А К А Д Е М И Я   Н А У К   С С С Р
ОРДЕНА ЛЕНИНА СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
Вычислительный центр

На правах рукописи

МАЦОКИН Александр Михайлович

УДК 519.632.4+517.972.5

АМацокин

МЕТОДЫ ФИКТИВНЫХ КОМПОНЕНТ И АЛЬТЕРНИРОВАНИЯ ПО ПОДПРОСТРАНСТВАМ

Специальность 01.01.07 - вычислительная математика

Д и с с е р т а ц и я
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск - 1988

Содержание

В в е д е н и е

Широкий круг задач естествознания приводит к краевым задачам эллиптического типа для дифференциальных уравнений в частных производных. Во многих случаях краевые задачи можно заменить на равносильные вариационные или проекционные задачи в соответствующем гильбертовом пространстве. Для приближенного решения краевых, вариационных или проекционных задач обычно используются разностные и вариационно-разностные методы, приводящие к системам алгебраических (сеточных) уравнений. Современные задачи науки и техники предъявляют все более высокие требования к точности их моделирования, следствием чего является усложнение методов построения и повышение размерности систем сеточных уравнений. Для решения систем сеточных уравнений высокого порядка обычные прямые методы, типа метода Гаусса, неприменимы даже на самых мощных современных ЭВМ. Разработанные в последние пятнадцать-двадцать лет быстрые прямые методы непосредственно могут быть использованы для решения узкого класса систем сеточных уравнений. В общем случае для решения систем разностных или вариационно-разностных уравнений целесообразно строить итерационные процессы, учитывающие специфику дискретных задач и использующие на каждом своем шаге быстрые прямые алгоритмы для решения вспомогательных задач. Кажется естественным требование существования непрерывного аналога процесса, если мы хотим, чтобы скорость его сходимости не замедлялась с ростом размерности дискретной задачи.

Изложенные обстоятельства позволяют сделать вывод об актуальности проблемы построения и исследования итерационных методов решения краевых задач и их дискретных аналогов.

Настоящая диссертация посвящена исследованию и разработке итерационных методов решения краевых задач для дифференциальных уравнений эллиптического типа второго порядка в областях сложной геометрической формы и их вариационно-разностных аналогов. Краевая задача формулируется как задача представления линейного функционала в гильбертовом пространстве. Для решения этой задачи строятся два класса итерационных процессов. Первый является аналогом метода фиктивных областей [125] и называется методом фиктивных компонент. В основе второго класса лежит идея метода альтернирования Шварца по подобластям [129], а сами процессы называются методами альтернирования по подпространствам.

Вопросам построения и решения систем разностных и вариационно-разностных уравнений посвящено огромное количество литературы. Достаточно полное и подробное изложение полученных к настоящему времени результатов в этой области содержится в монографиях, учебных пособиях и обзорах С.К.Годунова и В.С.Рябенького [30], Е.Г.Дьяконова [36], В.П.Ильина [40], А.Д.Ляшко и М.М.Карчевского [47], В.Г.Корнеева [52], Ю.А.Кузнецова [60], В.И.Лебедева [71], В.И.Лебедева и В.И.Агошкова [73], Г.И.Марчука [75], Г.И.Марчука и В.И.Лебедева [78], Г.И.Марчука и В.В.Шайдурова [79], С.Г.Михлина [100], Ж.-П.Обэна [105], Л.А.Оганесяна, В.Я.Ривкинда и Л.А.Руховца [106-107], Г.Н.Положего [111], В.С.Рябенького [118], А.А.Самарского [119], А.А.Самарского и Е.С.Николаева [I20] , А.А.Самарского, И.Е.Капорина, А.Б.Кучерова и Е.С.Николаева [I2I] , Г.Стренга и Дж.Фикса [I29] , Ф.Сьярле [I30] , Р.П.Федоренко [I35] , В.Е.Шаманского [I37] и многих других.

Дадим краткий обзор только тех результатов, которые имеют непосредственное отношение к теме диссертации. Прежде всего отметим, что первым этапом построения вариационно-разностных схем является триангуляция области, или построение сеточной области. К настоящему времени созданы и применяются на практике программы для ЭВМ по решению этой задачи [20, I39] . Следует особо отметить математическую завершенность алгоритмов построения сеток из работ [I7, 29] , идея построения которых была использована в работе [22] . Относительно простые алгоритмы построения триангуляций, топологически эквивалентных прямоугольным, были предложены автором в работах [82, 83], доказательство существования такой триангуляции для произвольной односвязной многоугольной области приведено в работе Е.Г.Дьяконова [38] .

Последние десять-пятнадцать лет можно отметить как годы бурного развития методов решения дискретных краевых задач в областях со сложной геометрической структурой, основанных на применении экономичных прямых методов для решения вспомогательных задач в простых сеточных подобластях. Отправной точкой этого развития следует, по-видимому, считать создание высокоэкономичных прямых метода циклической редукции [I46] и методов, основанных на применении быстрого дискретного преобразования Фурье [I48] , для решения простейших разностных схем в прямоугольнике. Детальное изложение этих алгоритмов имеется, например, в отечественных книгах [75, I20] . В случае, когда дискретная задача задана в области, отличающейся от прямоугольника, можно либо дополнить ее до объемлющего прямоугольника и построить дополнительные (фиктивные) разностные уравнения, либо разделить на подобласти простой формы и свести задачу к системе уравнений, определяющей значения решения в узлах на границах подобластей. При этом обычно предполагается, что сеточные уравнения строятся на сетках топологически эквивалентных прямоугольным. Затем построить прямой или итерационный метод для решения полученных задач с применением быстрых методов решения дискретных задач на прямоугольных сетках.

Первая группа методов была предложена в [9, 76] и исследована в ряде работ советских ученых [II, I2, I9, 42-45, 6I, 63, 66, 67, 8I, 83, 87-89, 98, I2I, I33, I55]. Возможность построения таких методов отмечалась В.И.Лебедевым в [69]. Метод фиктивных компонент в определенном смысле является алгебраическим аналогом метода фиктивных областей [23, I23, I8, 50, 5I, II5, II6] и отличается от последнего тем, что сужение решения расширенной задачи является решением исходной задачи, а не его приближением. К этой группе методов тесно примыкают алгоритмы, основанные на теории разностных потенциалов [I3, I4, 68, I02, II7, II8] или использующие матрицы емкости [32, I47, I50, I54, I57-I59, I6I].

Скорость сходимости метода фиктивных компонент, построенного на основе расширения системы сеточных уравнений уравнениями с нулевыми коэффициентами и правой частью (симметричное расширение), существенным образом зависит от типа краевых условий. Случай естественных краевых условий был исследован Г.П.Астраханцевым в работе [9], где доказана независимость скорости сходимости метода от шага сетки. Случай главных краевых условий был исследован автором в [83], где доказана зависимость скорости сходимости метода от шага сетки. Детальный анализ спектра матрицы перехода (шага) метода фиктивных компонент привел к схеме построения несимметричного расширения системы вариационно-разностных уравнений [87], для которого скорость сходимости метода уже не зависит от параметра сеточной области и в случае главных краевых условий. Аналогичные результаты для систем разностных уравнений были получены И.Е.Капориным и Е.С.Николаевым в [42-45].

Эти результаты позволили построить непрерывное замыкание метода фиктивных компонент и сформулировать его как итерационный процесс для решения задачи представления линейного функционала, заданного в подпространстве гильбертова пространства [89, 156]. В такой формулировке под фиктивной компонентой следует понимать дополнительное подпространство.

Вторая группа методов известна под общим названием методов разделения (разрезания, разбиения, декомпозиции) области. Первым ее представителем можно считать классический метод альтернирования по подобластям Шварца [2, 3, 5, 34, 128], имеющим непустое пересечение. Затем была предложена модификация метода Шварца [48] для случая, когда подобласти имеют лишь общую границу, а для решения краевой задачи [48, 80, 109] или ее разностного аналога [31, 86, 87, 136] строится итерационный процесс, на каждом шаге которого решаются задачи в подобластях с главным и естественным краевыми условиями на общей границе. Аналогичный принцип построения итерационных процессов альтернирования по пространственным подобластям был разработан В.В.Смеловым для задач теории переноса [126, 127].

Изящная теория методов разделения области [72, 73] или методов композиции [71] (т.е. составления решения краевой задачи из решений подзадач) разработана В.И.Лебедевым совместно с В.И.Агошковым, построенные на ее основе алгоритмы описаны, например, в работах [I, 54, 55, 74, I24]. Связь методов разделения области и фиктивных компонент, возможность их исследования с единой точки зрения была отмечена автором в докладе [89] на Международной конференции по дифференциальным уравнениям с частными производными в 1983 году. Этот подход был развит в работах автора и С.В.Непомнящих [88, 9I-97, I03, I04]. К этой же группе методов относятся итерационные процессы, описанные в работах [39, I22]. Отметим также работу Г.М.Кобелькова [49], в которой метод разделения области строится из других принципов. Большое внимание разработке методов разделения области уделяется зарубежными учеными. В работах [32, 33, I42-I45, I5I-I53, I60, I63] получены результаты по построению алгоритмов решения дискретных эллиптических задач, аналогичные результатам советских ученых.

Следует подчеркнуть, что интерес к методам разделения области вызван тем, что во многих практически важных случаях они могут быть рассмотрены как итерационные процессы в подпространствах [56-60, 63-65] с использованием экономичных алгоритмов частичного решения линейных алгебраических систем [4I, 62, I4I]. Это обстоятельство позволяет резко уменьшить требования к объему хранимой информации при решении задач на ЭВМ, что, по-видимому, впервые было отмечено и использовано В.И.Лебедевым при построении KP -методов решения задач теории переноса [70, 78]. Чрезвычайно экономичные методы решения разностных уравнений Лапласа и Пуассона построены в работах [I5, I6, 24-26, II4]. Необходимо также отметить, что с методами разделения области тесно связан метод суммарных представлений [III, I37].

Характеристики сходимости методов фиктивных компонент и разделения области для решения систем сеточных уравнений, аппроксимирующих эллиптические краевые задачи для дифференциальных уравнений второго порядка, зависят от норм операторов продолжения сеточных функций с сохранением нормы W_2^1, а также от способов построения норм в пространстве следов сеточных функций на границах раздела сеточных областей. Эти вопросы были рассмотрены В.Б.Андреевым в [6-8] в связи с исследованием устойчивости разностных схем по граничным условиям Дирихле, а теоремы о продолжении сеточных функций доказаны в работах [9, 108, 21, 90, 162].

Перейдем к краткому изложению содержания диссертации.

Первая глава диссертации посвящена описанию алгоритмов триангуляции двумерных и трехмерных ограниченных областей с кусочно-гладкой границей. В § 1 приводятся основные определения, формулируется задача триангуляции и конструктивно доказывается существование триангуляции, топологически эквивалентной прямоугольной, для двумерной односвязной области. Кроме того, указывается метод построения сеточных областей для случая, когда исходная область представлена в виде объединения конечного числа своих подобластей с кусочно-гладкой границей.

Во втором параграфе рассматривается задача триангуляции (разбиения на тетраэдры) трехмерной области с кусочно-гладкой границей. Сначала, предполагая, что граница области задана параметрически, определяется приграничная система координат, а затем описывается алгоритм триангуляции как для самой области так, и для ее подобластей.

В третьем параграфе кратко описан простой алгоритм триангуляции плоской области с гладкой границей, суть которого заключается в сдвиге приграничных узлов исходной прямоугольной сетки на границу области. Описанные в первой главе алгоритмы позволяют строить сеточные области, границы которых аппроксимируют границу исходной области со вторым порядком точности относительно характерного малого параметра h сеточной области.

Вторая глава диссертации посвящена конструктивному доказательству теорем продолжения сеточных функций с сохранением нормы W_2^1. Четвертый параграф диссертации является вспомогательным, в нем приводятся определения лагранжевых и эрмитовых конечных элементов из монографий В.Г.Корнеева [52] и Ф.Сьярле [130].

В пятом параграфе определяется пространство лагранжевых восполнений на триангуляциях и доказывается ряд утверждений о продолжении сеточных функций. Предполагается, что триангуляция удовлетворяет обычным условиям, т.е. максимум отношения радиусов описанного и вписанного в симплекс (треугольник или тетраэдр) шаров, взятый по всем симплексам триангуляции, ограничен сверху не зависящей от параметра h сеточной области константой, а граница сеточной области приближает границу исходной области с первым или вторым порядком точности по h. Тогда доказано, что норма оператора продолжения оценивается постоянной, не зависящей от h. Но, если сеточную функцию продолжить вне области ее задания нулевыми значениями в узлах дополнительной триангуляции, то норма такого оператора продолжения будет обратно пропорциональна параметру сеточной области.

