Лемма 1. *Пусть заданы $\varphi_{ob} \in H_{ob}$, $f \in Y^*$, $\varepsilon > 0$. Тогда если задача* (32) *плотно разрешима, то существуют $\alpha_0 = \alpha_0(\varepsilon)$ такие, что для пары ϕ_α, u_α, входящей в решение системы* (26), *имеют место соотношения*

$$L\phi_\alpha = f + Bu_\alpha, \quad \|C\phi_\alpha - \varphi_{ob}\|_{H_{ob}} \le \varepsilon \tag{36}$$

при любом положительном $\alpha \le \alpha_0$.

Доказательство. Пусть $\overline{D(B)} = X_C$ или $D(B) = X_C$. Поскольку ϕ_α, u_α есть единственная критическая точка функционала $J_\alpha(v, \phi(v))$, то $J_\alpha(u_\alpha, \phi(u_\alpha)) \le J_\alpha(w, \phi(w))$ $\forall w \in D(B)$. Поскольку задача (32) предполагается плотной разрешимой, то $N(A^*) = \{0\}$, $\overline{R(A)} = H_{ob}$ и существует $w \in D(B)$ такой, что

$$\|C\phi(w) - \varphi_{ob}\|^2_{H_{ob}} = \|Aw - g\|^2_{H_{ob}} \le \varepsilon_1$$

для заданного $\varepsilon_1 > 0$. Тогда

$$J_\alpha(u_\alpha, \phi(u_\alpha)) \le \alpha\|w - u_C\|^2_{X_C} + \varepsilon_1.$$

Фиксируем ε_1, w и выбираем $\alpha = \alpha_0$ достаточно малым, чтобы $\alpha\|w - u_C\|^2_{X_C} \le \varepsilon_1$. В этом случае имеем

$$\|C\phi_\alpha - \varphi_{ob}\|^2_{H_{ob}} \le J_\alpha(u_\alpha, \phi(u_\alpha)) \le 2\varepsilon_1.$$

Считая $\varepsilon \equiv (2\varepsilon_1)^{1/2}$, получаем (36).

Соотношения (36) будут иметь место при любом положительном $\alpha \le \alpha_0$, поскольку согласно теории метода регуляризации А.Н.Тихонова (см. п. 4.3, гл. 2) имеем

$$\|C\phi_{\alpha_1} - \varphi_{ob}\|_{H_{ob}} = \|Au_{\alpha_1} - g\|_{H_{ob}} \le \|Au_{\alpha_2} - g\|_{H_{ob}} =$$
$$= \|C\phi_{\alpha_2} - \varphi_{ob}\|_{H_{ob}}$$

при $\alpha_1 \le \alpha_2$, что завершает доказательство утверждений леммы. ■

Замечание. Если предположить, что $N(A) = \{0\}$, то в дополнение к утверждениям леммы имеет место монотонное убывание величины $\|C\phi_\alpha - \varphi_{ob}\|_{H_{ob}}$ при $\alpha \to +0$. Кроме того, можно сделать заключение, что если задача (32) имеет решение ϕ_0, u_0, то $\phi_0 \ne \phi_\alpha$, $u_0 \ne u_\alpha$ при $\forall \alpha > 0$. Эти утверждения также следуют из поведения функционала J_α и его составляющих в зависимости от параметра α (см. п 4.3. гл.2). ■

Пусть теперь φ_{ob} принадлежит шару $U(\varphi_{ob}^{(0)} : \delta)$. Справедливо следующее следствие

Следствие. Если выполнены условия леммы 1 для любого $\varepsilon > 0$, существует $\alpha_0 = \alpha_0(\varepsilon)$ такое, что для решений ϕ_α, u_α системы (26) при любом $\varphi_{ob} \in U(\varphi_{ob}^{(0)}; \delta)$ имеет место оценка

$$\|C\phi_\alpha - \varphi_{ob}\|_{H_{ob}} \le \varepsilon + \delta \tag{37}$$

при $0 < \alpha \le \alpha_0$. Если $\varphi_{ob}^{(0)} \in R(A\Lambda_C^{-1/2})$ и ϕ_0, u_0 есть решение задачи (32) при $\varphi_{ob} \equiv \varphi_{ob}^{(0)}$, причём $\|u_0\|_{X_C} \le C_0 < \infty$, то также

$$\|C\phi_\alpha - \varphi_{ob}\|_{H_{ob}} \le C_0\sqrt{\alpha} + \delta. \tag{38}$$

Сформулируем установленные выше утверждения в виде теоремы.

Теорема 2. *Пусть операторы L, B, C, Λ_C таковы, что оператор $A \equiv A\Lambda_C^{-1/2}$ непрерывен, а задача (32) рассматривается при $f \in Y^*$, $\varphi_{ob} \in H_{ob}$. Тогда:*

1. *Задача (32) плотно разрешима тогда и только тогда когда система (34) имеет только тривиальное решение.*

2. *Если задача (32) плотно разрешима, а ϕ_α, q_α есть решение системы вариационных уравнений (26) при $\varphi_{ob} \in H_{ob}$, то для любого заданного $\varepsilon > 0$ существует $\alpha_0 = \alpha_0(\varepsilon)$, что имеют место соотношения (36) при $0 < \alpha \le \alpha_0(\varepsilon)$; если $N(A) = \{0\}$, то также $\|C\phi_{\alpha_1} - \varphi_{ob}\|_{H_{ob}} < \|C\phi_{\alpha_2} - \varphi_{ob}\|_{H_{ob}}$ при $\alpha_1 < \alpha_2$.*

3. *Если ϕ_0, u_0 есть нормальное решение задачи (32) при $\varphi_{ob} \equiv \varphi_{ob}^{(0)} \in R(CL^{-1}B\Lambda_C^{-1/2})$, причём $\|u_0\|_{X_C} \le C_0 < \infty$, а $\phi_\alpha, q_\alpha, u_\alpha$ есть решение (26) при $\varphi_{ob} \in U(\varphi_{ob}^{(0)}; \delta)$, то справедлива оценка (38).*

Из теоремы 2 можно сделать следующее заключение: если задача (32) плотно разрешима, то в качестве приближённого решения этой задачи снова (как и в предыдущем параграфе) можно брать решения системы (26), если только параметр регуляризации α положителен, но достаточно мал. Для исследования плотной разрешимости задачи (32) достаточно установить, тривиально ли решение системы сопряжённых уравнений (34). Обратим внимание, что при наличии плотной разрешимости (32) можно утверждать о малости невязки $(C\phi_\alpha - \varphi_{ob})$, тогда как в предыдущем параграфе обсуждается в первую очередь величина ошибки $(u_\alpha - u_0)$. И если какой-либо итерационной процедурой будет построено приближённое решение $\phi_\alpha^k, q_\alpha^k, u_\alpha^k$, то пара $\phi_\alpha^k, u_\alpha^k$ может быть снова принята за приближённое решение задачи (32).

§ 4. Условие корректной разрешимости задачи

Задача (32) может оказаться корректно разрешимой относительно обоих неизвестных ϕ, u. Рассмотрим некоторые условия корректной разрешимости (32), изучая для простоты лишь случай, когда $\Lambda_C = I$, $X_C = H_C$, а также $\overline{D(B)} = H_C$, или $D(B) = H_C$, или $D(B) = H_C^{(0)}$ — подпространство из H_C.

4.1. Корректная разрешимость

Рассмотрим задачу (32) и уравнение (33). Предположим, что операторы L, B, C такие, что при некоторой системе пространств $W, \dots, H_{ob}$ имеет место неравенство

$$C_0\|v\|_{H_C}^2 \le \|CL^{-1}Bv\|_{H_{ob}}^2 \quad \forall v \in D(B), \tag{39}$$

где постоянная $C_0 > 0$ не зависит от v. Тогда из теории операторных уравнений (см. п. 2.2 из § 2. гл. 2) уравнение (33) корректно разрешимо при любом $g \equiv (\varphi_{ob} - CL^{-1}f) \in R(CL^{-1}B)$, причём

$$\|u\|_{H_C} \le C\|\varphi_{ob} - CL^{-1}f\|_{H_{ob}} \tag{40}$$

где $C = 1/\sqrt{C_0}$. Следовательно, если $g \in R(A)$, где $A \equiv CL^{-1}B$, то уравнение $Au = g$ корректно разрешимо и справедлива оценка (40). В силу ограничений на оператор L уравнение $L\phi = f + Bu$ также корректно разрешимо, и также имеем неравенство

$$\|\phi\|_W \le C(\|f\|_{Y^*} + \|\varphi_{ob} - CL^{-1}f\|_{H_{ob}}). \tag{41}$$

Итак, *при $g \in R(A)$ задача* (32) *корректно разрешима и для решения ϕ, u справедливы оценки* (40), (41).

Если g есть элемент из H_{ob} (вообще говоря, не принадлежащий $D(B)$), то задача (32) имеет единственное обобщённое решение $u \in H_C$, $\phi = \phi(u) \in W$ такое, что

$$\|\phi\|_W + \|u\|_{H_C} \leq C(\|f\|_{Y^*} + \|\varphi_{ob} - CL^{-1}f\|_{H_{ob}}), \qquad (42)$$

где $C = const > 0$. Здесь u есть обобщённое решение уравнения $A^*Au = A^*g$, удовлетворяющее равенству

$$(Au, Aw)_{H_{ob}} = (g, Aw)_{H_{ob}} \quad \forall\, w \in H_C, \qquad (43)$$

где A есть замыкание оператора $CL^{-1}B$ на H_C, $H_{ob} = \overline{R(A)}$, $H_C = \overline{R(A^*)}$ и $N(A) = N(A^*) = \{0\}$. Если $g \in R(CL^{-1}B)$, то обобщённое решение ϕ, u совпадает с классическим решением задачи (32).

4.2. Сходимость регуляризированных решений

Если постоянная C_0 в (39) достаточно мала, то в этом случае может оказаться целесообразным отыскивать решения u_α регуляризированного уравнения

$$\alpha\, u_\alpha + A^*A\, u_\alpha = A^*g \qquad (44)$$

с малым положительным параметром α. При подходящем выборе этого параметра элементы u_α, $\phi_\alpha = L^{-1}(f + Bu_\alpha)$ могут быть приближениями приемлемой точности к решению (классическому или обобщённому) задачи (32), которые будем обозначать u_0, ϕ_0. Чтобы оценить допускаемые при этом погрешности, рассмотрим уравнение (44) при $\alpha = 0$

$$A^*A\, u_0 = A^*g. \qquad (45)$$

Теперь из (44), (45) получаем оценку (см., например, § данной главы)

$$\alpha\|u_\alpha - u_0\|^2_{H_C} + 2\|Au_\alpha - g\|^2_{H_{ob}} \leq \alpha\|u_0\|^2_{H_C}.$$

Отсюда с привлечением (40) имеем

$$\begin{gathered}\alpha\|u_\alpha - u_0\|^2_{H_C} + \|Au_\alpha - g\|^2_{H_{ob}} \leq \frac{\alpha}{C_0}\,\|g\|^2_{H_{ob}}, \\ \|C\phi_\alpha - \varphi_{ob}\|^2_{H_{ob}} \leq \frac{\alpha}{C_0}\,\|\varphi_{ob} - CL^{-1}f\|^2_{H_{ob}},\end{gathered} \qquad (46)$$

где u_α, ϕ_α — пара, входящая в решение $\phi_\alpha, q_\alpha, u_\alpha$ системы вариационных уравнений (которая эквивалентна уравнению (44)):

$$\begin{cases} L\phi_\alpha = f + Bu_\alpha, \\ L^*q_\alpha = C^*(C\phi_\alpha - \varphi_{ob}), \\ \alpha\, u_\alpha + B^*q_\alpha = 0. \end{cases} \qquad (47)$$

Для разности $(\phi_\alpha - \phi_0)$ справедлива оценка

$$\|\phi_\alpha - \varphi_0\|^2_W \leq C\frac{\alpha}{C_0}\,\|\varphi_{ob} - CL^{-1}f\|^2_{H_{ob}}, \qquad (48)$$

где постоянная C не зависит от α.

Сформулируем некоторые из полученных выше утверждений в виде следующей теоремы

Теорема 3. *Пусть операторы L, B, C и выбранная система пространств $W, \ldots, H_{ob}$ таковы, что справедлива априорная оценка* (39). *Тогда задача* (32) *является корректно разрешимой. Если $g \equiv (\varphi_{ob} - CL^{-1}f) \in R(CL^{-1}B)$, то* (32) *имеет единственное решение ϕ, u для которого справедлива оценка* (42). *Если же $g \in H_{ob}$, то ϕ, u — обобщённое решение задачи* (32), *для которого также справедлива оценка* (42).

4.3. О приближённом решении задач

Как отмечалось в первом и втором параграфах данной главы, если $D(B) = H_C^{(0)}$ есть конечномерное подпространство из H_C размерности $K < \infty$, то оценка (39) может оказаться выполненной при условии $N(A) = \{0\}$, но с постоянной $C_0 = C_0(K) > 0$, которая в общем случае может быть сколь угодно малой при $K \to \infty$ (например, если $A = CL^{-1}B$ вполне непрерывен). Это обстоятельство является полезным при приближённом решении рассматриваемых здесь задач. Рассмотрим один из возможных здесь подходов, когда неизвестное u ищется в конечномерном подпространстве $H_C^{(0)}$ размерности K с некоторым базисом $\varphi_k, k = 1, \dots, K$.

Пусть выполнены следующие предположения:
1) $N(A) = \{0\}$, A — непрерывен и задача (32) имеет единственное решение ϕ_0, u_0, причём $u_0 \in X_C \subset H_C^{(0)}$, где X_C — некоторое пространство, непрерывно и плотно вложенное в H_C; 2) при $u_0 \in X_C$ справедлива оценка аппроксимации вида

$$\inf_{v \in H_C^{(0)}} \|u_0 - v\|_{H_C} \leq \varepsilon(K)\|u_0\|_{X_C} \to 0, \ K \to \infty, \tag{49}$$

где $\varepsilon(K)$ — оценка погрешности (обратим внимание, что оператор $A = CL^{-1}B$ может быть здесь вполне непрерывен). Будем искать приближённое решение $\tilde{\phi}, \tilde{u}$ задачи (32) как решение следующей задачи оптимального управления

$$L\tilde{\phi} = f + B\tilde{u}, \quad J_0(\tilde{u}, \tilde{\phi}(\tilde{u})) = \inf_{v \in H_C^{(0)}} J_0(v, \phi(v)), \tag{50}$$

где $J_0(v, \phi(v)) = \|Av - g\|^2_{H_{ob}}$. Задача (50) имеет единственное решение, причём $\tilde{u}$ удовлетворяет уравнению вида

$$P_C A^* A P_C \tilde{u} = P_C A^* g, \tag{51}$$

где P_C – оператор ортогонального проектирования на $H_C^{(0)}$. (Заметим, что $P_C\tilde{u} = \tilde{u}$ при $\tilde{u} \in H_C^{(0)}$, однако мы будем использовать запись $P_C\tilde{u}$.) Оператор уравнения (51) симметричен и положительно определён, при этом

$$C_0(K)\|\tilde{u}\|^2_{K_C} \leq \|AP_C\tilde{u}\|^2_{H_{ob}} \ \forall\, \tilde{u} \in H_C^{(0)},$$

где $C_0(K)$ — положительная постоянная (и возможно, что $C_0(K) \to +0$ при $K \to \infty$). Следовательно,

$$\|\tilde{u}\|^2_{H_C} \leq \|g\|^2_{H_{ob}} \,/\, C_0(K). \tag{52}$$

Оценим невязку $(A\tilde{u} - g)$:

$$\|A\tilde{u} - g\|^2_{H_{ob}} \leq \|Av - g\|^2_{H_{ob}} = \|A(v - u_0)\|^2_{H_{ob}} \leq$$

$$\leq \|A\|^2\|v - u_0\|^2_{H_{ob}} \quad \forall\, v \in H_C^{(0)}.$$

Из последних соотношений в силу (49) получаем

$$\|A\tilde{u} - g\|^2_{H_{ob}} \leq \varepsilon^2(K),$$

где $C = \|A\|^2\|u_0\|^2_{X_C} < \infty$.

От уравнения (51) перейдём к возмущённому уравнению вида

$$\alpha P_C\tilde{u}_\alpha + P_C A^* A P_C \tilde{u}_\alpha = P_C A^* g, \tag{53}$$

где $\tilde{u}_\alpha \in H_C^{(0)}$, $\alpha = const \geq 0$. Из (51), (53) получаем следующие оценки:

$$\alpha\|\tilde{u}_\alpha - \tilde{u}\|^2_{H_C} + 2\|AP_C(\tilde{u}_\alpha - \tilde{u})\|^2_{H_{ob}} \leq \alpha\|\tilde{u}\|^2_{H_C} \leq$$

$$\leq \alpha \cdot \|g\|^2_{H_{ob}}/C_0(K), \tag{54}$$

$$\|A\tilde{u}_\alpha - g\|^2_{H_{ob}} \leq C(\varepsilon^2(K) + \frac{\alpha}{C_0(K)}).$$

где постоянная C не зависит от $\varepsilon(K)$ и α.

Итак, *при* $\alpha \to 0$, $K \to \infty$, $(\alpha/C_0(K)) \to 0$ *имеем*

$$\|C\tilde{\phi}_\alpha - \varphi_{ob}\|_{H_{ob}} \leq C\Big(\varepsilon(K) + \Big(\frac{\alpha}{C_0(K)}\Big)^{1/2}\Big) \to 0, \tag{55}$$

где $C = const$, $\tilde{\phi}_\alpha = L^{-1}(f + B\tilde{u}_\alpha)$.

Построение $\tilde{\phi}_\alpha, \tilde{u}_\alpha$ можно осуществить, например, при менив подходящий итерационный метод к системе

$$L\tilde{\phi}_\alpha = f + BP_C\tilde{u}_\alpha, \quad L^*\tilde{q}_\alpha = C^*(C\tilde{\phi}_\alpha - \varphi_{ob}), \qquad (56)$$
$$\alpha P_C\tilde{u}_\alpha + P_C B^*\tilde{q}_\alpha = 0,$$

которая эквивалентна уравнению (53). (Отметим, что элементы $\tilde{\phi}_\alpha, \tilde{q}_\alpha$ здесь принадлежат, вообще говоря, бесконечномерным пространствам, тогда как $\tilde{u}_\alpha$ — конечномерному $H_C^{(0)}$!)

§ 5. Задачи на собственные значения в обратных задачах и оптимальном управлении

Обратные задачи и задачи управления приводят к задачам на собственные специального вида, которые будут введены в данном параграфе.

5.1. Задачи на собственные значения

Пусть $A = CL^{-1}B$ есть оператор, рассматриваемый в предыдущих параграфах, $A^* = B^*L^{*-1}C^*$ — сопряжённый оператор. Предположим, что оператор $A * A$ обладает дискретным спектром (например, когда A^*A является вполне непрерывным). Рассмотрим задачу на собственные значения вида (см. п. 2.4, § 2, гл. 2)

$$A^*Af_k = \sigma_k^2 f_k, \qquad (57)$$

где $\sigma_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — сингулярные числа оператора A. В (57) возможно присутствие собственного значения $\sigma_0 = 0$, кратность которого может быть бесконечной. Систему $\{f_k\}$ считаем ортогональной в H_{ob} : $(f_k, f_m)_{H_{ob}} = \delta_{k,m}$, где $\delta_{k,m}$ – символ Кронекера. Введя элементы $g_k \equiv Af_k/\sigma_k$, задачу (57) можно переписать в виде системы

$$A^*g_k = \sigma_k f_k, \quad Af_k = \sigma_k g_k. \qquad (58)$$

Отмечаем, что для системы $\{g_k\}$ имеем

$$AA^*g_k = \sigma_k^2 g_k, \quad (g_k, g_m) = \delta_{k,m}. \qquad (59)$$

Введём ϕ_k, q_k следующим образом: $\phi_k = L^{-1}Bf_k$, $q_k = L^{*-1}C^*C\phi_k$ и будем называть их *фундаментальными функциями*, соответствующими A и A^*. Тогда задача (57) может быть переписана в виде системы

$$L\phi_k = Bf_k, \quad L^*q_k = C^*Cf_k, \quad B^*q_k = \sigma_k^2 f_k \qquad (60)$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots,$$

которая является *задачей на собственные значения специального вида* и соответствует вариационной системе уравнений (47) при $\alpha = 0$. Если задача (57) имеет нетривиальные решения $\{f_k\}$, то и задача вида (60) имеет также набор нетривиальных решений $\{\phi_k\}$, $\{q_k\}$, $\{f_k\}$.

Система (58) приводит к следующей задаче на собственные значения:

$$L\phi_k = Bf_k, \quad C\phi_k = \sigma_k f_k,$$
$$L^*\tilde{q}_k = C^*g_k, \quad B^*\tilde{q}_k = \sigma_k f_k, \qquad (61)$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где элементы $\{q_k\}$ связаны с $\{\tilde{q}_k\}$ равенствами $q_k = \sigma_k\tilde{q}_k$.

Свойства фундаментальных функций $\{\phi_k\}$, $\{q_k\}$ можно изучать, например, путём переформулировки ряда свойств собственных элементов $\{f_k\}$ и собственных значений $\{\sigma_k^2\}$ задачи (57) с привлечением общих утверждений спектральной теории операторов.

В некоторых задачах (например, когда $A = A^*$ – вполне непрерывный оператор) можно вводить фундаментальные функции $\{\phi_k\}$ как решения задач вида

$$L\phi_k = Bf_k, \quad C\phi_k = \sigma_k f_k. \qquad (62)$$

где $\{f_k\}$, $\{\sigma_k\}$ – собственные функции и собственные значения задачи

$$Af_k = \sigma_k f_k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

(естественно, при условии, что последняя задача имеет нетривиальные решения $\{f_k\}$).

Задачи, аналогичные (62), можно записать для A^*(если $A \neq A^*$).

В случае регуляризированных задач (44), (47) с $\alpha > 0$ система (60) заменяется следующей:

$$L\phi_k = Bf_k, \quad L^*q_k = C^*C\phi_k, \\ \alpha f_k + B^*q_k = \sigma_k^2 f_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{63}$$

где f_k — собственные элементы оператора $\mathcal{A} = \alpha I + A^*A$, а собственные значения здесь: $\sigma_k^2 = (\sigma_k^2 + \alpha) > 0$ $k = 0, 1, 2\ldots$

Отыскание явного вида систем $\{\phi_k\}$, $\{q_k\}$, $\{f_k\}$, $\{g_k\}$ во многих практически интересных задачах невозможно. Но иногда это можно сделать на основе собственных функций операторов L, B, C, возникающих в задачах математической физики, относительно которых имеются обширные результаты. Приведём несколько примеров, иллюстрирующих изложенное.

Пример 1. Рассмотрим задачу из примера 1 из п. 2 (§ 2, гл. 2). Здесь $B = C = I$, $L\phi \equiv -\Delta\phi$ при условии, что $\phi = 0$ на $\partial\Omega$. Рассмотрим классическую задачу на собственные значения

$$L\varphi_k \equiv -\Delta\varphi_k = \lambda_k\varphi_k, \quad \varphi_k = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega, \quad \|\varphi_k\|_{L_2(\Omega)} = 1. \tag{64}$$

Легко заметить, что для задач (57)–(60) имеем:

$$\phi_k = q_k = f_k = g_k = \varphi_k(x), \quad \sigma_k^2 = 1/\lambda_k^2, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

а также $\sigma_k \to 0$, $k \to \infty$. Кроме того, из теории эллиптических операторов известен ряд результатов относительно оценок для собственных чисел $\{\lambda_k\}$ и асимптотического их поведения. Эти результаты можно применить для изучения поведения σ_k ■

Пример 2. Рассмотрим задачу из примера 2 из п. 2.1 (§ 2, гл. 2). Задача (60) здесь имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\phi_k}{\partial t} - \Delta\phi_k = 0 \text{ в } Q_T, \quad \phi_k = 0 \text{ на } \partial\Omega, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \phi_k(0, x) = f_k(x), \\ -\dfrac{\partial q_k}{\partial t} - \Delta q_k = 0 \text{ в } Q_T, \ q_k(T, x) = \phi_k(T, x), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad q_k = 0 \text{ на } \partial\Omega, \\ q_k(0, x) = \sigma_k^2 f_k(x). \end{cases} \tag{65}$$

Если воспользоваться собственным функционалом задачи (64), то легко получаем, что

$$f_k(x) = \varphi_k(x), \quad \phi_k(t, x) = e^{-\lambda_k t}\varphi_k(x), \\ q_k(t, x) = e^{-\lambda_k(2T-t)}\varphi_k(x) \quad \sigma_k^2 = e^{-2\lambda_k T}, \\ k = 1, 2, \ldots . \ ■ \tag{66}$$

Пример 3. Пусть $L_0 : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ — симметричный эллиптический оператор второго порядка, определённый на соответствующей области определения $D(L)$ при одном из "классических"граничных условий. Пусть $\{\varphi_k\}$, $\{\lambda_k\}$ есть собственные функции и собственные значения оператора L_0:

$$L_0\varphi_k = \lambda_k\varphi_k. \quad \|\varphi_k\|_{L_2(\Omega)} = 1. \tag{67}$$

Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial\phi_k}{\partial t} + L_0\phi_k = 0 \text{ в } Q_T, \quad \phi_0(0, x) = f_k(x). \\ -\frac{\partial q_k}{\partial t} + L_0 q_k = 0 \text{ в } Q_T, \ q_k(T, x) = \phi_k(T, x), \\ q_k(0, x) = \sigma_k^2 f_k(x). \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{68}$$

где $q_t = (0,t) \times \Omega$. Так же как и в предыдущем примере, $\phi_k, \ldots, f_k$ выражается через φ_k с помощью соотношений (66), а также $\sigma_k^2 = e^{-2\lambda_k T}$, $k = 1, 2, \ldots$ ■

Примеры спектральных задач обсуждаемого здесь вида приведены в [63]. Отметим также, что в некоторых задачах функции $\phi_k, \ldots, f_k$ выражаются (или даже совпадают) с фундаментальными и собственными функциями операторов Пуанкаре–Стеклова или операторов отражения [1].

5.2. Некоторые приложения фундаментальных и собственных функций

Фундаментальные функции $\{\phi_k\}$, $\{q_k\}$ и собственные элементы $\{f_k\}\{g_k\}$, введённые в предыдущем пункте, могут применяться для теоретического анализа обратных задач задач управления, задач оптимального управления и др., а иногда для их приближённого решения. Проиллюстрируем их возможные приложения следующими примерами.

5.2.1. Представление решений задач. Рассмотрим задачу (47) и уравнение (44). Предположим, что набор собственных элементов $\{f_k\}$ есть замкнутая ортонормальная система в H_C. Отыскивая u_α методом разложения по собственным функциям, легко получаем из (44) следующие выражения для u_α:

$$u_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(A^* g, f_k)_{H_C}}{\alpha + \sigma_k^2} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi_{ob} - CL^{-1}f, C\phi_k)_{H_{ob}}}{\alpha + \sigma_k^2} f_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(\varphi_{ob} - CL^{-1}f, g_k)_{H_{ob}}}{\alpha + \sigma_k^2} f_k, \qquad (69)$$

а также представления для $\phi_\alpha = L^{-1}(f + Bu_\alpha)$:

$$\phi_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi_{ob} - CL^{-1}f, C\phi_k)_{H_{ob}}\phi_k}{\alpha + \sigma_k^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(\varphi_{ob} - CL^{-1}f, g_k)_{H_{ob}}\phi_k}{\alpha + \sigma_k^2}. \qquad (70)$$

Элементы u_α, ϕ_α дают решение также задачи (47). Если φ_{ob}, f таковы, что ряды из (69), (70) сходятся также при $\alpha = 0$, то, полагая $\alpha = 0$ из (69), (70), получаем также решение ϕ_0, u_0 задачи (32).

5.2.2. Анализ влияния ошибок измерений. Предположим, что вместо элемента φ_{ob} известен приближённо (например, из измерений) элемент $\varphi_{ob,\delta}$, причём $\|\varphi_{ob} - \varphi_{ob,\delta}\|_{H_{ob}} \leq$ $\leq \delta$ – точность измерений, но явный вид $\varphi_{ob,\delta}$ даже может не быть известен, т.е. φ_{ob} задач в условиях неопределённости. Если считать даже $(\varphi_{ob,\delta} - CL^{-1}f) \in R(A)$, то о коэффициентах разложений в (69), (70) при $\alpha = 0$ можно лишь утверждать то, что

$$\frac{|(\varphi_{ob}, g_k)_{H_{ob}} - (\varphi_{ob,\delta}, g_k)_{H_{ob}}|}{\sigma_k} \leq \frac{\delta}{\sigma_k}.$$

При этом вклад g_k в разложение u_0 для малых σ_k нельзя вычислить с достаточной точностью. Таким образом, зная сингулярные числа σ_k и соответствующие им элементы g_k, можно судить о том, какие компоненты решения u_0, ϕ_0 задачи (32) вычисляются по приближению $\varphi_{ob,\delta}$, какие — нет, а также дать приближённый анализ влияния ошибок измерений на точность решения u_0, ϕ_0.

5.2.3. Оценка норм оператора A. Как уже отмечалось ранее, для анализа сходимости многих итерационных алгоритмов в применении к решению уравнения (44) с непрерывным оператором необходима оценка нормы $\|A\|$. Получить её можно, зная оценку σ_{sup} для максимального из сингулярных чисел σ_k. В ряде задач удаётся вычислить эти оценки, после чего принимаем: $\|A\| = \sup\limits_k \sigma_k \leq \sigma_{sup}$ и используем полученные оценки для оптимизации скорости сходимости итерационных алгоритмов.