В шестом и седьмом параграфах диссертации результаты пятого параграфа обобщаются на случай сеточных функций из пространств лагранжевых и эрмитовых восполнений на прямоугольных сетках. Кроме того, пространство эрмитовых восполнений на прямоугольной сетке представляется в виде суммы своих подпространств, в которых определяются эквивалентные нормы.

Третья глава диссертации посвящена построению и исследованию методов фиктивных компонент. Восьмой параграф является вспомогательным. В нем приводятся формулировки краевых задач для дифференциального уравнения эллиптического типа второго порядка и вариационно-разностных задач, их аппроксимирующих в пространствах сеточных функций, определенных во второй главе. Предполагается, что оператор краевой задачи самосопряжен в вещественном гильбертовом пространстве.

В девятом параграфе формулируется и исследуется метод фиктивных компонент для решения систем линейных алгебраических уравнений с симметричной, положительно определенной матрицей. Рассмотрены три способа расширения исходной системы: симметричное и два вида несимметричного расширения. Исследован вопрос об оптимальном выборе симметричного расширения. Результаты по этому варианту метода фиктивных компонент были получены автором совместно с Ю.А.Кузнецовым в работах [6I, 63, I55]. Показывается, что метод фиктивных компонент при несимметричном расширении исходной системы может рассматриваться как симметризуемый итерационный процесс в подпространстве и, следовательно, для ускорения сходимости можно выбирать его параметры на основе вариационных принципов или реализовывать его по формулам чебышевских итерационных методов.

В десятом параграфе оценивается скорость сходимости метода фиктивных компонент в случае симметричного расширения системы вариационно-разностных уравнений. Устанавливается зависимость скорости от параметра сеточной области в случае главных краевых условий и отсутствие таковой в случае естественных краевых условий. Еще раз отметим, что для случая естественных краевых условий эти результаты были получены Г.П.Астраханцевым.

В одиннадцатом параграфе диссертации исследуется скорость сходимости метода фиктивных компонент в случае несимметричного расширения системы вариационно-разностных уравнений. Доказывается, что скорость сходимости метода не зависит от характерного параметра сеточной области как в случае главных, так и в случае естественных краевых условий. Тем не менее, тип краевых условий влияет на количество итераций необходимых для уменьшения энергетической нормы начальной ошибки в заданное число раз. Если в случае естественных краевых условий это количество итераций не зависит от параметра сеточной области, то в случае главных краевых условий может потребоваться $\ln h^{-1}$ итераций. Этот факт объясняется тем, что первая итерация метода фиктивных компонент, назначение которой заключается в сведении процесса в подпространство, увеличивает энергетическую норму начальной ошибки.

В этом параграфе также конструируется двуступенчатый метод для решения систем вариационно-разностных уравнений, аппроксимирующих задачи со смешанными краевыми условиями. Основная идея метода заключается в том, что сначала применяется симметричное расширение системы, соответствующее дополнению области через участки границы, на которых задано естественное краевое условие, и строится соответствующий итерационный процесс. Для приближенного обращения переобуславливающего оператора используется вариант метода фиктивных компонент с несимметричным расширением матрицы. Экспериментально зависимость от шага сетки скорости сходимости метода фиктивных областей для решения дискретных задач со смешанными краевыми условиями была установлена автором совместно с И.Н.Скрипко [98]. Отметим также, что Г.П.Астраханцевым в [13] на основе теории разностных потенциалов построен итерационный процесс для решения разностного уравнения Пуассона с такой же скоростью сходимости.

В двенадцатом параграфе излагается общая теория метода фиктивных компонент в гильбертовом пространстве для решения задачи о представлении линейного функционала в подпространстве. Исходная задача расширяется до задачи во всем пространстве с несамосопряженным оператором, что соответствует несимметричному расширению систем сеточных уравнений. Устанавливается единственность решения расширенной задачи и его связь с решением исходной задачи. Строится итерационный процесс для решения расширенной задачи, доказывается, что ошибка итерационного процесса принадлежит некоторому подпространству, а сам процесс симметризуем. Указывается интервал значений параметра стационарного варианта процесса, при которых норма оператора шага меньше единицы, т.е. процесс сходится с геометрической скоростью. Отмечено, что параметры метода можно выбирать на основе вариационных принципов, в качестве примера приведены формулы реализации метода наискорейшего спуска. В конце параграфа формулируется замечание о невозможности оценки нормы начальной ошибки через норму решения исходной задачи, что объясняет возрастание ошибки на первой итерации метода фиктивных компонент при решении систем вариационно-разностных уравнений с главным краевым условием.

Тринадцатый параграф иллюстрирует возможность применения метода фиктивных компонент для решения систем разностных уравнений, аппроксимирующих задачу Дирихле для бигармонического уравнения. Рассмотрена тринадцатиточечная разностная схема на квадратной сетке в области, составленной из прямоугольников. Построено несимметричное расширение дискретной задачи, определены билинейные формы в пространстве дискретных функций и проверены все условия применимости метода фиктивных компонент, например, доказана возможность продолжения дискретных функций с сохранением нормы (разностного аналога нормы в W_2^2). Отличительной особенностью метода фиктивных компонент является то, что обращение переобуславливающей матрицы на каждом его шаге распадается на решение двух разностных задач Дирихле для уравнения Пуассона. Последнее обстоятельство объединяет метод фиктивных компонент с методами, изложенными в [10, 28, 46].

Четвертая глава диссертации посвящена разработке и исследованию методов альтернирования по подпространствам. В четырнадцатом параграфе для систем вариационно-разностных уравнений конструируется и исследуется метод альтернирования по двум сеточным подобластям, не имеющим общих внутренних точек. Отмечается связь метода с вариантом несимметричного расширения метода фиктивных компонент, единство методики их исследования.

В пятнадцатом параграфе построена теория методов альтернирования по подпространствам для решения задачи представления линейного функционала в гильбертовом пространстве. Предполагается, что гильбертово пространство представлено в виде конечной суммы своих замкнутых подпространств. Тогда классический метод альтернирования по подобластям Шварца обобщается в виде метода альтернирования по подпространствам, на каждом шаге которого последовательно решаются задачи представления линейных функционалов в заданных подпространствах. Если в подпространствах определены новые скалярные произведения, то метод альтернирования по подпространствам формулируется как итерационный процесс, на каждом шаге которого независимо решаются задачи представления линейных функционалов в подпространствах с новыми скалярными произведениями. Сформулированы условия и доказана их необходимость и достаточность для того, чтобы скорость сходимости методов альтернирования по подпространствам была геометрической.

Шестнадцатый параграф является вспомогательным. В нем методы альтернирования по подпространствам формулируются на матричном уровне применительно к решению систем сеточных уравнений.

В двух следующих параграфах теория методов альтернирования по подпространствам применяется для построения итерационных процессов решения систем сеточных уравнений, аппроксимирующих краевую задачу для дифференциального уравнения второго порядка в прямоугольнике или параллелепипеде. В семнадцатом параграфе рассмотрен случай прямоугольных сеток и построены итерационные процессы для решения дискретных задач в подпространствах лагранжевых и эрмитовых восполнений. Основной операцией каждого шага этих процессов является решение разностной задачи с простейшим пяти- или семиточечным разностным оператором. Ранее, для случая лагранжевых восполнений этот алгоритм был предложен В.Г.Корнеевым [52].

В восемнадцатом параграфе рассмотрен случай пространств лагранжевых восполнений на произвольных триангуляциях, каждый симплекс которых удовлетворяет определенным условиям. Исходная триангуляция представляется в виде объединения макроэлементов, каждый из которых состоит из нескольких треугольников (тетраэдров) и в нем выделены четыре вершины. Множество вершин макроэлементов топологически эквивалентно узлам прямоугольной сетки. Пространство лагранжевых восполнений представляется в виде суммы двух подпространств, функции одного из них определяются по значениям в вершинах макроэлементов, значения функций из другого подпространства в этих вершинах равны нулю. В первом подпространстве определяется новое скалярное произведение, порождаемое простейшим пяти- или семиточечным разностным оператором, во втором подпространстве новое скалярное произведение порождается диагональной матрицей. Доказывается, что скорость сходимости метода альтернирования по этим подпространствам не зависит от характерного параметра h сеточной области. Аналогичный подход к построению итерационных процессов рассмотрен в работах [I40], [I64] и применялся Ю.А.Кузнецовым при конструировании высокоэффективных итерационных процессов на последовательности сеток для решения систем разностных уравнений. Результаты §§ I7, I8 используются для оценки объемов вычислений методов фиктивных компонент для решения дискретных задач с заданной точностью.

В заключительном, девятнадцатом параграфе детально изучается возможность применения метода альтернирования по подпространствам для решения систем вариационно-разностных уравнений, аппроксимирующих эллиптические краевые задачи в ограниченных двумерных областях. Предполагается, что исходная область представлена в виде объединения конечного числа непересекающихся подобластей, в каждой из которых отношение максимального и минимального значений коэффициентов дифференциального уравнения характеризуется параметром α_i. Основной задачей параграфа является построение итерационного процесса для решения дискретной задачи, скорость сходимости которого не зависит от этих параметров и слабо зависит от характерного параметра h сеточной области. Если разбиение области таково, что триангуляция каждой подобласти эквивалентна прямоугольной, то нетрудно построить итерационный процесс с переобуславливающей матрицей, обращение которой на каждом шаге процесса состоит из двух этапов. Первый этап заключается в решении дискретных задач Дирихле на равномерных прямоугольных сетках для прямоугольников, соответствующих подобластям разбиения. Второй этап заключается в умножении вектора значений невязки итерационного процесса на специальную матрицу, псевдообратная к которой порождает норму в пространстве следов сеточных функций на объединении границ подобластей. Основное содержание параграфа составляет конструирование такой матрицы и формул реализации операции умножения вектора на эту матрицу. В заключении параграфа указывается способ построения другой специальной матрицы, при котором скорость сходимости итерационного процесса не зависит от характерного параметра сеточной области, но зависит от значений коэффициентов дифференциального уравнения в подобластях. Специальные матрицы строятся на основе теории методов альтернирования по подпространствам пространства следов сеточных функций. Полученные в этом параграфе результаты являются обобщением результатов, описанных в диссертации С.В.Непомнящих [104], на случай уравнений с резко меняющимися коэффициентами.

На защиту выносится совокупность принадлежащих лично автору результатов по построению триангуляций, разработке и доказательству сходимости методов фиктивных компонент и альтернирования по подпространствам в гильбертовом пространстве и их применению к решению систем вариационно-разностных уравнений. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [63, 82, 84-94, 96-98, 155-156] и могут быть сформулированы следующим образом:

1. Предложены и обоснованы алгоритмы триангуляции двумерных и трехмерных областей с кусочно-гладкой границей.

2. Разработана теория построения и исследования сходимости методов фиктивных компонент для решения задачи представления линейного функционала в подпространстве гильбертова пространства и для решения систем вариационно-разностных уравнений,

аппроксимирующих эллиптические краевые задачи для дифференциальных уравнений второго порядка в ограниченных двумерных и трехмерных областях. Построены конструктивные доказательства теорем о продолжении сеточных функций с сохранением нормы в пространстве Соболева W_2^1.

3. Разработана теория построения и исследования сходимости методов альтернирования по подпространствам для решения задачи представления линейного функционала в гильбертовом пространстве.

4. Предложен и обоснован алгоритм решения вариационно-разностной задачи, аппроксимирующей краевую задачу для эллиптического уравнения второго порядка, в пространствах восполнений сеточных функций на произвольной триангуляции с оценкой объема вычислений $O(h^{-n}\cdot \ln h^{-1}\cdot \ln \varepsilon^{-1})$, где h – характерный параметр триангуляции, n – размерность сеточной области, ε – точность решения задачи.

5. Предложен и обоснован алгоритм разделения области для решения вариационно-разностной задачи, аппроксимирующей краевую задачу для эллиптического уравнения второго порядка, в пространстве лагранжевых восполнений на триангуляциях двумерных областей с оценкой объема вычислений $O(h^{-2}|\ln h^{-1}|^2 \ln \varepsilon^{-1})$, не зависящей от коэффициентов дифференциального уравнения.

Результаты диссертации докладывались:

I. На Всесоюзных конференциях по вычислительным методам линейной алгебры (Новосибирск, I973, I976; Шушенское, I979; Москва, I985);

2. На советско-французских симпозиумах по методам решения больших систем функциональных уравнений (Новосибирск, I972, I976; Париж, I974, I978);

3. На Всесоюзных конференциях по вариационно-разностным ме-

тодам в математической физике (Новосибирск, 1977, 1980);

4. На Международной конференции по дифференциальным уравнениям с частными производными (Новосибирск, 1983);

5. На Международной конференции по современным проблемам численного анализа (Москва, 1986);

6. На Международной конференции по численному анализу (Прага, 1987);

на других Всесоюзных и Международных конференциях и школах, а также на семинарах Вычислительного центра СО АН СССР, Отдела вычислительной математики АН СССР.