Пример 4. Пусть рассматриваются задача о финальном наблюдении из примера 2 из п. 2.1 (§ 2, гл. 2), задачи на собственные значения из примеров 2, 3 настоящего раздела и пусть $\{\varphi_k\}$, $\{\lambda_k\}$ – решения классической задачи (64) (или

(67)) для эллиптического оператора, которая хорошо изучена. Тогда:

1) решение задачи о финальном наблюдении есть

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k T}\Big((\varphi_{ob}, \varphi_k) - (L^{-1}f, \varphi_k)\Big)\varphi_k(x),$$

$$\phi_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k T}\Big((\varphi_{ob}, \varphi_k) - (L^{-1}f, \varphi_k)\Big)e^{-\lambda_k t}\varphi_k(x).$$

где $(\cdot,\cdot) \equiv (\cdot,\cdot)_{L_2(\Omega)}$, а также

$$(L^{-1}f, \varphi_k) \equiv \int\limits_0^T e^{-\lambda_k(T-t')}(f,\varphi_k)(t')\,dt';$$

2) если вместо φ_{ob} задаётся приближение $\varphi_{ob,\delta}$ такое, что $\|\varphi_{ob} - \varphi_{ob,\delta}\| \le \delta$, то для гармоник с номерами $k \to \infty$ можно ожидать значительной потери точности, поскольку

$$|(\varphi_{ob}, \varphi_k) - (\varphi_{ob,\delta}, \varphi_k)| \lesssim e^{\lambda_k T}\delta \to \infty, \ k \to \infty;$$

3) для первого собственного значения λ_1 во многих эллиптических задачах известны приближения $\lambda_1^h > 0$ снизу для λ_1 с достаточно хорошей точностью. А тогда имеем $\|A\| = e^{-\lambda_1 T} \lesssim e^{-\lambda_1^h T} < 1$. ■

§ 6. Итерационные методы решения обратных задач и задач управления

Изучим итерационные алгоритмы решения задач, рассмотренных в предыдущих параграфах. Это задачи:

$$L\phi = f + Bu, \quad C\phi = \varphi_{ob}; \tag{71}$$

обобщённая постановка задачи (71):

$$L\phi = f + Bu, \quad J_0(u, \phi(u)) = \inf_{v\in D(B)} J_0(v, \phi(v)); \tag{72}$$

регуляризированная форма задач (71), (72):

$$L\phi_\alpha = f + Bu_\alpha, \quad J_\alpha(u_\alpha, \phi_\alpha) = \inf_{v\in D(B)} J_\alpha(v, \phi(v)), \tag{73}$$

где $\phi(v) \equiv \phi$, $\phi_\alpha \equiv \phi(u_\alpha)$, а также

$$J_0(v, \phi(v)) = \|C\phi(v) - \varphi_{ob}\|^2_{H_{ob}},$$

$$J_\alpha(v, \phi(v)) = \alpha\|v - u_C\|^2_{X_C} + \|C\phi(v) - \varphi_{ob}\|^2_{H_{ob}}.$$

Основной задачей, в применении к которой будут рассматриваться итерационные алгоритмы, есть система вариационных уравнений, соответствующая (73):

$$\begin{aligned} L\phi_\alpha &= f + Bu_\alpha, \quad L^*q_\alpha = C^*(C\phi_\alpha - \varphi_{ob}), \\ \alpha\Lambda_C u_\alpha &+ B^*q_\alpha = \alpha\Lambda_C u_C. \end{aligned} \tag{74}$$

Одновременно с (71)–(74) будем рассматривать аналоги этих задач в форме операторных уравнений для u или u_α:

$$Au = g, \tag{75}$$

$$A^*Au = A^*g, \tag{76}$$

$$\mathcal{A}_\alpha u_\alpha \equiv \alpha\Lambda_C u_\alpha + A^*Au_\alpha = g_\alpha, \tag{77}$$

где

$$A = CL^{-1}B, \ g \equiv \varphi_{ob} - CL^{-1}f, \ g_\alpha \equiv A^*g + \alpha\Lambda_C u_C.$$

С использованием (76), (77) экстремальные задачи (72), (73) могут быть переписаны также в следующем виде:

$$J_0(u) = \inf_{v\in D(B)} J_0(v), \quad J_0(v) = \|Av - g\|^2_{H_{ob}}; \tag{78}$$

$$J_\alpha(u_\alpha = \inf_{v\in D(B)} J_\alpha(v), \quad J_\alpha(v) = \alpha\|v - u_C\|^2_{X_C} + \|Av - g\|^2_{H_{ob}} \tag{79}$$

В дальнейшем мы считаем, что выполнены общие ограничения на L, B, C и пространства $W, \ldots, H_{ob}$, введённые в § 1 настоящей главы. Если не оговаривается особо, то предполагается, что оператор A является непрерывным, а задачи (71)–(73) имеют решения.

Среди итерационных методов, которые могут применяться к рассматриваемым задачам, выделим три группы методов, которые условно назовём *методами теории экстремальных задач*, *итерационными методами теории некорректных задач* и *методами общей теории итерационных процессов*.

К первой группе методов мы отнесём методы, которые базируются на процедурах минимизации функционалов J_0, J_α из общей теории решения экстремальных задач, т.е. на процедурах построения минимизирующих последовательностей для J_0, J_α [10].

Вторая группа итерационных методов использует подходы, применяемые в теории некорректных задач — решении операторных уравнений (74)–(76) [9].

Наконец, к третьей группе мы относим множество итерационных процедур, получаемых применением алгоритмов общей теории итерационных процессов [38, 56] к уравнению (76) с симметричным и положительно определённым оператором.

В ряде случаев алгоритмы из выделенных трёх групп могут формально совпадать. Однако идеи выбора параметров, обеспечивающих их сходимость, могут быть различными. Кроме того, обратим внимание на то, что многие подходы к выбору этих параметров из теории экстремальных задач и теории некорректных задач в задачах типа (71)–(74) не могут быть реализованы в силу трудоёмкости (или даже невозможности) их осуществления в силу отсутствия явного вида $L^{-1}, L^{*-1}, \ldots$, рассмотрения L, B, C достаточно общего вида и др. Поэтому мы вынуждены будем ограничиться рассмотрением лишь простых методов выбора данных параметров.

6.1. Методы теории экстремальных задач

Рассмотрим экстремальную задачу (79) при $\Lambda_C \equiv I$, $X_C \equiv H_C$, $u_C \equiv 0$, $\alpha > 0$. Решение этой задачи обозначим $u \equiv u_\alpha$. Для отыскания приближённого значения u воспользуемся градиентным методом (см. п.3.3.1, гл.2):

$$u_{k+1} = u_k - \tau_k J_0'(u_k), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{80}$$

где u_0 — начальное приближение, $J_0'(u_k) = 2\alpha u_k + 2A^*(Au_k - g)$, τ_k — положительные параметры, априорное задание которых возможно из следующих условий (см. [10]):

$$\tau_k > 0, \ k = 0, 1, \ldots, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \tau_k = \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \tau_k^2 < \infty. \tag{81}$$

Например, можно принять $\tau_k = C(1+k)^{-\beta}$, $C = const > 0$, $1 \geq \beta > 1/2$.

В терминах уравнений системы (74) алгоритм (80) имеет вид

$$\begin{gathered} L\phi_k = f + Bu_k, \quad L^* q_k = C^*(C\phi_k - \varphi_{ob}), \\ u_{k+1} = u_k - 2\tau_k(\alpha u_k + B^* q_k), \quad k = 0, 1, \ldots \end{gathered} \tag{82}$$

Для установления сходимости (82) отмечаем, что при $\alpha > 0$ функционал $J_\alpha(u)$ сильно выпуклый, а также

$$(J_\alpha'(u) - J_\alpha'(v), u - v)_{H_C} \geq 2\alpha \|u - v\|_{H_C}^2;$$

$$\|J_\alpha'(u) - J_\alpha'(v)\| \leq 2(\alpha + \|A\|^2)\|u - v\|_{H_C}.$$

Кроме того, множество $M(u_0) = \{v : J_\alpha(v \leq J_\alpha(u_0)\}$ ограничено, т.к. из условия $J_\alpha(v) \leq J_\alpha(u_0)$ имеем: $\|v\|_{H_C}^2 \leq$ $\leq J_\alpha(u_0)/\alpha < \infty$. Теперь достаточно воспользоваться результатами из теории экстремальных задач ([10], с. 70), откуда заключаем, что *если J_* есть минимальное значение* *функционала J_α, а параметры $\{\tau_k\}$ выбираются согласно (81) и $u_0 \in H_C$, то последовательность $\{J_\alpha(u_k)\}$ монотонно убывает, причём*

$$\begin{aligned} 0 \le J(u_k) - J_* \le (J_\alpha(u_0), -J_*)q^k \\ \|u_k - u\|_{H_C} \le \frac{2}{\alpha}(J_\alpha)(u_0) - J_*)q^k, \quad k = 0, 1, \ldots, \end{aligned} \tag{83}$$

где $0 \le q = 1 - \alpha/(2\alpha + 2\|A\|)^2 < 1$. Из (83), как следствие, легко получить оценки скорости сходимости $\phi_k \to \phi$, $q \to 0$.

Если в дополнение к (82) решать дополнительную задачу

$$L\psi_k = B(\alpha u_k + B^* q_k), \tag{84}$$

то, выбирая τ_k в (82) по формуле

$$\tau_k = \frac{1}{2}\,\frac{\|\alpha u_k + B^* q_k\|^2_{H_C}}{\|\alpha u_k + B^* q_k\|^2_{H_C} + \|C\psi_k\|^2_{H_{ob}}}, \tag{85}$$

получаем *метод наискорейшего спуска* для решения полной системы вариационных уравнений.

Выбирая параметры $\{\tau_k\}$ другим, подходящим для практической реализации способом (см. п. 3.3.1, гл. 2), можно получать другие модификации градиентного метода. Аналогичным образом можно строить итерационные алгоритмы решения рассматриваемых задач на основе других методов решения экстремальных задач. На основе оценок погрешностей этих алгоритмов (типа оценок (83)) и оценок, полученных нами ранее при переходе от задач (71), (72) к задачам (73), (74), несложно получить оценку общей погрешности допускаемой при решении задачи (71) или (72).

6.2. Методы теории некорректных задач

В теории некорректных задач разработаны классы итерационных процедур для решения некорректных операторных уравнений вида (75) (76), которые имеют специфику, и путём их применения осуществляется *итеративная регуляризация* исходной задачи, под которой будем понимать уравнение (75). На основе некоторых из этих процедур можно сформулировать соответствующие итерационные процессы для решения задач вида (71). Рассмотрим один из таких итерационных алгоритмов.

Пусть решается задача (71), являющаяся некорректной, с непрерывным оператором $A = CL^{-1}B$ и приближёнными φ_{ob} такими, что $\|\varphi_{ob} - \varphi^{(0)}_{ob}\|_{H_{ob}} \le \delta$, где $\varphi^{(0)}_{ob} \in R(A)$. Для формулировки алгоритма решения этой задачи применим к её обобщённой постановке, записанной в форме операторного уравнения (76), алгоритм (47). В терминах вариационных уравнений типа (74) данный алгоритм имеет вид

$$\begin{aligned} L\phi_k = f + Bu_k, \quad L^* q_k = C^*(C\phi_k - \varphi_{ob}), \\ u_k = u_{k-1} - \tau B^* q_k, \quad k = 0, 1, \ldots, \end{aligned} \tag{86}$$

где u_0 — начальное приближение, а параметр τ выбирается удовлетворяющим соотношением $0 < \tau < (2/\|A\|^2)$. Число проводимых итераций здесь не может быть произвольным, а должно согласовываться с δ, что следует из результатов теории некорректных задач (см. п.4.4, гл.2), в силу которых справедливо следующее утверждение о сходимости (86): *если $(\varphi_{ob} - CL^{-1}f) \in R(CL^{-1}B)$, $N(CL^{-1}B) = \{0\}$, $0 < \tau < (2/\|A\|^2)$, а начальное приближение выбирается следующим образом:*

$$L\phi_0 = f, \quad L^* q_0 = C^*(\varphi_{ob} - C\phi_0), \quad u_0 = \tau B^* q_0, \tag{87}$$

то при $k = k(\delta) \to \infty$, $\delta \cdot k(\delta) \to 0$, $\delta \to 0$ имеет место сходимость u_k, $\phi_k = L^{-1}(f + Bu_k)$ к решению u, ϕ задачи (71).

Аналогичным образом можно рассматривать другие итерационные процессы, базируясь на алгоритмах (45)–(48) теории некорректных задач, также и в случаях, когда L, B, C вычисляются приближённо.

6.3. Методы общей теории итерационных процессов

Основная идея построения, исследования и оптимизации скорости сходимости итерационных алгоритмов для (71) состоит в применении тех или иных методов общей теории итерационных процессов [38, 43, 56] к уравнению (77). Уравнение (77) является операторной формой записи регуляризованных задач (73), (74), решения которых в подходящем смысле сходятся к решению задачи (71) (см. §§ 2–4 настоящей главы). Здесь мы рассмотрим некоторые из этих итерационных алгоритмов с этапами их реализации в терминах уравнений системы (74).

6.3.1. Простейший итерационный процесс. Пусть оператор $A = CL^{-1}D$ является непрерывным. Считая $\Lambda_C = I$, $X_C = H_C$, $u_C = 0$, запишем для (77) простейший итерационный процесс (см. п. 2.6, гл. 2):

$$u_\alpha^{k+1} = u_\alpha^k - \tau(\mathcal{A}_\alpha u_\alpha^k - A^* g), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{88}$$

где u_0 выбирается согласно (87). Если выбирать τ по формуле

$$\tau = \tau_{opt} = \frac{2}{2\alpha + C_0 + C_1}, \tag{89}$$

то алгоритм (88) сходится, причём

$$\|u_\alpha^k - u_\alpha\|_{H_C} \le C\left(\frac{C_1 - C_0}{2\alpha + C_0 + C_1}\right)^k \to 0, \quad k \to \infty, \tag{90}$$

где постоянная C не зависит от k. Здесь C_0, C_1 есть границы точечного спектра оператора $\mathcal{A}_0 \equiv A^*A$, т.е. $\mathrm{Sp}(\mathcal{A}_0) \in [C_0, C_1]$. Простейшим выбором C_0, C_1, является следующий: $C_0 = 0$, $C_1 = \|A\|^2$.

Для практической реализации (88) необходимо записать этот алгоритм в терминах уравнений системы (74), что здесь есть:

$$\begin{gathered} L\phi_\alpha^k = f + Bu_\alpha^k, \quad L^* q_\alpha^k = C^*(C\phi_\alpha^k - \varphi_{ob}), \\ u_\alpha^{k+1} = u_\alpha^k - \tau(\alpha u_\alpha^k + B^* q_\alpha^k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{91}$$

(где u_0 определяется согласно (87)) и применить к каждой из подзадач из (91) классические методы вычислительной математики [2, 41, 38, 66].

Сходимость решений системы (91) к решению задачи (74) является следствием (90) и корректной обратимости операторов L, L^*. В результате получаем следующее утверждение: *если $\alpha > 0$, а параметр τ выбирается согласно (89) то*

$$\begin{gathered} \|\phi_\alpha - \phi_\alpha^k\|_W + \|q_\alpha - q_\alpha^k\|_Y + \|u_\alpha - u_\alpha^k\|_{H_C} \le \\ \le C\left(\frac{C_1 - C_0}{2\alpha + C_0 + C_1}\right)^k \to 0, \quad k \to \infty, \end{gathered} \tag{92}$$

где постоянная C не зависит от k.

Пусть теперь в рассматриваемой задаче элементы f, φ_{ob} задаются приближённо, т.е. заданы $f_\delta, \varphi_{ob,\delta}$ вместо f, φ_{ob}, причём $\|f - f_\delta\|_{Y^*} \le \delta_1$, $\|\varphi_{ob} - \varphi_{ob,\delta}\|_{H_{ob}} \le \delta_2$, где δ_1, δ_2 оценки погрешностей считаются известными. Тогда итерационный процесс (91) будет иметь вид

$$\begin{gathered} L\tilde\phi_\alpha^k = f_\delta + B\tilde u_\alpha^k, \quad L^*\tilde q_\alpha^k = C^*(C\tilde\phi_\alpha^k - \varphi_{ob,\delta}), \\ \tilde u_\alpha^{k+1} = \tilde u_\alpha^k - \tau(\alpha\tilde u_\alpha^k + B^*\tilde q_\alpha^k), \quad k = 0, 1, \ldots, \end{gathered} \tag{93}$$

причем $\tilde u_\alpha^0 \equiv u_0$ определяется из (87) при $f \equiv f_\delta$, $\varphi_{ob} \equiv \varphi_{ob,\delta}$. Пусть τ выбирается по формуле (90).

Для изучения сходимости решений, получаемых в (93), заметим, что (93) есть простейший итерационный алгоритм в применении к уравнению (88) с $g_\delta \equiv \varphi_{ob,\delta} - CL^{-1}f_\delta$ вместо

g, причём здесь $\|g - g_\delta\|_{H_{ob}} \le (\delta_2 + \|CL^{-1}\|\delta_1) \equiv \delta$. Воспользовавшись теперь утверждениями, доказанными в п. 4.4, гл. 2 (см. (52), (53) из § 4, гл. 2), получим следующее утверждение: *если в* (93) τ *выбирается по формуле* (89), *а параметр регуляризации* $\alpha \equiv \alpha(\delta)$ *и число итераций* $k \equiv k(\alpha, \delta)$ *выбираются такими, что*

$$\alpha(\delta) \to 0,\ k(\delta,\alpha) \cong \frac{|\ln\delta|}{\alpha(\delta)} \to \infty,\ \frac{\delta}{\alpha(\delta)} \to 0 \text{ при } \delta \to 0, \quad (94)$$

то

$$\|\phi_\alpha - \tilde\phi_\alpha^k\|_W + \|q_\alpha - \tilde q_\alpha^k\|_Y + \|u_\alpha - \tilde u_\alpha^k\|_{H_C} \le C\,\frac{\delta}{\alpha(\delta)} \to 0, \quad (95)$$

$$\text{при } \delta \to 0$$

где $C = const$.

На основе (95) и оценки для разности $(u_\alpha - u)$, где u — решение уравнения (75), несложно получить оценки для $(\phi - \tilde\phi_\alpha^k), (u - \tilde u_\alpha^k)$, где ϕ, u — решение задачи (71). Так, в частности, справедливо такое утверждение: *если* $g \in R(A)$, $N(A)$, *а гладкость решения* ϕ, u *задачи* (71) *такова, что* $\|u - u_\alpha\|_{H_C} \le C\alpha^\beta$, *где* $0 < \beta < 1$, *то при* $\alpha = \delta^{1/(1+\beta)}$ *выполнены условия (94) и справедлива оценка вида*

$$\|\phi - \tilde\phi_\alpha^k\|_W + \|u - \tilde u_\alpha^k\|_{H_C} \le C \cdot \delta^{\frac{\beta}{1+\beta}} \to 0 \quad \text{при } \delta \to 0, \quad (96)$$

где $C = const$.

Обратим внимание на то, что *параметр* α *в* (93) *в общем случае нельзя брать сколь угодно малым независимо от значения* δ. Действительно, пусть это возможно. Тогда, полагая $\alpha = 0$ в (93), получаем итерационный процесс для уравнения вида (76), для которого в [18] приводится пример, когда итерационный процесс расходится при $k \to \infty$.

В заключение отметим, что если вместо L, B, C, u_C задаются приближения $L_\delta, \dots, u_{C,\delta}$, то можно также рассматривать итерационный алгоритм вида (93). Изучение его сходимости при определённых ограничениях на $L_\delta, \dots, u_{C,\delta}$ можно осуществить на базе теоремы 34 из п. 4.4, гл. 2.

6.3.2. Итерационный процесс с переобусловливанием. Рассмотрим задачу (71), когда $N(A) = \{0\}$, а оператор $\mathcal{A}_0 \equiv A^*A$ может быть неограниченным. Предположим, что удаётся подобрать самосопряжённый положительный оператор Λ_C такой, что $\mathrm{Sp}\,(\Lambda_C^{-1}A^*A) \subset [C_0, C_1]$, где $C_0, C_1 = const > 0$. Именно этот оператор Λ_C выберем в системе регуляризированных уравнений (74), эквивалентной одному уравнению (77). Для решения этого уравнения запишем итерационный процесс

$$\Lambda_C u_\alpha^{k+1} = \Lambda_C u_\alpha^k - \tau(\mathcal{A}_\alpha u_\alpha^k - g_\alpha), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (97)$$

где параметр τ выбираем по формуле

$$\tau = \tau_{opt} = \frac{2}{2\alpha + C_0 + c_1}. \quad (98)$$

Тогда $\mathrm{Sp}\,(\Lambda_C^{-1}\mathcal{A}_\alpha) \subset [\alpha + C_0, \alpha + C_1]$ и справедлива следующая оценка скорости сходимости (см. п. 2.6, гл. 2):

$$\|u_\alpha - u_\alpha^k\|_{X_C} \le C\left(\frac{C_1 - C_0}{2\alpha + C_0 + C_1}\right)^k \to 0 \quad \text{при } k \to \infty,$$

где $\|u\|_{X_C} \equiv \|\Lambda_C^{1/2} u\|_{H_C}$. Отмечаем, что оператор Λ_C в (97) играет роль переобусловливателя, т.е. такого оператора, для которого $\mathrm{Sp}\,(\Lambda_C^{-1}\mathcal{A}_\alpha) \subset [\alpha + C_0, \alpha + C_1]$. Если подобрать такой оператор Λ_C сложно, то можно в качестве Λ_C выбрать самосопряжённый положительно определённый оператор, порождающий пространство X_C, непрерывно вложенное в H_C. При этом оператор Λ_C должен быть таким, чтобы $(\mathcal{A}_\alpha v, v)_{H_C} \le C_1(\Lambda_C v, v)_{H_C} = C_1\|v\|_{X_C}^2\ \forall v \in D(B)$, где $C_1 = const > 0$. Подобрать такой оператор Λ_C проще, для чего достаточно на $D(B)$ ввести достаточно "сильную"норму $\|v\|_{X_C}$. Отметим, что часто оператор $\Lambda_C^{-1}\mathcal{A}_\alpha$ бывает вполне непрерывным, а также $C_0 = 0$. Но и в этом случае алгоритм сходится при любом малом положительном α.

Для практической реализации алгоритм (97) записывается в виде системы

$$L\phi_\alpha^k = f + Bu_\alpha^k, \quad L^* q_\alpha^k = C^*(C\phi_\alpha^k - \varphi_{ob}),$$
$$\Lambda_C w_\alpha^k = B^* q_\alpha^k, \; u_\alpha^{k+1} = u_\alpha^k - \tau(\alpha u_\alpha^k + w_\alpha^k), \; k = 0, 1, \ldots \tag{99}$$

Из оценки скорости сходимости последовательности $\{u_\alpha^k\}$ к u получаем также более общую оценку вида

$$\|\phi_\alpha^k - \phi_\alpha\|_W + \|q_\alpha^k - q_\alpha\|_Y + \|u_\alpha^k - u_\alpha\|_{X_C} \leq$$
$$\leq C\left(\frac{C_1 - C_0}{2\alpha + C_0 + C_1}\right)^k, \quad k \to \infty. \tag{100}$$

Реализация этапов (99) осуществляется путём решения последовательности прямых задач с операторами L, L^*, Λ_C.

6.3.3. Метод минимальных невязок. Следующий итерационный алгоритм базируется на основе известного метода минимальных невязок (см. п. 2.6, гл. 2). Преимуществом этого алгоритма является сравнительно простой метод расчёта параметров $\{\tau_k\}$, не требующий знания оценок спектра операторов решаемого уравнения.

Пусть $H_{ob} = H_C$, рассматривается задача (71) и соответствующее ей уравнение (75). Предположим, что оператор A является непрерывным и самосопряжённым: $A = A^*$. Тогда регуляризация по М.М.Лаврентьеву для данного уравнения будет: $\mathcal{A}_\alpha u \equiv (\alpha I + A)u_\alpha = g$. Метод минимальных невязок для этого уравнения имеет вид

$$u_\alpha^{k+1} = u_\alpha^k - \tau_k(\mathcal{A}_\alpha u_\alpha^k - g), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{101}$$

где

$$\tau_k = \frac{(\mathcal{A}_\alpha \xi^k, \xi^k)_{H_C}}{(\mathcal{A}_\alpha \xi^k, \mathcal{A}_\alpha \xi^k)_{H_C}}, \quad \xi^k = \mathcal{A}_\alpha u_\alpha^k - g,$$

или в терминах операторов задачи (71):

$$L\phi_\alpha^k = f + Bu_\alpha^k, \quad \xi^k = C\phi_\alpha^k - \varphi_{ob} + \alpha u_\alpha^k, \quad Lq_\alpha^k = B\xi^k.$$
$$\tau_k = \frac{\alpha\|\xi^k\|_{H_C}^2 + (Cq_\alpha^k, \xi^k)_{H_C}}{\|\alpha\xi^k + Cq_\alpha^k\|_{H_C}^2}, \tag{102}$$
$$u_\alpha^{k+1} = u_\alpha^k - \tau_k \xi^k, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Если оператор A не является симметричным, а задача (71) некорректна, то рассматривается система уравнений (74) и операторное уравнение (77).

Пусть $\Lambda_C \equiv I$, $u_C \equiv 0$. Метод минимальных невязок для (77) имеет вид

$$u_\alpha^{k+1} = u_\alpha^k - \tau_k(\mathcal{A}_\alpha u_\alpha^k - A^* g), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где

$$\mathcal{A}_\alpha = \alpha I + A^* A, \quad A = CL^{-1}B, \quad g = \varphi_{ob} - CL^{-1}f,$$
$$\tau_k = \frac{(\mathcal{A}_\alpha \xi^k, \xi^k)_{H_{ob}}}{(\mathcal{A}_\alpha \xi^k, \mathcal{A}_\alpha \xi^k)_{H_{ob}}}, \quad \xi^k = \mathcal{A}_\alpha u_\alpha^k - A^* g. \tag{103}$$

Для системы вариационных уравнений данный итерационный процесс имеет вид

$$L\phi_\alpha^k = f + Bu_\alpha^k, \; L^* q_\alpha^k = C^*(C\phi_\alpha^k - \varphi_{ob}), \; \xi^k = \alpha u_\alpha^k + B^* q_\alpha^k,$$
$$L\tilde{\phi}_\alpha^k = B\xi^k, \quad L^*\tilde{q}_\alpha^k = C^* C\tilde{\phi}_\alpha^k, \quad w_\alpha^k = B^*\tilde{q}_\alpha^k. \tag{104}$$
$$\tau_k = \frac{(w_\alpha^k, \xi^k)_{H_{ob}}}{\|w_\alpha^k\|_{H_{ob}}^2}, \quad u_\alpha^{k+1} = u_\alpha^k - \tau_k \xi^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Если операторы A, $A^* A$ корректно обратимы, то в (101)-(104) можно принимать $\alpha = 0$. Исследование сходимости итерационных процессов (102), (104) несложно провести на основе известных результатов для метода минимальных невязок [38, 43, 56] и методов регуляризации М.М.Лаврентьева и А.Н.Тихонова (см. также параграфы 2–4 настоящей главы).

Аналогично изложенному на основе общей теории итерационных процессов могут быть сформулированы многие другие итерационные алгоритмы для задач типа (71). Однако не все эти алгоритмы могут быть реализованы в практических вычислениях из-за возможной трудоёмкости решения возникающих систем (аналогичных системам (104)). По этой же причине могут оказаться трудно реализуемыми некоторые методы выбора параметров регуляризации в уравнениях (74), (77), известные из теории некорректных задач [4, 48, 59].

Глава 4. ПРИЛОЖЕНИЯ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Рассмотрим методы и подходы, сформулированные в предыдущей главе, применительно к задачам математической физики. Предварительно приведём некоторые сведения, касающиеся краевых задач для уравнений в частных производных. Ниже будут приведены также некоторые оценки решений задачи Коши, которые в настоящее время находят всё большее применение при исследовании обратных задач и задач точного управления.

§ 1. Некоторые уравнения и задачи математической физики

1.1. Некоторые основные уравнения математической физики

Важный класс уравнений в частных производных описывается линейным уравнением второго порядка, имеющим вид

$$Au \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)u = F(x), \quad (1)$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Функции $a_{ij}(x)$, $i, j = 1, \ldots, n$, $a_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, $a(x)$ называются *коэффициентами* уравнения (1) а функция $F(x)$ — *свободным членом.*

При изучении уравнений вида (1) можно выделить три основных типа: *эллиптические, параболические* и *гиперболические* [13]. Простейшими уравнениями этих типов являются соответственно уравнение Лапласа, уравнение теплопроводности и волновое уравнение, которые уже приводились в главе 1 и которые будут рассматриваться ниже.

Среди уравнений в частных производных первого порядка отметим лишь *интегро-дифференциальное уравнение переноса частиц*, относящееся к классу кинетических уравнений [1, 43]. Уравнения других классов в частных производных и постановки задач для них приведены, например, в [13, 21, 46].

1.1.1. Уравнения Лапласа и Пуассона. Уравнение Лапласа имеет вид

$$\Delta u = 0, \tag{2}$$

где $u = u(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ — оператор Лапласа в $\mathbf{R}^n$. Соответствующее неоднородное уравнение

$$-\Delta u = F \tag{3}$$

(F — известная функция) называется *уравнением Пуассона*. Уравнения Лапласа и Пуассона возникают в разнообразных задачах. Например, стационарное (т.е. не меняющееся со временем) распределение температуры в однородной среде и установившаяся форма натянутой мембраны удовлетворяют уравнению Лапласа, а аналогичное распределение температуры при наличии источников тепла (с плотностью, не меняющейся во времени) и форма мембраны при наличии стационарных внешних сил удовлетворяют уравнению Пуассона. Потенциал электростатического поля удовлетворяет уравнению Пуассона с функцией F, пропорциональной плотности зарядов (тем самым, в области, где нет зарядов, он удовлетворяет уравнению Лапласа).

1.1.2. Уравнение колебаний. Многие задачи механики (колебания струн, стержней, мембран и трехмерных объёмов) и физики (электромагнитные колебания) описываются уравнением колебаний вида

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F(x,t), \tag{4}$$

где неизвестная функция $u(x,t)$ зависит от n ($n = 1,2,3$) пространственных координат $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и времени t; коэффициенты ρ, p и q определяются свойствами среды, где происходит колебательный процесс; свободный член $F(x,t)$ выражает интенсивность внешнего возмущения. В уравнении (4) в соответствии с определением операторов div и grad

$$\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(p\frac{\partial}{\partial x_i}\Big).$$

Частным случаем уравнения (4) является также *уравнение малых поперечных колебаний мембраны*

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) + F. \tag{5}$$

Если плотность ρ постоянна, то уравнение колебаний мембраны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) + f, \quad a^2 = \frac{T_0}{\rho}, \quad f = \frac{F}{\rho}, \tag{6}$$

называют также *двумерным волновым уравнением*.

Трехмерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right) + f \tag{7}$$

описывает процессы распространения звука в однородной среде и электромагнитных волн в однородной непроводящей среде. Этому уравнению удовлетворяют плотность газа, его давление и потенциал скоростей, а также составляющие напряженности электрического и магнитного полей и соответствующие потенциалы.

1.1.3. Уравнения диффузии и теплопроводности. Процессы распространения тепла и диффузии частиц в среде описываются следующим *общим* уравнением диффузии:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F(x,t), \tag{8}$$

где ρ – коэффициент пористости среды, а p и q характеризуют ее свойства.

Если рассматривается процесс распространения тепла, то $u(x,t)$ есть температура среды в точке $x = (x_1, x_2, x_3)$ в момент времени t. Считая среду изотропной, обозначим через $\rho(x)$, $c(x)$ и $k(x)$ соответственно ее плотность, удельную теплоемкость и коэффициент теплопроводности, а через $F(x,t)$ – интенсивность источников тепла. Процесс распространения тепла описывается функцией, удовлетворяющей уравнению вида

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F(x,t). \tag{9}$$

Если среда однородна, т.е. c, ρ и k – постоянные, то уравнение (9) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u + f, \tag{10}$$

где

$$a^2 = \frac{k}{c\rho}, \quad f = \frac{F}{c\rho}.$$

Уравнение (10) называется *уравнением теплопроводности*. Число n пространственных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в этом уравнении может быть любым.

1.1.4. Уравнение переноса. Для описания процесса распространения частиц вместо уравнения диффузии используются также более точные уравнения — так называемые *уравнения переноса* (*кинетические уравнения*). Одним из представителей этого класса уравнений является *односкоростное уравнение переноса* вида

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + (s, \operatorname{grad})\varphi + \sigma\varphi = \frac{\sigma_s}{4\pi}\int\limits_{S_1}\varphi(x,s',t)ds' + F, \tag{11}$$

где $\varphi = vN(x,s,t)$ – поток частиц, летящих с (одной и той же) скоростью v в направлении $s = (s_1, s_2, s_3)$, $|s| = 1$; $N(x,s,t)$ – плотность частиц; $F(x,s,t)$ – плотность источников, коэффициенты $\sigma(x,t)$. $\sigma_s(x,t)$ характеризуют свойства среды; S_1 - сфера единичного радиуса в $\mathbf{R}^3$.

Для полного описания процесса переноса частиц необходимо задать начальное распределение потока частиц φ в области $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ (начальное условие) и режим на границе этой области (граничное условие). Например, если область Ω, где происходит процесс переноса, выпуклая, то граничное условие вида

$$\varphi(x,s,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (s,n) < 0, \tag{12}$$

где $n = n(x)$ единичный вектор внешней нормали к границе области Ω, выражает отсутствие падающего потока частиц на область извне.

Отметим, что уравнение переноса описывает процессы переноса нейтронов в ядерном реакторе, переноса лучистой энергии, прохождение γ-квантов через вещество, движения газов и другие.