Автор считает своим приятным долгом выразить глубокую благодарность своему учителю - академику Гурию Ивановичу Марчуку, а также своему старшему товарищу и коллеге - профессору Юрию Алексеевичу Кузнецову за постоянную научную помощь и поддержку при выполнении данной работы.

Автор искренне признателен профессору Вячеславу Ивановичу Лебедеву и Сергею Владимировичу Непомнящих за многочисленные обсуждения и полезную критику, способствовавшие улучшению полученных результатов.

Г Л А В А I

АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ СЕТОЧНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Первым этапом реализации метода конечных элементов при аппроксимации решения дифференциальных уравнений в области Ω является построение ее триангуляции (сеточной области) Ω_h. Обычно сеточную область Ω_h строят в виде объединения конечного числа прямоугольников или треугольников, стороны и площади которых пропорциональны степеням положительного и малого параметра h. Кроме того, желательно, чтобы сеточная область либо совпадала с областью Ω, либо "хорошо" ее аппроксимировала. Описанию некоторых алгоритмов построения триангуляций для областей с кусочно-гладкой границей посвящена эта глава.

§ I. Построение триангуляций двумерных областей

Рассмотрим вещественное векторное пространство $R^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in R\}$ с евклидовой нормой

$$\|x\| = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\Big)^{1/2} \qquad \forall\, x \in R^n .$$

О п р е д е л е н и е I.I. Невырожденным n-симплексом (треугольником при $n=2$, тетраэдром при $n=3$) T с $n+1$ вершиной $v^j \in R^n$, $j=\overline{1, n+1}$, называется открытое односвязное множество

$$T = T(v^1, \dots, v^{n+1}) = \Big\{ x = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j v^j :$$
$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1, \quad 0 < \lambda_j < 1, \; j=\overline{1, n+1} \Big\}, \tag{I.I}$$

причем определитель матрицы

$$A = \begin{bmatrix} v_1^1 & v_1^2 & \dots & v_1^{n+1} \\ v_2^1 & v_2^2 & \dots & v_2^{n+1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ v_n^1 & v_n^2 & \dots & v_n^{n+1} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

отличен от нуля [4].

Для каждого целого числа m, $0 \le m \le n$, m-гранью n-симплекса T будем называть выпуклую оболочку любых $m+1$ вершин T, т.е. m-симплекс в m-мерной гиперплоскости, содержащей $m+1$ вершину грани. Ребром (или стороной) n-симплекса будем называть любую его 1-грань, $(n-1)$-грань будем называть просто гранью (при $n=3$).

О п р е д е л е н и е I.2. Невырожденным криволинейным n-симплексом Ω класса C^m в R^n с вершинами $a^j \in R^n$, $j=1,\dots,n+1$, будем называть ограниченную область $\Omega \subset R^n$ такую, что все вершины a^j принадлежат границе $\partial\Omega$ области Ω и существуют невырожденный n-симплекс T с вершинами $v^j \in R^n$, $j=1,\dots,n+1$, и взаимно однозначное отображение F области $\bar{\Omega}$ на $\bar{T}$:

$$F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in \bar{T} \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \tag{I.2}$$

причем функции $f_j(x)$ непрерывны в $\bar{\Omega}$ вместе со всеми частными производными до порядка m включительно, якобиан преобразования F (при $m \geq 1$)

$$\frac{D(F)}{D(x)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

отличен от нуля при любом $x \in \bar{\Omega}$ и $F(a^j) = v^j$, $j = \overline{1, n+1}$. Прообраз m -грани n -симплекса T будем называть криволинейной m-гранью криволинейного n -симплекса Ω . В дальнейшем любой невырожденный криволинейный n -симплекс будем называть просто n -симплексом.

Определение I.3. Триангулированным множеством класса C^m в R^n будем называть конечную совокупность невырожденных (криволинейных) n -симплексов $\{\Omega_i\}_{i=1}^{K}$ класса C^m , если множество

$$\Gamma_{ij} = \bar{\Omega}_i \cap \bar{\Omega}_j \quad, i \neq j, \quad i,j = \overline{1,K},$$

является общей m-гранью, $0 \leq m < n$, n -симплексов Ω_i и Ω_j , либо пусто, множество Ω

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{K} \bar{\Omega}_i \tag{I.3}$$

является связным.

Рассмотрим n -мерный куб

$$\Pi = \{ x \in R^n : \ 0 < x_i < 1 , \ i = \overline{1,n} \} .$$

Разделим его гиперплоскостями

$$x_i = c_{ij} , \quad j = 0, \dots , m_i ,$$

$$0 = c_{i0} < c_{i1} < \dots < c_{im_i} = 1 ,$$

$$i = 1, \dots , n ,$$

на $N = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$ n-мерных параллелепипедов. Каждай параллелепипед разобьем на k (2 при $n=2$, 6 при $n=3$) n-симплексов, вершины которых являются вершинами параллелепипеда, так, чтобы совокупность из построенных kN n-симплексов образовала триангулированное множество Π . Построенное множество будем называть прямоугольной триангуляцией n-мерного куба Π . Любое подмножество n-симплексов прямоугольной триангуляции n-мерного куба Π , являющееся триангулированным множеством, будем называть прямоугольной триангуляцией соответствующей связной подобласти n-мерного куба Π .

Определение I.4. Триангулированное множество $\Omega = \{ \Omega_i \}_{i=1}^{K}$ будем называть топологически эквивалентным прямоугольной триангуляции подобласти $\Pi_1 \subseteq \Pi$, если существует непрерывное, биективное отображение $\bar{\Omega}$ на $\bar{\Pi}_1$, преобразующее любой n-симплекс из Ω в n-симплекс из Π_1 .

Рассмотрим семейство триангулированных множеств Ω_h , $h \in (0, h_0)$, для которого выполняются следующие условия:

- все n-симплексы из Ω_h являются прямолинейными;
- существуют положительные постоянные N_1 и N_2 такие, что общее число n-симплексов из Ω_h принадлежит ин-

тервалу $[N_1 h^{-n}, N_2 h^{-n}]$;

- существуют положительные постоянные l_1 и l_2 такие, что длина любого ребра любого n -симплекса из Ω_h принадлежит интервалу $[l_1 h, l_2 h]$;
- существует положительная постоянная r_0 такая, что радиус шара, вписанного в любой из n -симплексов множества Ω_h , не меньше величины $r_0 h$.

Перечисленные условия будем называть условием (А), а семейство $\{\Omega_h\}$ семейством с условием (А).

Задача (Т). Пусть в R^n задана ограниченная область Ω . Задачу построения триангуляций области Ω можно сформулировать как задачу построения семейства триангулированных множеств Ω_h , $h \in (0, h_0)$, с условием (А), причем между точками $\partial\Omega$ и $\partial\Omega_h$ может быть установлено взаимно однозначное соответствие и максимальное расстояние между этими точками стремится к нулю при $h \to 0$ (например, это расстояние не больше $\delta_1 h^2$, где $\delta_1 > 0$ [108, стр. 69]).

Эта задача была решена автором для случая выпуклых двумерных и трехмерных областей с гладкой границей в [82-84]. Исходная область была представлена как криволинейной триангулированное множество, топологически эквивалентное прямоугольной триангуляции n -куба. По заданному h триангуляция n -куба дробилась, и с помощью обратного преобразования было получено топологически эквивалентное триангулированное множество. Заменой каждого криволинейного n -симплекса на прямолинейный с теми же вершинами была получена необходимая триангуляция. Обобщение этого алгоритма построения триангуляций, топологически эквивалентных прямоугольным, на случай двумерных областей с кусочно-гладкой границей принципиальных затруднений не вызывает.

Пусть Ω – односвязная ограниченная область в R^2 с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ класса C^2. Напомним, что граница области, или ее часть S, принадлежит классу C^k, если существует $r_0 > 0$ такое, что пересечение шара $K(x, r_0)$ радиуса r_0 с центром в любой точке $x \in \partial\Omega$ с $\partial\Omega$ является связной поверхностью, $K(x, r_0) \cap S$ при $x \in S$ также связная поверхность, уравнение которой в некоторой декартовой системе координат $(y_1, \ldots, y_n)$ с началом в точке x имеет вид

$$y_n = \eta(y_1, \ldots, y_{n-1}),$$

где $\eta \in C(\bar{\omega}(\partial\Omega))$ и $\eta \in C^k(\bar{\omega}(S))$, $\omega(D)$ – проекция $K(x, r_0) \cap D$ на плоскость $y_n = 0$. Будем говорить, что $\partial\Omega \subset R^2$ – кусочно-гладкая кривая класса C^k, если она состоит из конечного числа своих частей класса C^k, стыкующихся между собой под углами отличными от 0 и 2π (см.[108, стр. 12]). ?

Построим приграничную систему координат. Пусть L – связная гладкая часть $\partial\Omega$, соседние? соединяющая точки нарушения гладкости границы области Ω. Будем считать, что L задана параметрически:

$$L(s) = (g_1(s), g_2(s)),$$

где s меняется от 0 до l (длина кривой L), определяет обход Ω против часовой стрелки. Поскольку $L \in C^2$, то функции $g_1(s)$ и $g_2(s)$ дважды непрерывно дифференцируемы на $[0, l]$. Обозначим через $\bar{n}(s)$ вектор внутренней нормали в точке $L(s)$:

$$\bar{n}(s) = (-g_2'(s), g_1'(s)), \quad s \in [0, l].$$

Пусть $\bar{N}(s)$, $s=0,\ell$, - вектор единичной длины с началом в точке $L(s)$ и делящий пополам внутренний угол между участками границы области Ω . Обозначим через $\varphi(s)$, $s=0,\ell$, величину минимального угла поворота вектора $\bar{n}(s)$ относительно точки $L(s)$ до совмещения с $\bar{N}(s)$, взятую с отрицательным знаком, если поворот осуществляется по часовой стрелке. Определим при $s\in[0,\ell]$

$$\varphi(s)=\varphi(0)\cdot\left(1-\frac{s}{\ell}\right)+\varphi(\ell)\cdot\frac{s}{\ell},$$

$$\bar{N}(s)=\bar{n}(s)\cdot\begin{bmatrix}\cos\varphi(s) & \sin\varphi(s)\\ -\sin\varphi(s) & \cos\varphi(s)\end{bmatrix} \tag{I.4}$$

Вектор $\bar{N}(s)$ будем называть внутренней псевдонормалью в точке $L(s)$ относительно области Ω .

Для заданного $\delta>0$ определим область

$$\omega(L,\delta)=\{\,(x,y)=L(s)+n\cdot\bar{N}(s)\ :\ s\in(0,\ell),\ n\in(0,\delta)\,\}. \tag{I.5}$$

Якобиан преобразования от (s,n) к (x,y) координатам легко вычисляется:

$$G(s,n)=\frac{D(x,y)}{D(s,n)}=$$

$$=\cos\varphi(s)-n\cdot\left[g_1''(s)\cdot g_2'(s)-g_1'(s)\cdot g_2''(s)-\frac{\varphi(\ell)-\varphi(0)}{\ell}\right].$$

Пусть $\varphi_0>0$ такое, что гладкие части границы $\partial\Omega$ стыкуются под углами из интервала $[\varphi_0,2\pi-\varphi_0]$. Тогда легко видеть, что

$$-0.5(\pi-\varphi_0) \leq \varphi(s) \leq 0.5(\pi-\varphi_0) \quad \forall s \in [0,\ell],$$

т.е. $\cos\varphi(s) \geq \sin(0.5\varphi_0) > 0$,

так как $0 < \varphi_0 \leq \pi$. Пусть

$$\rho(L) = \max_{s\in[0,\ell]} \left| g_1'' \cdot g_2' - g_1' \cdot g_2'' - \frac{\varphi(\ell)-\varphi(0)}{\ell} \right| ;$$

$\rho(L) < \infty$ в силу непрерывности производных от $g_1(s)$ и $g_2(s)$. Тогда имеем

$$0.5 \cdot \sin(0.5 \cdot \varphi_0) \leq G(s,n) \leq 1.5 \cdot \sin(0.5 \cdot \varphi_0), \tag{I.6}$$

если $\delta \leq \sin(0.5 \cdot \varphi_0) \cdot (2\rho(L))^{-1}$. Следовательно, в области $\overline{\omega}(L,\delta)$ определена приграничная система (s,n) координат [I06, стр. 40].