1.2. Постановка основных задач математической физики

Сформулируем постановки основных краевых (начально-краевых) задач математической физики [3, 17, 46].

1.2.1. Классификация краевых задач. Как отмечалось ранее, линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F(x,t) \tag{13}$$

описывает процессы колебаний, уравнение

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F(x,t) \tag{14}$$

описывает процессы диффузии и, наконец, уравнение

$$-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = F(x) \tag{15}$$

описывает соответствующие стационарные процессы.

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ – область, где происходит физический процесс, а $\partial\Omega$ – ее граница, которую считаем кусочно-гладкой поверхностью. Область изменения аргументов x – область Ω – в случае уравнения (14) есть *область задания уравнения.* Временную переменную t считаем из $(0,T)$.

Будем предполагать, что коэффициенты ρ, p и q уравнений (13)–(15) не зависят от t. Далее, в соответствии с их физическим смыслом, считаем, что $\rho(x) > 0$, $p(x) > 0$, $q(x) > 0$, $x \in \overline{\Omega}$. Кроме того, в соответствии с математическим смыслом уравнений (13)–(15) необходимо считать, что $\rho \in C(\overline{\Omega}), p \in C^1(\overline{\Omega})$ и $q \in C(\overline{\Omega})$.

При сделанных предположениях *уравнение колебаний* (13) – *гиперболического типа, уравнение диффузии* (14) – *параболического типа и стационарное уравнение* (15) – *эллиптического типа.*

Чтобы полностью описать тот или иной физический процесс, необходимо, кроме самого уравнения, описывающего этот процесс, задать начальное состояние этого процесса (*начальные условия*) и режим на границе той области, в которой происходит этот процесс (*граничные условия*). Математически это связано с неединственностью решения дифференциальных уравнений. Поэтому, чтобы выделить решение, описывающее реальный физический процесс, необходимо задавать дополнительные условия. Такими дополнительными условиями и являются *краевые условия, начальные* и *граничные* Соответствующая задача называется *краевой задачей.* Таким образом, краевая задача математической физики – это дифференциальное (интегро-дифференциальное)

уравнение (или система уравнений) с заданными краевыми условиями.

Различают, таким образом, следующие три основных типа краевых задач для дифференциальных уравнений.

a) *Задача Коши* для уравнений гиперболического и параболического типов: задаются начальные условия, область Ω совпадает со всем пространством $\mathbf{R}^n$, граничные условия отсутствуют.

b) *Краевая задача* эллиптического типа: задаются граничные условия на границе $\partial\Omega$, начальные условия отсутствуют.

c) *Смешанная задача* для уравнений гиперболического и параболического типов: задаются начальные и граничные условия, $\Omega \neq \mathbf{R}^n$.

Опишем подробнее постановку каждой из перечисленных краевых задач для рассматриваемых уравнений (13)–(15).

1.2.2. Задача Коши. Для уравнения колебаний (13) (гиперболический тип) задача Коши ставится следующим образом: найти функцию $u(x,t)$ класса $C^2(t > 0) \bigcap C^1(t \geq 0)$, удовлетворяющую уравнению (13) в полупространстве $t > 0$ и начальным условиям при $t = +0$:

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1(x). \tag{16}$$

При этом необходимо , чтобы $F \in C(t > 0)$, $u_0 \in C^1(\mathbf{R}^n)$, $u_1 \in C(\mathbf{R}^n)$.

Для уравнения диффузии (14) (параболический тип) задача Коши ставится так: найти функцию $u(x,t)$ класса $C^2(t > 0) \bigcap C(t \geq 0)$, удовлетворяющую уравнению (14) в полупространстве $t > 0$ и начальному условию при $t = +0$:

$$u\big|_{t=0} = u_0(x). \tag{17}$$

При этом необходимо, чтобы $F \in C(t > 0)$, $u_0 \in C(\mathbf{R}^n)$.

Приведенная постановка задачи Коши допускает следующее обобщение. Пусть даны квазилинейное дифференциальное уравнение второго порядка гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_{i0} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t} + \\ + \Phi(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial u}{\partial t}), \tag{18}$$

кусочно-гладкая поверхность $\Sigma = [t = \sigma(x)]$ и функции u_0, u_1 на Σ (*данные Коши*). Задача Коши для уравнения (18) состоит в нахождении в некоторой части области $t > \sigma(x)$, примыкающей к поверхности Σ, решения $u(x, t)$, удовлетворяющего на Σ краевым условиям

$$u|_{\Sigma} = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Sigma} = u_1, \tag{19}$$

где n – нормаль к Σ, направленная в сторону возрастающих значений t.

1.2.3. Краевая задача для уравнения эллиптического типа. Краевая задача для уравнения (15) (эллиптический тип) состоит в нахождении функции $u(x)$ класса $C^2(\Omega) \bigcap C^1(\overline{\Omega})$, удовлетворяющей в области Ω уравнению (15) и граничному условию на $\partial\Omega$ вида

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = \nu, \tag{20}$$

где α, β и ν – заданные кусочно-непрерывные функции на $\partial\Omega$, причем $\alpha(x) \geq 0$, $\beta(x) \geq 0$, $\alpha(x) + \beta(x) > 0$, $x \in \partial\Omega$. Выделяют следующие типы граничных условий (20):

граничное условие I рода ($\alpha = 1$, $\beta = 0$)

$$u|_{\partial\Omega} = u_0; \tag{21}$$

граничное условие II рода ($\alpha = 0$, $\beta = 1$)

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = u_1; \tag{22}$$

граничное условие III рода ($\alpha \geq 0$, $\beta = 1$)

$$\alpha u + \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = u_2. \tag{23}$$

Соответствующие краевые задачи называются *краевыми задачами* I, II и III *рода*.

Для уравнений Лапласа и Пуассона краевая задача I рода

$$\Delta u = -f, \quad u|_{\partial\Omega} = u_0 \tag{24}$$

называется *задачей Дирихле*; краевая задача II рода

$$\Delta u = -f, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = u_1 \tag{25}$$

называется *задачей Неймана*.

Аналогично ставятся краевые задачи для уравнения (15) и во внешности ограниченной области Ω (*внешние краевые задачи*). Отличие состоит в том, что, помимо граничного условия (20), на $\partial\Omega$ задаются еще условия на бесконечности. Таким условием, например, может быть условие вида

$$u(x) = O(1) \quad \text{или} \quad u(x) = o(1), \quad |x| \to \infty, \tag{26}$$

для уравнения Пуассона.

1.2.4. Смешанные задачи. Для уравнения колебаний (13) (гиперболический тип) смешанная задача ставится следующим образом: найти функцию $u(x, t)$ класса $C^2(Q_T) \bigcap \bigcap C^1(\overline{Q}_T)$, где $Q_T \equiv \Omega \times (0, T)$, удовлетворяющую уравнению (13) в цилиндре Q_T, начальным условиям (16) при $t = 0$, $x = \overline{\Omega}$ (на нижнем основании цилиндра Q_T) и граничному условию (20) (на боковой поверхности цилиндра Q_T). При этом должны быть выполнены условия гладкости

$$F \in C(Q_T), \quad u_0 \in C^1(\overline{\Omega}), \quad u_1 \in C(\overline{\Omega}),$$

v кусочно-непрерывна на $\partial\Omega \times [0, T]$ и условия согласованности

$$\alpha u_0 + \beta \frac{\partial u_0}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = v\big|_{t=0}, \quad \alpha u_1 + \beta \frac{\partial u_1}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0}. \qquad (27)$$

(Второе из равенств (27) имеет смысл, если решение $u(x, t)$ достаточно гладко вплоть до нижнего основания Q_T.)

Аналогично для уравнения диффузии (14) (параболический тип) смешанная задача ставится так: найти функцию $u(x, t)$ класса $C^2(Q_T) \bigcap C(\overline{Q}_T)$, $\mathrm{grad}_x\, u \in C(\overline{Q}_T)$, удовлетворяющую уравнению (14) в Q_T, начальному условию (17) и граничному условию (20).

1.3. Обобщенные постановки и решения задач математической физики

Изложенные в предыдущих пунктах постановки краевых задач характеризуются тем, что решения их предполагаются достаточно гладкими, и они должны удовлетворять уравнению в каждой точке области задания этого уравнения. Такие решения мы будем называть *классическими*, а постановку соответствующей краевой задачи — *классической постановкой*. Таким образом, классические постановки задач уже предполагают достаточную гладкость входящих в задачу данных. Однако в наиболее интересных задачах эти данные могут иметь довольно сильные особенности. Поэтому для таких задач классические постановки уже оказываются недостаточными. Чтобы поставить такие задачи, приходится отказываться (частично или полностью) от требования гладкости решения в области или вплоть до границы, вводить так называемые *обобщенные решения* и *обобщенные постановки задач* математической физики.

Одно из направлений в теории обобщенных решений и постановок краевых задач базируется на использовании функциональных пространств Соболева. При этом теоремы вложения и теоремы существования следов (граничных

значений), установленные для этих пространств, позволяют придать смысл граничным условиям для уравнений математической физики и рассматривать эти условия как дополнительные уравнения в соответствующих пространствах (пространствах следов). В ряде задач даже можно исключить явное присутствие граничных условий в обобщенной постановке задач, включив их вместе с основным уравнением в некоторое интегральное тождество (так называемые естественные граничные условия).

Сформулируем основные подходы введения обобщенных постановок задач и обобщенных решений на примерах некоторых основных задач математической физики, используя при этом пространства Соболева [21, 46, 47].

1.3.1. Обобщенные производные. Пространства Соболева. Следуя С.Л Соболеву, определим для локально суммируемой функции обобщенную производную

Локально суммируемую на Ω функцию ω_α назовем *обобщенной производной функции* $f \in L_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *порядка* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, α_k - целые неотрицательные, $k = 1, \dots, n$, если для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ имеет место равенство

$$\int_\Omega f D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \omega_\alpha \varphi dx \qquad (28)$$

В дальнейшем будем обозначать $\omega_\alpha = D^\alpha f$.

Рассмотрим некоторые свойства обобщенных производных [13, 27, 50]. Равенство (28) ставит в соответствие локально суммируемой функции f единственную обобщенную производную порядка α. Это следует из леммы дю Буа-Реймонда

Лемма 1 (лемма дю Буа-Реймонда). *Для того чтобы локально суммируемая функция $f = 0$ почти всюду в области Ω, необходимо и достаточно, чтобы для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ выполнялось*

$$\int_\Omega f \varphi dx = 0.$$

Теорема 1 (*Слабая замкнутость оператора обобщенного дифференцирования*). *Пусть f_n — последовательность локально суммируемых на Ω функций. Если существуют такие $\omega_0, \omega_\alpha \in L_{\text{loc}}$, что для любых финитных функций $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ выполняются равенства*

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\varphi dx = \int_\Omega \omega_0\varphi dx, \quad \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n D^\alpha\varphi dx =$$

$$= (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \omega_\alpha\varphi dx,$$

то локально суммируемая функция ω_α является обобщенной производной порядка α функции ω_0.

Следствие. *Пусть последовательность $f_n \in L_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, слабо сходится к $f_0 \in L_p(\Omega)$, а последовательность обобщенных производных $D^\alpha f_n \in L_p(\Omega)$ слабо сходится к $\omega_\alpha \in L_p(\Omega)$, тогда f_0 имеет обобщенную производную порядка α и $D^\alpha f_0 = \omega_\alpha$.*

Из теоремы 1 следует, что обобщенные производные по Соболеву можно рассматривать как предельные элементы сходящихся в $L_p(\Omega)$ последовательностей производных от гладких функций. Это свойство обобщенных производных широко используется в различных краевых задачах математической физики. Рассматриваемые задачи, как правило, сводятся к исследованию некоторого оператора, первоначально заданного на гладких функциях, который надо расширить до замкнутого оператора в некотором нормированном пространстве. Широкие классы дифференциальных операторов, рассматриваемых в пространстве типа L_p, будут замкнутыми, если их расширить на функции, имеющие обобщенные производные. Эта методика, предложенная в работах С.Л.Соболева и К.О.Фридрихса, позволила решить много трудных задач в теории дифференциальных уравнений и стала в настоящее время классической. Особен-

но важную роль здесь получили введенные С.Л.Соболевым классы функций $W_p^l(\Omega)$.

Определим классы $W_p^l(\Omega)$ Соболева (см. [27, 50]). Пусть Ω принадлежит классу $C^{0,1}$ и l есть неотрицательное целое число. Пространство Соболева $W_p^l(\Omega)$, $p \geq 1$ есть подпространство $L_p(\Omega)$ функций f, имеющих обобщённые производные $D^\alpha f$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| \leq l$, с нормой

$$\|f\|_{W_p^l(\Omega)} = \Big(\sum_{0\leq|\alpha|\leq l}\int_\Omega |D^\alpha f|^p dx\Big)^{1/p}. \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{W_p^\infty(\Omega)} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq l} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |D^2 f(x)|, \quad p = \infty.$$

Пространство $W_p^l(\Omega)$ является банаховым пространством. Если $l = 0$, то $W_p^0(\Omega) = L_p(\Omega)$ $(1 \leq p \leq \infty)$и $\|f\|_{W_p^0(\Omega)} = \|f\|_{L_p(\Omega)}$. *Если Ω — область с липшицевой границей и $(1 \leq p < \infty)$, то $W_p^l(\Omega)$ может быть определено как замыкание $C^\infty(\Omega)$ по норме $\|\cdot\|_{W_p^l(\Omega)}$.*

Обозначим через $\overset{\circ}{W}{}_p^l(\Omega)$ подпространство из $W_p^l(\Omega)$, являющееся пополнением функций из $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|\cdot\|_{W_p^l(\Omega)}$. При $p = 2$ пространства $W_p^l(\Omega)$, $\overset{\circ}{W}{}_p^l(\Omega)$ являются гильбертовыми пространствами со скалярным произведением

$$(u, v)_{W_p^l(\Omega)} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq l}\int_\Omega D^\alpha u\overline{D^\alpha v}\, dx$$

и нормой

$$\|u\|_{W_p^l(\Omega)} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq l}\|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}\right)^{1/2}.$$

Пространства $W_p^l(\Omega)$, $\overset{\circ}{W}{}_p^l(\Omega)$ обозначают также как $H^l(\Omega) \equiv W_p^l(\Omega)$, $H_0^l(\Omega) \equiv \overset{\circ}{W}{}_p^l(\Omega)$. Отмечаем, что *пространства*

$W_p^l(\Omega)$, $\overset{\circ}{W}{}_p^l(\Omega)$ *не совпадают для ограниченной области* Ω

Ряд свойств пространств $W_p^l(\Omega)$ приведен в следующей теореме

Теорема 2. *Пусть* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *есть ограниченная область с липшицевой границей* $\partial\Omega$

1 *Если* $1 < p$, *то существует постоянная* C *такая, что*

$$\|u\|_{L_p(\partial\Omega)} \le C\|u\|_{W_p^1(\Omega)} \quad \forall u \in C^1(\overline{\Omega}).$$

2 *Если* $n < kp$, $\lambda < k - n/p$, *то существует* C *такая, что*

$$\|u\|_{C^\lambda(\Omega)} \le C\|u\|_{W_p^k(\Omega)} \quad \forall u \in W_p^k(\Omega)$$

3 *Если* $u \in W_p^k(\Omega)$ *и* $D^\alpha u = 0$ *на* $\partial\Omega$ *для* $|\alpha| \le k-1$, *тогда* $u \in \overset{\circ}{W}{}_p^k(\Omega)$

4 *Существует линейный ограниченный оператор* L_{ext} *отображающий* $W_p^k(\Omega)$ *в* $\overset{\circ}{W}{}_p^k(\mathbf{R}^n)$, *так что* $L_{\mathrm{ext}}u(x) = u(x)$ *при* $x \in \Omega$

5 *Существует постоянная* $C = C(\Omega, k)$ *такая, что*

$$\|u\|_{W_2^k(\Omega)} \le C\|u\|_{W_2^m(\Omega)}^{k/m}\|u\|_{L_2(\Omega)}^{1-k/m} \quad \forall u \in W_2^m(\Omega) \quad 0 \le k \le m$$

Утверждение 1 из этой теоремы называют "теоремой о следах" Оно утверждает, что отображение $\gamma : C^1(\bar\Omega) \to L_p(\partial\Omega)$, $\gamma u = u$ на $\partial\Omega$ — линейное и непрерывное на $C^1(\bar\Omega)$ Таким образом, γ *может быть продолжено на все* $W_p^1(\Omega)$ с сохранением неравенства из п 1 Вместо γu будем писать просто u и эту функцию (принадлежащую $L_p(\partial\Omega)$) называть *следом* u *на* $\partial\Omega$. Если $u \in W_p^l(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, то можно определить следы для всех производных вплоть до порядка $l-1$ Этот факт оправдывает определение $\overset{\circ}{W}{}_p^l(\Omega)$ на основе утверждения 3 из приведенной выше теоремы.

Справедлива также следующая теорема

Теорема 3 (формула Грина) *Пусть* Ω — *область в* $\mathbf{R}^n$ *класса* $C^{0,1}$ *и* v, w — *две функции из* $C^1(\bar\Omega)$ *Тогда справедливо равенство*

$$\int_\Omega \frac{\partial w(x)}{\partial x_i} v(x)\,dx = -\int_\Omega w(x)\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\,dx + \int_{\partial\Omega} w(x)v(x)n_i(x)\,ds,$$

где n_i — i-*й компонент единичного вектора внешней нормали* n *к* $\partial\Omega$.

Для функций $v, w \in C^m(\bar\Omega)$ справедлива следующая формула:

$$\int_\Omega D^\alpha w(x)v(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega w(x)D^\alpha v(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} G(v,w)\,ds,$$

где α — n-мерный мультииндекс длины m, $|\alpha| = m$, $G(v,w)$ — сумма произведений вида $\pm D^\beta v(x)D^\gamma w(x)n_i(x)$, $x \in \partial\Omega$ с $|\beta| < m$, $|\gamma| < m$, а $n_i = n_i(x)$ — компонент вектора внешней нормали к $\partial\Omega$ в точке $x \in \partial\Omega$

1.3.2. Обобщенные постановки и решения эллиптических задач. Задача Дирихле. Рассмотрим простейшую эллиптическую краевую задачу — задачу Дирихле для уравнения Лапласа или уравнения Пуассона — и дадим ее обобщенную постановку Вначале обсудим задачу для уравнения Пуассона с нулевыми граничными условиями

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{29}$$

Вместо граничного условия $u|_{\partial\Omega} = 0$ будем писать $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ (это включение в случае ограниченных областей с гладкой, или кусочно-гладкой, границей равносильно тому, что $u \in W_2^1(\Omega)$ и $u|_{\partial\Omega} = 0$) Умножая обе части уравнения $-\Delta u = f$ на $\overline{v}(x)$, где $v \in C_0^\infty(\Omega)$, и интегрируя по частям, получаем

$$[u, v] = (f, v), \tag{30}$$

где $(\cdot,\cdot)$ означает скалярное произведение в $L_2(\Omega)$, а

$$[u,v] = \int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{v}}{\partial x_i} dx,$$

так что $[\cdot,\cdot]$ – форма, непрерывная на пространстве $W_2^1(\Omega)$ т.е. $|[u,v]| \le C\|u\|_{W_2^1(\Omega)}\|v\|_{W_2^1(\Omega)}$, где постоянная $C > 0$ не зависит от u, v. Величина

$$\mathcal{D}(u) = [u,u] = \int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx = \int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right|^2 dx$$

называется *интегралом Дирихле.*

Равенство (30) имеет смысл для любых функций $u, v \in \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и для $f \in L_2(\Omega)$. Оно и будет рассматриваться вместо задачи (29). При этом можно брать лишь такие функции v, что $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. В случае классического решения u (т.е. решения $u \in C^2(\overline{\Omega})$ задачи (29) равенство (30) получается описанной выше процедурой при $v \in C_0^\infty$ и затем с использованием предельного перехода при $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Итак, приходим к следующей *обобщенной постановке задачи* (29): *при заданной функции* $f \in L_2(\Omega)$ *найти такую функцию* $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, *что для любой функции* $v \in C_0^\infty(\Omega)$ *выполнено* (30).

Как уже указывалось, вместо $v \in C_0^\infty(\Omega)$ можно писать $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, что приводит к эквивалентной постановке. Кроме того, перебрасывая производные с v на u интегрированием по частям, получаем, что (30) равносильно уравнению $-\Delta u = f$, понимаемому в смысле обобщенных функций, так что сформулированная обобщенная постановка задачи эквивалентна следующей: *дана функция* $f \in L_2(\Omega)$; *найти такую функцию* $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, *что* $-\Delta u = f$ *в смысле обобщенных функций.*

Всякое решение u задачи (30) будем называть *обобщенным* или *слабым решением*, в отличие от классического решения, о котором имеет смысл говорить при $f \in C(\overline{\Omega})$). С другой стороны, всякое классическое решение $u \in C^2(\Omega)$ является обобщенным.

Заметим, что $[\cdot,\cdot]$ можно считать скалярным произведением в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Это равносильно тому, что выражение $\|u\|_1 = \sqrt{\mathcal{D}(u)} = [u,u]^{1/2}$ является нормой, эквивалентной норме $\|\cdot\|_{W_2^1(\Omega)}$ на $C_0^\infty(\Omega)$. Ввиду очевидного соотношения $\|u\|^2_{W_2^1} = \|u\|^2 + \mathcal{D}(u)$ эквивалентность норм $\|\cdot\|_{W_2^1}$ и $\|\cdot\|_1$ вытекает из так называемого *неравенства Стеклова*

$$\|u\|^2 \le C\mathcal{D}(u), \quad u \in C_0^\infty(\Omega), \tag{31}$$

где $C > 0$ не зависит от u, а $\|\cdot\|$ – норма в $L_2(\Omega)$.

Пользуясь эквивалентностью норм $\|\cdot\|_{W_2^1(\Omega)}$ и $\|\cdot\|_1$ для функций из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и привлекая теорему Рисса о представлении линейного ограниченного функционала, нетрудно установить следующее утверждение.

Теорема 4. *Если Ω – любая ограниченная область в* $\mathbf{R}^n$ *и* $f \in L_2(\Omega)$, *то обобщенное решение задачи* (29) *существует и единственно.*

Рассмотрим теперь кратко задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega, \\ \quad u|_{\partial\Omega} = \varphi. \end{cases} \tag{32}$$

При переходе к обобщенной постановке прежде всего возникает вопрос об интерпретации граничного условия. Если граница $\partial\Omega$ является гладкой и если $\varphi \in W_2^{3/2}(\partial\Omega)$,[1] то по теореме о существовании следа существует такая функция

[1] Определение пространств W_2^γ дробного порядка γ приводится, например, в [17, 27, 35, 50]

$v \in W_2^2(\Omega)$, что $v|_{\partial\Omega} = \varphi$. Но тогда если $u \in W_2^1(\Omega)$ является решением задачи (32), то для $w = u - v$ мы получим задачу вида (29) с $f = -\Delta v \in L_2(\Omega)$, так что можно перейти к обобщенной постановке (30) и в случае ограниченной области Ω воспользоваться теоремой 4, из которой теперь следует существование и единственность решения задачи (32). Если граница $\partial\Omega$ негладкая, то можно сразу зафиксировать функцию $v \in W_2^1(\Omega)$, задающую граничное условие, и ставить задачу следующим образом: *дана функция $v \in W_2^1(\Omega)$; найти функцию u такую, что $u - v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, а также $\Delta u(x) = 0$ при $x \in \Omega$.*

Теорема 5. *Если Ω — любая ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ и $v \in W_2^1(\Omega)$, то обобщенное решение u задачи (32) существует и единственно. Это решение имеет строго минимальный интеграл Дирихле $\mathcal{D}(u)$ среди всех функций $u \in W_2^1(\Omega)$, для которых $u - v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Обратно, если u является стационарной точкой интеграла Дирихле в классе всех функций $u \in W_2^1(\Omega)$, для которых $u - v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, то u — обобщенное решение задачи (32) (и тем самым интеграл Дирихле имеет строгий минимум на функции u).*

Задача Неймана. Однородная задача Неймана для уравнения Пуассона имеет вид

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{33}$$

Для перехода к ее обобщенной постановке будем считать, что Ω — ограниченная область с гладкой границей, и пусть сначала $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Умножая обе части уравнения $-\Delta u = f$ на функцию $\overline{v}$, где $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$, и затем интегрируя по Ω, воспользуемся формулой Грина

$$\int_\Omega \Delta u(x)\overline{v}(x)dx = -\int_\Omega \nabla u(x)\nabla\overline{v}(x)dx + \int_{\partial\Omega} \overline{v}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial n}dS_x,$$

где dS_x – элемент площади поверхности границы. Отсюда находим в силу (33)

$$[u, v] = (f, v). \tag{34}$$

По непрерывности здесь вместо $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ можно брать $v \in W_2^1(\Omega)$ даже в том случае, когда известно лишь, что $u \in W_2^1(\Omega)$ и $f \in L_2(\Omega)$. Это дает *обобщенную постановку задачи Неймана: по функции $f \in L_2(\Omega)$ найти такую функцию $u \in W_2^1(\Omega)$, чтобы* (34) *выполнялось для любой функции $v \in W_2^1(\Omega)$.*

Решение этой задачи единственно с точностью до произвольной постоянной: если u_1 – другое решение задачи Неймана (с той же функцией f) и $w = u_1 - u$, то $[w, v] = 0$ для любой функции $v \in W_2^1(\Omega)$. Полагая $v = w$, получаем, что $[w, w] = 0$. Это значит, что все обобщенные производные $\dfrac{\partial w}{\partial x_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, обращаются в нуль и $w =$const.

Обобщенное решение задачи Неймана существует для тех и только тех функций $f \in L_2(\Omega)$, для которых выполнено условие

$$(f, 1) = \int_\Omega f(x)dx = 0,$$

то есть для функций с нулевым средним значением. Необходимость этого условия сразу вытекает из (34) при $v \equiv 1$.

Для доказательства существования обобщенного решения задачи Неймана можно воспользоваться *неравенством Пуанкаре*:

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \le C\Big(\mathcal{D}(u) + \Big(\int_\Omega u dx\Big)^2\Big), \quad u \in C^\infty(\Omega), \tag{35}$$

где C – const не зависит от u, в силу которого на функциях из $W_2^1(\Omega)$, ортогональных единице, нормы $\|u\|_{W_2^1(\Omega)}$, $\|u\|_1 = (\mathcal{D}(u) + (\int_\Omega u dx)^2)^{1/2}$ эквивалентны. Привлекая теперь известную теорему Рисса, *получаем существование единственного обобщенного решения $u \in W_2^1(\Omega)$ задачи Неймана при условиях $f \in L_2(\Omega)$, $\int\limits_{\Omega} f(x)dx = 0$.*

Краевые задачи для общих эллиптических уравнений 2-го порядка могут быть переформулированы и исследованы подходами, которые продемонстрированы выше на примере задач Дирихле и Неймана для оператора Лапласа.

1.3.3. Обобщенные постановки и решения гиперболических задач. Пусть Ω – некоторая ограниченная область n-мерного пространства $\mathbf{R}^n$ ($x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – точка этого пространства). В $(n+1)$-мерном пространстве $\mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{R}^n \times \times \{-\infty < t < +\infty\}$ рассмотрим ограниченный цилиндр $Q_T = \{x \in \Omega,\ 0 < t < T\}$ высоты $T > 0$. Обозначим через Γ_T боковую поверхность $\{x \in \partial\Omega,\ 0 < t < T\}$ цилиндра Q_T, а через Ω_τ – сечение $\{x \in \Omega,\ t = \tau\}$ этого цилиндра плоскостью $t = \tau$; в частности, верхнее основание цилиндра Q_T есть $\Omega_T = \{x \in \Omega,\ t = T\}$, а нижнее его основание – $\Omega_0 = \{x \in \Omega,\ t = 0\}$.

В цилиндре Q_T при некотором $T > 0$ рассмотрим гиперболическое уравнение

$$\mathcal{L}u \equiv u_{tt} - \operatorname{div}(k(x)\nabla u) + a(x)u = f(x,t), \tag{36}$$

где $k(x) \in C^1(\overline{Q}_T)$, $a(x) \in C(\overline{Q}_T)$, $k(x) \geq k_0$=const> 0.

Функция $u(x,t)$, принадлежащая пространству $C^2(Q_T) \cap \cap C^1(Q_T \cup \Gamma_T \cup \overline{\Omega}_0)$, удовлетворяющая в Q_T уравнению (36), на $\overline{\Omega}_0$ — начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi, \tag{37}$$

$$u_t|_{t=0} = \psi, \tag{38}$$

а на Γ_T — одному из граничных условий

$$u|_{\Gamma_T} = \chi$$

или

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\Big|_{\Gamma_T} = \chi,$$

где σ – некоторая непрерывная на Γ_T функция, называется *(классическим) решением первой или* соответственно *третьей смешанной задачи для уравнения* (36). Если $\sigma \equiv 0$ на Γ_T, то третья смешанная задача называется *второй смешанной задачей.*

Так как случай неоднородных граничных условий легко сводится к случаю однородных граничных условий, то ограничимся рассмотрением случая однородных граничных условий

$$u|_{\Gamma_T} = 0 \tag{39}$$

и

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\Big|_{\Gamma_T} = 0. \tag{40}$$

Будем считать, что коэффициент $a(x)$ в уравнении (36) неотрицателен в Q_T, а функция σ в граничном условии (40) зависит лишь от x и неотрицательна на Γ_T.

Пусть функция $u(x,t)$ является решением одной из задач (36)–(39) или (36), (37), (38), (40), причем правая часть $f(x,t)$ уравнения (36) принадлежит $L_2(Q_T)$. Умножая (36) на $v(x,t) \in W_2^1(Q_T)$, для которых выполнены условия (39) и $v|_{Q_T} = 0$, проинтегрируем по Q_T с применением формулы интегрирования по частям и формулы Грина. В результате получаем тождество

$$\int\limits_{Q_T} (k\nabla u \nabla v + auv - u_t v_t)dxdt = \int\limits_{\Omega_0} \psi v dx + \int\limits_{Q_T} fvdxdt \tag{41}$$

при всех $v \in W_2^1(Q_T)$, для которых выполнены условия (39 и условие

$$v|_{\Omega_T} = 0, \qquad (42$$

или

$$\int_{Q_T} (k\nabla u \nabla v + auv - u_t v_t) dx\, dt + \int_{\Gamma_T} k\sigma uv\, dS\, dt =$$
$$= \int_{\Omega_0} \psi v dx + \int_{Q_T} f v\, dx\, dt \qquad (43$$

при всех $v \in W_2^1(Q_T)$, для которых выполнено условие (42).

С помощью полученных тождеств введем понятие обобщенных решений рассматриваемых смешанных задач. Будем предполагать, что $f(x,t) \in L_2(Q_T)$, а $\psi(x) \in L_2(\Omega)$.

Принадлежащая пространству $W_2^1(Q_T)$ функция u называется *обобщенным решением в Q_T первой смешанной задачи* (36)-(39), если она удовлетворяет начальному условию (37), граничному условию (39) и тождеству (41).

Принадлежащая пространству $W_2^1(Q_T)$ функция u называется *обобщенным решением в Q_T третьей (второй при $\sigma = 0$) смешанной задачи* (36)-(38), (40), если она удовлетворяет условию (37) и тождеству (43).

Заметим, что, как и классические решения, обобщенные решения обладают следующими свойствами. *Если u - обобщенное решение задачи* (36)-(39) *или задачи* (36)-(38), (40) *в цилиндре Q_T, то оно является обобщенным решением соответствующей задачи и в цилиндре $Q_{T'}$ при $T' < T$.*

Теорема 6. *Пусть $f \in L_2(Q_T)$, $\psi \in L_2(\Omega)$, а $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ в случае первой смешанной задачи* (36)-(39) *и $\varphi \in W_2^1(\Omega)$ в случае третьей (второй) смешанной задачи* (36)-(38), (40). *Тогда обобщенное решение u соответствующей задачи существует и единственно. При этом имеет место неравенство*

$$\|u\|_{W_2^1(Q_T)} \le C(\|\varphi\|_{W_2^1(\Omega)} + \|\psi\|_{L_2(\Omega)} + \|f\|_{L_2(Q_T)}). \qquad (44)$$

в котором положительная постоянная C не зависит от φ, ψ, f.

1.3.4. Обобщенные постановки и решения параболических задач. Пусть Ω – ограниченная область n-мерного пространства $\mathbf{R}^n$, а $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - точка этого пространства. Подобно смешанным задачам для гиперболических уравнений рассмотрим в $(n+1)$-мерном пространстве $\mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{R}^n \times \{-\infty < t < +\infty\}$ ограниченный цилиндр $Q_T = \{x \in \Omega,\ \ 0 < t < T\}$ высоты $T > 0$ и пусть Γ_T -- боковая поверхность этого цилиндра $\Gamma_T = \{x \in \partial\Omega,\ 0 < t < T\}$, а Ω_τ, $\tau \in [0, T]$ - множество $\{x \in \Omega,\ t = \tau\}$, в частности, верхнее основание цилиндра Q_T есть $\Omega_T = \{x \in \Omega,\ t = T\}$, а нижнее его основание - $\Omega_0 = \{x \in \Omega,\ t = 0\}$. Через $C^{2,1}(Q_T)$ обозначим совокупность непрерывных в Q_T функций, имеющих непрерывные в Q_T производные $u_t, u_{x_i}, u_{x_i x_j}$, $C^{1,0}(Q_T \bigcup \Gamma_T)$ есть множество непрерывных в $(Q_T \bigcup \Gamma_T)$ функций с непрерывными производными $u_{x_i} (i, j = 1, 2, \dots n)$.

Рассмотрим в цилиндре Q_T при некотором $T > 0$ параболическое уравнение

$$\mathcal{L}u \equiv u_t - \operatorname{div}(k(x)\nabla u) + a(x)u = f(x,t), \qquad (45)$$

где $k(x) \in C^1(\overline{Q}_T)$, $a(x) \in C(\overline{Q}_T)$, $k(x) \ge k_0 =$ const> 0.

Функция $u(x,t)$, принадлежащая пространству $C^{2,1}(Q_T) \bigcap \bigcap C(Q_T \bigcup \Gamma_T \bigcup \overline{\Omega}_0)$, удовлетворяющая в Q_T уравнению (45), на $\overline{\Omega}_0$ – начальному условию

$$u|_{t=0} = \varphi, \qquad (46)$$

а на Γ_T - граничному условию

$$u|_{\Gamma_T} = \chi,$$

называется *классическим решением первой смешанной задачи для уравнения* (45).

Функция $u(x,t)$, принадлежащая пространству $C^{2,1}(Q_T)\cap \cap C(Q_T\cup\cup\Gamma_T\cup\overline{\Omega}_0)\cap C^{1,0}(Q_T\cup\Gamma_T)$, удовлетворяющая в Q_T уравнению (45), на $\overline{\Omega}_0$ – начальному условию (46), а на Γ_T – граничному условию

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma(x)u\right)\Big|_{\Gamma_T}=\chi,$$

где $\sigma(x)$ – некоторая непрерывная на Γ_T функция, называется *классическим решением третьей смешанной задачи для уравнения* (45). Если $\sigma\equiv 0$, то третья смешанная задача называется *второй смешанной задачей.*

Так как случай неоднородных граничных условий сводится к случаю однородных граничных условий, то будем рассматривать только однородные граничные условия

$$u_t|_{\Gamma_T}=0 \tag{47}$$

и

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma(x)u\right)\Big|_{\Gamma_T}=0. \tag{48}$$

Будем считать, что коэффициент $a(x)$ в уравнении (45) неотрицателен в Q_T, а функция $\sigma(x)$ в граничном условии (48) неотрицательна на Γ_T.

Пусть функция u является классическим решением третьей (второй) смешанной задачи (45), (46), (48) или принадлежащим $C^{1,0}(Q_T\cup\Gamma_T)$ классическим решением первой смешанной задачи (45)–(47), причем функция $f(x,t)\in L_2(Q_T)$. Умножим (46) на произвольную функцию $v(x,t)\in {}^1(\overline{Q}_T)$, удовлетворяющую условию

$$v|_{\Omega_T}=0, \tag{49}$$

и проинтегрируем полученное равенство по цилиндру Q_T. Применяя формулы Грина, получаем следующие утверждения.

Принадлежащее $C^{1,0}(Q_T\cup\Gamma_T)$ классическое решение $u(x,t)$ первой смешанной задачи удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q_T}(-uv_t+k\nabla u\nabla v+auv)dxdt=\int\limits_{\Omega_0}\varphi v dx+\int\limits_{Q_T}fvdxdt \tag{50}$$

при всех $v\in C^1(\overline{Q}_T)$, удовлетворяющих условиям (49) и $v|_{\Gamma_T}=0$, а следовательно, и *при всех $v\in W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющих условиям* (49) и $v|_{\Gamma_T}=0$.

Классическое решение $u(x,t)$ третьей (второй при $\sigma=0$) смешанной задачи удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q_T}(-uv_t+k\nabla u\nabla v+auv)dxdt+\int\limits_{\Gamma_T}k\sigma uvdSdt=$$
$$=\int\limits_{\Omega_0}\varphi v dx+\int\limits_{Q_T}fvdxdt \tag{51}$$

при всех $v\in C^1(\overline{Q}_T)$, удовлетворяющих условию (49), а следовательно, и при всех $v\in W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющих условию (49).

С помощью полученных тождеств можно ввести понятие обобщенных решений рассматриваемых смешанных задач.

Будем предполагать, что $f(x,t)\in L_2(Q_T)$, а $\varphi(x)\in L_2(\Omega)$. Функция $u(x,t)$, принадлежащая пространству $W_2^{1,0}(Q_T)$, определяемому как

$$(u,v)_{W_2^{1,0}(Q_T)}=\int\limits_{Q_T}(uv+\nabla u\nabla v)dx,\ \|u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)}=(u,u)^{1/2}_{W_2^{1,0}(Q_T)},$$

называется *обобщенным решением первой смешанной задачи* (45)–(47), если она удовлетворяет граничному условию (47) и тождеству (50) для всех $v(x,t)\in W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющих условиям (47) и (49).

Принадлежащая пространству $W_2^{1,0}(Q_T)$ функция $u(x,t)$ называется *обобщенным решением третьей* (*второй* при

$\sigma = 0$) *смешанной задачи* (45), (46), (48), если она удовлетворяет тождеству (51) при всех $v(x,t) \in W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющих условию (49).

Отметим еще, что обобщенное решение смешанной задачи для параболического уравнения, так же как и классическое решение, обладает следующим свойством: если $u(x,t)$ есть обобщенное решение смешанной задачи (45)-(47) или задачи (45), (46), (48) в цилиндре Q_T, то оно является обобщенным решением соответствующей задачи и в цилиндре $Q_{T'}$ при любом T', $0 < T' < T$.

Теорема 7. *Пусть $f \in L_2(Q_T)$, $\varphi \in L_2(\Omega)$, то каждая из смешанных задач* (45)-(47) *или* (45), (46), (48) *имеет обобщенное решение $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$. При этом имеет место неравенство*

$$\|u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \leq C(\|\varphi\|_{L_2(\Omega)} + \|f\|_{L_2(Q_T)}), \tag{52}$$

в котором положительная постоянная C не зависит от φ, f.

Многие задачи математической физики могут быть переформулированы как *вариационные задачи*, представляющие собой один из подходов к введению обобщенных постановок исходных краевых задач. Этот подход известен еще как *энергетический метод* (см. гл. 2 настоящей книги). Многие важные примеры вариационных постановок задач математической физики приводятся в [41, 46, 47].

1.3.5. Оценки решений задачи Коши. Приведём некоторые оценки решений задачи Коши для уравнений эллиптического, параболического и гиперболического типов. Данные оценки в настоящее время находят различные приложения в исследованиях обратных задач и задач точного управления.

Введём некоторые обозначения. Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$; $\tilde{x} = (0, x_2, \ldots, x_n)$; $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс с неотрицательными целочисленными компонентами, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$; m — мультииндекс с целыми положительными компонентами m_j такими, что $m_1 = \cdots = m_q > m_{q+1} \geq \cdots$; ∇_q — "q-градиент", т.е. $\nabla_q \equiv (D_1, \ldots, D_q, 0, \ldots, 0)$, где $D_j = \partial/\partial x_j$; $|\alpha : m| = \alpha_1/m_1 + \cdots + \alpha_n/m_n$.

Множество Γ из $\mathbf{R}^n$ называется *гиперповерхностью* класса C^k (липшицевой, аналитической), если локально (и, возможно, после подходящей замены координат) Γ представляется как функция $x_1 = \gamma(\tilde{x})$ класса C^k (липшицева, аналитическая). Если Γ есть класса C^k и допускает упомянутое выше представление, то существует нормаль $n(x)$ к Γ в точке $x \in \Gamma$.

Говорят, что Γ кусочно-гладкая класса C^k (аналитическая), если она представима в виде $\Gamma_1 \bigcup \cdots \bigcup \Gamma_m$, где $\bar{\Gamma}_j$ — части гладких гиперповерхностей класса C^k (аналитических).

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор порядка m: $A = \sum\limits_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$, где $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$. Коэффициенты a_α считаются вещественными, ограниченными и измеряемыми, а коэффициенты m — главной части $A_m(x; D) = \sum\limits_{|\alpha : m| = 1} a_\alpha D^\alpha$ оператора A — принадлежат классу $C^1(\bar{\Omega})$.

Сформулируем задачу Коши вида:

$$\begin{gathered} Au = f \ \text{ в } \ \Omega, \Big(\frac{\partial}{\partial n}\Big)^j u = g_j, \quad j \leq m_1 - 1 \ \text{ на } \ \Gamma; \\ D^\alpha u \in L_2(\Omega) \ \text{ если } \ |\alpha : m| \leq 1, \end{gathered} \tag{53}$$

где Γ — часть границы $\partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $\Gamma \in C^{m_1}$, Γ — открытое множество из $\partial\Omega$.

Приведём ряд утверждений, касающихся оценок решений задачи (53).

Теорема 8 [64]. *Пусть Ω есть область из $\mathbf{R}^n$, Γ — гиперповерхность (положительной меры), лежащая на $\partial\Omega$, $m = (2, \ldots, 2)$, а оператор A является эллиптическим, т.е. $\Sigma a_{jk}(x)\xi_j\xi_k \geq \varepsilon_0|\xi|^2$ $\forall x \in \Omega$ и $\forall x \in \mathbf{R}^n$, $\varepsilon_0 = const > 0$.*

Тогда для любого решения задачи Коши (53) справедлива оценка вида

$$\|D^2u\|_{L_2(\Omega_1)} \leq CM^{1-\lambda}\Big(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{j\leq m_1-1}\|g_j\|_{L_{m_1-j}(\Gamma)}\Big)^{\lambda}, \quad (54)$$

где Ω_1 — подобласть из Ω такая, что $dist(\Omega_1, \partial\Omega/\Gamma) > 0$. постоянные C и λ, $0 < \lambda < 1$, зависят от Ω_1, а M есть сумма величин $\|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}$ по α при $|\alpha : m| \leq 1$.

Проиллюстрируем применение теоремы 8 следующим примером.

Пример 1. Предположим, что в области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$ определена функция $u = u(x)$ такая, что

$$\Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \quad u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma.$$

где Γ - гиперповерхность на $\partial\Omega$ положительной меры и $\Gamma \subset \partial\Omega$. Тогда на основании теоремы 8 заключаем, что $u \equiv 0$ в Ω, т.е. информация о $u(x)$ на $\partial\Omega\backslash\Gamma$ отсутствует, тем не менее с помощью оценки (54) сделаем вывод о тривиальности $u(x)$. ■

Теорема 9 [64]. *Пусть $A(x; D)$ есть параболический оператор вида:*

$$A(x; D) = D_{n+1} + \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}D_jD_k + \sum_{j=1}^{n} a_jD_j + a$$

с коэффициентами $a_{jk} \in C^1(\bar{\Omega})$, удовлетворяющими условию эллиптичности, a_j, $a \in L_\infty(\Omega)$. Пусть также x', x'' есть проекции точки $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ на $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^{n-1}$, $\Omega = \Omega' \times T$ и $\Gamma = \Gamma' \times I$, где Ω' есть область из $\mathbf{R}^n$, $\Gamma' - C^2$ — гиперповерхность из $\mathbf{R}^n$ (положительной меры), являющейся открытой частью $\partial\Omega'$, а I есть некоторый интервал из $\mathbf{R}^1$. Тогда для решения задачи (53) при $m = (2, \dots, 2, 1)$ справедлива оценка (54).

Пример 2. Пусть рассматривается задача вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \text{ в } \Omega \times (0, T), \quad u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma \times (0, T),$$

где $T > 0$, а область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ и Γ те же, что и примере 1. Из теоремы 9 следует, что данная параболическая задача может иметь только тривиальное решение. ■

Теорема, аналогичная теоремам 8, 9, может быть сформулирована также для некоторых гиперболических задач второго порядка (см. [64]).

1.4. Сведение краевой задачи к операторному уравнению

После формулировки краевой задачи предстоит изучить ряд вопросов, связанных с данной задачей: существует ли (классическое или обобщённое) решение? Единственно ли решение? Устойчиво ли решение к малым изменениям исходных данных задачи? Исследование часто удобно проводить, заменяя краевую задачу эквивалентным ей операторным уравнением, применяя общие методы теории операторов и операторных уравнений. Заметим также, что изложение предыдущих глав велось в основном для операторных уравнений. Поэтому вопрос сведения конкретных задач к операторным уравнениям также возникает в связи с необходимостью использования приведённых ранее утверждений и алгоритмов решения рассматриваемых задач.

Рассмотрим некоторые способы сведения краевых задач к операторным уравнениям. Их изложение будем проводить в применении к следующей линейной краевой задаче:

$$Au = f, \quad x \in \Omega. \quad (55)$$

$$b_s u = \varphi_s, \quad s = 1, 2, \dots, k, \quad x \in \partial\Omega. \quad (56)$$

где $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $\partial\Omega$ – граница области Ω, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $f = f(x)$, $\varphi_s = \varphi_s(x)$ – заданные функции в Ω и на $\partial\Omega$, а также

$$A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha, \quad b_s = \sum_{|\beta| \leq m_s} a_{s\beta}(x) D^\beta, \tag{57}$$

m — порядок уравнения, m_s – порядок граничных дифференциальных выражений b_s, k — их число.

Прежде всего при формулировке краевой задачи в виде операторного уравнения необходимо выбрать систему функциональных пространств, в которых будет рассматриваться операторное уравнение. Так, при рассмотрении уравнения (55) нужно выбрать два пространства (например, банаховых) E и F; искомое решение рассматривается как элемент E, а совокупность правых частей – как элемент F. Очевидно, эти пространства должны состоять из функций, определённых в $\Omega, \bar{\Omega}$ или на $\partial\bar{\Omega}$. Далее нужно построить оператор L, действующий из первого пространства во второе и преобразующий решение в совокупность правых частей. Специфическая особенность задачи состоит в наличии граничных условий. Учесть их при построении оператора можно двумя способами.

Первый состоит в том, что в область определения оператора L включаются только те функции, которые удовлетворяют граничным условиям (56). Действие оператора определяется следующим образом: $Lu = Au$.

Применение этого способа ограничено, так как функции, удовлетворяющие неоднородным граничным условиям (56), не образуют линейное пространство. Область же определения линейного оператора должна быть линейным пространством. Поэтому, если не отказаться от линейности оператора L, этот способ сведения задачи к операторному уравнению можно применять только к задачам с однородными граничными условиями, когда $\varphi_s = 0$. Краевую задачу с неоднородными граничными условиями всегда можно свести к задаче

с однородными условиями, подбирая функцию u_0, удовлетворяющую неоднородным граничным условиям, и полагая $v = u - u_0$.

Второй способ сведения состоит в том, что в качестве пространства F берут декартово произведение $F_0 \times F_1 \times \ldots \times F_k$. Функция f рассматривается как элемент F_0, а функции φ_s — как элементы $F_s (s = 1, 2, \ldots, k)$. Таким образом, пространство F_0 состоит из функций, заданных в Ω, а пространства F_s – из функций, заданных на $\partial\Omega$. Оператор краевой задачи действует как отображение $L : u \to \{Au, b_1 u, \ldots, b_k u\}$. Тогда краевая задача сводится к операторному уравнению $Lu = g$, где $g = \{f, \varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$.

Пример 1. Пусть рассматривается краевая задача Дирихле для уравнения Пуассона в ограниченной области Ω:

$$-\Delta u = f(x), \quad x \in \Omega, \quad u = \varphi \text{ на } \partial\Omega \tag{58}$$

и ищется классическое решение $u \in C^2(\Omega) \bigcap C(\bar{\Omega})$.

При $\varphi \equiv 0$ полагаем: $E = L_2(\Omega)$, $F = L_2(\Omega)$, $L_1 u = -\Delta u$, $D(L_1) = \{u : u \in C^2(\Omega) \bigcap C(\bar{\Omega}),\ u = 0 \text{ на } \partial\Omega\}$ — область определения оператора L_1. Теперь задачу (58) можно записать в виде операторного уравнения

$$L_1 u = f. \tag{59}$$

Отмечаем, что уравнение (59) эквивалентно задаче (58), т.к. всякое классическое решение (58) есть решение уравнения (59) и наоборот. Заметим, что для этой эквивалентности в задаче (58) надо потребовать, чтобы $f \in L_2(\Omega)$, что не обязательно для существования её решения.

Пусть теперь $\varphi \neq 0$. Тогда полагаем: $E = L_2(\Omega)$, $F = L_2(\Omega) \times C(\partial\Omega)$ и $L_2 : u \to \{-\Delta u, u|_{\partial\Omega}\}$, $D(L_2) = C^2(\Omega) \bigcap \bigcap C(\bar{\Omega})$. Уравнение

$$L_2 u = g, \quad g = \{f, \varphi\} \tag{60}$$

эквивалентно задаче (58), поскольку всякое решение уравнения (60) есть классическое решение этой задачи и наоборот. ■

Каждой краевой задаче можно сопоставить различные операторные уравнения, выбирая в качестве E и F различные пространства и рассматривая тем самым решения различных классов. Но при определении действия оператора краевой задачи на функции, не принадлежащие $C^m(\Omega)\cap$ $\cap C^\mu(\bar\Omega)$ (т.е. при введении обобщённого, а не классического решения), необходимо решить две проблемы. Первая состоит в корректном придании смысла операции дифференцирования функций, не принадлежащих $C^m(\Omega)$, а вторая в истолковании операции взятия следа на границе $\partial\Omega$ для функции и её производных до порядка μ. В рассмотренном примере эта операция состоит в отображении $u \to u|_{\partial\Omega}$ и участвует в конструкции оператора L_2 из примера 1. Подчеркнём, что она имеет смысл лишь при $u \in D(L_2)$, так как $D(L_2) \subset C(\bar\Omega)$, но не для произвольного $u \in L_2(\Omega)$. Поскольку эти проблемы решены для пространств С.Л.Соболева, то отсюда ясна их важность в теории краевых задач.

Применяя изложенные схемы, любую краевую задачу можно свести к операторному уравнению $Lu = f$. Но в некоторых случаях её удобнее приводить к операторному уравнению иного типа. Покажем это на примере первой краевой задачи для волнового уравнения.

В этой задаче задаются область $\bar\Omega \subset \mathbf{R}^n$, функции $f(x,t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, где $x \in \Omega$, $t \geq 0$, а также функция $\varphi(x)$ при $x \in \partial\Omega$. Задача состоит в отыскании функции $u(x,t)$ $(x \in \in \Omega,\ t \geq 0)$, удовлетворяющей волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f \tag{61}$$

в области Q_T, которая представляет собой цилиндр $\Omega \times \times (0,T)$ в пространстве R^{n+1} переменных x,t. Граница цилиндра ∂Q_T состоит из основания $x \in \bar\Omega$, $t = 0, T$ и боковой поверхности $x \in \partial\Omega$, $t \geq 0$. Искомая функция должна удовлетворять начальным условиям

$$u = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = u_1, \quad x \in \bar\Omega, \quad t = 0, \tag{62}$$

т.е. условиям на основании цилиндра, и граничному условию

$$u = \varphi \quad (x \in \partial\Omega,\ t \geq 0) \tag{63}$$

на боковой поверхности. Классическое решение задачи должно удовлетворять также условию гладкости $u \in^2 (Q_T)\cap$ $\cap C^1(\bar Q_T)$.

Функции $u(x,t)$, $f(x,t)$ можно интерпретировать как элементы некоторых банаховых пространств функций от x и t, определённых в $\bar Q$, и в соответствии с изложенными схемами свести задачи к рассмотрению операторного уравнения алгебраического типа. Но в рассматриваемой задаче удобнее поступить иначе. Будем истолковывать $u(x,t)$ как функцию от переменной t со значениями в некотором пространстве, состоящем из функций от x, определённых в Ω. Аналогично можно истолковать и $f(x,t)$. Если, например, $\varphi = 0$, то в качестве этих пространств возьмём $L_2(\Omega)$ и снова рассмотрим оператор L_1 из примера 1. Рассмотрим дифференциальное операторное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L_1 u = f \tag{64}$$

и начальное условие для него

$$u = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = u_1 \quad \text{при} \quad t = 0 \tag{65}$$

Предположим, что найдено решение уравнения (64), удовлетворяющее условиям (65). Это означает, что найдена функция от t со значениями в $L_2(\Omega)$, которая при каждом t принадлежит $D(L_1)$, т.е. классу $C^2(\Omega)\cap C^1(\bar\Omega)$, и удовлетворяет условию $u = 0$ при $x \in \partial\Omega$. Кроме того, u и du/dt при

$t = 0$ обращаются в заданные элементы u_0 и u_1 пространств $L_2(\Omega)$. Это означает, что найдено решение краевой задачи (61)–(63). Таким образом, она сведена к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения относительно функции со значениями в $L_2(\Omega)$. Коэффициенты этого уравнения являются операторами $L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$.

Описанный метод введения форм записи нестационарных, или эволюционных, краевых задач, где одна из переменных (в данном случае t) играет особую роль, широко применяется в современной теории уравнений с частными производными.

Обратим внимание, что выше мы рассматривали операторные формы записи классических постановок задач. Однако во многих случаях эти задачи могут иметь лишь обобщённые решения. Это предполагает соответствующую обобщённую постановку этих задач в виде интегральных равенств (см. пп. 1.3.2–1.3.4), например, в виде

$$a(u, w) = f(w) + b(v, w) \quad \forall\, w \in Y, \tag{66}$$

где u — искомое решение из некоторого пространства W, v — заданная функция из пространства H_C, $f(w)$ — линейный ограниченный функционал из пространства Y, $a(w, u)$, $b(v, w)$ — билинейные ограниченные формы над $W \times Y$, $H_C \times Y$ соответственно. Пусть пространства W, Y, H_C являются вещественными, гильбертовыми и сепарабельными. Считаем, что Y плотно вложено в некоторое гильбертово пространство H_0 и что пространства H_0, H_C — самосопряжённые, т.е. $H_0 \equiv H_0^*$, $H_C \equiv H_C^*$ (этого предположения не делаем относительно W, Y, т.е. $W \not\equiv W^*$, $Y \not\equiv Y^*$).

Чтобы записать (66) в виде операторного уравнения, напомним следующий факт из функционального анализа [35]. Скалярное произведение $(h, g)_Y$ можно представить как $(h, g)_Y = (\Lambda_Y^{1/2} h, \Lambda_Y^{1/2} g)_{H_0} = (\Lambda_Y h, g)_{H_0}$, где $\Lambda_Y^{1/2} \cdot \Lambda_Y^{1/2} \equiv \Lambda_Y$ — канонический изоморфизм Y на Y^*, $\Lambda_Y : Y \to Y^*$ есть отображение, при котором каждому элементу $h \in Y$ ставится

в соответствие $\Lambda_Y h = a(h, \cdot) \in Y^*$, т.е. значение Λ_Y на элементы h рассматривается как функционал, т.е. $(\Lambda_Y h, g)_{H_0} = (h, g)_{H_0}\ \forall\, h, g \in Y$. Используя это представление $(h, g)_Y$, запишем (66) в виде операторного уравнения в Y^*.

Рассмотрим форму $a(u, w)$. В силу её ограниченности по w по теореме Рисса имеем: $a(u, w) = (U, w)_Y$, где элемент $U \in Y$ определяется элементом $u \in W$ однозначно, тем самым задаётся отображение $\tilde{A}$ из W в Y, $\tilde{A}u = U$. Следовательно,

$$a(u, w) = (\tilde{A}u, w)_Y = (\Lambda_Y \tilde{A}u, w)_{H_0} \equiv (Lu, w)_{H_0},$$

где $L \equiv \Lambda_Y \tilde{A} : W \to Y^*$. Аналогично получаем представления

$$b(v, w) = (Bv, w)_{H_0}, \quad B : H_C \to Y^*,$$
$$f(w) = (f_0, w)_{H_0}, \quad f_0 \in Y^*.$$

Следовательно, равенство (66) можно записать в виде

$$(Lu, w)_{H_0} = (f_0, w)_{H_0} + (Bv, w)_{H_0} \quad \forall\, w \in Y \tag{67}$$

или как операторное уравнение в пространстве Y^*:

$$Lu = f_0 + Bv \quad (\text{в } Y^*). \tag{68}$$

Обратно, если $u \in W$ удовлетворяет уравнению (68) (т.е. соотношению (67)!), получаем снова равенство (66). Таким образом, постановки задач (66), (68) эквивалентны. Заметим, что многие из обобщённых постановок задач математической физики (как стационарных, так и нестационарных) можно представить в виде (68). Кроме того, часто к соотношениям (66), а значит и к (67), (68), приводят также условия оптимальности систем в задачах оптимального управления, минуя их запись в виде краевых задач математической физики.

Рассмотрим следующий простой пример получения уравнения (68).

Пример 2. Пусть Ω есть область из R^2 с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим задачу Неймана для эллиптического уравнения:

$$-\Delta u + u = f \ \text{ в } \ \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = v \ \text{ на } \partial\,\Omega,$$

где $f \in L_2(\Omega)$, $v \in L_2(\partial\,\Omega)$ — заданные функции. Обобщённая постановка этой задачи: требуется найти функцию $u \in W_2^1(\Omega)$ такую, что

$$a(u,w) = \int\limits_\Omega ((\nabla u \cdot \nabla w) + u, w)\, dx = f(w) + b(v,w)\ \forall\, w \in W_2^1(\Omega)$$

где $f(w) = \int\limits_\Omega fw$, $b(v,w) = \int\limits_{\partial\Omega} vw\, d\Gamma$. Отмечаем, что краевое условие здесь является естественным, и оно включено в обобщённую постановку задачи.

Принимая $W = Y = W_2^1(\Omega)$, $H_0 = L_2(\Omega)$, $H_C = L_2(\partial\,\Omega)$ и учитывая ограниченность $a(u,w)$, $b(v,w)$, $f(w)$ над $W_2^1(\Omega)\times \times W_2^1(\Omega)$, $L_2(\partial\,\Omega) \times W_2^1(\Omega)$, $W_2^1(\Omega)$ соответственно, заключаем, что рассматриваемая задача может быть представлена в виде операторного уравнения (68) в пространстве $Y^* = = (W_2^1(\Omega))^* \equiv W_2^{-1}(\Omega)$. ■

В заключение заметим, что целесообразность операторной трактовки краевых задач, т.е. сведения их к операторным уравнениям типа (68) или к задаче Коши для дифференциального операторного уравнения типа (64), вытекает из возможности и целесообразности применения хорошо разработанных в настоящее время общих методов теории операторных уравнений (см. [26, 36, 37], а также гл. 2 настоящей книги) к решению проблем, связанных с краевыми задачами.

§ 2. Эллиптическая задача о внутренних источниках

Рассмотрим сначала одну из обратных задач для эллиптического уравнения о внутренних источниках (см. пример 1, § 5 из гл. 1).

2.1. Постановка задачи

Пусть Ω — область из $\mathbf{R}^n$ с границей $\partial\,\Omega \equiv \Gamma$ — есть подобласть из Ω (допускается также, что $\Omega_C = \Omega$), χ_C — характеристическая функция подобласти Ω_C. Для простоты считаем, что границы области Ω и подобласти Ω_C являются достаточно гладкими. Рассмотрим задачу об отыскании функции $\phi(x) \in D(L) \equiv (W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1\ (\Omega)(\Omega))$ и функции $u(x) \in L_2(\Omega)$ в подобласти Ω_C такие, что почти всюду справедливы следующие уравнения:

$$\begin{gathered} L\phi = -a\Delta\phi + b\phi = f + \chi_C u \ \text{ в } \ \Omega, \\ \phi = 0 \ \text{ на } \ \Gamma, \quad \phi = \varphi_{ob} \ \text{ в } \ \Omega, \end{gathered} \tag{69}$$

где $a, b = const > 0$, $f(x)$, $\varphi_{ob}(x)$ — заданные функции из $L_2(\Omega)$. Здесь $u(x)$ — дополнительная неизвестная, которую считаем для определённости продолженной нулём на $\Omega\backslash\Omega_C$, после чего $u(x)$ становится принадлежащей подпространству $L_2^{(C)}(\Omega) = \{v : v \in L_2(\Omega),\, v \equiv 0 \text{ на } \Omega\backslash\Omega_C\}$ пространства $L_2(\Omega)$.

Для операторной формулировки задачи примем $W = = Y = H_0 \equiv L_2(\Omega) = H_0^* = \cdots = W^*$, $H_C = L_2^{(C)}(\Omega)$, $H_{ob} = L_2(\Omega)$, $Bu \equiv \chi_C u$, $C \equiv I$ — тождественный оператор. Тогда задачу (69) можно записать в операторной форме

$$L\phi = f + Bu, \quad C\phi = \varphi_{ob}. \tag{70}$$

Заметим, что если u есть заданная функция из $L_2^{(C)}(\Omega)$, то из теории эллиптических задач известно, что первое уравнение имеет единственное решение $\phi \in W_2^2(\Omega)$, причём

$$\|\phi\|_{W_2^2(\Omega)} \le C(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|v\|_{L_2(\Omega)}),$$

где $C = const > 0$.

Отмечаем, что *поскольку пространство $W_2^2(\Omega)$ компактно вложено в $L_2(\Omega)$, то оператор $A \equiv CL^{-1}B$ является вполне непрерывным, а, значит, задача (69) является некорректно поставленной.*

2.2. Задача оптимального управления

Рассмотрим семейство задач оптимального управления, зависящее от параметра регуляризации $\alpha \ge 0$:

$$L\phi_\alpha = f + Bu_\alpha, \quad J_\alpha(u_\alpha, \phi(u_\alpha)) = \inf_{v \in L_2^{(C)}} J_\alpha(v, \varphi(v)), \quad (71)$$

где

$$J_\alpha(v, \varphi(v)) = \alpha \cdot \|v\|^2_{L_2^{(C)}(\Omega)} + \|C\phi - \varphi_{ob}\|^2_{L_2(\Omega)},$$

т.е. принимается также $X_C \equiv L_2^{(C)}(\Omega)$. Как показано в предыдущих главах, при $\alpha \ge 0$ задача (71) имеет непустое множество решений, причём при $\alpha > 0$ это решение единственное, и оно удовлетворяет следующей системе вариационных уравнений:

$$L\phi_\alpha = f + Bu_\alpha, \; L^*q_\alpha = C^*(C\phi_\alpha - \varphi_{ob}), \; \alpha u_\alpha + B^*q_\alpha = 0, \; (72)$$

причём здесь $L = L^*$, $C = C^*$, B – симметричный, но $B \ne B^*$ (поскольку $D(B) = L_2^{(C)}(\Omega) \subset D(B^*) = L_2(\Omega)$).