Л е м м а I.I. Для ограниченной в R^2 области Ω с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ класса C^2, состоящей из m гладких кусков L_i, $i=\overline{1,m}$, существуют положительные постоянные δ_0, c_1, c_2 такие, что в приграничной полоске ω_δ, $\delta \in (0,\delta_0]$,

$$\overline{\omega}_\delta = \bigcup_{i=1}^{m} \overline{\omega}(L_i,\delta), \tag{I.7}$$

по формулам из (I.5) определена приграничная система координат, причем якобиан преобразования от (s,n) к (x,y) координатам непрерывен в $\overline{\omega}(L_i,\delta)$, $i=\overline{1,m}$, и

$$c_1 \leq G(s,n) \leq c_2, \tag{I.8}$$

а само преобразование непрерывно в ω_δ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непрерывность преобразования

$$(x, y) = L_i(s) + n\bar{N}_i(s)$$

практически очевидна, а неравенства (I.8) следуют из (I.6).

Предположим, что для любого $\delta > 0$ преобразование в ω_δ от (s, n) к (x, y) не взаимно однозначно. Пусть $(x_\delta, y_\delta) \in \omega_\delta$ соответствуют различные две пары координат (s_δ, n_δ) и $(\tilde{s}_\delta, \tilde{n}_\delta)$. Так как $\omega_\delta \subset \omega_\eta$ при $\delta < \eta$ и

$$\bigcap_{\delta > 0} \bar{\omega}_\delta = \partial\Omega ,$$

то будет существовать последовательность $(x_\delta, y_\delta) \to$ $\to (x_0, y_0) \in \partial\Omega$ при $\delta \to 0$. Так как по построению преобразование из (I.5) взаимно однозначно в любой $\omega(L_i, \delta)$, $i = 1, \ldots, m$, при достаточно малых δ, то (x_0, y_0) принадлежит двум различным гладким кускам $\partial\Omega$, т.е. является точкой их стыковки. Следовательно, в любой сколь угодно малой окрестности угловой точки (x_0, y_0) построенное преобразование не является взаимно однозначным (см. рис.I.I).

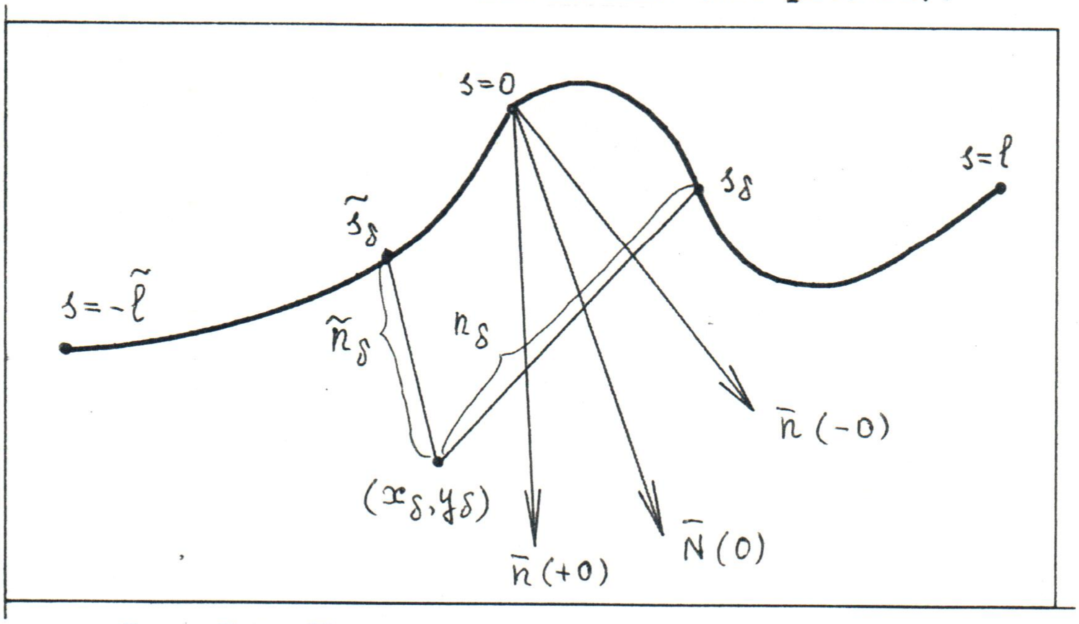

Рис. I.I. Нарушение взаимной однозначности преобразований из (I.5)

Так как

$$\bar{N}(0) = (\bar{n}(+0) + \bar{n}(-0)) / c ,$$

где $c^2 = 2 + 2 \cdot \cos(\bar{n}(+0), \bar{n}(-0))$,

$$f(x,y) = (x - x_0)\bar{N}_2(0) - (y - y_0)\bar{N}_1(0) ,$$
$$f(x,y) = 0$$

– уравнение прямой, проходящей через угловую точку (x_0, y_0) параллельно вектору псевдонормали $\bar{N}(0)$, то можно показать, что при достаточно малых s_δ

$$f(g_1(s_\delta), g_2(s_\delta)) = \sqrt{\frac{1 + \cos(\bar{n}(+0), \bar{n}(-0))}{2}} \cdot s_\delta$$

с точностью до слагаемого меньшего порядка малости по s_δ . Поскольку

$$\cos(\bar{n}(+0), \bar{n}(-0)) \geq -\cos(\pi - \varphi_0) > -1 ,$$

то знак f определяется знаком s_δ и, следовательно, точки с координатами $(s_\delta, 0)$ и $(\tilde{s}_\delta, 0)$ лежат по разные стороны прямой $f(x,y) = 0$. Если, например, точки (x_δ, y_δ) и $(s_\delta, 0)$ лежат по разные стороны этой прямой, то будет существовать точка пересечения $(\tilde{x}, \tilde{y})$ отрезка, их соединяющего и лежащего в $\bar{\omega}(L_i, \delta)$, с псевдонормалью $\bar{N}(0)$, для которого приграничные координаты в $\bar{\omega}(L_i, \delta)$ однозначно не определяются. В силу произвольности $\delta > 0$ это означает, что в $\bar{\omega}(L_i, \delta)$ приграничную систему координат ввести нельзя. Последнее противоречит ранее установленным свойствам преобразования из (I.5). Следовательно, существует $\delta_0 > 0$ такое, что для любого $\delta \in (0, \delta_0)$ преобразование в ω_δ от

(s, n) координат к (x, y) координатам взаимно однозначно. Лемма доказана.

Теперь построим начальную криволинейную триангуляцию области Ω. Для этого сначала каждую приграничную полосу

$$\Theta(L, \delta_0) = \omega(L, \delta_0) \setminus \bar{\omega}(L, \tfrac{1}{3}\delta_0) \qquad (I.9)$$

разделим простой ломаной, соединяющей точки с приграничными координатами $(0, \frac{2}{3}\delta_0)$ и $(\ell, \frac{2}{3}\delta_0)$, на две связные подобласти. Затем для многоугольника $M(\delta_0)$, граница которого состоит из построенных ломаных, применим результат, полученный Е.Г.Дьяконовым в [38], о возможности построения прямолинейной триангуляции, топологически эквивалентной прямоугольной. И наконец, построим необходимые криволинейные треугольники в $\Omega \setminus M(\delta_0)$.

Итак, пусть Ω - односвязная область с кусочно-гладкой границей класса C^2, а ω_{δ_0} ее приграничная полоса, где $\delta_0 > 0$ определяется по лемме I.I. Очевидно, что ω_{δ_0} гомеоморфна кольцу, а кривая $P(s)$, определяемая уравнением в приграничной системе (s, n) координат

$$n = \frac{2}{3}\delta_0$$

будет кусочно-гладкой класса C^1 и гомеоморфной окружности. Следовательно, существует $\rho_0 > 0$ (зависящее от δ_0) такое, что любой шар $K(x, y; \rho_0)$ с центром в произвольной точке (x, y) этой кривой лежит в $\omega_{\delta_0} \setminus \bar{\omega}_{\frac{1}{3}\delta_0}$.

Тогда, определив для каждой подобласти $\theta(L_i, \delta_0)$, $i = 1, \ldots, m$, вида (I.9) конечный строго возрастающий набор параметров

$$s_{i0} < s_{i1} < \ldots < s_{im_i},$$

где $(s_{i0}, 0)$ и $(s_{im_i}, 0)$ приграничные координаты концов гладкого куска L_i границы $\partial\Omega$, получим ломаную с вершинами

$$(s_{ij}, \frac{2}{3}\delta_0), \quad j = 0, \ldots, m_i,$$

лежащую в $\theta(L_i, \delta_0)$. Конечность последовательности практически очевидна. Действительно, выбрав из покрытия кривой $P(s)$ шарами $K(x, y; 0.5\rho_0)$ конечное подпокрытие, определив s-тые координаты последних, дополнив их s-тыми координатами угловых точек и упорядочив по возрастанию, получим один из вариантов искомой конечной последовательности.

Обозначим построенную ломаную через $\partial M(\delta_0)$, она гомеоморфна окружности и, следовательно, ограничивает односвязный многоугольник $M(\delta_0)$ с конечным множеством вершин. Выберем на $\partial M(\delta_0)$ четыре попарно различные точки (например, вершины $M(\delta_0)$) P_i, $i = 1, \ldots, 4$, занумерованные в соответствии с обходом $\partial M(\delta_0)$ при возрастании параметра s. Тогда из [38] следует справедливость следующей леммы.

Лемма I.2. Для вышепостроенного многоугольника $M(\delta_0)$ существует прямолинейная триангуляция, топологически эквивалентная прямоугольной триангуляции квадрата, причем выбранные точки $P_i \in \partial M(\delta_0)$, $i = 1, \ldots, 4$, соответствуют вершинам квадрата.

Введем следующие обозначения.

$\Pi_{M(\delta_0)}$ – прямоугольная триангуляция квадрата Π с элементами (прямолинейными треугольниками) $T_{ij}^{(k)}$, $k = 1, 2$; $i = 0, 1, \ldots, i_1 - 1$; $j = 0, 1, \ldots, j_1 - 1$, топологически эквивалентная прямолинейной триангуляции многоугольника $M(\delta_0)$. Здесь квадрат Π разбит прямыми

$$x = u_i, \quad 0 = u_0 < u_1 < \dots < u_{i_1} = 1,$$
$$y = v_j, \quad 0 = v_0 < v_1 < \dots < v_{j_1} = 1, \qquad (I.10)$$

на прямоугольные ячейки, каждая из которых делится одной из ее диагоналей на два треугольника $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$.

$$F_{M(\delta_0)} : \bar{\Pi} \to \bar{M}(\delta_0) \qquad (I.11)$$

- непрерывное, биективное отображение, линейное в каждом треугольнике $T^{(k)}_{ij} \in \Pi_{M(\delta_0)}$.

$$P_{ij} = F_{M(\delta_0)}(u_i, v_j),$$
$$i = 0, 1, \dots i_1; \quad j = 0, 1, \dots, j_1, \qquad (I.12)$$

- множество вершин триангулированного множества $M(\delta_0)$.

Будем считать, что если $(x,y) \in \partial\Omega$ - является угловой точкой с приграничными координатами $(s, 0)$, то точка $(x,y) + \frac{2}{3}\delta_0 \bar{N}(s)$ принадлежит множеству вершин (I.12). Если это не так и, например,

$$(x,y) + \frac{2}{3}\delta_0 \bar{N}(s) = F_{M(\delta_0)}(u, 0),$$
$$u_{i_0} < u < u_{i_0+1}$$

для некоторого $0 \le i_0 < i_1$, то $\Pi_{M(\delta_0)}$ модифицируем следующим образом. Определим прямые

$$x = u_{i+0.5} = \frac{1}{2}(u_i + u_{i+1}), \quad i = 0, \dots, i_1 - 1,$$

$$y = v_{j+0.5} = \frac{1}{2}(v_j + v_{j+1}), \quad j = 0, \dots, j_1 - 1,$$

Тогда каждый треугольник T из $\Pi_{M(\delta_0)}$ разбивается этими прямыми на два треугольника и прямоугольник. Если треугольник $\bar{T}$ не содержит $(u,0)$, то построенный в нем прямоугольник разделим диагональю на два треугольника. Если $\bar{T}$ содержит $(u,0)$, такой треугольник один, то отрезок, соединяющий точки $(u_{i_0+0.5},0)$ и $(u_{i_0+0.5}, v_{0.5})$, заменим на отрезок, соединяющий точки $(u,0)$ и $(u_{i_0+0.5}, v_{0.5})$. Таким образом, T будет разбит на два треугольника и выпуклый четырехугольник. Последний разделим диагональю на два треугольника.