Изучим некоторые свойства A, A^*. Как уже отмечалось, оператор A (а значит, и оператор A^*) является вполне непрерывным. Далее, легко заметить, что *нуль-пространство $N(A)$ тривиально*, т.е. $N(A) = \{0\}$. Действительно, очевидно, что система (22) из § 2, гл. 3 здесь есть

$$-a\Delta\phi + b\phi = \chi_C u \;\; \text{в} \;\; \Omega, \quad \phi = 0 \;\; \text{в} \;\; \Omega,$$

и она имеет лишь тривиальное решение. Следовательно, *если задача (69) при некотором φ_{ob} имеет решение, то это решение единственное.* (Отметим, что если бы мы приняли $D(B) \equiv L_2(\Omega)$, то тогда заведомо $N(A) \ne \{0\}$, поскольку имеем $\phi = 0$ в Ω, но в $\Omega\backslash\Omega_C$ функция $u(x)$ может быть произвольной из $L_2(\Omega)$, а в Ω_C она полагается равной нулю; тогда имеем $\chi_C u = 0$ в Ω, $\phi \equiv 0$ в Ω, но $u \not\equiv 0$ в Ω, т.е. $N(A) \ne \{0\}$.)

Рассмотрим теперь систему

$$L^*q = -a\Delta q + bq = w, \quad B^*q = \chi_C q = 0 \quad \text{в} \;\; \Omega.$$

Замечаем, что если Ω_C есть строго внутренняя подобласть из Ω, то, выбирая любую гладкую функцию q с носителем в $\Omega\backslash\bar{\Omega}_C$, путём обычной подстановки уравнения находим $w \equiv L^*q$. При этом будем иметь $q = 0$ в Ω_C. Следовательно, $N(A) \ne \{0\}$, и, кроме того, замечаем, что $\dim(N(A^*)) = \infty$. Поэтому, как следует из теоремы 2 (гл. 3), *задача (69) не является плотно разрешимой*, поскольку здесь $L_2 \ne \overline{R(CL^{-1}B)}$. (Конечно, последнее утверждение можно было бы сделать уже из невозможности в общем случае равенства $\phi = \varphi_{ob}$ из (69), т.к. φ, φ_{ob} принадлежит классам функций различной степени гладкости!)

В *случае, когда $\Omega_C = \Omega$, имеем $N(A) = N(A^*) = \{0\}$, задача (69) некорректна, она плотно разрешима и может иметь не более одного классического решения.* Если ϕ, u есть классическое решение задачи (69) при некоторой известной функции φ_{ob}, причём $u \in L_2(\Omega)$, то решения ϕ_α, u_α задачи (72) сходятся к ϕ, u при $\alpha \to +0$ и справедлива оценка

$$\|\phi - \phi_\alpha\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u - u_\alpha\|_{L_2(\Omega)} \le C \cdot \sqrt{\alpha},$$

где постоянная C не зависит от α.

2.3. Итерационный алгоритм

Пусть для определённости $\Omega = \Omega_C$. Предположим, что $(\varphi_{ob} - L^{-1}f) \in R(CL^{-1}B)$. Тогда задача (69) имеет единственное классическое решение $\phi \in W_2^2(\Omega)$, $u \in L_2^{(C)}(\Omega)$ Чтобы построить приближённое решение этой задачи, достаточно выбрать $\alpha > 0$ достаточно малым. Тогда можно принять $\phi \cong \phi_\alpha$, $u \cong u_\alpha$, где ϕ_α, u_α есть решение системы (72). Построение ϕ_α, u_α возможно с помощью итерационного алгоритма (91) из п. 6.3 гл. 3, который в терминах операторов задачи (69) имеет вид:

$$\begin{array}{lll} -a\Delta\phi_\alpha^k + b\phi_\alpha^k = f + u_\alpha^k & \text{в } \Omega, & \phi_\alpha^k = 0 \text{ на } \Gamma, \\ -a\Delta q_\alpha^k + bq_\alpha^k = \phi_\alpha^k - \varphi_{ob} & \text{в } \Omega, & q_\alpha^k = 0 \text{ на } \Gamma, \\ u_\alpha^{k+1} = u_\alpha^k - \tau(\alpha u_\alpha^k + q_\alpha^k) & \text{в } \Omega, & k = 0, 1, \dots, \end{array} \tag{73}$$

где

$$\tau = \tau_{opt} = \frac{2}{2\alpha + \|A\|^2}, \quad \|A\| = (a \cdot \lambda_1 + b)^{-1}.$$

Здесь $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega)$ есть минимальное собственное значение задачи на собственные значения вида

$$-\Delta\varphi_j = \lambda_j\varphi_j \text{ в } \Omega, \ \varphi_j = 0 \text{ на } \Gamma, \ \|\varphi_j\|_{L_2(\Omega)} = 1, \ j = 1, 2, \dots.$$

Как известно, λ_1 — положительное и простое, кроме того, для многих областей Ω можно получить оценки (или приближённое значение) λ_1 с приемлемой точностью. При таком выборе параметра τ справедливы следующие оценки скорости сходимости итерационного процесса:

$$\|\varphi_\alpha - \phi_\alpha^k\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_\alpha - u_\alpha^k\|_{L_2(\Omega)} \le Cq^k \to 0, \ k \to \infty,$$

где $q = (\|A\|^2)/(2\alpha + \|A\|^2) < 1$. Выбрав k достаточно большим, можно принять $\phi \cong \phi_\alpha^k$, $u \cong \phi_\alpha^k$. Приближения $\{\phi_\alpha^k\}$, $\{u_\alpha^k\}$ можно строить также с помощью других итерационных алгоритмов (см. § 6 гл. 3).

При численной реализации алгоритмов типа (73) будут допускаться дополнительные численные ошибки, поэтому могут возникать ограничения на выбор α, числа итераций и т.п. (см. п. 6.3 гл. 3).

В заключение данного раздела заметим, что изложенное здесь легко переформулируется на более сложные эллиптические задачи (например, когда L симметричный эллиптический оператор второго порядка с переменными коэффициентами и др.)

§ 3. Задача о локальном граничном управлении

3.1. Постановка задачи

Пусть Ω есть ограниченная область из $\mathbf{R}^n$ с гладкой границей $\Gamma \equiv \partial\Omega$, $x = (x_1, x_2)$, Γ_1 — часть границы Γ_2, $\Gamma_2 \equiv \Gamma\backslash\Gamma_1$. Рассмотрим следующую задачу: требуется найти $\phi(x)$ в Ω и управление $u(x)$ на Γ_1 такие, что

$$-a\Delta\phi + b\phi = f(x) \text{ в } \Omega, \ a\frac{\partial\phi}{\partial n} = u \text{ на } \Gamma_1, \ a\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma_2,$$

где $a, b = const > 0$, $f(x)$ - заданная функция из $L_2(\Omega)$, а также почти всюду на Γ_2 выполняется дополнительное условие вида

$$\phi = \varphi_{ob} \text{ на } \Gamma_2,$$

где φ_{ob} — заданная функция из $L_2(\Gamma_2)$.

В обобщённой постановке эта задача ставится следующим образом: требуется найти $\phi \in W_2^1(\Omega)$, $u \in L_2(\Gamma_2)$ такие, что

$$\begin{array}{c} a(\phi, w) \equiv (a\nabla\phi, \nabla w) + (b\phi, w) = (f, w) + (u, w)_{L_2(\Gamma_1)} \\ \forall\, w \in W_2^1(\Omega), \quad \phi = \varphi_{ob} \text{ на } \Gamma_2, \end{array} \tag{74}$$

где $(\cdot,\cdot) \equiv (\cdot,\cdot)_{L_2(\Omega)}$. Если, как это описано в п. 1.4, ввести операторы L, B, C следующим образом:

$$\begin{gathered}(L\phi, w) \equiv a(\varphi, w) \quad \forall\, \varphi, w \in W_2^1(\Omega), \\ (Bu, w) \equiv (u, w)_{L_2(\Gamma_1)} \quad \forall\, u \in L_2(\Gamma_1), \quad w \in W_2^1(\Omega), \\ C\phi \equiv \varphi \ \text{ на } \ \Gamma_2, \\ L: W_2^1(\Omega) \to (W_2^1(\Omega))^* \equiv W_2^{-1}(\Omega), \quad B: L_2(\Gamma_1) \to W_2^{-1}(\Omega), \\ C: W_2^1(\Omega) \to W_2^{1/2}(\Gamma_2),\end{gathered}$$

то задачу (74) можно записать в виде системы операторных уравнений:

$$L\phi = f + Bu, \quad C\phi = \varphi_{ob}. \tag{75}$$

Отмечаем, что поскольку пространство $W_2^{1/2}(\Gamma_2)$ компактно вложено в $L_2(\Gamma_2)$ (см., например, [50]), то оператор является вполне непрерывным, а задача (75)((74)) – некорректной.

3.2. Задача оптимального управления

Задача оптимального управления здесь имеет вид

$$L\phi_\alpha = f + Bu_\alpha, \quad J_\alpha(u_\alpha, \phi_\alpha(u_\alpha)) = \inf_{v \in L_2(\Gamma_1)} J_\alpha(v, \phi(v)), \tag{76}$$

где

$$J_\alpha(v, \phi(v)) = \alpha\|v\|^2_{L_2(\Gamma_1)} + \|\phi - \varphi_{ob}\|^2_{L_2(\Gamma_2)}, \quad \alpha \geq 0$$

Система вариационных уравнений, соответствующая (76), есть

$$L\phi_\alpha = f + Bu_\alpha, \quad L^* q_\alpha = C^*(C\phi - \varphi_{ob}), \quad \alpha u_\alpha + B^* q_\alpha = 0,$$

каждое из уравнений которой соответственно задаётся следующим образом:

$$\begin{gathered}a(\phi_\alpha, w) = (f, w) + (u_\alpha, w)_{L_2(\Gamma_1)} \quad \forall\, w \in W_2^1(\Omega), \\ a(\tilde{w}, q_\alpha) = (\phi_\alpha - \varphi_{ob}, \tilde{w})_{L_2(\Gamma_2)} \quad \forall\, \tilde{w} \in W_2^1(\Omega), \\ \alpha u_\alpha + q_\alpha = 0 \quad \text{на } \ \Gamma_2, \ \alpha \geq 0.\end{gathered} \tag{77}$$

Рассмотрим систему

$$L\phi = Bu, \quad \phi = 0 \quad \text{на } \ \Gamma_2$$

или, что одно и то же:

$$a(\phi, w) = (u, w)_{L_2(\Gamma_1)} \quad \forall\, w \in W_2^1(\Omega), \quad \phi = 0 \quad \text{на } \ \Gamma_2.$$

Если предположить, что эта система имеет нетривиальное решение ϕ, u, то согласно теории эллиптических уравнений [31] функции ϕ, u удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{gathered}-a\Delta\phi + b\phi = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \quad a\frac{\partial\phi}{\partial n} = u \ \text{ на } \Gamma_1, \\ a\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \ \text{ на } \Gamma_2, \quad \phi = 0 \ \text{ на } \Gamma_2.\end{gathered}$$

Рассмотрим первое уравнение в Ω вместе с двумя граничными условиями на Γ_2, т.е. *задачу Коши для эллиптического уравнения второго порядка*. Согласно результатам по задаче Коши (см. § 1 настоящей главы) эта задача имеет только тривиальное решение $\phi \equiv 0$ в Ω. Но тогда из граничного условия на Γ_1 заключаем, что $u \equiv 0$ на Γ_1. Таким образом мы показали, что $N(A) = \{0\}$. Аналогичным образом устанавливается, что также $N(A^*) = \{0\}$, поскольку система

$$\begin{gathered}-a\Delta q + bq = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \quad a\frac{\partial q}{\partial n} = 0 \ \text{ на } \Gamma_1, \\ a\frac{\partial q}{\partial n} = w \ \text{ на } \Gamma_2, \quad q = 0 \ \text{ на } \Gamma_2,\end{gathered}$$

очевидно, имеет также лишь тривиальное решение $q \equiv 0$, $w \equiv 0$. Теперь, как одно из следствий теорем 1,2 из §§ 2, 3 гл. 3, получаем следующее утверждение: *задача* (74) ((75)) *однозначно и плотно разрешима, если $\phi_\alpha, q_\alpha, u_\alpha$ есть решение* (77) *при $\alpha > 0$, то $\|\phi_\alpha - \varphi_{ob}\|_{L_2(\Gamma_2)} \to 0$ при $\alpha \to +0$.*

Таким образом, для приближённого решения задачи (74) достаточно построить приближённое решение системы (77) при достаточно малом $\alpha > 0$, например, итерационными алгоритмами.

3.3. Итерационные алгоритмы

В качестве первого алгоритма решения (77) можно использовать тот же алгоритм, что и в предыдущем параграфе, который в применении к (77) имеет вид:

$$\begin{gathered} a(\phi^k_\alpha, w) = (f, w) + (u^k_\alpha, w)_{L_2(\Gamma_1)} \quad \forall w \in W^1_2(\Omega), \\ a(\tilde{w}, q^k_\alpha) = (\phi^k_\alpha - \varphi_{ob}, \tilde{w})_{L_2(\Gamma_2)} \quad \forall \tilde{w} \in W^1_2(\Omega), \\ u^{k+1}_\alpha = u^k_\alpha - \tau_k(\alpha u^k_\alpha + q^k_\alpha) \ (\text{ в } \ L_2(\Gamma_1)), \ k = 0, 1, \ldots . \end{gathered} \tag{78}$$

При $0 < \tau_k < (2/\|A\|^2)$ алгоритм (78) является сходящимся. Если провести дополнительное изучение оценок для $\|A\|$, то можно уже известным способом осуществить оптимизацию скорости сходимости алгоритма (78) путём выбора $\tau_k = \tau_{opt}$. Другим способом выбора $\{\tau_k\}$ может быть определение параметров $\{\tau_k\}$ согласно методу минимальных невязок (см. (104) из гл.3). В данном случае итерационный алгоритм решения (77) состоит в следующем. Сначала на каждом k-ом шаге решаются первые две задачи из (78). Затем решаются следующие две задачи (при $\xi^k \equiv \alpha u^k_\alpha + q^k_\alpha$):

$$\begin{gathered} a(\tilde{\phi}, w) = (\xi^k, w)_{L_2(\Gamma_1)} \quad \forall w \in W^1_2(\Omega), \\ a(\tilde{w}, \tilde{q}) = (\tilde{\phi}, \tilde{w})_{L_2(\Gamma_2)} \quad \forall \tilde{w} \in W^1_2(\Omega), \end{gathered}$$

и вычисляется параметр τ_k:

$$\tau_k = (\tilde{q}, \xi^k)_{L_2(\Gamma_1)} / \|\tilde{q}\|^2_{L_2(\Gamma_1)},$$

после чего вычисляется следующее приближение u^{k+1}_α по третьему уравнению из (78).

Согласно общей теории метода минимальных невязок сформулированный алгоритм решения задачи (77) является сходящимся при $\forall \alpha > 0$. Поэтому беря $\phi^k_\alpha, u^k_\alpha$ при достаточно большом k и малом $\alpha > 0$, можно принять $\phi^k_\alpha \cong \phi$,

$u^k_\alpha \cong u$, если выполнены условия разрешимости задачи (74) (см. теоремы 1, 2 из §§ 2, 3, гл. 3) или если считать, что для построенных $\phi^k_\alpha, u^k_\alpha$ в случае произвольной $\varphi_{ob} \in L_2(\Gamma_2)$.

Некоторые предложения по учёту влияния ошибок численной реализации этапов сформулированных выше итерационных алгоритмов приведены в § 6, гл. 3.

Нетрудно заметить, что изложенное выше остаётся справедливым для более общих эллиптических задач с переменными коэффициентами, поскольку основная часть всех рассмотрений приведена в терминах обобщённых постановок типа (77), (78) или в виде операторных уравнений.

§ 4. Задача точного управления для параболического уравнения

В данном и следующем параграфах мы рассмотрим две типичные задачи управления для параболического уравнения второго порядка. Первую из этих задач называют также задачей о финальном наблюдении, вторая является задачей о граничном управлении.

4.1. Формулировка задачи

Рассмотрим задачу об отыскании $\phi(t,x), u(t,x)$ таких, что

$$\begin{gathered} L\phi \equiv \phi_t - a\Delta\phi + b\phi = f(t,x) \ \text{ в } \ \Omega \times (0,T) \equiv Q_T, \\ \phi(0,x) = u(x) \ \text{ в } \ \Omega, \\ \phi(t,x) = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega \times (0,T) \equiv Q_T, \end{gathered} \tag{79}$$

и выполнено условие "попадания в заданное финальное состояние $\varphi_{obs}(x)$" в момент времени $T < \infty$:

$$\phi(T,x) = \varphi_{obs}(x) \ \text{ в } \ \Omega. \tag{80}$$

$\phi_t \equiv \partial\phi/\partial t$, Ω — ограниченная область из $\mathbf{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega \equiv \Gamma$, $\varphi_{obs} \in L_2(\Omega)$, $f \in L_2(Q_T)$, $a, b = const$, $a > 0$, $b \geq 0$.

Если функция $\varphi_{obs} \in L_2(\Omega)$ задана, то задача (79), (80) имеет единственное решение $\phi \in W_2^{1,0}(Q_T)$ (см. п.1.3.4, теорема 7), которое можно записать в виде

$$\phi = G_0 u + G_1 f$$

с линейными ограниченными операторами G_0, G_1. Структуру этих операторов можно считать известной (пусть даже в неявной или трудно реализуемой форме). Найдём представление этих операторов, воспользовавшись собственными функциями и собственными значениями эллиптического оператора, входящего в оператор уравнения (79). Предположим, что решения задачи

$$-a\Delta\varphi_j + b\varphi_j = \lambda_j \cdot \varphi_j \quad \text{в} \quad \Omega, \ \varphi_j = 0 \quad \text{на } \Gamma, \ \|\varphi_j\|_{L_2(\Omega)} = 1,$$

известны. В случае простых областей (Ω — шар, прямоугольник и т.п.) это действительно так. Но если Γ имеет сложную форму, $b(x)$ — переменный коэффициент и др., то вид $\{\lambda_j\}, \{\varphi_j\}$ в общем случае неизвестен. Однако ряд свойств собственных функций и собственных значений изучен и в данных случаях. Так, показано, что: 1) $0 < \lambda_1 < < \lambda_2 \le \lambda_3 \le \ldots \le \lambda_N \to \infty$, $N \to \infty$; 2) $\{\varphi_j\}$ – ортонормальная система, являющаяся базисом в $L_2(\Omega)$, $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $W_2^2(\Omega) \bigcap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ ([46]). Если теперь применить метод разложения по собственным функциям, то получим:

$$G_0 u \equiv \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda_j t}(u, \varphi_j)\varphi;$$
$$G_1 f \equiv \sum_{j=1}^{\infty} \Big(e^{-\lambda_j (t-t')}(f, \varphi_j)(t')\,dt\Big)\varphi_j(x),$$

где $(\cdot,\cdot) \equiv (\cdot,\cdot)_{L_2(\Omega)}$.

4.2. Задачи оптимального управления и вариационные уравнения

Одновременно с (79), (80) рассмотрим семейство задач оптимального управления вида:

$$L\phi = f \quad \text{в} \quad Q_T, \ \phi = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma \times (0,T), \ \phi = u \quad \text{при} \quad t = 0,$$

$$\inf_{u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} \{\alpha\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \|u(T,x) - \varphi_{obs}\|^2_{L_2(\Omega)}\}, \tag{81}$$

где $\alpha \ge 0$ и для упрощения обозначений за решением этой задачи ϕ, u для каждого α оставлено то же обозначение, что и для решения задачи (79), (80).

Вариационные уравнения, соответствующие (81), есть

$$\begin{cases} L\phi = f \quad \text{в} \quad Q_T, \ \phi = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma \times (0,T), \ \phi = u \quad \text{при} \quad t = 0, \\ \alpha(u,v)_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} + (\phi(T,x) - \varphi_{obs}, \tilde{\phi}(T,x))_{L_2(\Omega)} = 0, \end{cases} \tag{82}$$

где v – произвольная функция из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, а $\tilde{\phi}$ определяется как решение задачи (79) при $f \equiv 0$ и $u \equiv v$, т.е. $\tilde{\phi} = G_0 v$. Если воспользоваться введёнными операторами G_0, G_1, а также оператором взятия следа $P_T\phi \equiv \phi(T,x)$ при $t = T$ от $\phi(t,x)$, то второе уравнение из (82) можно переписать в следующей форме:

$$\alpha(u,v)_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} + (P_T G_0 u, P_T C_0 v) = (g, P_T C_0 v) \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),$$

где $g = \varphi_{obs} - P_T G_1 f$, а также $P_T G_0 \equiv A = CL^{-1}B$ (в обозначениях предыдущих параграфов). Здесь и далее в этом разделе считаем, что

$$(u,v)_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} \equiv (\nabla u, \nabla v)_{L_2(\Omega)} \ \forall u, v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega).$$

Введём сопряжённую задачу

$$L^* q \equiv -q_t - a\Delta q + bq = 0 \ \text{ в } \ Q_T, \ q = 0 \ \text{ на } \ \Gamma \times (0,T),$$

$$q(T,x) = \phi(T,x) - \varphi_{obs},$$

решение которой есть

$$q = \tilde{G}_0(\phi(T,x) - \varphi_{obs}) \equiv \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j (T-t)} (\phi(T,x) - \varphi_{obs}, \varphi_j)\varphi_j.$$

С использованием решения этой сопряжённой задачи и оператора $P_0 : \ P_0 q \equiv q(0,x)$ вариационные уравнения для функций ϕ, u можно записать в виде системы

$$\begin{cases} L\phi = f \ \text{ в } \ Q_T, \ \phi = 0 \ \text{ на } \ \Gamma \times (0,T), \\ \qquad\qquad\qquad \phi = u \ \text{ при } \ t = 0, \\ L^* q = 0 \ \text{ в } \ Q_T, \ q = 0 \ \text{ на } \ \Gamma \times (0,T), \\ \qquad\qquad q = \phi(T,x) - \varphi_{obs} \ \text{ при } \ t = T, \\ -\alpha\Delta u + q(0,x) = 0 \ \text{ в } \ \Omega), \ u = 0 \text{ на } \ \Gamma, \end{cases} \tag{83}$$

или в виде одного уравнения для u (при условии $u \in W_2^2(\Omega)$):

$$\mathcal{A}_\alpha u \equiv -\alpha\Delta u + (P_T G_0)^*(P_T G_0)u = (P_T G_0)^* g \ \text{ в } \ \Omega,$$
$$u = 0 \text{ на } \ \Gamma,$$

где

$$(P_T G_0)^* = P_0 \tilde{G}_0.$$

Рассмотрим вопрос о тривиальности нуль-пространств $N(P_T G_0)$, $N(P_0 \tilde{G}_0)$. Предположим, что $N(P_T G_0) \neq \{0\}$. Тогда существует нетривиальное решение задачи

$$L\phi = 0 \ \text{ в } \ Q_T, \ \phi = 0 \ \text{ на } \ \Gamma \times (0,T), \ \phi = u \ \text{ при } \ t = 0,$$

причём $\phi(T,x) \equiv P_T \phi = 0$. Из последнего условия и представления ϕ в форме: $\phi = \sum\limits_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t}(u, \varphi_j)\varphi_j(x)$, получаем

$(u, \varphi_j) = 0 \ \forall j$. Следовательно, $u \equiv 0$, а также $\phi = 0$ и $N(P_T G_0) = \{0\}$.

Аналогично показывается, что $N(P_0 \tilde{G}_0) = \{0\}$.

Из тривиальности нуль-пространств $N(P_T G_0)$, $N(P_0 \tilde{G}_0)$ и общих результатов о разрешимости операторных уравнений (см. гл. 2 и 3) заключаем, что в *рассматриваемой задаче* (79), (80) *имеют место единственность решения и плотная разрешимость, а при достаточно малых* $\alpha > 0$ *можно добиться выполнения условия* $\|u(T,x) - \varphi_{obs}\|_{L_2(\Omega)} \leq \varepsilon$ *для любого наперёд заданного* $\varepsilon > 0$, *где* $u \equiv u_\alpha(t,x)$ *есть один из компонентов решения системы вариационных уравнений* (83).

4.3. Итерационный алгоритм

Отмечаем, что оператор $\mathcal{A} \equiv (P_T G_0)^*(P_T G_0)$ с областью определения $D(\mathcal{A}_0) = W_2^2(\Omega) \bigcap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ в качестве собственных функций имеет собственные функции $\{\varphi_j\}$, а его собственными значениями являются числа $\mu_j = \exp(-2\lambda_j T)$, $j = 1, 2, \ldots$, стремящиеся к нулю быстрее любой конечной степени "$1/\lambda_j^N$". Оператор $\mathcal{A}_0$, также как и оператор $P_T G_0$, является вполне непрерывным. Заметим, что полная непрерывность оператора $P_T G_0$ следует из результатов разрешимости эволюционных уравнений (см. [16]). Отсюда заключаем, что задача (79), (80) *является некорректно поставленной*, и для её приближённого решения целесообразно пользоваться методами и подходами теории некорректных задач (см. гл. 3). Одним из таких методов является метод регуляризации А.Н.Тихонова, и система (83) фактически представляет собой уравнения данного метода.

Для приближённого решения системы (83) можно воспользоваться подходящим итерационным алгоритмом, например следующим:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
L\phi^k = f \ \text{ в } \ Q_T, \ \phi^k = 0 \ \text{ на } \ \Gamma \times (0,T), \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \phi^k = u^k \ \text{ при } \ t = 0, \\
L^* q^k = 0 \ \text{ в } \ Q_T, \ q^k = 0 \ \text{ на } \ \Gamma \times (0,T), \\
\qquad\qquad q^k = \phi^k(T,x) - \varphi_{ob}, \ \text{ при } \ t = T, \\
-\Delta w^k = q^k(0,x) \ \text{ в } \ \Omega, \ w^k = 0 \text{ на } \ \Gamma, \\
u^{k+1} = u^k - \tau(\alpha v^k + w^k), \quad k = 0,1,\ldots,
\end{array}
\right. \tag{84}
$$

где $u^0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ — начальное приближение.

Если в этом алгоритме исключить третий этап и принимать $w^k \equiv q^k(0,x)$, то получим случай, когда приближённые решения $\{u^k\}$ сходятся в $L_2(\Omega)$. В данном случае несложно осуществить оптимизацию скорости сходимости, приняв

$$\tau = \tau_{opt} = 2/(2\alpha + e^{-2\lambda_1 T}).$$

Обоснование сходимости рассматриваемых итерационных алгоритмов дано в общей форме в гл. 3.

Замечание. Обратим внимание на то, что мы здесь ради упрощения изложения не записывали рассматриваемую задачу (79), (80) в виде одного операторного уравнения $L\phi = f + Bv$. Как это сделать, рассматривая обобщённую постановку задачи, будет показано в дальнейшем при рассмотрении задачи об усвоении данных для эволюционного уравнения. ■

§ 5. Параболическая задача о граничном управлении

5.1. Формулировка задачи

Предположим, что сохраняются обозначения и предположения предыдущего параграфа. Пусть граница Γ составлена из трёх частей (положительной меры каждая) Γ_1, Γ_2, $\Gamma_3 = \Gamma \backslash (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$. Рассмотрим задачу об отыскании функции

$u(t,x) \in L_2((0,T)\times\Gamma_1)$ — "управления", такой, что решение $\phi(t,x)$ задачи вида

$$\phi_t - a\Delta\phi + b\phi = f \ \text{ в } \ Q_T, \ \phi = \phi_{(0)} \ \text{ при } \ t = 0, \tag{85}$$

$$a\frac{\partial\phi}{\partial n} = u \ \text{ на } \ (0,T)\times\Gamma_1, \quad a\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \ \text{ на } \ (0,T)\times(\Gamma_3\cup\Gamma_2),$$

удовлетворяет почти всюду следующему условию:

$$\phi(t,x) = \varphi_{obs}(t,x) \ \text{ на } \ (0,T)\times\Gamma_2, \tag{86}$$

где $\varphi_{obs}(t,x) \in L_2((0,T)\times\Gamma_2) \equiv H_{ob}$ – заданная функция.

Для формулировки обобщённой постановки задачи введём пространство $Y \equiv L_2(0,T; W_2^1(\Omega))$ и пространство W, состоящее из функций $\phi \in Y$ таких, что $\phi_t \in L_2(0,T; (W_2^1(0,T))^*) \equiv Y$. Норма в W имеет вид

$$\|\phi\|_W = (\|\phi_t\|^2_Y + \|\phi\|^2_Y)^{1/2}.$$

Умножим уравнение состояния из (85) на $w \in W$ и выполним интегрирование по частям. В результате приходим к следующей обобщённой постановке задачи (85), (86): требуется найти $\phi \in w$, $u \in H_C \equiv L_2((0,T)\times\Gamma_1)$ такие, что

$$(L\phi, w) \equiv (\phi, -w_t) + (a\nabla\phi, \nabla w) + (b\phi, w) +$$

$$+ \phi(T,x)w(T,x))_{L_2(\Omega)} = f(w) + (Bu, w) \ \ \forall w \in W \tag{87}$$

$$C\phi \equiv \phi = \varphi_{ob} \ \text{ на } \ (0,T)\times\Gamma_2$$

где $(\cdot,\cdot) \equiv (\cdot,\cdot)_{L_1(Q_T)}$, а также

$$f(w) \equiv (f,w) + \int_\Omega \phi_{(0)}(x) w(0,x)\,dx \equiv (f_0, w),$$

$$(Bu, w) \equiv \int_0^T \int_{\Gamma_1} uw\,d\Gamma dt$$

(Здесь f_0 есть элемент из W^*, соответствующий функционалу $f(w)$ по теореме Рисса.) Теперь обобщённую постановк задачи (85), (86) можно записать в следующей операторно форме:

$$L\phi = f_0 + Bv, \quad C\phi = \varphi_{ob}, \tag{88}$$

где

$$L : W \to W^*, \quad B : H_C \to W^*, \quad C : W \to H_{ob}.$$

В качестве основных пространств здесь принимаются $H_0 \equiv \equiv L_2(Q_T)$, H_C, H_{ob}.

5.2. Задачи оптимального управления и вариационные уравнения

Совместно с (87) рассмотрим семейство задач, зависящих от $\alpha \geq 0$:

$$(L\phi, w) = f(w) + (Bu, w) \quad \forall w \in W,$$

$$\inf_{u \in H_C} \{\alpha \|u\|^2_{H_C} + \|\phi - \varphi_{ob}\|^2_{H_{ob}}\}. \tag{89}$$

Обычными рассуждениями и вычислениями несложно получить вид вариационных уравнений — условий оптимальности решения ϕ, u задачи (89):

$$\begin{cases} (L\phi, w) = f(w) + (Bu, w) \quad \forall w \in W, \\ (\tilde{w}, L^* q) = (\tilde{w}, C^*(C\phi - \varphi_{ob})) \quad \forall \tilde{w} \in W, \\ \alpha u + B^* q = 0 \quad \text{в} \quad H_C, \end{cases} \tag{90}$$

где

$$(\tilde{w}, L^* q) \equiv (\tilde{w}, q) + (a\nabla\tilde{w}, \nabla q) + (b\tilde{w}, q) + (\tilde{w}(0,x), q(0,x))_{L_2(\Omega)},$$

$$(\tilde{w}, C^*(C\phi - \varphi_{ob})) \equiv \int_0^T \int_{\Gamma_2} \tilde{w}(\phi - \varphi_{ob}) d\Gamma dt,$$

$$B^* q \equiv q \quad \text{на} \quad (0,T) \times \Gamma_1.$$

Как мы уже знаем, при $\alpha > 0$ задачи (90) всегда имеют единственное решение: $\phi \equiv \phi(\alpha)$, $q \equiv q(\alpha)$, $u \equiv u(\alpha)$.

Рассмотрим вопросы единственности и разрешимости задачи (85), (86). Рассмотрим сначала однородную систему вида

$$L\phi = Bu, \quad C\phi = 0.$$

Если эта система имеет нетривиальное решение, то из теории параболических задач следует, что ϕ, u удовлетворяют системе уравнений вида

$$\phi_t - a\Delta\phi + b\phi = 0 \ \text{ в } \ Q_T, \ \phi = 0 \ \text{ при } \ t = 0,$$

$$a\frac{\partial\phi}{\partial n} = u \ \text{ на } \ (0,T) \times \Gamma_1, \quad a\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \ \text{ на } \ (0,T) \times \Gamma_3,$$

$$a\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \ \text{ на } \ (0,T) \times \Gamma_2, \quad \phi = 0 \ \text{ на } \ (0,T) \times \Gamma_2.$$

Рассматривая уравнение состояния в Q_T лишь при последних двух условиях на $(0,T) \times \Gamma_2$, из результатов по задаче Коши для параболических уравнений заключаем, что $\phi \equiv 0$, а значит, также $u = 0$. Итак, установлено, что $N(CL^{-1}B) = \{0\}$.

Аналогично показывается, что также $N((CL^{-1}B)^*) = \{0\}$ (здесь только однородные условия Коши имеют вид: $q = a\,\partial q/\partial n = 0$ на $(0,T) \times \Gamma_1$).

Таким образом, имеют место утверждения: 1) *задача* (85), (86) *однозначно и плотно разрешима;* 2) *если* ϕ_0, u_0 *есть решение задачи* (85), (86), *а* $\phi \equiv \phi(\alpha)$, $u \equiv u(\alpha)$ – *компоненты решения системы* (90), *то* $\phi \to \phi_0$, $u \to u_0$ *при* $\alpha \to +0$ *при* $u_0 \in H_C$; 3) *если* $\varphi_{obs} \in S(\varphi^{(0)}_{obs}; \delta) \equiv \{v : \|v - \varphi^{(0)}_{obs}\|_{H_C} \leq \delta,\ \varphi^{(0)}_{obs} \in H_C\}$ *задаётся в условиях неопределённости, то* $\|\phi - \varphi_{obs}\|_{H_C} \to 0$ *при* $\alpha \to 0$, $\delta \to 0$.

Все эти утверждения являются следствиями из теорем 1, 2 из §§ 2, 3 главы 3.

5.3. Итерационный алгоритм

Следующий этап приближённого решения задачи состоит в решении задачи (90) итерационным методом при достаточно малом положительном $\alpha > 0$.

Для простоты мы рассмотрим лишь простейший итерационный алгоритм, а для наглядности запишем его в классической форме записи уравнений (т.е. считая все рассматриваемые решения гладкими). В этих предположениях итерационный алгоритм решения задачи (90) имеет вид:

$$\phi_t^k - a\Delta\phi^k + b\phi^k = f \ \text{ в } \ Q_T, \ \phi^k = \phi_{(0)} \ \text{ при } \ t = 0,$$

$$a\frac{\partial\phi^k}{\partial n} = u^k \ \text{ на } \ (0,T)\times\Gamma_1, \ a\frac{\partial\phi^k}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \ (0,T)\times(\Gamma_2\cup\Gamma_3)$$

$$-q_t^k - a\Delta q^k + bq^k = 0 \ \text{ в } \ Q_T, \ q^k = 0 \ \text{ при } \ t = T,$$

$$a\frac{\partial q^k}{\partial n} = 0 \ \text{ на } \ (0,T)\times(\Gamma_1\cup\Gamma_3),$$

$$a\frac{\partial q^k}{\partial n} = \phi^k - \varphi_{obs} \ \text{ на } \ (0,T)\times\Gamma_2,$$

$$u^{k+1} = u^k - \tau(\alpha u^k + q^k) \ \text{ на } \ (0,T)\times\Gamma_1, \ k = 0,1,\ldots$$

Условия сходимости данного алгоритма рассмотрены в общем виде в главе 2.

В заключение данного параграфа заметим, что изложенное в последних двух параграфах несложно распространить на параболические задачи с переменными коэффициентами и ослабить ограничение гладкости границы области Ω, а также рассмотреть случай, когда f, φ_{obs}, u принадлежат сопряжённым пространствам.

§ 6. Задача усвоения данных наблюдений

Рассмотрим задачу о выборе начального состояния системы, описываемой решением линейного эволюционного уравнения. Эта задача в проблемах геофизической гидродинамики известна как "задача усвоения данных наблюдений".

6.1. Постановка задачи

Введём следующие вещественные сепарабельные гильбертовы пространства: $H, X \subset H; H^*, X^*$ – пространства сопряжённых к $H, X; L_2(0,T,H), L_2(0,T;X)$ и $L_2(0,T;X^*)$ – пространства абстрактных функций $f(t)(t\in[0,T], T<\infty)$ со значениями в H, X и X^* соответственно;

$$W \equiv W(0,T) = \Big\{ f \in L_2(0,T;X) : \frac{df}{dt} \in L_2(0,T;X^*),$$

$$\|f\|_W = \Big(\Big\|\frac{df}{dt}\Big\|_{L_2(0,T;X^*)} + \|f\|_{L_2(0,T;X)}\Big)^{1/2}\Big\}.$$

Через $C^{(0)}([0,T];H)$ обозначим банахово пространство функций $f(t)$, $t\in[0,T]$, снабжённое нормой

$$\|f\|_{C^{(0)}([0,T];H)} = \max_{t\in[0,T]} \|f\|_H.$$

В последующем мы предполагаем, что

$$H \equiv H^*, \ X^* \equiv X^{-1}, \ W^* \equiv W^{-1}.$$

$$L_2(0,T;H) \equiv L_2^*(0,T;H) \equiv L_2(0,T;H^*), \ (\cdot,\cdot)_{L_2(0,T;H)} \equiv (\cdot,\cdot).$$

Следовательно,

$$W \subset L_2(0,T;X) \subset L_2(0,T;H) \subset L_2(0,T;X^*) \subset W^*.$$

Лемма 1 [34]. *Если $f(t) \in W$, то $f(t) \in C^{(0)}([0,T];H)$ и*

$$\max_{t\in[0,T]} \|f(t)\|_H \le C\|f\|_W, \quad C = const,$$

то есть $W \subset C^{(0)}([0,T];H)$.

Пусть $a(t,\varphi,\psi)$ есть билинейная форма, определённая при $t \in [0,T]$ для любых $\varphi,\psi \in X$ и удовлетворяющая следующим условиям $\forall t \in [0,T]$, $|a(t,\varphi,\psi)| \le C\|\varphi\|_X\|\psi\|_X$, $\forall \varphi,\psi \in X : \tilde{C}\|\varphi\|_X^2 \le a(t,\varphi,\varphi)$. Через $A(t) \in \mathcal{L}(X,X^*)$ будем обозначать оператор, порождаемый этой формой: $(A(t)\varphi,\psi)_H \equiv a(t,\varphi,\psi)$, $\forall u,\psi \in X$, и через $A \in \mathcal{L}(Y,Y^*)$ – оператор, определённый следующим образом: $(A\varphi,\psi) \equiv \equiv \int_0^T a(t,\varphi,\psi)\,dt \ \forall \varphi,\psi \in L_2(0,T;X)$.

Рассмотрим следующую задачу: найти $\phi \in W$, $u \in H$ такие, что

$$\begin{cases} \phi_t + A\phi = f_0, & t \in (0,T), \\ \phi = u, & t = 0, \\ \phi = \varphi_{obs}, & t \in (0,T), \end{cases} \tag{91}$$

где $\phi_t = d\phi/dt$, $f_0 \in L_2(0,T;X^*)$ – заданная функция, φ_{obs} – некоторая функция, построенная на основе данных наблюдений. Мы предполагаем, что $\varphi_{ob} \in L_2(0,T;H)$. Заметим также, что φ_{obs} может быть задана приближённо: $\|\varphi_{obs} - \varphi_{obs}^{(0)}\|_{L_2(0,T;H)} \le \delta$, где δ – оценка погрешности данных наблюдений, тогда как $\varphi_{obs}^{(0)}$ есть некоторая фиксированная функция.

Отметим также, что запись дополнительного условия в (91) в виде $\phi = \varphi_{obs}$ является во многих случаях упрощённой, поскольку на самом деле это уравнение должно быть заменено более сложным типа $C\phi = \varphi_{obs}$ с некоторым оператором C. Кроме того, данных измерений часто бывает не столь много, чтобы с их помощью построить φ_{obs} (например, подходящий интерполянт на некоторой сетке) с достаточной точностью. Чаще это можно сделать лишь в некоторых

подобластях и временных интервалах. Но мы здесь ограничимся рассмотрением задачи вида (91).

6.2. Вспомогательные утверждения и задача оптимального управления

Сформулируем вспомогательные утверждения, которые могут быть полезными при изучении задач типа (91).

Лемма 2 [89]. *Норма $\|\cdot\|_W$ и скалярное произведение в $W \equiv W(0,T)$ эквивалентны норме и скалярному произведению, задаваемым следующим образом:*

1)

$$\|\varphi\|_1 = \left(\|\varphi(0)\|_H^2 + \|\varphi_t + A\varphi\|^2_{L_2(0,T;X^*)}\right)^{1/2},$$

$$(\varphi,\psi)_1 = (\varphi(0),\psi(0))_H + (\varphi_t + A\varphi, \Lambda_0^{-1}(\psi_t + A\psi))_{L_2(0,T;H)},$$

$$\forall \varphi,\psi \in W,$$

2)

$$\|\varphi\|_2 = \left(\|\varphi(T)\|_H^2 + \|-\varphi_t + A^*\varphi\|_{L_2(0,T;X^*)}\right)^{1/2},$$

$$(\varphi,\psi)_2 = (\varphi(T),\psi(T))_H + (-\varphi_t + A^*\varphi, \Lambda_0^{-1}(-\psi_t + A^*\psi))_{L_2(0,T;H)},$$

$$\forall \varphi,\psi \in W,$$

где Λ_0 есть канонический изоморфизм $L_2(0,T;X)$ на $L_2(0,T;X^*)$.

Пусть φ_0, q_0 есть решение следующих задач:

$$\frac{d\phi_0}{dt} + A\phi_0 = f_0, \quad t \in (0,T), \quad \varphi(0) = V_0;$$

$$-\frac{dq_0}{dt} + A^*q_0 = q_0, \quad t \in (0,T), \quad q(T) = Q_0,$$

где $f_0, g_0 \in L_2(0,T;X^*)$; $V_0, Q_0 \in H$. Тогда φ_0, q_0 могут быть представлены как

$$\varphi_0 = G_1 f_0 + G_0 V_0, \quad q_0 = G_1^{(T)} g_0 + G_0^{(T)} Q_0,$$

где $G_1 = G_1(t)$, $G_1^{(T)} = G_1^{(T)}(t)$; $G_1, G_1^{(T)} \in \mathcal{L}(L_2(0,T;X^*); W)$; $G_0 = G_0(t)$, $G_0^{(T)} = G_0^{(T)}(t)$; $G_0, G_0^{(T)} \in \mathcal{L}(H, W)$; т.е. $G_1, \dots, G_0^{(T)}$ являются линейными ограниченными операторами.

Введём следующие подпространства из W:

$$\begin{aligned} W^{(1)} &= \{f \in W : f = G_1 f_0 \quad \forall\, f_0 \in L_2(0,T;X^*)\},\\ W^{(0)} &= \{f \in W : f = G_0 V_0 \quad \forall\, V_0 \in H\},\\ \tilde W^{(1)} &= \{f \in W : f = G_1^{(T)} g \quad \forall\, g \in L_2(0,T;X^*)\},\\ \tilde W^{(0)} &= \{f \in W : f = G_0^{(T)} Q_0 \quad \forall\, Q_0 \in H\}. \end{aligned}$$

Из леммы 2 вытекает следующее утверждение.

Следствие. *Если в W введено скалярное произведение $[\cdot,\cdot]_1$, то $W^{(1)}$ ортогонально $W^{(0)}$ и $W = W^{(1)} \oplus W^{(0)}$, если же в W вводится скалярное произведение $[\cdot,\cdot]_2$, то $\tilde W^{(1)}$ ортогонально $\tilde W^{(0)}$ и $W = \tilde W^{(1)} \oplus \tilde W^{(0)}$.*

Вернёмся к задаче (91). Запишем следующую обобщённую постановку этой задачи:

$$(\phi,\ -\psi_t + A^*\psi) + (\phi(T), \psi(T))_H = (f_0, \psi) + (u, \psi(0))_H \quad (92)$$

$$\forall\, \psi \in W, \quad \phi = \varphi_{obs},$$

где второе уравнение рассматривается в $L_2(0,T;H)$. Но постановка (92) эквивалентна соотношениям вида:

$$\begin{aligned} &\Big((G_1^{(T)}\Lambda_0 + G_0^{(T)} P_{(T)})\phi, \psi\Big)_2 = (f_0, \psi) + (G_0 u, \psi)_1 \qquad \forall\, \psi \in W,\\ &\Big(\Lambda_2(G_1^{(T)}\Lambda_0 + G_0^{(T)} P_{(T)})\phi, \psi\Big) = (f_0, \psi) + (\Lambda_1 G_0 u, \psi)\ \forall\, \psi \in W, \end{aligned}$$

где Λ_k есть канонический изоморфизм пространства W (снабжённого нормой $\|\cdot\|_k$, $k = 1, 2$) на W^* и также

$P_{(T)}\phi \equiv \phi(T)$, $P_{(0)}\phi \equiv \phi(0)$. Поэтому задача (92) сводится к уравнениям:

$$L\phi = f_0 + Bu, \quad \phi = \varphi_{obs}, \qquad (93)$$

где

$$L = \Lambda_2(G_1^{(T)}\Lambda_0 + G_0^{(T)} P_{(T)}), \quad B = \Lambda_1 G_0,$$
$$L^* = \Lambda_1(G_1 \Lambda_0 + G_0 P_{(0)}).$$

Если мы предположим, что u известна, то легко доказать, что для заданных f_0, u уравнение (93) имеет единственное решение $\phi \in W$, кроме того: $\|\phi\|_2^2 = \|f_0\|^2_{L_2(0,T;X^*)} + \|u\|_H^2$. Принимая во внимание эквивалентность норм $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_W$, заключаем, что *уравнение* (93) *разрешимо тогда и только тогда, когда $f_0 \in L_2(0,T;X^*)$, $u \in H$; при этих условиях справедливы оценки*

$$\tilde C(\|f_0\|^2_{L_2(0,T;X^*)} + \|v\|_H) \le \|\varphi\|_W \le C(\|f_0\|^2_{L_2(0,T;X^*)} + \|v\|_H),$$

где $\tilde C, C = const > 0$. (Заметим, что в научной литературе эти условия формулируются лишь как достаточные; см. [34].)

Предположим теперь, что

$$W \equiv Y \equiv W(0,T), \quad H_0 \equiv L_2(0,T;H), \quad H_C \equiv H \equiv X_C,$$
$$H_{ob} \equiv L_2(0,T;H), \quad C \equiv I, \quad \Lambda_C \equiv I, \quad u_C \equiv 0,$$

где I — тождественный оператор. После чего к задаче (93) можно попытаться применить утверждения теорем 1, 2 из §§ 2, 3, главы 3.

Задача оптимального управления здесь есть

$$L\phi = f_0 + Bu, \ \inf_{u \in H_C}\{\alpha\|u\|_H^2 + \|\phi - \varphi_{obs}\|^2_{L_2(0,T;H)}\}. \qquad (94)$$

где $\alpha \ge 0$, а вариационные уравнения имеют вид

$$L\phi = f_0 + Bu, \quad L_0^* q = \phi - \varphi_{obs}, \quad \alpha u + q(0) = 0, \tag{95}$$

где L_0^* определяется так:

$$(\tilde{w}, L_0^* q) \equiv (\tilde{w}_t, q) + (\tilde{w}, A^* q) + (\tilde{w}(0), q(0))_H = (\tilde{w}, \phi - \varphi_{ob}) \quad \forall \tilde{w} \in W.$$

Легко заметить, что однородная задача

$$L\phi = Bu, \quad \phi = 0$$

имеет только тривиальное решение; поэтому $N(CL^{-1}B) = \{0\}$, и если задача (91) имеет решение, то это решение единственное. Но также замечаем, что однородная система

$$L_0^* q = w, \quad q(0) = 0,$$

как правило, имеет бесконечное множество нетривиальных решений q, w, что в конкретных задачах нередко установить просто, выбрав в качестве q гладкую функцию, такую, что $q(0) = q(T) = 0$, и путём подстановки в уравнение определив соответствующую функцию w.

Итак, для *задачи* (91) *имеет место единственность решения, но плотной разрешимости, как правило, нет.* Если (91) априори имеет решение $\phi_0 \in W$, $u_0 \in H$, то решения ϕ, u системы (95) сходятся к ϕ_0, u_0, причём

$$\|\phi - \varphi_{ob}\|_{L_2(0,T,H)} \leq \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/2} \|u_0\|_H \to 0, \ \alpha \to 0.$$

Замечание. При условии $N(CL^{-1}B) = \{0\}$ можно также ввести понятие обобщённого решения задачи (91). Однако это требует весьма специфических построений и определений [84]. ■

6.3. Итерационный алгоритм

Из предыдущего раздела следует единственность решения задачи (91). Поэтому если априори предполагается существование решения этой задачи, то построение приближённого решения можно осуществить, например, с помощью следующей итерационной процедуры:

$$\begin{aligned}
&\phi_t^k + A\phi^k = f_0, \quad t \in (0,T), \quad \phi^k = u^k, \quad t = 0,\\
&-q_t^k + A^* q^k = \phi^k - \varphi_{obs}, \quad t \in (0,T), \quad q^k(T) = 0,\\
&u^{k+1} = u^k - \tau(\alpha u^k + q^k(0)), \quad k = 0, 1, \ldots,
\end{aligned}$$

которая будет сходиться при реальных положительных τ.

Значительное разнообразие итерационных методов решения задач типа (91) обсуждается в работах [63, 82, 94, 96].

§ 7. Обратная задача для возмущенной системы Стокса

7.1. Постановка задачи

В области $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ с гладкой границей $\Gamma \equiv \partial\Omega$ рассмотрим задачу вида:

$$\begin{aligned}
&-a\Delta\phi + b\phi + K\phi = f + \chi_C u - \nabla p \quad \text{в} \quad \Omega,\\
&\operatorname{div} \phi = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad \int\limits_\Omega p\,dx = 0, \quad \phi = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma,
\end{aligned} \tag{96}$$

где $\phi = (\phi_1, \phi_2)$, $u = (u_1, u_2)$, p — скалярная функция, $a = const > 0$, $b = const \geq 0$, $f = (f_1, f_2)$ — заданная вектор-функция (далее просто функция), $K\phi \equiv (-l\phi_2, l\phi_1)$, $l = l_0 + l_1 x_2$, $l_0, l_1 = const$, χ_C – характеристическая функция области $\Omega_C \subseteq \Omega$. Функции ϕ, u считаются неизвестными.

Для замыкания задачи вводим следующее дополнительное условие:

$$\chi_{ob}\phi = \chi_{ob}\varphi_{obs}. \tag{97}$$

где $\varphi_{obs} = (\varphi_{obs,1}, \varphi_{obs,2})$ — заданная в Ω функция такая, что $\mathrm{div}\varphi_{obs} = 0$, χ_{ob} — характеристическая функция области $\Omega_{ob} \subseteq \Omega$. В дальнейшем считается, что границы Γ_{ob}, Γ_C областей Ω_{ob}, Ω_C также гладкие.

Система (96) есть известная система стационарных уравнений Стокса, возмущённая слагаемым в ϕ и кососимметрическим оператором K. Задача (96), (97) для этой системы есть обратная задача о нахождении ϕ, p и дополнительных источников u в Ω_C.

Для операторной формулировки задачи введём следующие известные пространства [30]. Пространство $H \equiv (L_2(\Omega))^2$ считаем основным, а пространство V определяется так:

$$V = \{\phi \in (W_2^1(\Omega))^2; \quad \mathrm{div}\phi = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \ \phi = 0 \ \text{ на } \ \Gamma\}.$$

Через $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ обозначаем подпространство из H, полученное замыканием по норме пространства H множества бесконечно дифференцируемых финитных в Ω соленоидальных вектор-функций. (Заметим, что $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ состоит из тех вектор-функций $\phi \in H$, для которых в слабом смысле имеем: $\mathrm{div}\phi = 0$ в Ω и $\phi \cdot n = 0$ на Γ, где $n = (n_1, n_2)$ — единичный вектор внешней нормали к Γ; см. [58].) Через $G(\Omega)$ обозначим подпространство из H, состоящее из вектор-функций вида ∇g, где g — произвольная скалярная функция из $W_2^1(\Omega)$. Известно, что $H = \overset{\circ}{J}(\Omega) \oplus G(\Omega)$.

Умножая скалярно в H уравнение (96) на $w \in V$ и выполняя интегрирования по частям, приходим к следующей постановке задачи (96), (97): найти $\phi \in V$ и u такие, что

$$\begin{aligned} a(\phi, w) &\equiv (a\nabla\phi, \nabla w) + (b\phi, w) + (K\phi, w) = \\ &= (f, w) + (\chi_C u, w) \ \forall w \in V, \quad \chi_{ob}\phi = \chi_{ob}\varphi_{obs}, \end{aligned} \tag{98}$$

где $(\cdot,\cdot) \equiv (\cdot,\cdot)_H$.

Дополнительное неизвестное u будем искать в классе функций $\overset{\circ}{J}(\Omega_C)$, которые считаем продолженными нулями на $\Omega \backslash \Omega_C$. После этого $\overset{\circ}{J}(\Omega_C)$ можно рассматривать как

подпространство из $\overset{\circ}{J}(\Omega)$. Если теперь ввести операторы L, B, C следующим образом (см. § 1):

$$(L\phi, w) \equiv a(\phi, w) \ \ \forall \phi, w \in V, \quad L : V \to V^*, \quad D(L) = V,$$

$$(Bu, w) \equiv (\chi_C u, w) \ \ \forall u \in H \ \ \forall w \in V, \qquad B : H \to V^*, \quad D(B) = \overset{\circ}{J}(\Omega_C),$$

$$C\phi \equiv \chi_{ob}\phi, \quad C : H \to H, \quad D(C) = H,$$

то (98) уже полностью определяет обобщённую постановку задачи (96), (97), которую в операторной форме можно записать так:

$$L\phi = f + Bu, \quad C\phi = \chi_{ob}\varphi_{obs}. \tag{99}$$

Семейство задач оптимального управления, которое мы вводим в связи с (99), является следующим:

$$\begin{gathered} L\phi = f + Bu, \\ \inf_{u \in D(B)} \{\alpha\|u\|_H^2 + \|C\phi - \chi_{ob}\varphi_{obs}\|_H^2\}, \ \alpha = const \geq 0. \end{gathered} \tag{100}$$

Система вариационных уравнений, соответствующая (100), есть

$$L\phi = f + Bu, \quad L^* q = {}^*(C\phi - \chi_{obs}\varphi_{obs}), \quad \alpha u + B^* q = 0, \tag{101}$$

где $C^* = C$. В терминах билинейных форм система (101) имеет вид:

$$\begin{aligned} &(a\nabla\phi, \nabla w) + (b\phi, w) + (K\phi, w) = (f, w) + (\chi_C u, w) \ \forall w \in V, \\ &(a\nabla\tilde{w}, \nabla q) + (b\tilde{w}, q) + (K\tilde{w}, q) = (\tilde{w}, \chi_{ob}\phi - \chi_{ob}\varphi_{obs}) \ \forall \tilde{w} \in V, \\ &\alpha u + q = 0 \quad \text{на} \quad \Omega_C. \end{aligned} \tag{102}$$

Заметим, что задача (100)((101), (102)) при $\alpha = 0$ является обобщённой постановкой задачи (98), а значит и последующей обобщённой постановкой задачи (96), (97).

7.2. Условия разрешимости задачи и единственности решения

Изучим некоторые условия, при которых имеют место единственность решения (99) или плотная разрешимость этой задачи. Для этого необходимо изучить тривиальность нуль-пространств $N(A), N(A^*)$, где $A = CL^{-1}B$, или, что равносильно, тривиальность решений задач вида:

$$\begin{cases} (a\nabla\phi, \nabla w) + (b\phi, w) + (K\phi, w) = (\chi_C u, w) \ \forall w \in V, \\ \phi = 0 \quad \text{на} \quad \Omega_{ob}; \end{cases} \tag{103}$$

$$\begin{cases} (a\nabla\tilde{w}, \nabla q) + (b\tilde{w}, q) + (K\tilde{w}, q) = (\tilde{w}, \chi_{ob} Q) \quad \forall\tilde{w} \in \tilde{V}, \\ q = 0 \quad \text{на} \quad \Omega_C, \end{cases} \tag{104}$$

где $\operatorname{div} Q = 0$ на Ω_{ob}.

Докажем следующее предложение.

Предложение. *Справедливы следующие утверждения:* 1) *Если* $mes\,(\Omega_C \bigcap \Omega_{ob}) = 0$, *то* $dim\,(N(A)) = dim\,(N(A^*)) = \infty$. 2) *Если* $\bar{\Omega}_C \subset \Omega_{ob} = \Omega$, *то* $N(A) = \{0\}$ *и* $dim\,(N(A^*)) = \infty$. 3) *Если* $\bar{\Omega}_{ob} \subset \Omega_C \subset \Omega$, *то* $dim\,(N(A)) = \infty$ *и* $N(A^*) = \{0\}$. 4) *Если* $\Omega_{ob} = \Omega_C$, *то* $N(A) = N(A^*) = \{0\}$.

Доказательство. 1. Пусть Ω_C и Ω_{ob} не пересекаются. Рассмотрим задачу (103) и в ней все функции с носителями в Ω_C, т.е. $\phi, w \in V \equiv V(\Omega_C)$, $u \in \overset{\circ}{J}(\Omega_C)$. Задавая произвольную $u \in \overset{\circ}{J}(\Omega_C)$, с помощью теоремы Вишика–Лакса–Мильграма (см. гл. 2) легко устанавливается существование единственного решения $\phi \in V(\Omega_C)$, соответствующего выбранному $u \in \overset{\circ}{J}(\Omega_C)$. Продолжим теперь u и ϕ тождественными нулями на $\Omega \backslash \Omega_C$. В результате получим, что данные продолженные функции удовлетворяют системе двух соотношений (103), т.е. $N(A) \neq \{0\}$. А поскольку число таких нетривиальных решений задачи (103) можно построить бесконечное множество, то заключаем, что $\dim(N(A)) = \infty$.

Аналогично показывается, что в данном случае также $\dim(N(A^*)) = \infty$.

2. Пусть теперь $\bar{\Omega}_C \subset \Omega_{ob} = \Omega$. Из (103) немедленно следует, что $\phi = 0$ (по условию из (103)) и $u = 0$ (из первого уравнения).

Рассмотрим задачу (104). Поскольку mes $(\Omega\backslash\Omega_C) > 0$, то, повторяя рассуждения из п. 1 данного доказательства, устанавливаем бесконечное множество нетривиальных решений q, Q этой задачи, причём $q \equiv 0$ на Ω_C. Следовательно, $\dim(N(A^*)) = \infty$.

3. Если $\bar{\Omega}_{ob} \subset \Omega_C \subset \Omega$, то теперь уже можно говорить, очевидно, что $\dim(N(A)) = \infty$. Рассмотрим задачу (104). Предположим, что она имеет нетривиальное решение q, Q. Тогда оно будет удовлетворять также системе вида

$$\begin{array}{l} -a\Delta q + bq - Kq = \chi_{ob} Q - \nabla P \ \text{ в } \ \Omega, \\ \operatorname{div} q = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \quad q = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega, \quad q = 0 \text{ на } \ \Omega_C \end{array}$$

с некоторой скалярной функцией $P \in W_2^1(\Omega)$, определяемой с точностью до постоянной. Рассматривая первое уравнение на Ω_C и учитывая последнее равенство, получаем:

$$\begin{array}{ll} \chi_{ob} Q - \nabla P = 0 \ \text{ на } \ \Omega_C, & \nabla P = 0 \ \text{ на } \ (\Omega_C \backslash \Omega_{ob}), \\ \operatorname{div} Q - \Delta P = 0 \ \text{ на } \ \Omega_{ob}, & P = C_0 = const \ \text{ на } \ (\Omega_C \backslash \Omega_{ob}). \end{array}$$

Поскольку $\operatorname{div} Q = 0$ на Ω_{ob}, то также $\Delta P = 0$ на Ω_{ob}. Если в последних уравнениях перейти к функции $\tilde{P} = P - C_0$, то получаем, что $\tilde{P} \in W_2^1(\Omega)$, $\tilde{P} = 0$ в $(\Omega_C \backslash \Omega_{ob})$ и

$$\Delta\tilde{P} = 0 \ \text{ в } \ \Omega_{ob}, \quad \tilde{P} = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega_{ob}.$$

Следовательно, $\tilde{P} = 0$ в Ω_{ob}, $P = C_0$ и $Q = 0$ в Ω_{ob}. Но тогда $q = 0$ и $N(A^*) = \{0\}$.

4. То, что $N(A) = N(A^*) = \{0\}$ при $\Omega_C = \Omega_{ob}$, следует из предыдущих рассмотрений настоящего доказательства. Таким образом, все утверждения установлены. ■

Лемма 1. *Пусть* $\Omega_C = \Omega_{ob} \subsetneq \Omega$. *Тогда:* 1) *задача* (96), (97) *может иметь не более одного решения;* 2) *задача* (96), (97) *плотно разрешима;* 3) *при любом* $\alpha > 0$ *и любых заданных* $f \in H$, $\varphi_{ob} \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$ *система* (102) *имеет единственное решение, при этом* $\|\chi_{ob}\phi - \chi_{ob}\varphi_{obs}\|_H \to 0$ *при* $\alpha \to +0$.

7.3. Итерационный алгоритм

Для приближённого решения задачи (102) можно воспользоваться, например, простейшим итерационным процессом (который для наглядности запишем для классических решений):

$$\begin{cases} a\Delta\phi^k + b\phi^k + K\phi^k = f - \nabla p^k + \chi_C u^k \quad \text{в} \quad \Omega, \\ \operatorname{div}\phi^k = 0 \text{ в } \Omega, \quad \phi^k = 0 \text{ на } \Gamma, \displaystyle\int\limits_{\Omega_0} p^k dx = 0; \end{cases} \tag{105}$$

$$\begin{cases} -a\Delta q^k + bq^k - Kq^k = \chi_{ob}\phi^k - \chi_{ob}\varphi_{ob} - \nabla\tilde{\rho}^k \quad \text{в} \quad \Omega, \\ \operatorname{div} q^k = 0 \text{ в } \Omega, \ q^k = 0 \text{ на } \Gamma, \displaystyle\int\limits_{\Omega_0} \tilde{\rho}^k dx = 0, \end{cases}$$

$$u^{k+1} = u^k - \tau(\alpha u^k + q^k) \quad \text{на} \quad \Omega_C, \ k = 0, 1, \ldots,$$

где $\tau = 0$ – параметр итерационного процесса. Формулировка условий сходимости алгоритма и оптимизация его скорости сходимости приводились уже неоднократно ранее.