Очевидно, что построенное триангулированное множество квадрата Π будет топологически эквивалентно прямоугольной триангуляции квадрата. Так как угловых точек на $\partial\Omega$ конечное число, то мы получим требуемую прямоугольную триангуляцию, а следовательно и триангуляцию $M(\delta_0)$

Итак, пусть S сторона треугольника из триангулированного множества $M(\delta_0)$ с вершинами Q_1 и Q_2 из (I.12), приграничные координаты которых равны (s_1, n_1) и (s_2, n_2) соответственно, $s_1 < s_2$, а L_S - гладкий участок $\partial\Omega$ с началом в $(s_1,0)$ и концом в $(s_2,0)$ (см. рис. I.2) и Ω_S - часть ω_{δ_0}, заключенная между S, L_S и псевдонормалями, соединяющими их начала и концы. Поскольку Q_1 и Q_2 лежат на различных псевдонормалях $(s_1 \neq s_2)$, то угол $\psi(s)$ между псевдонормалью $\bar{N}(s)$ и отрезком (Q_1, Q_2) принадлежит открытому интервалу $(0,\pi)$. Так как $\bar{N}(s)$ класса $C^1([s_1,s_2])$, то $\psi(s) \in C^1([s_1,s_2])$ и

$$0 < \psi_0 \leq \psi(s) \leq \pi - \psi_0, \quad s \in [s_1, s_2]. \qquad \text{(I.13)}$$

Следовательно, отрезок S можно задать в виде

$$S(s) = L_S(s) + n_S(s)\,\bar{N}(s), \quad s \in [s_1, s_2], \qquad \text{(I.14)}$$

где $n_S(s) \in C^1([s_1, s_2])$.

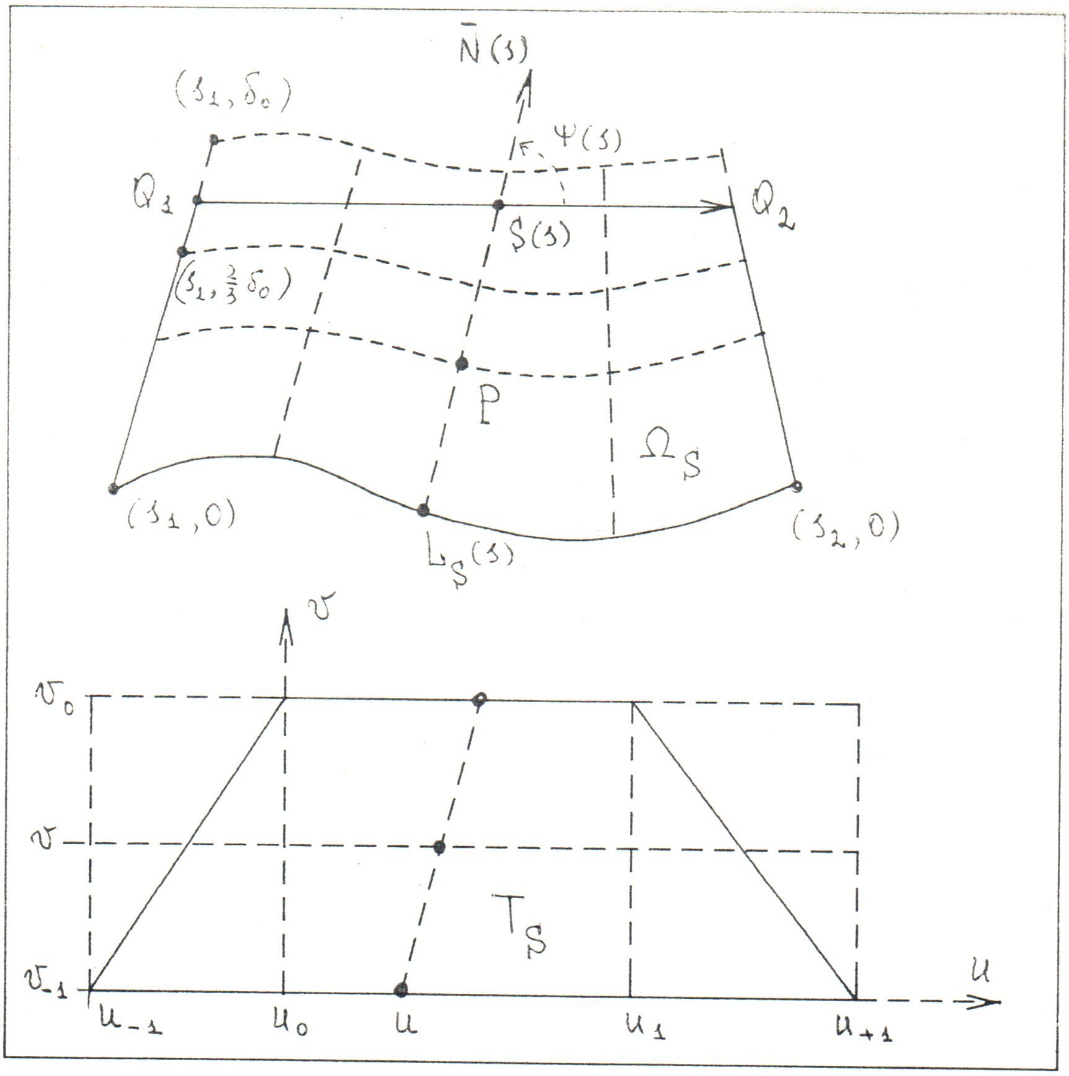

Рис. I.2. Построение триангуляции в приграничной полосе

Пусть $r(s) = \rho(Q_1, S(s))$ - расстояние от точки Q_1 до точки $S(s)$, т.е. $r(s_1) = 0$, а $r(s_2)$ - длина отрезка S. Тогда

$$r(s) = \frac{(L_S(s) - Q_1, Q_2 - Q_1) + \cos\psi(s)}{r^2(s_2)} \qquad (I.15)$$

и $\tau(s) \in C^1([s_1, s_2])$. Очевидно, что $\tau(s)$ – строго возрастающая функция, следовательно $\tau'(s) \geq 0$. Более того, $\tau'(s) \geq \tau_0 > 0$, для некоторого τ_0. Действительно, если $\bar{s} \in [s_1, s_2]$ и $\tau'(\bar{s}) = 0$, то $\tau(s) - \tau(\bar{s}) = o(s-\bar{s})$. Но поскольку $\rho(L_S(s), L_S(\bar{s})) \geq C|s-\bar{s}|$, $C > 0$ и не зависит от s, то псевдонормали $\bar{N}(s)$ и $\bar{N}(\bar{s})$, опущенные из точек $L_S(s)$ и $L_S(\bar{s})$, пересекутся в точке, удаленной от $S(\bar{s})$ на расстояние $o(s-\bar{s})$. Последнее противоречит взаимной однозначности преобразования координат в ω_{δ_0}.

Следовательно, (I.I5) обратимо и $s(\tau) \in C^1([0, \tau(s_2)])$. Рассмотрим преобразование

$$(s, n) \longrightarrow (\tau(s), t(s, n)), \tag{I.I6}$$

где $t(s,n) = n / n_S(s)$. Очевидно, что это преобразование непрерывно вместе со своими первыми производными, взаимно однозначно отображает $\bar{\Omega}_S$ на прямоугольник $[0, \tau(s_2)] \times [0, 1]$. Нетрудно вычислить якобиан преобразования:

$$\frac{D(\tau, t)}{D(s, n)} = \frac{a \bar{N}_2(s) - b \bar{N}_1(s)}{n_S(s)} G(s, n_S(s)),$$

где $(a, b) = Q_2 - Q_1$, $(\bar{N}_1, \bar{N}_2) = \bar{N}(s)$, а $G(s, n)$ – якобиан преобразования (I.5), для которого справедливы неравенства (I.8) из леммы I.I. Так как

$$b \bar{N}_1(s) - a \bar{N}_2(s) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos \psi(s) \geq$$
$$\geq \sqrt{a^2 + b^2} \sin \psi_0 > 0,$$

то

$$C_3 = C_1 \frac{\sqrt{a^2+b^2}\sin\varphi_0}{\delta_0} \leq -\frac{D(r,t)}{D(s,n)} \leq \frac{3\sqrt{a^2+b^2}}{\delta_0} C_2 = C_4 \qquad (I.17)$$

в $\bar{\Omega}_S$. Следовательно, преобразование (I.I6) обратимо и обратное преобразование класса C^1.

Дополним квадрат Π до прямоугольника $(u_{-1}, u_{i_1+1}) \times \times (v_{-1}, v_{j_1+1})$, задав $u_{-1} < u_0$, $u_{i_1+1} > u_{i_1}$, $v_{-1} < v_0$ и $v_{j_1+1} > v_{j_1}$. Предположим, что прообраз отрезка S лежит на прямой $x = v_0$, а прообразом точки Q_1 является (u_0, v_0). Построим взаимно однозначное преобразование прямоугольника $[0, r(s_2)] \times [0,1]$ на трапецию T_S (см. рис. I.2), где $u_{+1} = u_2$, если $i_1 = 1$, и $u_{+1} = u_1$, если $i_1 > 1$:

$$u(r,t) = \frac{1}{r(s_2)} \Big[(1-t)\cdot(r\cdot u_1 + (r(s_2)-r)\cdot u_0) + \\ + t\cdot(r\cdot u_{+1} + (r(s_2)-r)\cdot u_{-1})\Big],$$

$$v(r,t) = v_{-1}\cdot t + v_0\cdot(1-t).$$

Легко видеть, что

$$0 < C_5 = \frac{(v_0 - v_{-1})\cdot(u_1 - u_0)}{r(s_2)} \leq -\frac{D(u,v)}{D(r,t)} \leq$$

$$\leq \frac{(v_0 - v_{-1})\cdot(u_{+1} - u_{-1})}{r(s_2)} = C_6, \quad r \in [0, r(s_2)], \\ t \in [0,1].$$

Следовательно, это преобразование непрерывно обратимо

$$r(u,v) = \frac{r(s_2)\left[u - u_0 + t(u,v)\cdot(u_0 - u_{-1})\right]}{(1-t)(u_1-u_0) + t\cdot(u_{+1} - u_{-1})}, \qquad (I.18)$$

$$t(u,v) = \frac{v_0 - v}{v_0 - v_{-1}} \quad , \tag{I.I8}$$

и

$$0 < C_6^{-1} \leq - \frac{D(r,t)}{D(u,v)} \leq C_5^{-1} .$$

Рассмотрим преобразование

$$(x, y) \in \bar{\Omega}_S \longrightarrow (u,v) \in \bar{T}_S \quad , \tag{I.I9}$$

реализуемое последовательностью ранее описанных преобразований: $(x,y) \to (s,n) \to (r,t) \to (u,v)$. Тогда из вышеизложенных рассуждений вытекает справедливость следующего утверждения.

Л е м м а I.3. Преобразование (I.I9) непрерывно и непрерывно дифференцируемо вплоть до границы, имеют место неравенства

$$C_7 = \frac{C_1}{C_4 \cdot C_6} \leq \frac{D(x,y)}{?} \leq \frac{C_2}{C_3 \cdot C_5} = C_8 \tag{I.20}$$

для любых $(u,v) \in \bar{T}_S$, где постоянные C_i , $i = \overline{1,6}$, являются постоянными из (I.8), (I.I7) и (I.I8). Кроме того, преобразование отрезка S и отрезков, соединяющих точки Q_1 и $L_S(s_1)$, $L_S(s_2)$ и Q_2 (см. рис. I.2), в соответствующие отрезки границы T_S линейно.

Разделим трапецию T_S прямыми $u = u_0$, $u = u_1$ и диагональю, получившегося при этом прямоугольника, на прямоугольные треугольники (от 2 до 4 в зависимости от принадлежности образов точек Q_1 и Q_2 вершинам единичного квадрата Π).

Этому разбиению будет соответствовать разбиение Ω_S на криволинейные треугольники - прообразы построенных треугольников.

Выполним аналогичные построения для каждой стороны S, лежащей на $\partial M(\delta_0)$, треугольников из триангулированного множества $M(\delta_0)$. Так как в соответствии с леммой I.2 таких сторон конечное число, то в результате мы получим прямоугольную триангуляцию $\Pi'(\Omega)$ расширенного прямоугольника

$$\Pi' = (u_{-1}, u_{i_1+1}) \times (v_{-1}, v_{j_1+1})$$

и криволинейную триангуляцию области Ω.