Таким образом, если имеется эффективный алгоритм численного решения стационарной системы Стокса, возмущенной несимметричными операторами $bI + K$, то, решая последовательно подзадачи из (105), при достаточно большом k (и малом α!) можно приближенно принять $\phi \cong \cong \phi^k$, $u \cong u^k$, где ϕ, u – классическое (или обобщенное) решение задачи (96), (97). Конечно, здесь необходимо помнить, что при численной реализации (105) на каждом шаге будут допускаться дополнительные численные ошибки.

Поэтому уменьшение параметра α и увеличение числа итераций k необходимо согласовывать с величиной этих численных ошибок (см. § 6 гл. 3).

§ 8. О решении других линейных обратных задач

Дадим краткое описание задач математической физики, помимо рассматриваемых ранее, к которым могут быть применен формулируемые в данной книге методы и подходы.

8.1. Задача о финальном наблюдении для эволюционного уравнения второго порядка

С помощью изложенных выше методов может быть исследована следующая задача о финальном наблюдении (задача точного управления): найти абстрактную функцию $\phi \in L_2(0,T;X)$ и пару управлений $u_0 \in X$, $u_1 \in H$ таких, что

$$\begin{gathered} \phi_{tt} + \beta \cdot \phi_t + \mathcal{L}\phi = f, \quad t \in (0,T), \\ \phi = u_0, \quad \phi_t = u_1 \ \text{ при } \ t = 0. \end{gathered}$$

и выполняются дополнительные условия

$$\phi(0) = \phi(T), \quad \phi_t(0) = \phi_t(T)$$

или

$$\phi(T) = \varphi_{obs}^{(0)}, \quad \phi_t(T) = \varphi_{obs}^{(1)}.$$

Здесь X, H — гильбертовы пространства, $X \subset H$, $H \equiv \equiv H^*$; $\beta = const \geq 0$, $\mathcal{L} : X \to X^*$ – оператор, порождаемый симметричной X-ограниченной и X-определенной билинейной формой $a(\varphi, \psi)$; $f, \varphi_{obs}^{(0)}, \varphi_{obs}^{(1)}$ – заданные элементы соответственно из $L_2(0,T;H), X, H$.

Рассматриваемые задачи вновь можно свести к изучению регуляризированного уравнения

$$(\alpha I + A^*A)u = A^*g$$

для вектор-функции $u = (u_0, u_1)$, оценить норму оператора A, предложить итерационные методы решения задач и оптимизировать скорость их сходимости. Интересно отметить, что если $\beta = 0$, то оказывается, что $A^*A = I$, и итерационные процессы могут сходиться за одну итерацию, т.е. для решения задачи достаточно последовательно решить прямую и сопряженную задачи.

Одним из частных случаев рассматриваемой задачи является обратная задача о длинных волнах: требуется найти $\phi(t, x, z), u_0, u_1$ такие, что

$$\Delta\phi \equiv \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \text{ в } \Omega = (0, A) \times (-B, 0),$$

$$g\,\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \text{ на } \partial\Omega_1 = \{z = 0,\ 0 < x < A\},$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \text{ на } \partial\Omega_2 = \partial\Omega \backslash \partial\Omega_1,$$

$$\phi = u_0, \quad \phi_t = u_1 \text{ на } \partial\Omega_1 \text{ при } t = 0,$$

и выполнены дополнительные условия

$$\phi = \varphi_{obs}^{(0)}, \quad \phi_t = \varphi_{obs}^{(1)} \text{ на } \partial\Omega_1 \text{ при } t = T,$$

где $g = const > 0$, $\varphi_{obs}^{(0)}, \varphi_{obs}^{(1)}$ — заданные функции.

При подходящем выборе функциональных пространств задача о длинных волнах может быть записана как задача для абстрактного эволюционного уравнения, сформулированной в начале данного раздела.

Результаты изучения приведённых здесь задач формулируются в работе [73], где имеются также результаты некоторых численных экспериментов по решению обратной задачи о длинных волнах.

8.2. Задача о граничных функциях в гидродинамике

Вычисление (задание) функций граничных значений на "жидких" ("открытых") частях границ областей является одной из проблем гидродинамики, связанных с математическим моделированием прибрежных зон океанов, устьев больших рек и т.п. В некоторых случаях нахождение таких функций граничных значений можно осуществить, рассматривая их как дополнительные неизвестные и привлекая данные измерений. Так, например, пусть рассматривается квазигеострофическая модель циркуляции в океане [57]:

$$L\phi = \frac{1}{2\alpha}\Delta\phi + (U, \nabla)\phi + \frac{H\beta}{l}\frac{\partial\phi}{\partial x} = f \quad \text{в } \Omega,$$

$$\phi = 0 \text{ на } \Gamma_0, \quad \phi = u \text{ на } \Gamma_1,$$

где $(x, y) \equiv \Omega \subset \mathbf{R}^n$, $\partial\Omega = \Gamma_0 \bigcup \Gamma_1$, $U = (U_1, U_2)$, $U_1 = -\partial H/\partial y$, $U_2 = \partial H/\partial x$, $l = l_0 + \beta y$, $l_0, \beta, \alpha = const > 0$, $f \in L_2(\Omega)$, $H(x, y) \in C^{(1)}(\Omega)$. Предположим, что функция u также неизвестна, но имеются данные наблюдений $\{\varphi_i^{(0)}\}$, $\{\varphi_i^{(1)}\}$, которые являются приближёнными значениями величин $\{(\rho_i, \frac{g}{l}\,\phi_x) \equiv I_i^{(0)}\}$, $\{-(\rho_i, \frac{g}{l}\,\phi_y) \equiv I_i^{(1)}\}$ соответственно, где $\{\rho_i\}$ — некоторые весовые функции из $(W_2^1(\Omega))^*$, $g = const > 0$, $(\cdot, \cdot) \equiv (\cdot, \cdot)_{L_2(\Omega)}$. Вводим функционал вида

$$J_\alpha(u, \phi(u)) \equiv \frac{\alpha_0}{2}\|\phi\|_W^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\Big((\varphi_i^{(0)} - I_i^{(0)})^2 + (\varphi_i^{(1)} - I_i^{(1)})^2\Big),$$

где $\alpha_0, \alpha_i = const > 0$. Пространство W здесь определяется так: $W \equiv W_{2,0}^{1/2}(\Gamma_1) = \{\psi \cdot \psi = w$ на Γ_1 $\forall w \in W_2^1(\Omega)$, $w = 0$ на $\Gamma_0\}$. Теперь задача об одновременном определении

ϕ и граничной функции u формулируется так: найти ϕ и u такие, что

$$L\phi = f \text{ в } \Omega,\ \phi = 0 \text{ на } \Gamma_0,\ \phi = u \text{ на } \Gamma_1 \quad \inf_{u \in W} J_\alpha(u, \phi(u)).$$

Некоторые результаты по изучению этой задачи приведены в [72, 74].

8.3. Задачи теории переноса частиц

Задачи для уравнений переноса (см. (17), п. 1.1.4 данной главы) встречаются при изучении многих прикладных проблем теории ядерных реакторов, астрофизики, рассеяния солнечного излучения в атмосфере и многих других. Особую значимость приобретают обратные задачи и задачи управления для данных уравнений. Цикл исследований по данным задачам для стационарных уравнений переноса проведён автором совместно с коллегами в работах [78–84].

Обратные задачи и задачи управления для уравнений переноса обладают рядом специфических трудностей. Прежде всего, как правило, они являются существенно многомерными. Далее, теория пространств Соболева С.Л. неприменима здесь и необходимы специальные функциональные пространства для исследования разрешимости задач, изучения проблем существования следов и т.д. Такие пространства были развиты в [1]. Кроме того, методы исследования обратных задач и задач управления, базирующиеся на применении результатов по задаче Коши для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений (см. § 1, настоящей главы), здесь применять нельзя. Поэтому необходимо было создавать другой математический аппарат изучения подобных задач. Ряд исследований в данном направлении осуществлён в работах [80, 81, 84].

Подробности решения обратных задач для уравнения переноса о локальных функциях источников, о граничных функциях и др., а также численные эксперименты по проверке эффективности ряда итерационных алгоритмов решения задач (не только рассмотренных в данной книге) приведены в [78–84].

Глава 5. О ПРИЛОЖЕНИЯХ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССАХ

В данной главе в краткой форме будут предложены некоторые пути распространения рассматриваемых в данной книге методов и подходов к решению обратных задач и задач управления с нелинейным уравнением состояния. Кроме того, мы покажем, что эти подходы могут применяться также для конструирования новых методов вычислительной математики для численного решения классических (прямых) задач математической физики.

§ 1. Подходы к решению нелинейных задач

Рассмотрим некоторое нелинейное уравнение состояния

$$L(\phi, u) = 0 \tag{1}$$

с нелинейным оператором L, определенном на парах $(\phi, u) \in \in W \times X_C$ и действующим из пространства $W \times H_C$ в Y^*, где $W, \ldots, Y^*$ — система пространств, введенная в § 1, гл. 3 при рассмотрении линейного уравнения состояния. Частными случаями (1) являются следующие уравнения:

$$L(\phi, u) \equiv L_0\phi - B_0 u - f - \beta \cdot D_0(\phi, \phi) = 0, \tag{2}$$

$$L(\phi, u) \equiv L_0\phi - B_0 u - f - \beta \cdot D_1(\phi, u) = 0, \tag{3}$$

где L_0, B_0 — линейные операторы, D_0, D_1 — билинейные операторы, f — элемент из Y^*, а β — заданный числовой параметр, который часто возникает в задачах после операций масштабирования и перехода к безразмерным переменным. Данный параметр можно ввести также формально, а после проведения всех исследований (например, методом малого параметра) положить $\beta = 1$, возвращаясь тем самым к исходной задаче.

Пусть одновременно с (1) рассматривается уравнение

$$C\phi = \varphi_{obs}, \tag{4}$$

с линейным оператором C и заданным элементом $\varphi_{ob} \in H_{ob}$. Система (1), (4) является нелинейной задачей, в которой мы по-прежнему будем считать u дополнительной неизвестной, уравнение (1) — уравнением состояния, а (2) — уравнением замыкания. Предполагаем, что если u задано, то (1) разрешимо относительно ϕ. Заметим, что относительно нелинейных уравнений типа (1) чаще справедливы предположения о локальной разрешимости в окрестности некоторого решения (ϕ_0, u_0) этого уравнения. Однако имеется ряд интересных примеров нелинейных задач, которые разрешимы при любых $u \in X_C$ (см., например, [33]). В последующем, не оговаривая особо, считаем L аналитическим.

Прежде чем рассмотреть некоторые подходы к решению задачи (1), (4), сделаем следующее замечание. Мы рассматривали задачи оптимального управления как одну из форм обобщенной постановки исходной задачи (когда параметр регуляризации равен нулю) и, одновременно, как способ построения регуляризированных решений. В нелинейных задачах типа (1), (4) может оказаться нецелесообразным следовать данному пути (хотя, например, из-за ряда сложностей при исследовании достаточных условий экстремума вводимого функционала), а проще рассматривать систему (1), (4) как нелинейную задачу $\mathcal{L}(U) = 0$ с векторами $U \equiv (\phi, u)$ и применять известные методы решения нелинейных задач. Но здесь необходимо обратить внимание, что эти методы, как правило, сводят задачу к отысканию вектора $U = (\phi, u)$ на каждой итерации и т.п., т.е. к одновременному вычислению ϕ и u, что усугубляет проблему размерности задачи и построения эффективных численных алгоритмов для решения систем уравнений для ϕ, u. В подходах, которые мы рассматривали ранее, задача в результате сводилась к последовательному отысканию приближений к ϕ и u, при этом обращались лишь операторы L_0, L_0^*. Поэтому, очевидно, выбор путей исследования задач типа (1), (4) и методов их решения зависит от свойств операторов задачи, корректности её постановки, наличия эффективных методов решения задачи на выбранном пути её исследования и т.д. Мы ниже отметим в краткой форме подходы к решению задач вида (1), (4) с помощью методов, рассматриваемых в предыдущих главах.

Вернёмся к задаче (1), (4). Предположим, что одна из основных трудностей здесь состоит в удовлетворении уравнению (4). Тогда рассматриваем семейство задач

$$L(\phi, u) = 0, \quad J_\alpha(u, \phi(u)) = \inf_{v \in X_C} L_\alpha(v, \phi(v)), \tag{5}$$

где $J_\alpha(v, \phi(v)) = \alpha\|v - u_0\|^2_{X_C} + \|C\phi(v) - \varphi_{obs}\|^2_{H_{ob}}$, u_0 - заданный элемент из X_C, $\phi(v)$ есть уравнение $L(\phi(v), v) = 0$, $\alpha \geq 0$. Если $\alpha = 0$, то (5) есть обобщённая постановка задачи (1), (4).

Один из подходов к исследованию (5) может базироваться на теории экстремальных задач [10, 24, 11], когда (5) рассматривается в первую очередь как задача о минимизации функционала, а уравнение состояния трактуется как ограничение типа равенства. Предположим, что на основе общих теорем об экстремальных задачах [24], свойств рассматриваемых пространств и операторов устанавливается существование решения (5). После этого приближённое решение задачи можно построить численными методами теории экстремальных задач [8, 10]. Если устанавливается, что элемент u оптимальное управление — является внутренней точкой выпуклого множества, на котором рассматривается проблема минимизации, то можно перейти к системе вариационных уравнений, которая в данном случае будет иметь

вид

$$\begin{gathered} L(\phi, u) = 0, \quad L^*_\phi(\phi, u)q = C^*(C\phi - \varphi_{obs}), \\ \alpha\Lambda_C u - L^*_u(\phi, u)q = 0, \end{gathered} \tag{6}$$

где L_ϕ, L_u - частные производные оператора L по ϕ, u соответственно. Дальнейшее решение (6) осуществляется подходящими итерационными методами. Простейший из них состоит в задании начального приближения u^0 и последующем вычислении ϕ, q. Новые приближения u^{k+1} можно осуществлять из уравнения

$$\Lambda_C u^{k+1} = \Lambda_C u^k - \tau(\alpha\Lambda_C u^k - L^*_u(\phi^k, u^k)q^k).$$

Проблему выбора параметра τ и сходимости алгоритма здесь мы не рассматриваем.

Применение методов общей теории экстремальных задач непосредственно к (1), (4) может привести к системам её более сложного вида по сравнению с (1), (4) (пусть даже обладающим рядом хороших свойств). Поэтому в конкретных случаях может оказаться целесообразным предварительное упрощение (1), (4) с помощью, например, метода малого параметра. В результате получают системы уравнений, к которым можно применить рассматриваемые в данной книге алгоритмы. Проиллюстрируем данный подход на примере задачи (2), (4):

$$L(\phi, u) \equiv L_0\phi - B_0 u - f - \beta \cdot D_0(\phi, \phi) = 0, \ C\phi = \varphi_{obs}, \tag{7}$$

где β - малый параметр. Предположим, что ϕ, u представимы в виде рядов

$$\phi = \phi_0 + \beta\phi_1 + \beta^2\phi_2 + \cdots, \quad u = u_0 + \beta u_1 + \beta^2 u_2 + \cdots \tag{8}$$

Следуя методу малого параметра [42, 45], находим систему уравнений для определения элементов $\{u_i\}, \{\phi_i\}$:

$$\begin{aligned} &L_0\phi_0 = f_0 + B_0 u_0, && C\phi_0 = \varphi_{obs}, \\ &L_0\phi_1 = D_0(\phi_0, \phi_0) + B_0 u_1, && C\phi_1 = 0, \\ &\dots\dots\dots && \dots\dots\dots \end{aligned} \tag{9}$$

Решая последовательно задачи (9), можно построить приближение к ϕ, u с наперёд заданной точностью. В практических расчётах наиболее популярными являются приближения 1-го и 2-го порядка точности, когда $\phi \cong \phi_0 + \beta\phi_1$, $u \cong u_0 + \beta u_1$ или $\phi \cong \phi_0 + \beta\phi_1 + \beta^2\phi_2$, $u \cong u_0 + \beta u_1 + \beta^2 u_2$. Задача для каждой пары ϕ_i, u_i есть уже линейная задача, и к ней применимы алгоритмы из предыдущих глав.

Другой подход, также использующий методы малого параметра, состоит в следующем. Пусть рассматривается задача (3), (4)

$$L(\phi, u) \equiv L_0\phi - B_0 u - f - \beta \cdot D_1(\phi, u) = 0, \ C\phi = \varphi_{ob}, \quad (10)$$

где

$$\varphi_{obs} = \varphi_{obs}^{(0)} + \varepsilon\varphi_{obs}^{(1)} + \varepsilon^2\varphi_{obs}^{(2)} + \cdots, \quad \varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$$

с заданными элементами $\{\varphi_{obs}^{(i)}\}$ и малым параметром ε. Предположим, что при $\varepsilon = 0$ задача (10) имеет решение ϕ_0, u_0 при $\varphi_{obs}^{(0)} \equiv C\phi_0$, т.е. ϕ_0, u_0 удовлетворяют уравнению состояния $L(\phi_0, u_0) = 0$, а в качестве $\varphi_{obs}^{(0)}$ по определению принимается значение $C\phi_0$. Пусть задается (или наблюдается) отклонение $\varphi_{obs} - \varphi_{obs}^{(0)} = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i\varphi_{obs}^{(i)}$ и требуется определить возмущения в элементе u, которые вызвали данное отклонение. Считаем, что f задаётся в виде $f = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \cdots$, а неизвестное u ищется в классе элементов u вида

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \cdots,$$

которые принадлежат к классу X_C при $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$.

Пусть производная $L_\phi(\phi_0, u_0)$ непрерывно обратима. Тогда по теореме о неявных операторах уравнение $L(\phi, u) = 0$ определяет в окрестности точки ϕ, u единственную неявную функцию $\phi = \phi(u)$ и $\phi(u)$ аналитична в точке u_0. Учитывая выбор вида u, заключаем, что ϕ представима также в виде

аналитической функции по ε:

$$\phi = \phi_0 + \varepsilon\phi_1 + \varepsilon^2\phi_2 + \cdots$$

Привлекая методы малого параметра, находим системы для определения $\{\phi_i\}, \{u_i\}$:

$$\begin{array}{ll} L\phi_1 = f_1 + Bu_1, & C\phi_1 = \varphi_{obs}^{(1)}, \\ L\phi_2 = \tilde{f}_2 + Bu_2, & C\phi_2 = \varphi_{obs}^{(2)}, \\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \end{array} \quad (11)$$

где

$$L\phi_k = L_0\phi_k - \beta \cdot D_1(\phi_k, u_0), \ Bu_k = B_0 u_k + \beta \cdot D_1(\phi_0, u_k),$$
$$\tilde{f}_2 = f_2 + \beta \cdot D_1(\phi_1, u_1).$$

Решая последовательно задачи (11), можно найти приближённое решение исходной задачи с подходящей точностью. Каждая из этих задач является уже линейной, и здесь возможно применение методов, изложенных в предыдущих главах.

Рассмотрим ещё один подход, который может быть применён к (1), (4). Пусть снова ϕ_0, u_0 таковы, что $L(\phi_0, u_0) \equiv 0$, $\varphi_{obs}^{(0)} \equiv C\phi_0$ и $\varphi_{obs} = \varphi_{obs}^{(0)} + \varphi_{obs}^{(1)}$, где $\|\varphi_{obs} - \varphi_{obs}^{(0)}\|_{H_C} \leq \delta$, δ — малое число. Предположим, что выполнены следующие три условия: 1) оператор $L_\phi(\phi, u)$ непрерывно обратим; 2) $N(C(L_\phi^{-1}L_u)(\phi, u)) = \{0\}$; 3) X_C есть конечномерное подпространство из H_C. Тогда (как уже отмечалось ранее в случае линейных задач) первая производная Фреше оператора всей системы (1), (4) вместе с оператором $A \equiv CL_\phi^{-1}L_u$ будут непрерывно обратимы. Тогда по теореме о неявных операторах в окрестности точки ϕ_0, u_0 существует решение задачи (1), (4), которое является также решением вариационной задачи (5) при $\alpha = 0$. После того как локальное существование решения (5) установлено, можно применить итерационные методы решения экстремальных задач для минимизации функционала $J_0(u)$ (см. гл. 2), *которые будут сводить* *решение задачи к последовательному определению приближений к ϕ, u* из уравнений типа (6).

В качестве примера нелинейной задачи (1), (4) отметим задачу усвоения данных наблюдений для нелинейной квазигеострофической многослойной модели динамики океана, исследованной в [76, 77] методами общей теории экстремальных задач и нелинейных задач математической физики. Другой пример подхода к приближённому решению задач типа (1), (4) рассматривается в следующем параграфе для кинетического уравнения коагуляции–дробления.

§ 2. Решение задачи о восстановлении функции источника в уравнении коагуляции-дробления

2.1. Постановка задачи и приближенная модель процесса коагуляции-дробления

Рассмотрим уравнение коагуляции–дробления Смолуховского

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\int_0^x K(x-y,y)c(x-y,t)c(y,t)dy-$$
$$-c(x,t)\int_0^\infty K(x,y)c(y,t)dy + \int_x^\infty \Psi(y,x)c(y,t)dy-$$
$$-\frac{c(x,t)}{x}\int_0^x y\Psi(x,y)dy + v(x,t),\ \ x \geq 0,\ \ t > 0, \tag{12}$$

где функция $c(x,t) \geq 0$ является функцией распределения частиц по массам x. Известные из физики процесса функции $K(x,y) = K(y,x) \geq 0$ и $\Psi(x,y) \geq 0$, называются ядрами коагуляции и дробления, соответственно. К уравнению (12) добавим начальное условие

$$c(x,0) = c_0(x) \geq 0. \tag{13}$$

Рассмотрим одну из обратных задач для уравнения (12). Предположим, что функция $v(x,t)$ финитна по t с носителем из $(t_1,t_2) \subset (0,T)$, $0 < t_1 < t_2 < T < \infty$. В дальнейшем мы будем записывать v в виде $m_c(t)v(x,t)$, где m_c является характеристической функцией интервала (t_1,t_2). Теперь функцию $v(x,t)$ можно продолжить на $[0,\infty)\times[0,T]$ каким-либо подходящим образом. Предполагается, что помимо $c(x,t)$ функция $v(x,t)$ также неизвестна, и требуется определить ее при $t \in (t_1,t_2)$, используя дополнительную информацию

$$c(x,T) = c_{\mathrm{obs}}(x). \tag{14}$$

Таким образом, возникает обратная задача о нахождении c, v таких, что выполнены соотношения (12)–(14). Далее в этом разделе рассматривается сформулированная обратная задача в приближенной линеаризированной постановке.

Перейдём к приближённой модели процесса коагуляции–дробления. Считаем функцию $c_0(x) \geq 0$ и ядра коагуляции $K(x,y)$ и дробления $\Psi(x,y)$ финитными с носителем в $[0,H]$ – для $c_0(x)$, а для ядер – в $[0,H]\times[0,H]$, $H < \infty$. Будем рассматривать задачу (12)–(14) при малых $t > 0$. Тогда начальную функцию $c_0(x)$ можно рассматривать в качестве приближения к решению $c(x,t)$. Полагая $g(x,t) = c(x,t) - c_0(x)$ и пренебрегая слагаемыми второго порядка малости, приходим к следующему линейному уравнению для приближения функции g (за которым оставим прежнее обозначение g):

$$\frac{\partial g(x,t)}{\partial t} = Kg(x,t) - a(x)g(x,t) + m_c v(x,t) + \mathbf{S}(c_0)(x,t),$$
$$g(x,0) = 0,\ \ g(x,T) = g_{\mathrm{obs}}(x),\ \ 0 \leq x \leq H,\ \ 0 < t \leq T, \tag{15}$$

где

$$K = K_1 - K_2 + K_3,\ K_1 g(x) = \int_0^x K(x-y,y)c_0(x-y)g(y)dy,$$
$$K_2 g(x) = c_0(x)\int_0^H K(x,y)g(y)dy,\ K_3 g(x) = \int_x^H \Psi(y,x)g(y)dy,$$

$$a(x) = \int_0^H K(x,y)c_0(y)dy + \int_0^x \Psi(x,y)\frac{y}{x}dy,$$

$$g_{\text{obs}}(x) = c_{\text{obs}}(x) - c_0(x),$$

$$\mathbf{S}(c)(x) = \frac{1}{2}\int_0^x K(x-y,y)c(x-y)c(y)dy-$$

$$-c(x)\int_0^\infty K(x,y)c(y)dy + \int_x^\infty \Psi(y,x)c(y)dy-$$

$$-\frac{c(x)}{x}\int_0^x y\Psi(x,y)dy.$$

Теперь задача приобретает следующий вид: найти g, v такие, что имеют место соотношения (15).

Перепишем задачу (15) в операторном виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial g(x,t)}{\partial t} + Ag(x,t) = (m_c v(x,t) + \mathbf{S}(c_0)),\\ (x,t) \in X = [0,H] \times [0,T]\end{gathered} \tag{16}$$

с дополнительными условиями

$$g|_{t=0} = 0, \quad g|_{t=T} = g_{\text{obs}}(x). \tag{17}$$

Здесь $A = aI - K: \ L_2(X) \mapsto L_2(X)$, $v \in L_2(X)$; считаем ядра коагуляции и дробления такими, что оператор A ограничен. В этом случае $\dfrac{\partial g}{\partial t} \in L_2(X)$ и $g \in L_2(0,H; W_2^1(0,T))$, так что почти всюду определены значения $g(x,t) \in L_2[0,H]$, $t \in [0,T]$ и $g(x,t) \in C[0,T]$ почти при всех $x \in [0,H]$. Теперь мы приходим к следующей постановке обратной задачи: найти функции g, $v \in L_2(X)$, удовлетворяющие (16), (17).

Пусть функция g_1 удовлетворяет задаче Коши

$$\frac{\partial g_1(x,t)}{\partial t} + Ag_1(x,t) = \mathbf{S}(c_0),\ (x,t) \in X,\ g_1|_{t=0} = 0.$$

Тогда для $h(x,t) = g - g_1$ задача (16), (17) сводится к нахождению функций h, $v \in L_2(X)$ таких, чтобы

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} + Ah(x,t) = m_c v(x,t),\ (x,t) \in X, \tag{18}$$

$$h(x,0) = 0, h(x,T) = h_{obs}(x). \tag{19}$$

Здесь $h_{\text{obs}} = g_{\text{obs}} - g_1(x,T)$. Таким образом, обратная задача (15) сведена к задаче (18), (19).

2.2. Вариационные уравнения

Наряду с (18)–(19) будем рассматривать следующую вариационную задачу: найти h, v такие, что

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} + Ah(x,t) = m_c v(x,t),\ (x,t) \in X,\ h(x,0) = 0, \tag{20}$$

$$\inf_{v \in L_2}\left\{\alpha\|m_c v\|^2_{L_2(X)} + \|h(.,T) - h_{\text{obs}}\|^2_{L_2[0,H]}\right\}.$$

Здесь $\alpha = = const \geq 0$. Отметим, что при $\alpha = 0$ вариационная задача (20) может рассматриваться в качестве обобщенной постановки задачи (18), (19).

Предполагая, что задача (20) имеет решение, получаем систему вариационных уравнений

$$\begin{gathered}\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} + Ah(x,t) = m_c v(x,t),\ (x,t) \in X,\ h(x,0) = 0,\\ -\frac{\partial q(x,t)}{\partial t} + A^* q(x,t) = 0,\ (x,t) \in X,\ q|_{t=T} = h|_{t=T} - h_{\text{obs}},\\ \alpha m_c v(x,t) + m_c q(x,t) = 0,\ (x,t) \in X.\end{gathered} \tag{21}$$

Очевидно, обратная задача (18), (19) имеет бесконечно много решений в $L_2(X)$. Чтобы убедиться в этом, достаточно взять любую гладкую функцию $g(x,t)$ с носителем в $[0,H] \times [t_1,t_2]$, подставить ее в (18) и получить $v(x,t) \in \in L_2(X)$. Однако возможно, что в некоторых классах V

функций управления v решение обратной задачи будет единственным. С целью выделения одного из таких классов V рассмотрим некоторую заданную функцию $V_0(t) \in L_2[0,T]$, причем $V_0(t)$ неотрицательна на $[t_1,t_2]$ и $\int_{t_1}^{t_2} V_0(t)dt > 0$. Пусть для дальнейшего класс V определяется следующим образом: $V = \{v(x,t) : v(x,t) = V_0(t)v(x),\ v(x) \in L_2[0,H]\}$. Легко заметить, что V есть подпространство из $L_2(X)$. Подпространство V, соответствующее случаю $V_0(t) \equiv 1, t \in (t_1, t_2)$, будем обозначать через $V_{(1)}$.

Отмечаем, что если $v(x,t)$ ищется в подпространстве V, то система вариационных уравнений имеет вид

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} + Ah(x,t) = m_c V_0(t)v(x),\ (x,t) \in X,\ h(x,0) = 0,$$
$$-\frac{\partial q(x,t)}{\partial t} + A^* q(x,t) = 0,\ (x,t) \in X,\ q|_{t=T} = h|_{t=T} - h_{\text{obs}}, \quad (22)$$
$$\alpha \int_0^T m_c V_0^2(t)dt\,v(x) + \int_0^T m_c V_0(t)q(x,t)dt = 0,\ x \in (0,H).$$

Свойства операторов рассматриваемых задач изучены в работе [88], где также сформулированы условия разрешимости данных задач. Ниже приводятся только итерационные алгоритмы для их решения.

2.3. Итерационный алгоритм

При достаточно малых значениях $\alpha > 0$ и выполнении некоторых дополнительных ограничений решение задачи (21) может рассматриваться в качестве приближенного решения задачи (18), (19) (см. [88]). Для решения (21) можно рассмотреть различные итерационные алгоритмы. Приведем один из них, а именно следующий простейший итерационный алгоритм:

$$\frac{\partial h^n}{\partial t} + Ah^n = m_c v^n,\ h^n|_{t=0} = 0.$$

$$-\frac{\partial q^n}{\partial t} + A^* q^n = 0,\ (x,t) \in X,\ q|_{t=T} = P_T h^n - h_{\text{obs}},$$
$$v^{n+1} = v^n - \tau(\alpha v^n + q^n),\ t \in (t_1, t_2),\ n = 0, 1, \ldots,$$

где произвольное начальное значение $v^0 \in L_2(X)$.

Если функция $v(x,t) = V_0(t)v(x)$ ищется в классе V, то этот алгоритм имеет вид:

$$\frac{\partial h^n}{\partial t} + Ah^n = m_c v^n, \quad h^n|_{t=0} = 0,$$

$$-\frac{\partial q^n}{\partial t} + A^* q^n = 0, \quad (x,t) \in X, \quad q|_{t=T} = P_T h^n - h_{\text{obs}},$$
$$\int_{t_1}^{t_2} V_0(t)v^{n+1}(x,t)dt = \int_{t_1}^{t_2} V_0(t)v^n(x,t)dt -$$
$$-\tau \int_{t_1}^{t_2} (\alpha v^n(x,t) + q^n(x,t))dt, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

где $v^0(x,t) \in V$.

Если ядра коагуляции и дробления таковы, что

$$C_0 \|m_c v\|^2 \le (A_0 v, v) \le C_1 \|m_c v\|^2,$$

то, выбрав $\tau = 2(2\alpha + C_0 + C_1)^{-1}$, имеем

$$\|m_c(v^n - v)\|_{L_2(X)} \le C_2 \left(\frac{C_1 - C_0}{2\alpha + C_0 + C_1}\right)^n \to 0,\ n \to \infty,$$

где C_2 не зависит от n.

Значения C_0, C_1 можно получить, рассмотрев конкретные ядра K и Ψ. Отметим, что за простейшее значение C_0 можно принять $C_0 = 0$, а в качестве C_1 можно выбрать любое достаточно большое число. В этом случае итерационный процесс будет сходиться при любом малом $\alpha > 0$. Результаты тестовых расчётов с помощью рассматриваемых итерационных алгоритмов приводятся в [88]

§ 3. Методы оптимального управления и сопряженных уравнений в вычислительных процессах

В данном параграфе рассматривается ещё одно приложение изучаемых в данной книге подходов, а именно к построению новых вычислительных алгоритмов для численного решения классических задач математической физики. Сначала мы сформулируем основную идею построения таких вычислительных алгоритмов, а затем реализуем её в применении к решению стационарной обобщённой системы Стокса, возмущённой линейным кососимметрическим оператором.

3.1. Подход к построению вычислительных алгоритмов

Пусть рассматривается некоторая задача, записанная в виде системы линейных операторных уравнений вида

$$L\phi = Bu + f, \quad C\phi = Du + h, \tag{23}$$

где операторы L, C имеют одну область определения $D(L)$, а операторы B, D — область определения $D(B)$, f, h — заданные элементы. Предположим, что введена система пространств из § 1, гл. 3 и выполнены сделанные там предположения относительно этих пространств и областей $D(L)$, $D(B)$.

Пара ϕ, u определяет решение рассматриваемой задачи. Считаем, что представление этой задачи в виде (23) осуществлено так, что оператор L есть главная часть оператора задачи, он непрерывно обратим, но не обязан быть симметричным. Однако предполагается, что мы владеем эффективными алгоритмами обращения L и сопряжённого оператора L^*.

Наряду с (23) запишем семейство задач оптимального управления вида

$$L\phi = f + Bu, \quad J_\alpha(u, \phi(u)) = \inf_{v \in D(B)} J_\alpha(v, \phi(v)), \tag{24}$$

где

$$J_\alpha(v, \phi(v)) = \alpha\|v\|^2_{X_C} + \|C\phi - h - Dv\|^2_{H_{ob}},$$
$$L\phi(v) = f + Bv, \quad \alpha \geq 0.$$

Очевидно, что если ϕ, u есть решение (23), то ϕ, u будет решением (24) при $\alpha = 0$. Таким образом, задачу (24) можно рассматривать как семейство задач, включающее одну из обобщённых постановок (23), в которой второе уравнение рассматривается в смысле "наименьших квадратов".

Если исключить $\phi = L^{-1}(f + Bu)$ из (24), то функционал $J_\alpha(u, \phi(u)) \equiv J_\alpha(u)$ примет вид

$$J_\alpha(u) = \alpha\|u\|^2_{X_C} + \|Au - g\|^2_{H_{ob}}, \tag{25}$$

где

$$A = CL^{-1}B - D, \quad g = h - CL^{-1}f.$$

Вариационное уравнение, соответствующее (25), имеет вид

$$\mathcal{A}_\alpha u \equiv \alpha\Lambda_C u + A^*Au = A^*g, \tag{26}$$

а полная система вариационных уравнений задачи (24) есть

$$\begin{gathered} L\phi = f + Bu, \quad L^*q = C^*(C\phi - h - Du), \\ \alpha\Lambda_C u + B^*q - D^*(C\phi - h - Du). \end{gathered} \tag{27}$$

Если $\mathrm{Sp}(\Lambda_C^{-1}A^*A) \in [\mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1]$, $\mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1 = const$, $\mathbf{C}_0 \geq 0$, $\mathbf{C}_1 > 0$, то для решения уравнения (26), обладающего симметричным и положительно определённым (при $\alpha > 0$) оператором, можно применить различные итерационные процессы. Простейший из них есть

$$\Lambda_C u^{k+1} = \Lambda_C^k u^k - \tau(\alpha\Lambda_C u^k - A^*Au^k - A^*g), \ k = 0, 1, \ldots \tag{28}$$

Вычислив в нём параметр τ по формуле: $\tau = 2/(2\alpha + \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1)$, получим следующую оценку скорости сходимости (см гл 2):

$$\|u - u^k\|_{X_C} \leq C\left(\frac{\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_0}{2\alpha + \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1}\right)^k \to 0, \quad k \to \infty, \tag{29}$$

где постоянная C не зависит от k, а u (вместе с ϕ, q) есть решение (27).

В терминах оператора задачи (23) алгоритм (28) имеет вид при заданном u:

$$\begin{aligned} L\phi^k &= f + Bu^k, \quad L^*q^k = C^*(C\phi^k - h - Du^k), \\ \Lambda_C w^k &= B^*q - D^*(C\phi^k - h - Du^k), \\ u^{k+1} &= u^k - \tau(\alpha u^k + w^k)\ k = 0, 1, \ldots \end{aligned} \tag{30}$$

Если для первого уравнения из (23) при заданных ϕ, u справедлива оценка $\|\phi\|_W \leq C(\|f\|_Y^* + \|u\|_{H_C})$, то отсюда и из (29) получаем оценку скорости сходимости ϕ^k к ϕ:

$$\|\phi - \phi^k\|_W \leq C\left(\frac{\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_0}{2\alpha + \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1}\right)^k \to 0, \quad k \to \infty, \tag{31}$$

где $C = const > 0$, а $\phi \equiv \phi(\alpha)$ есть составляющая решения системы (27).

Если система (23) корректно разрешима, то можно в приведённых выше алгоритмах принять $\alpha \equiv 0$. Если же в целом задача (23) некорректна, то необходимо брать $\alpha \to +0$, а число итераций согласовывать с величиной α и возможными ошибками численных реализаций этапов итерационного алгоритма (30) (см. гл. 2).

Предположим, что задача (23) корректно разрешима. Тогда полагая $\alpha \equiv 0$, $\Lambda_C = I$ (т.е. $X_C \equiv H_C$), независимо от симметричности операторов $L, \ldots, D$ алгоритм (30) будет иметь "геометрическую скорость сходимости". Для реализации его нам необходимо последовательно обращать лишь операторы L, L^*.

Примером применения рассмотренного подхода к решению задач является алгоритм решения обобщённой системы Стокса, изученный в работе [85], где также приведены численные эксперименты, иллюстрирующие эффективность алгоритма. В следующем разделе мы рассмотрим применение обсуждаемого подхода к решению обобщённой системы Стокса, возмущённой кососимметрическим оператором

3.2. Вычислительный процесс решения возмущенной системы Стокса

В области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ с липшицевой границей $\Gamma \equiv \partial\Omega$ рассмотрим задачу вида

$$\begin{aligned} &-a\Delta\phi + b\phi + K\phi = f - \nabla p \ \text{ в } \ \Omega, \\ &\operatorname{div}, \phi = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \quad \int_\Omega p\,dx = 0, \ \phi = 0 \ \text{ на } \ \Gamma, \end{aligned} \tag{32}$$

где $\phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)$, $p(x)$ – скалярная функция (давление), $a = const > 0$, $b = const \geq 0$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ – заданная вектор-функция $\in (L_2(\Omega))^n$, $K\phi \equiv (-l\phi_2, l\phi_1, 0, \ldots, 0)$, $l = l_0 + l_1 x_2$, $l_0, l_1 = const$. Если $l \equiv 0$, то задачу (32) называют обобщённой задачей Стокса, если же $l \equiv 0, b \equiv 0$, то получаем классическую задачу Дирихле для стационарной системы Стокса.

Введём пространства $W \equiv (\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))^n$, $H_0 \equiv (L_2(\Omega))^n$, $H_C \equiv L_2^{(0)}(\Omega) = \{v : v \in L_2(\Omega), \int_\Omega v\,dx = 0\}$ и запишем (32) в операторной форме

$$L\phi = f + Bp, \quad C\phi = 0, \tag{33}$$

где

$$L = A_0 + K, \ (A_0\phi, \psi) \equiv (a\nabla\phi, \nabla\psi) + (b\phi, \psi)\ \forall\, \phi, \psi \in W,$$

$$(Bp, \psi) \equiv (p, \operatorname{div}\psi)_{L_2(\Omega)}\ \forall\, \psi \in W, \ C\psi \equiv \operatorname{div}\psi,$$

$$L : W \to W^*, \; B : H_C \to W^*, \; C : W \to H_C,$$
$$D(L) = W, \; D(B) = H_C, \; D(C) = W, \; (\cdot,\cdot) \equiv (\cdot,\cdot)_{H_0}.$$

Выберем функционал J_α: $J_\alpha(p,\phi) = \alpha\|p\|^2_{W_2^k} + \|C\phi\|^2_{H_C}$, $k = 0,1$, где $\alpha = const \geq 0$, и рассмотрим семейство задач (36). Тогда в уравнении (26) имеем (при $p \equiv u, \Lambda_C \equiv \Lambda_k$):

$$\Lambda_0 p = p \;\text{ при }\; k = 0,$$

$$(\Lambda_0 p, \tilde{p})_{L_2(\Omega)} \equiv (\nabla p, \nabla\tilde{p})_{L_2(\Omega)} + (p,\tilde{p})_{L_2(\Omega)}$$

$$\forall p, \tilde{p} \in W_2^1(\Omega) \;\text{ при }\; k = 1,$$

$$A = -\mathrm{div}\,(A_0 + K)^{-1}\nabla,$$

а уравнения (27) есть

$$A_0\phi + K\phi = f + Bp, \quad A_0 q - Kq = C^*C\varphi, \qquad (34)$$
$$\alpha\Lambda_k p + B^* q = 0, \quad k = 0,1.$$

Далее будем рассматривать лишь случай $k = 0$. Некоторые особенности задач при $k = 1$ и необходимость рассмотрения этого случая при малых положительных значениях α обсуждаются в [85].

Изучим некоторые свойства оператора $\mathcal{A}_0 \equiv A^*A$. При их исследовании мы будем пользоваться первым собственным значением задачи

$$-\Delta\varphi_j = \lambda_j\varphi_j \;\text{ в }\; \Omega, \quad \varphi_j = 0 \;\text{ на }\; \Gamma, \quad \|\varphi_j\|_{L_2(\Omega)} = 1.$$

Известно, что $\lambda_1 = \min\limits_i \lambda_i > 0$.

Докажем сначала положительность оператора A. Рассмотрим квадратурную форму $(Ap,p)_{L_2(\Omega)} \equiv \|p\|^2_A \; \forall p \in H_C$. Пусть $\phi \equiv -(A_0 + K)^{-1}\nabla p$, тогда

$$\|p\|^2_A = (\mathrm{div}\,\phi, p) = -(\varphi, \nabla p) = (\phi, A_0\varphi + K\phi) = (\phi, A_0\phi) \geq$$

$$\geq (a\lambda_1 + b)\|\phi\|^2 > 0 \;\text{ при }\; p \not\equiv 0$$

на основании чего заключаем о положительности оператора A.

Далее с помощью простых вычислений устанавливается следующее равенство:

$$(Ap,p)_{L_2(\Omega)} \equiv \|p\|^2_A = (A_0^{-1}\nabla p, \nabla p) - (A_0^{-1}K\phi, K\phi). \qquad (35)$$

Учитывая соотношения, установленные в [85]:

$$\frac{\mu_1\lambda_1}{(a\lambda_1 + b)}\|p\|^2_{L_2(\Omega)} \leq (A_0^{-1}\nabla p, \nabla p) \leq \frac{1}{a}\,\|p\|^2_{L_2(\Omega)} \;\forall p \in H_C, \qquad (36)$$

где $1 > \mu_1 = \mu_1(\Omega) = const > 0$ (оценки для постоянной μ_1 приводятся в [62]), из (35) получаем (при $\|l\|_\infty \equiv \|l\|_{L_2()\Omega}$):

$$\|p\|^2_A \leq \|p\|^2_{L_2(\Omega)}/a;$$

$$(\nabla p, A_0^{-1}\nabla p) = \|p\|^2_A + (A_0^{-1}K\phi, K\phi) \leq \|p\|^2_A +$$
$$+\frac{\|l\|^2_\infty}{(a\lambda_1 + b)}\|\phi\|^2 \leq \left(1 + \frac{\|l\|^2_\infty}{(a\lambda_1 + b)}\right)\|p\|^2_A; \qquad (37)$$
$$\frac{\mu_1\lambda_1(a\lambda_1 + b)}{\left((a\lambda_1 + b)^2 + \|l\|^2_\infty\right)}\|p\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \|p\|^2_A \leq \frac{1}{a}\|p\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Подобные оценки справедливы и для A^*, поскольку в проводимых вычислениях достаточно заменить лишь K на $-K$ в силу кососимметричности оператора K. Из последних оценок заключаем о справедливости следующего утверждения: *если область Ω конечна, то операторы A, A^* положительно определены, $N(A) = N(A^*) = \{0\}$ и задача (34) корректно разрешима при любом $\alpha \geq 0$, а значит, и задача (32) (случай $\alpha = 0$) корректно разрешима.*

Получим оценки для границ спектра оператора $\mathcal{A}_0 = A^*A$. Пусть $p, \tilde{p} \in H_C$ и $\phi \equiv -(A_0 + K)^{-1}\nabla p$,

$\tilde{\phi} \equiv -(A_0 + K)^{-1}\nabla\tilde{p}$. Тогда

$$(Ap,\tilde{p})_{L_2(\Omega)} = (\phi, -\nabla\tilde{p}) = (a\nabla\phi, \nabla\tilde{\phi}) + (b\phi, \tilde{\phi}) + (K\phi, \tilde{\phi}) \le$$

$$\le \|p\|_A\|\tilde{p}\|_A + +\frac{\|l\|_\infty}{(a\lambda_1 + b)}\|p\|_A \cdot \|\tilde{p}\|_A \le$$

$$\le \frac{1}{a}\left(1 + \frac{\|l\|_\infty}{(a\lambda_1 + b)}\right)\|p\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|\tilde{p}\|_{L_2(\Omega)}.$$

Следовательно,

$$\|A\| \le \frac{1}{a}\left(1 + \frac{\|l\|_\infty}{a\lambda_1 + b}\right). \tag{38}$$

Из (37) легко получаем (учитывая соотношение $\|p\|_A^2 = (Ap,p)_{L_2(\Omega)} \le \|Ap\|_{L_2(\Omega)}\|p\|_{L_2(\Omega)}$):

$$\frac{\mu_1\lambda_1(a\lambda_1 + b)}{((a\lambda_1 + b)^2 + \|l\|_\infty^2)} \le \frac{\|Ap\|_{L_2(\Omega)}}{\|p\|_{L_2(\Omega)}} \quad \forall p \ne 0. \tag{39}$$

На основании (38), (39) делаем заключение, что

$$\mathrm{Sp}(A^*A) \in [\mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1], \tag{40}$$

где

$$\begin{gathered}\mathbf{C}_0 = \left(\frac{\mu_1\lambda_1(a\lambda_1 + b)}{(a\lambda_1 + b)^2 + \|l\|_\infty^2}\right)^2, \quad \mathbf{C}_1 = \frac{1}{a^2}\left(1 + \frac{\|l\|_\infty}{a\lambda_1 + b}\right)^2, \\ \xi \equiv \frac{\mathbf{C}_0}{\mathbf{C}_1} = \frac{\mu_1^2(1 + b_0)^4}{((1 + b_0)^2 + a_0^2)^2(1 + b_0 + a_0)^2}, \\ a_0 \equiv \frac{\|l\|_\infty}{a\lambda_1}, \quad b_0 \equiv \frac{b}{a\lambda_1}.\end{gathered} \tag{41}$$

Соотношения (40), (41) играют важную роль при оптимизации скорости сходимости итерационного алгоритма типа

(30) в применении к (34). Пусть $\alpha = 0$, $k = 0$, тогда в классической форме данный алгоритм имеет вид:

$$\begin{gathered}-a\Delta\phi^k + b\phi^k + K\phi^k = f - \nabla p^k \quad \text{в} \quad \Omega, \\ \phi^k = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad \int_\Omega p^k\,dx = 0, \\ -a\Delta q^k + bq^k - Kq^k = -\nabla \mathrm{div}\,\phi^k \quad \text{в} \quad \Omega, \\ q^k = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \\ p^{k+1} = p^k - \tau\,\mathrm{div}\,q^k, \quad k = 0, 1, \ldots,\end{gathered} \tag{42}$$

где $\tau = 2/(\mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1)$, а постоянные $\mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1$ определяются по формулам (41). Для данного алгоритма справедливы оценки скорости сходимости

$$\|\phi^k - \phi\|_W + \|p - p^k\|_{H_C} \le C\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)^k \to 0, \; k \to \infty, \tag{43}$$

где $C = const$, $\xi = \mathbf{C}_0/\mathbf{C}_1$. Отмечаем, что при $b \equiv 0$, $l \equiv 0$ имеем $\xi = \mu_1^2$ и скорость сходимости алгоритма определяется только геометрией области, т.к. $\mu_1 = \mu_1(\Omega)$.

Итак, если мы имеем эффективные алгоритмы решения обычных эллиптических задач, то на их основе и основе алгоритмов типа (42) можно строить вычислительные процессы решения задач для систем Стокса, возмущённых кососимметрическими операторами. При этом мы избегаем трудностей, связанных с удовлетворением условию $\mathrm{div}\,\phi = 0$ в Ω. В свою очередь, легко заметить, что с помощью алгоритмов (42) реализуются этапы итерационных процедур решения обратных задач, рассмотренных в § 7 предыдущей главы.

Список литературы

Приведенный ниже список литературы включает монографии и учебные пособия [1] [67], в которых содержится изложение результатов из различных разделов математики, применявшихся для разработки методов и подходов, рассматриваемых в этой книге В них также дается подробное описание сведений и утверждений, которые для удобства читателя приведены в главе 2 и первом параграфе главы 4 В статьях [68]–[89], [93]–[96] рассматриваются приложения излагаемых выше методов и подходов к конкретным операторным уравнениям и задачам математческой физики, а также изучаются различные аспекты теории их обоснования

[1] Агошков В И (1988) Обобщенные решения уравнения переноса и свойства их гладкости — М Наука

[2] Агошков В И , Дубовский П Б , Шутяев В П (2002) Методы решения задач математической физики — М Наука

[3] Аниконов Ю Е (1978) Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений — Новосибирск Наука

[4] Бакушинский А Б , Гончарский А В (1989) Некорректные задачи Численные методы и приложения — М Изд-во МГУ

[5] Бакушинский А Б , Кокурин М Ю (2002) Итерационные методы решения некорректных операторных уравнений с гладкими операторами — М УРСС

[6] Бахвалов Н С , Жидков Н П , Кобельков Г М (1987) Численные методы — М Наука

[7] Бесов О В , Ильин В П Никольский С М (1975) Интегральное представление функций и теоремы вложения – М Наука

[8] Вайнберг М М (1979) Функциональный анализ – М Просвещение

[9] Вайникко Г М , Веретенников А Ю (1986) Итерационные процедуры в некорректных задачах — М Наука

[10] Васильев Ф П (1981) Методы решения экстремальных задач М Наука

[11] Васильев Ф П , Ишмухаметов А З , Потапов М М (1989) Обобщенный метод моментов в задачах оптимального управления - М Изд-во МГУ

[12] Васин В В , Агеев А Л (1993) Некорректные задачи с априорной информацией — Екатеринбург Наука

[13] Владимиров В С (1988) Уравнения математической физики — М Наука

[14] Воеводин В В , Кузнецов Ю А (1984) Матрицы и вычисления — М Наука

[15] Волков Е А (1982) Численные методы — М Наука

[16] Гаевский Х , Грегер К , Захариес К (1978) Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения — М Мир

[17] Гончаренко В М (1985) Основы теории уравнений с частными производными Киев Высшая школа

[18] Денисов А М (1994) Введение в теорию обратных задач — М Изд-во МГУ

[19] Дымников В П , Филатов А Н (1994) Основы математической теории климата — М ВИНИТИ

[20] Евтушенко Ю Г (1982) Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации — М Наука

[21] Егоров Ю В , Шубин М А (1987) Линейные дифференциальные уравнения с частными производными Основы классической теории "Современные проблемы математики Фундаментальные направления" Т 30 (Итоги науки и техники, ВИНИТИ АН СССР), 262с М ВИНИТИ

[22] Иванов В В (1968) Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений – Киев Наукова думка

[23] Иванов В К , Васин В В , Танана В П (1978) Теория линейных некорректных задач и ее приложения – М Наука

[24] Иоффе А Д , Тихомиров В М (1974) Теория экстремальных задач М Наука

[25] Калиткин Н Н (1978) Численные методы — М Наука

[26] Крейн С Г (1971) Линейные уравнения в банаховом пространстве — М Наука

[27] Кудрявцев Л Д , Никольский С М (1988) Пространства дифференцируемых функций многих переменных и теоремы вложения "Современные проблемы математики Фундаментальные направления" Т 26 (Итоги науки и техники, ВИНИТИ АН СССР) М ВИНИТИ

[28] Куржанский А Б (1977) Управление и наблюдение в условиях неопределенности — М Наука

[29] Лаврентьев М М (1962) О некоторых некорректных задачах математической физики Новосибирск Изд во СО АН СССР

[30] Ладыженская О А (1970) Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости — М Наука

[31] Ладыженская О А (1973) Краевые задачи математической физики М Наука

[32] Лебедев В И (1994) Функциональный анализ и вычислительная математика М ВИНИТИ

[33] Лионс Ж -Л (1972) Некоторые методы решения нелинейных краевых задач – М Мир

[34] Лионс Ж -Л (1972) Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными — М Мир

[35] Лионс Ж -Л , Мадженес Э (1971) Неоднородные граничные задачи и их приложения — М Мир

[36] Люстерник Л А , Соболев В И (1965) Элементы функционального анализа — М Наука

[37] Лянце В Э , Сторож О Г (1983) Методы теории неограниченных операторов – Киев Наукова думка

[38] Марчук Г И (1989) Методы вычислительной математики — М Наука

[39] Марчук Г И (1982) Математическое моделирование в проблеме окружающей среды — М Наука

[40] Марчук Г И (1992) Сопряженные уравнения и анализ сложных систем — М Наука

[41] Марчук Г И , Агошков В И (1981) Введение в проекционно-сеточные методы — М Наука

[42] Марчук Г И , Агошков В И , Шутяев В П (1993) Сопряженные уравнения и методы возмущений в нелинейных задачах математической физики - М Наука

[43] Марчук Г И , Лебедев В И (1981) Численные методы в теории переноса нейтронов М Атомиздат

[44] Марчук Г И , Шайдуров В В (1979) Повышение точности решений разностных схем М Наука

[45] Маслов В П (1965) Теория возмущений и асимптотические методы М Изд-во МГУ

[46] Михайлов В П (1983) Дифференциальные уравнения в частных производных — М Наука

[47] Михлин С Г (1970) Вариационные методы в математической физики М Наука

[48] Морозов В А (1987) Регулярные методы решения некорректно поставленных задач М Наука

[49] Наттерер Ф (1993) Математические аспекты компьютерной томографии — М Мир

[50] Никольский С М (1969) Приближение функций многих переменных и теоремы вложения — М Наука

[51] Понтрягин Л С , Болтянский В Г , Гамкрелидзе Р В , Мищенко Е Ф (1976) Математическая теория оптимальных процессов — М Наука

[52] Осипов Ю С , Васильев Ф П , Потапов М М (1999) Основы метода динамической регуляризации — М Изд-во МГУ

[53] Осипов Ю С , Кряжимский А В , Максимов В И (1991) Задачи динамической регуляризации для систем с распределенными параметрами — Свердловск Изд-во ИМиМ УрО АН СССР

[54] Романов В Г , Кабанихин С И (1991) Обратные задачи геоэлектрики — М Наука

[55] Рябенький В С (1994) Введение в вычислительную математику — М Наука

[56] Самарский А А , Николаев Е С (1978) Методы решения сеточных уравнений — М Наука

[57] Саркисян А С (1991) Моделирование динамики океана С П Гидрометеоиздат

[58] Темам Р (1981) Уравнения Навье–Стокса — М Мир

[59] Тихонов А Н , Арсенин В Я (1986) Методы решения некорректных задач — М Наука

[60] Треногин В А (1980) Функциональный анализ – М Наука

[61] Фурсиков А В (1999) Оптимальное управление распределенными системами Теория и приложения – Новосибирск Научная книга

[62] Чижонков Е В (2002) Релаксационные методы решения седловых задач - М ИВМ РАН

[63] Шутяев В П (2001) Операторы управления и итерационные алгоритмы в задачах вариационного усвоения данных — М Наука

[64] Isakov V (1990) Inverse Source Problems – American Mathematical Society, Providence, Phode Island

[65] Glowinski R , Lions J -L (1996) Exact and approximate controllability for distributed parameter systems — Cambridge University Press Acta Matematica, pp 159-333, (1994) Exact and approximate controllability for distributed parameter systems Cambridge University Press Acta Matematica, pp 269-378

[66] Quarteroni A , Sacco R , Saleri F (2000) Numerical mathematics New York Springer-Verlag

[67] Samarskii A A , Vabishchevich P N (1995) Computational Heat Transfer Chichester Wiley

[68] Agoshkov V I The solvability of a Class of Insensitive Control Problems and Application of Pertubation Methods — *Research Report DNM* 91/2, May, 1991, Moscow Department of Numerical Mathematics, USSR Academy of Sciences, (1991), 9p (In V I Agoshkov, V P Shutjaev editors *Adjoint equations, perturbation algorithms and optimal control* Institute of Numerical Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow (1992))

[69] Agoshkov V I , Marchuk G I On the solvability and numerical solutions of data assimilations problems *Russian J Numer Anal Math Modelling* (1993) 8, No 1, 1–16

[70] Agoshkov V I , Ipatova V M On the solvability a problem of "insensitive"control — *Differential Equations*, vol 30, No 3, 1994 (pp 520–523)

[71] Agoshkov V I , Maggio F A new method for the solution of an inverse problem for the wave equation - *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, vol 4, No 5 (1994)

[72] Agoshkov V I Control Theory Approaches in Data Assimilation Processes, Inverse Problems and Hydrodynamics — *Computer Mathematics and It's Applications*, vol 1, pp 21 39, 1994

[73] Agoshkov V I Functional Approaches to Solving Some Inverse Problems for Second-Order Abstract Equations — J Inv Ill-Posed Problems, vol 3, No 4, pp 259–275 (1995)

[74] Agoshkov V I Application of Mathematical Methods for Solving the Problem of Liquid Boundary Conditions in Hydrodynamics — In "Numerical Analysis, Scientific Computing, Computer Science", Special Volume of ZAMM (Proceedings of ICIAM-95), Berlin, 1996

[75] Agoshkov V I Investigation of a class of inverse problems on optimal boundaries — In Computational Science for the 21-st Century (Ed by M -O Bristeau, G Etgen and others), John Wiley and Sons, Chichester New York–Toronto, 1997 (pp 589–598)

[76] Агошков В И , Ипатова В М Разрешимость задачи усвоения данных альтиметрии в квазигеострофической многослойной модели циркуляции океана — ЖВМ и МФ, 1997 Т 37, № 3 С 355–366

[77] Агошков В И , Ипатова В М Разрешимость задачи вариационного усвоения данных наблюдений — ДАН, 1998 Т 360, № 4 С 439–441

[78] Agoshkov V I , Bardos C Inverse radiative transfer problems the problem on boundary function — Cachan (France) CMLA, ENS, 1998, Preprint No 9801

[79] Agoshkov V I , Bardos C Inverse radiative transfer problems the problem on the right-hand-side function Cachan (France) CMLA, ENS, 1998 Preprint No 9802

[80] Agoshkov V I , Bardos C Optimal control approach in 3D-inverse radiative transfer problem on boundary function Cachan (France) CMLA, ENS, 1998, Preprint No 9813 (34p)

[81] Agoshkov V I , Bardos C Some 3D-inverse problems for transport equation with isotropic soupce and incomplite observation — Cachan (France) CMLA, ENS, 1998, Preprint No 9835 (26p)

[82] Agoshkov V I , Bardos C , Parmuzin E I , Shutyaev V P Numerical analysis of iterative algorithms for an inverse boundary transport problem — Cachan (France) CMLA, ENS, 1998, Preprint No 9812 (21p)

[83] Agoshkov V I , Bardos C , Dubovski P B , Panferov S G Reconstruction of source function for inverse transport problem in a slab – Cachan (France) CMLA, ENS, 1998, Preprint No 9818 (34p)

[84] Agoshkov V I , Bardos C Optimal Control Approach in Inverse Radiative Transport Problems — ESAIM, "Control, Optimization and Calculus of Variations", vol 5, 2000, pp 259–276, Paris, France

[85] Agoshkov V I , Bardos C , Buleev S N Solution of Stokes Problem as an Inverse Problem – Cachan (France) CMLA, ENS, 1999 Preprint No 9935 (28p), "Computational Methods in Applied Mathematics", vol 2 (2002), No 3 pp 213–232

[86] Agoshkov V I Adjoint equations and perturbation algorithms in the optimal trajectory problem //Russ J Numer Anal Math Modelling 2000 V 15, No 3–4 P 195–210

[87] Agoshkov V I , Bardos C , Parmuzin E I , Shutyaev V P Numerical analysis of iterative algorithms for an inverse boundary transport problem // Math Models and Methods in Applied Sciences 2000 V 10, No 1 2000, P 11–29

[88] Agoshkov V I Dubovski P B Solution of the reconstruction problem of a source function in the coagulation–fragmentation equation //Russ J Numer Anal Math Modelling V 17, No 4 P 319–330 (2002)

[89] Agoshkov V I Optimal control methods in inverse problems and computational processes // J Inv Ill-Posed Problems Vol 9, No 3 P 205–218 (2001)

[90] Максимов В И О моделировании управлений в параболических неравенствах // Дифф уравнения 1951 Т 2, № 9 С 1603 1609

[91] Прилепко А И Обратные задачи теории потенциала // Матем заметки 1973 Т 14, № 5 С 755–765

[92] Gervasio P , Lions J -L , Quarteroni A Heterogeneous coupling by virtual control methods — Numer Math (2001) 90 241–264

[93] Шутяев В П Некоторые свойства оператора управления в задаче об усвоении данных и алгоритмы ее решения // Дифф уравнения 1995 Т 31, № 12 С 2063 2076

[94] Шутяев В П Итерационные методы восстановления начальных данных в сингулярно возмущенных эволюционных задачах // ЖВМ и МФ 1997 Т 37, № 9 С 1078 1086

[95] Шутяев В.П. Об усвоении данных в шкале гильбертовых пространств для квазилинейных эволюционных задач // Дифф. уравнения. 1998. Т. 34, № 3. С.383–389.

[96] Шутяев В.П., Пармузин Е.И. Численное решение проблемы об усвоении данных для полулинейного параболического уравнения // Вычислительная математика и математическое моделирование. М.: ИВМ РАН, 2000. С.84–98.

[97] Sivergina I.F. On the evolution equations in initial state estimation problem for parabolic systems // Inverse and Ill-Posed Problems. Moscow: Dialog-MGU, 1996, p.168.

[98] Talagrand O., Courtier P. Variotional assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. Part I: Theory // Quart. J. Roy. Meteorol. Soc. 1987. V. 113. P.1311–1328.

[99] Zalesny V.B. Numerical simulation and analysis of the sensitivity of large-scale ocean dynamics // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1996. V. 11, No 6. P.421–443.

Научное издание

АГОШКОВ Валерий Иванович

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ И СОПРЯЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Лицензия ИД № 03991 от 12.02.2001
Институт вычислительной математики
Российской академии наук
119991 Москва, ул. Губкина, д. 8.

Оригинал-макет С.Л. Герасимовой
Редактор В.В. Лебедева

Подписано в печать 29.12.2002. Формат 60×90 1/16.
Печать офсетная. Бумага газетная.
Печ. л. 16,0. Тираж 225 экз. Заказ № 4505

Отпечатано согласно представленному оригинал-макету
в ФГУП «Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ»
140010 г. Люберцы Московской обл., Октябрьский пр-т, 403.
Тел. 554-21-86