Зададим отображение

$$F : \Pi' \to \Omega$$

такое, что его сужение на Π совпадает с кусочно-линейным отображением (I.II) из $\Pi \to M(\delta_0)$, а на T_S - с отображением обратным к (I.I9). Непрерывность отображения F следует из леммы I.3 и кусочной линейности отображения (I.II). Тогда практически очевидно, что выше полученные результаты можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Т е о р е м а I.I. Для любой односвязной, ограниченной области Ω из R^2 с кусочно-гладкой границей класса C^2, состоящей из конечного числа гладких кусков, стыкующихся между собой под углами отличными от 0 и 2π, существует конечная криволинейная триангуляция, топологически эквивалентная некоторой прямоугольной триангуляции единичного квадрата Π. При этом существует непрерывное взаимно однозначное отображение

$$(u,v) \in \Pi \to (x,y) \in \Omega \,, \qquad (I.2I)$$

сужение которого на любой треугольник триангуляции Π непрерывно вместе со своими первыми производными вплоть до границы и преобразует этот треугольник в соответствующий ему треугольник триангуляции Ω. Кроме того, существуют положительные постоянные c_1 и c_2 такие, что

$$c_1 \leq \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \leq c_2 \qquad \forall (u,v) \in \overline{T}, \tag{I.22}$$

где T – произвольный треугольник триангуляции Π.

Замечание I.I. Если область Ω k-связна, то она представима в виде объединения k-связного многоугольника $M(\delta_c)$ с конечным числом вершин и k приграничных полосок гомеоморфных кольцу, границы которых состоят из связных компонент $\partial\Omega$ и $\partial M(\delta_0)$. Следовательно, построив триангуляцию $M(\delta_0)$ (необязательно эквивалентную прямоугольной), приграничные полосы можно разбить на конечное число криволинейных четырехугольников вида Ω_S (см. рис. I.2) с гладкими сторонами. Расширим $M(\delta_c)$ до многоугольника $M_p(\delta_0)$, проведя из каждой вершины (множества узлов триангуляции $M(\delta_0)$, лежащих на $\partial M(\delta_0)$) отрезки одинаковой длины ℓ_0, лежащие на псевдонормалях, и соединив соответствующие концы псевдонормалей отрезками. Легко показать, что $\ell_0 > 0$ можно выбрать таким, что $M_p(\delta_c) \subset \Omega$. Тогда существует непрерывное отображение $M_p(\delta_c) \to \Omega$, тождественное в $M(\delta_0)$, переводящее любой Ω_S в соответствующий четырехугольник из $M_p(\delta_c)$ по формулам, аналогичным (I.I9), для которого имеет место неравенство (I.20) с другими константами.

Теперь дадим решение задачи (Т) для области Ω, удовлетворяющей условиям теоремы I.I. То есть на Ω задана криволинейная триангуляция $\widetilde{\Omega}$, топологически эквивалентная прямоугольной триангуляции Π с множеством узлов (u_i, v_j), $i=0,1,\dots,i_1$; $j=0,1,\dots,j_1$, из (I.10).

Пусть k – произвольное положительное целое число и $h=k^{-1}$. Построим на Π прямоугольную триангуляцию Π_h по следующему правилу. Каждую сторону произвольного треугольника T триангуляции Π разделим на k отрезков одинаковой длины. Соединим их концы отрезками, параллельными сторонам треугольника. Очевидно (см. рис. I.3), что треугольник T разобьется на k^2 прямоугольных треугольников.

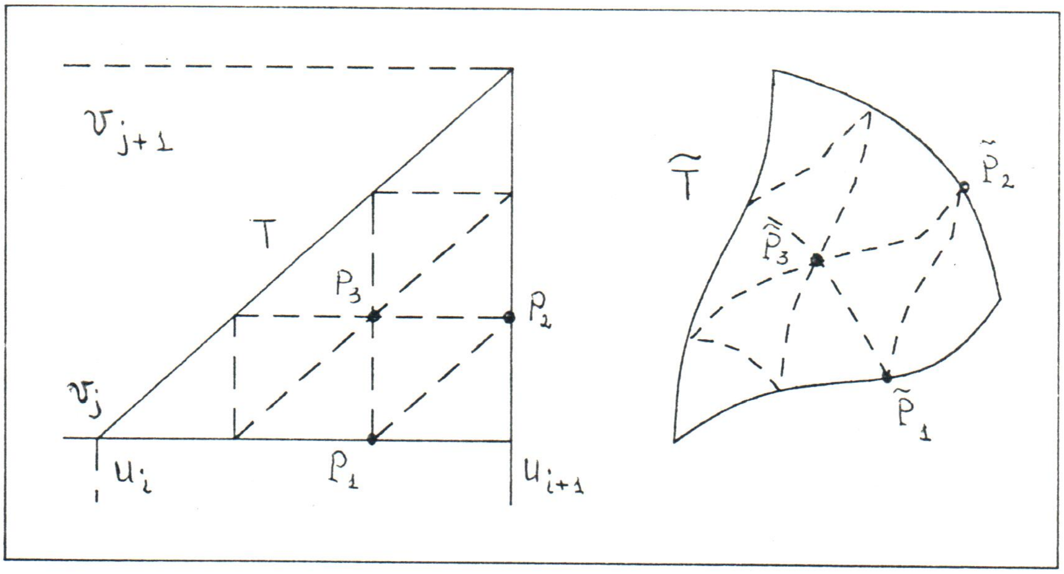

Рис. I.3. Измельчение треугольников T и $\tilde{T}$ при $k=3$.

Л е м м а I.4. Построенная прямоугольная триангуляция Π_h квадрата Π состоит из $2 i_1 j_1 h^{-2}$ треугольников, длины сторон которых принадлежат интервалу $(c_1 h, c_2 h)$, а площади интервалу $(c_3 h^2, c_4 h^2)$, где положительные постоянные c_i, $i=1,2,3,4$ не зависят от h.

Справедливость леммы очевидна.

<u>Замечание I.2</u>. Впредь будем считать, что при $h^{-1}\in[k-1,k]$ $\Pi_h=\Pi_{k^{-1}}$ для любого целого $k\geq 1$.

Преобразование (I.21), примененное к триангуляции Π_h, порождает криволинейную триангуляцию $\tilde{\Omega}_h$ области Ω, т.е. разбиению каждого треугольника $T \in \Pi$ соответствует криволинейное разбиение треугольника $\tilde{T} \in \tilde{\Omega}$.

Заменим каждый элементарный криволинейный треугольник из $\tilde{\Omega}_h$ на прямолинейный треугольник, соединив вершины первого отрезками. Полученное множество обозначим через Ω_h (как множество треугольников и как множество в R^2). Легко построить пример, когда два различных треугольника из Ω_h имеют пересечение с ненулевой площадью. В этом случае Ω_h не будет удовлетворять определению I.3 триангулированного множества.

Т е о р е м а I.2. Для любой области Ω из R^2, удовлетворяющей условиям теоремы I.I, существует $h_0 > 0$ такое, что семейство вышепостроенных множеств прямолинейных треугольников Ω_h, $h \in (0, h_0)$ является семейством триангулированных множеств с условием (A), каждое из которых топологически эквивалентно прямоугольной триангуляции Π_h единичного квадрата Π.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы I.4 следует, что семейство Π_h, $h \in (0, 1]$, удовлетворяет условию (A). Пусть T - произвольный треугольник из триангуляции Π, $T_h \subset T$ - произвольный треугольник из Π_h с вершинами P_1, P_2 и P_3, $\tilde{T}$ и $\tilde{T}_h \subset \tilde{T}$, с вершинами $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2$ и $\tilde{P}_3$ соответствующие им треугольники из $\tilde{\Omega}_h$. При этом $\tilde{P}_i$ -образы P_i при сужении преобразования (I.2I) на T:

$$x = x(u, v),$$

$$y = y(u, v) \quad \forall (u, v) \in T, (x, y) \in \tilde{T}. \qquad (I.23)$$

Обозначим через Q_h треугольник из Ω_h, соответствующий $\tilde{T}_h$.

Легко установить, что необходимым и достаточным условием, при котором множество треугольников Ω_h является триангулированным множеством, является совпадение знаков ориентированных площадей $S(P_1, P_2, P_3)$ и $S(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3)$ каждой пары треугольников T_h и Q_h.

Так как функции $x, y \in C^1(\bar{T})$, то их можно продолжить на всю плоскость с сохранением класса гладкости [I08, стр. 22]. Так как по теореме I.I якобиан

$$J(u,v) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \geq c_1 > 0 \quad \forall (u,v) \in \bar{\tilde{T}}$$

и непрерывен, то существует открытое множество $T' \supset \bar{T}$ такое, что

$$0 < c_1' \leq J(u,v) \leq c_2' \quad \forall (u,v) \in \bar{T}', \qquad (I.24)$$

где постоянные c_1' и c_2' зависят от T, но не зависят от h. Тогда расширенное преобразование (I.23) отображает T' в открытую область $\tilde{T}'$, содержащую замыкание криволинейного треугольника $\tilde{T}$. Следовательно, существует $r_0 > 0$ такое, что замкнутый шар радиуса r_0 с центром в любой точке замыкания $\tilde{T}$ лежит целиком в $\tilde{T}'$ (так как замкнутая ограниченная область компактна) и r_0 не зависит от h.

Введем матрицу Якоби расширенного преобразования (I.23),

$$A(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}, \quad (u,v) \in T'.$$

Из (I.24) следует, что минимальное $\lambda_1(u,v)$ и максимальное $\lambda_2(u,v)$ собственные значения матрицы $A^T A$ непрерывны и положительны в $\bar{T}'$. Тогда по теореме 29 из [I38, стр. 8I] они достигают в $\overline{T}'$ своих экстремальных значений, т.е.

$$\alpha = \min \lambda_1(u,v) > 0 \,, \qquad \beta = \max \lambda_2(u,v) < \infty . \tag{I.25}$$

Заметим, что постоянные α и β не зависят от h .

Тогда длина любой стороны треугольника Q_h , например $\rho(\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2)$, оценивается сверху:

$$\rho(\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2) \leq \sqrt{\beta} \cdot \rho(P_1, P_2) \leq \sqrt{\beta} \cdot C_2 \cdot h \,, \tag{I.26}$$

где C_2 из леммы I.4. Следовательно, для $h \in (0, h_1)$, где

$$h_1 = r_0 \cdot (\sqrt{\beta} \cdot C_2)^{-1} \,,$$

получим, что $Q_h \subset \widetilde{T}'$ и для длин его сторон, например $\rho(\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2)$, справедлива оценка

$$\rho(\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2) \geq \sqrt{\alpha}\; \rho(P_1, P_2) \geq \sqrt{\alpha} \cdot C_1 \cdot h \,, \tag{I.27}$$

где $C_1 > 0$ из леммы I.4.

Далее, из (I.24) и непрерывности всех частных производных первого порядка функций $x(u,v)$ и $y(u,v)$ в $\overline{T}'$ следует их равномерная непрерывность (производных). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\eta_0(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$S(\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2, \widetilde{P}_3) = (J(u_1, v_1) + \varepsilon \cdot h^2 \cdot \Theta(P_1, P_2, P_3)) \times \\ \times S(P_1, P_2, P_3),$$

где (u_1, v_1) – координаты точки P_1 , $|\Theta| \leq C$, $C < \infty$ и не зависит от точек P_1, P_2, P_3 , если длины сторон треугольника T_h не больше $\eta_0(\varepsilon)$. Следовательно, для $h \in (0, h_2)$, где

$$h_2 = \min\{h_1 \,,\, 0.5 \cdot C_1' \cdot C^{-1}\},$$

получим

$$\frac{1}{2} c_1' c_3 h^2 \le S(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3) \le \frac{3}{2} c_2' c_4 h^2 , \qquad (I.28)$$

где постоянные c_3 и c_4 из леммы I.4. Здесь мы положили, что ориентация треугольника T_h такова, что его площадь положительна.

Поскольку h_2 зависит от треугольника $T \in \Pi$, то определим h_0 равным минимальному из h_2, ℓ_1 равной минимальному множителю перед h в (I.27), ℓ_2 равной максимальному множителю перед h в (I.26), γ_1 и γ_2 равными соответственно минимуму и максимуму множителей перед h^2 в (I.28) по всем треугольникам T из начальной триангуляции Π. Очевидно, что определенные константы положительны и не зависят от h и для $h \in (0, h_0)$ Ω_h будет триангулированным множеством, а радиус вписанного в любой треугольник T_h из Ω_h шара не меньше $r_0 h = \gamma_1 \cdot (2\ell_2)^{-1} h$. Следовательно, семейство Ω_h, $h \in (0, h_0)$ является семейством триангуляций с условием (A). Теорема доказана.

<u>Замечание I.3</u>. Если область Ω из R^2 не односвязна, но имеет кусочно-гладкую границу класса C^2, то, в соответствии с замечанием I.I, существует непрерывное, кусочно-гладкое отображение области Ω на многоугольник $M_p(\delta_0)$, разделенный на треугольники и выпуклые четырехугольники. Разделив каждый четырехугольник на два треугольника и измельчив триангуляцию $M_p(\delta_0)$ по заданному $h > 0$, получим семейство Ω_h, $h \in (0, h_0)$, с условием (A). При этом узлы ломаных из $\partial\Omega_h$ будут принадлежать $\partial\Omega$. Очевидно, что доказательство этого факта практически не отличается от доказательства теоремы I.2.

Замечание I.4. Предположим, что исходная область Ω из R^2 разделена, например, на две непересекающиеся подобласти Ω' и Ω'' с кусочно-гладкими границами класса C^2. Тогда можно построить семейство триангуляций $\Omega_h = \Omega'_h \cup \Omega''_h$, $h \in (0, h_0)$, с условием (А), причем $\Omega'_h \cap \Omega''_h = \varnothing$, а узлы ломаных из $\partial\Omega'_h$ или $\partial\Omega''_h$ лежат на $\partial\Omega'$ или $\partial\Omega''$. В этом случае достаточно четырехугольники из $M'_p(\delta_0)$ разделить псевдонормалями, выходящими из вершин $M''_p(\delta_0)$ и, наоборот, изменить триангуляцию $M'(\delta_0)$ и $M''(\delta_0)$ так, чтобы полученные точки на их границах стали вершинами треугольников (см. рис. I.4), и, наконец, построить семейства Ω'_h и Ω''_h с условием (А), $h \in (0, h_0)$, в соответствии с замечанием I.3.

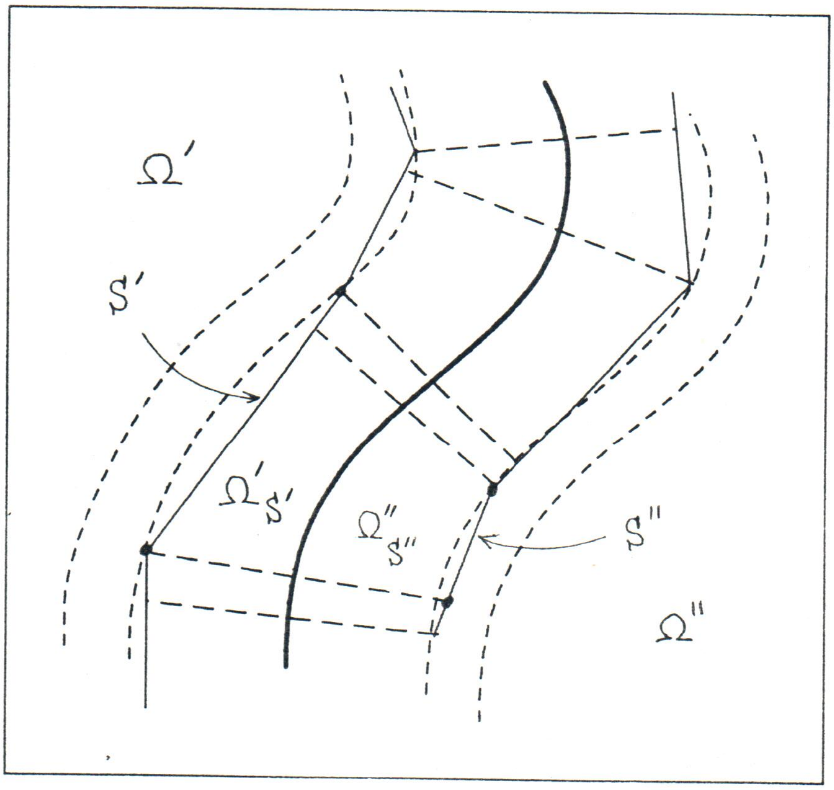

Рис. I.4. Построение согласованного разбиения Ω' и Ω''.

Следствием теоремы I.2 и замечаний I.3, I.4 является

Т е о р е м а I.3. Для любой ограниченной области Ω из R^2 :

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{m} \bar{\Omega}_i, \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing, \; i \neq j,$$

? в целых точки

где Ω_i имеют кусочно-гладкую границу класса C^2 , задача (Т) имеет решение Ω_h, $h \in (0, h_0)$, причем

$$\Omega_h = \bigcup_{i=1}^{m} \Omega_{i,h}, \quad \Omega_{i,h} \cap \Omega_{j,h} = \varnothing, \; i \neq j,$$

и границы $\partial\Omega_{i,h}$ приближают $\partial\Omega_i$ с точностью $O(h^2)$.

Для доказательства теоремы достаточно построить семейство триангуляций Ω_h , $h \in (0, h_0)$, в соответствии с замечанием I.4. Заметим, что по построению узлы $\partial\Omega_{i,h}$ принадлежат $\partial\Omega_i$, а соответствующие стороны треугольников из $\Omega_{i,h}$ стягивают гладкие дуги $\partial\Omega_i$, $i = 1,\dots,m$, и лежат в приграничной полосе $\omega_{\delta_0} \cup \omega_{-\delta_0}$. Следовательно, между этими сторонами (хордами) и дугами с помощью псевдонормалей устанавливается взаимно однозначное соответствие. Кроме того, так как гладкие части границ $\partial\Omega_i$ класса C^2 , то расстояние между хордами и дугами по псевдонормалям будет не больше $\delta_1 h^2$, где $\delta_1 < \infty$ и не зависит от $h \in (0, h_0)$.

§ 2. Построение симплициальных разбиений трехмерных областей

При решении практических задач трехмерные области чаще всего задаются двумя способами: как объединение базовых форм (параллелепипедов, шаров, цилиндров и т.д.) так и описанием границы в виде параметрического задания ее частей. В первом случае обычно можно построить начальное разбиение области на криволинейные симплексы и необходимые отображения на тетраэдр. Проводя измельчение этих симплексов, получают сеточные области.

Во втором случае необходимо по заданной границе построить начальное симплициальное разбиение области. Для многогранников такая задача решается достаточно просто. Для областей с кусочно-гладкими границами построить начальное разбиение в общем случае значительно сложнее.

В этом параграфе обобщается схема § I для построения симплициальных разбиений трехмерных областей, границы которых заданы параметрически. Некоторые из формулируемых утверждений даны без детальных доказательств по причине их громоздкости.

Рассмотрим связную ограниченную область Ω из R^3 с границей $\partial\Omega$. Предположим, что выполняются следующие условия:

$$\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^{m} \bar{S}_i , \quad S_i \cap S_j = \varnothing , \ i \neq j, \qquad (2.1)$$

где S_i - открытые в $\partial\Omega$ множества; существует многогранник M из R^3 с плоскими гранями T_i , $i = 1,\dots,m$, которые соприкасаются либо по вершинам, либо по целым сторонам; и непрерывное биективное отображение

$$\Gamma : \partial\Omega \to \partial M \qquad (2.2)$$

такое, что

$$T_i = \Gamma(S_i)$$

и сужение Γ на S_i является гладким отображением класса C^2 вплоть до границы; существует конус высоты $r_1 > 0$ и радиусом основания $r_0 > 0$ такой, что любой точки $\partial\Omega$ можно коснуться из области Ω или из ее дополнения в R^3.

Условие (2.2) прежде всего характеризует разбиение (2.I) как "правильное", т.е. граница S_i имеет вершины и стороны, а разные S_i и S_j соприкасаются либо по вершинам, либо по целым сторонам.

Будем считать, что граница многогранника M состоит только из треугольных граней. Если это не так, то каждую, нетреугольную грань M можно триангулировать без добавления новых вершин и изменить представление (2.I), разделив S_i на прообразы построенных треугольников относительно преобразования (2.3).

Тогда (2.I) будем называть криволинейной триангуляцией $\partial\Omega$ с множеством вершин (узлов) и сторон, определяемых как прообразы вершин и сторон треугольников T_i, $i = 1, \dots, m$.

Уточним предположение (2.2). Пусть u, v и $w = 1-u-v$ – барицентрические координаты [4] треугольника T границы M, а соответствующий S из (2.I) задается регулярной параметризацией

$$x = g_1(u,v), \quad y = g_2(u,v), \quad z = g_3(u,v), \tag{2.3}$$

где $(x,y,z) = \bar{r}(u,v) \in S$, а линейная комбинация вершин T $u \cdot V_1 + v \cdot V_2 + w \cdot V_3$ – ее образ. Тогда будем предполагать существование положительных постоянным C_1 и C_2 таких, что

$$\bar{n}(u,v) = \frac{\bar{r}_u \times \bar{r}_v}{|\bar{r}_u \times \bar{r}_v|}, \quad \bar{r}_u = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \quad \bar{r}_v = \frac{\partial r}{\partial v}, \tag{2.4}$$

– вектор внутренней нормали [IIO] в точке (x,y,z) непрерывный вместе со своими частными производными вплоть до границы и

$$C_1 \le |\bar{r}_u \times \bar{r}_v| \le C_2 \quad \forall\, (u,v) \in \bar{T}. \tag{2.5}$$

Здесь $\times$ – знак векторного произведения; $|\bar{r}|$ – длина вектора. Неравенства (2.5) можно рассматривать как ограничения на "якобиан" преобразования (2.3) пространственного треугольника в плоский треугольник. Это предположение исключает из рассмотрения области с точками заострения, например, классический конус.

О п р е д е л е н и е 2.I. Область $\Omega \subset R^3$, удовлетворяющую всем вышеперечисленным условиям будем называть областью с кусочно-гладкой границей класса C^2.

Заметим, что любой ограниченный многогранник имеет кусочно-гладкую границу в смысле этого определения, т.е. множество таких областей непусто.

Очевидно, что в любой внутренней точке криволинейного треугольника S_i из (2.I) нормаль $\bar{n}_i$ определяется единственным образом. Если точка $\bar{r}(u,v)$ принадлежит стороне S_i, значит существует S_j, одна сторона которого совпадает со стороной S_i. Определим в этой точке внутреннюю псевдонормаль

$$\bar{N}_{ij}(\bar{r}) = \frac{\bar{n}_i + \bar{n}_j}{|\bar{n}_i + \bar{n}_j|}. \tag{2.6}$$

Если точка является вершиной V криволинейных треугольников $S_{i_1}, \dots, S_{i_k}$, то определим внутреннюю псевдонормаль

$$\bar{N}(V) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{k} \bar{n}_{i_j}(V)}{\left|\sum\limits_{j=1}^{k} n_{i_j}(V)\right|}. \tag{2.7}$$

Легко видеть, что определенные в (2.6) функции непрерывны на $S_{ij} = \bar{S}_i \cap \bar{S}_j$ вместе со своими производными, но в общем случае (см. рис. 2.I)

$$\bar{N}_{ij}(V) \neq \bar{N}(V).$$

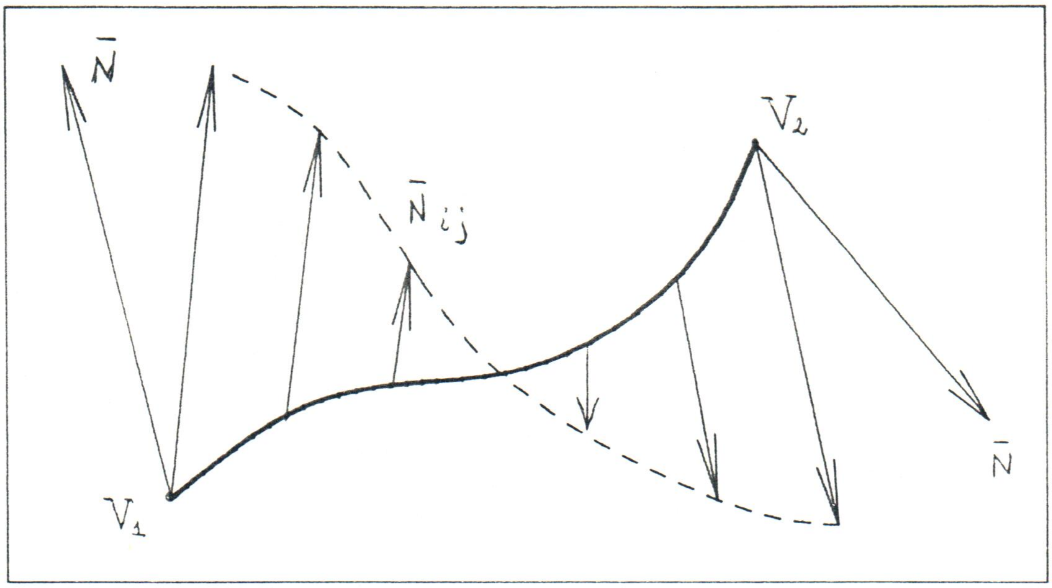

Рис. 2.I. Псевдонормали на стороне S_{ij} треугольников S_i и S_j.

Предположим для определенности, что S_{ij} определяется параметром u как сторона треугольника S_i :

$$\bar{r} = \bar{r}(u, 0), \quad u \in (0, 1).$$

В каждой точке $\bar{r} \in S_{ij}$ зададим репер

$$R(\bar{r}) = \{ \bar{N}_{ij}(\bar{r}), \bar{r}_u, \bar{N}_{ij} \times \bar{r}_u \} \tag{2.8}$$

При $u = 0; 1$ определим $\varphi(u)$ и $\psi(u)$ в соответствии с рис. 2.2. Если полученный угол больше π , то переопределим его, вычитая из полученного значения 2π .

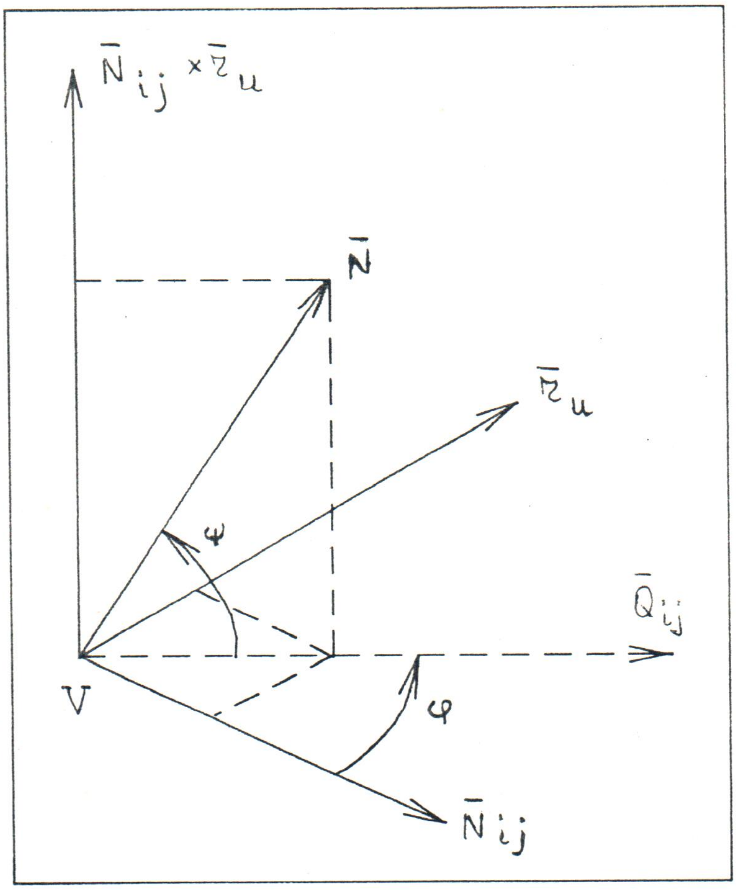

Рис. 2.2. Репер $R(V)$, где V - вершина S_i

Определим также матрицы поворота $Q_\varphi(u)$ в плоскости $\{\bar{N}_{ij}, \bar{r}_u\}$ на угол $\varphi(u)$ и $Q_\psi(u)$ в плоскости $\{Q_\varphi(u)\cdot\bar{N}_{ij}(u),\ \bar{N}_{ij}\times\bar{r}_u\}$ на угол $\psi(u)$, т.е.

$$\bar{N}(u) = Q_\psi(u)\cdot Q_\varphi(u)\cdot\bar{N}_{ij}(u)\ . \tag{2.9}$$

Для $u\in(0,1)$ определим

$$\varphi(u) = u\cdot\varphi(1) + (1-u)\cdot\varphi(0)\ .$$

Тогда вектор

$$\bar{Q}_{ij}(u) = Q_\varphi(u)\cdot\bar{N}_{ij}(u)$$

с началом в точке $\bar{r}(u) \in S_{ij}$ будет направлен внутрь области Ω. Для любого $u \in [0,1]$ можно определить непрерывные функции $\bar{\Psi}(u)$ и $\underline{\Psi}(u)$ такие, что для любого $\Psi(u) \in (\underline{\Psi}(u), \bar{\Psi}(u))$ вектор $Q_\Psi(u)\bar{Q}_{ij}(u)$ также будет направлен внутрь области Ω и

$$\bar{\Psi}(u) - \underline{\Psi}(u) \geq const > 0 \quad \forall\, u \in [0,1],$$

$$\underline{\Psi}(u) < \Psi(u) < \bar{\Psi}(u), \quad u = 0, 1.$$

Тогда можно построить гладкую функцию $\Psi(u)$ на $[0,1]$, удовлетворяющую этим неравенствам. Таким образом, формула (2.9) будет определять внутреннюю псевдонормаль класса C^1 на замкнутой стороне S_i и S_j.

Проведя аналогичные построения на остальных сторонах треугольника S_i, определим непрерывный вектор $\bar{N}_i(u,v)$ внутренней псевдонормали для области Ω на границе треугольника S_i, имеющий непрерывные производные вдоль каждой стороны S_i.

Продолжим его в S_i следующим образом. Рассмотрим в каждой точке $\bar{r} \in S_i$ репер $\{\bar{n}_i(u,v), \bar{r}_u(u,v), \bar{r}_v(u,v)\}$. Тогда единственным образом определены на ∂S_i гладкие функции $\alpha(u,v)$, $\beta(u,v)$, $\gamma(u,v)$ такие, что

$$\bar{N}_i(u,v) = \alpha(u,v)\cdot\bar{r}_u(u,v) + \beta(u,v)\cdot\bar{r}_v(u,v) + \gamma(u,v)\cdot\bar{n}_i(u,v), \tag{2.10}$$

причем $\gamma(u,v) \geq \gamma_0 > 0$. Продолжим α, β и γ внутрь треугольника $\{(u,v) : u>0, v>0, u+v<1\}$ следующим образом. Разделим треугольник на четыре части (см. рис. 2.3). В треугольнике T_1 функции α, β и γ определим как линейные функции по значениям в вершинах треугольника T_1. Очевидно, что $\gamma(u,v) \geq \gamma_0$ при $(u,v) \in T_1$.

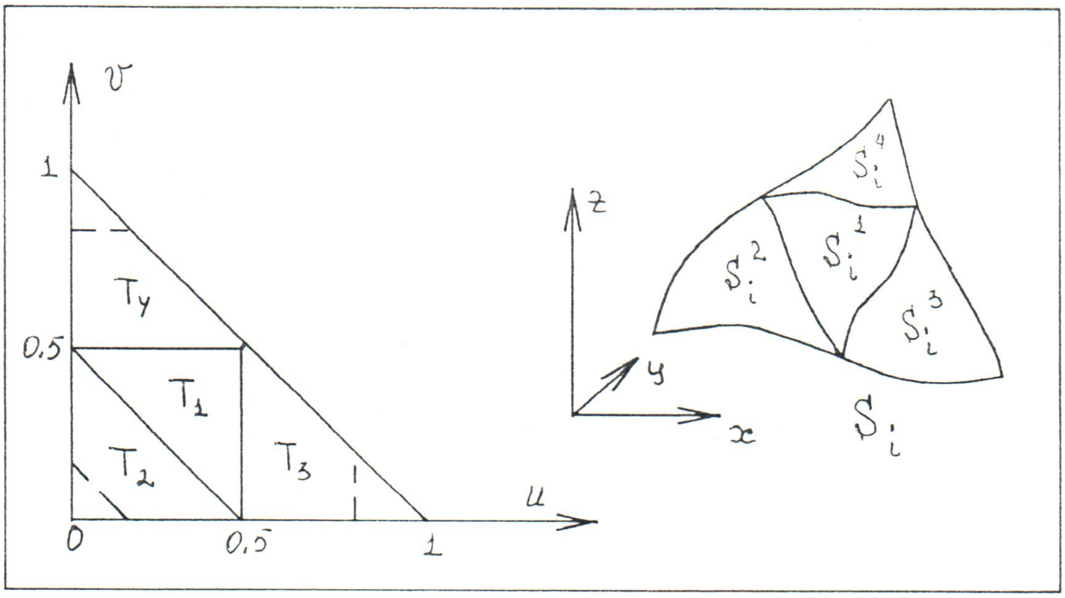

Рис. 2.3. Разбиение треугольника

В треугольнике T_i, $i=2,3,4$, функции α, β и γ определяем как линейные функции на каждой прямой, параллельной общей стороне треугольников T_i и T_1, по значениям функций в точках пересечения прямой с остальными сторонами T_i.

Легко показать, что построенный продолжения непрерывны в и непрерывно дифференцируемы в T_i, $i=\overline{1,4}$. Кроме того, $\gamma(u,v) \geq \gamma_0$ в T.

Тогда, формула (2.10) будет определять вектор внутренней псевдонормали в любой точке S_i. Обозначим через S_i^j части S_i, соответствующие разбиению стандартного треугольника (см. (2.3)) на четыре части. Тогда имеет место следующий результат.

Л е м м а 2.I. Для любой области $\Omega \subset R^3$ с кусочно-гладкой границей класса C^2 (по определению 2.I) существуют положительные постоянные δ_0, c_1 и c_2 такие, что преобразование

$$(x,y,z)=\bar{r}(u,v)+n\,\bar{N}(u,v),\qquad \bar{r}(u,v)\in\partial\Omega,\quad 0<n<\delta, \tag{2.11}$$

где $\bar{N}(u,v)$ - вектор внутренней псевдонормали в точке $\bar{r}(u,v)$, определяемый по (2.10), взаимно однозначно при любом $\delta\in(0,\delta_0)$, а его якобиан непрерывен в каждой пространственной криволинейной призме

$$\Pi_i^j(\delta)=\{(x,y,z)=\bar{r}(u,v)+\bar{N}(u,v)\cdot n,\ 0<n<\delta,\ \bar{r}(u,v)\in S_i^j\},\quad j=1,\dots,4;\ i=1,\dots,m, \tag{2.12}$$

и имеют место неравенства

$$C_1\le\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,n)}\le C_2 . \tag{2.13}$$

Теперь рассмотрим следующую конструкцию. Пусть S_i^j один из треугольников $j=1,\dots,4;\ i=1,\dots,m$. Зададим целое $k\ge 1$. Стандартный (параметрический) треугольник разобьем на k^2 малых треугольников и S_i^j разобьется на k^2 малых криволинейных пространственных треугольников (случай $k=2$ изображен на рис. 2.3 для S_i). Тогда

$$\partial\Omega=\bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{4}\bigcup_{l=1}^{k^2}S_i^{j,l} . \tag{2.14}$$

Обозначим через S любой из этих треугольников, считая, что $\bar{r}(u,v)$ - его параметризация, $\bar{r}(u_i,v_i)$ - его вершины и

$$P_i=\bar{r}(u_i,v_i)+\frac{2}{3}\delta_0\cdot\bar{N}(u_i,v_i),\qquad i=1,2,3,$$

для определенности считая $u_1\ne u_2$, $v_1\ne v_3$. Определим вектор $\bar{N}_S(u,v)$ по формуле

$$\bar{N}_S(u,v)=(1-\lambda-\xi)\,P_1+\lambda P_2+\xi P_3-\bar{r}(u,v),$$

где $\lambda=\dfrac{u-u_1}{u_2-u_1}$, $\xi=\dfrac{v-v_1}{v_3-v_1}$. Рассмотрим преобразование $(u,v,n)\to(x,y,z)$:

$$(x,y,z)=\bar{r}(u,v)+n\,\bar{N}_S(u,v),\qquad (2.15)$$
$$\bar{r}(u,v)\in S,\quad n\in(0,1),$$

множество всех таких точек обозначим через $\omega(S)$. Тогда будет иметь место следующий результат.

Л е м м а 2.2. При выполнении условий леммы 2.1 существует целое $k\geq 1$, что $\partial\Omega$ представимо в виде (2.14) и в приграничной полосе $\omega\subset\Omega$:

$$\bar{\omega}=\bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{4}\bigcup_{\ell=1}^{k^2}\bar{\omega}(S_i^{j,\ell})\qquad (2.16)$$

можно ввести непрерывную систему приграничных координат (u,v,n), а якобиан преобразования (2.15) в $\bar{\omega}(S_i^{j,\ell})$ непрерывен и

$$0<c_3\leq\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,n)}\leq c_4$$

для любых i, j и ℓ.

Далее, заметим, что

$$M=\Omega\setminus\bar{\omega}$$

является многогранником и, следовательно, его можно представить как объединение конечного числа прямолинейных тетраэдров, сохраняя количества вершин на ∂M.

Каждую пространственную призму $\omega(S_i^{j,\ell})$ из (2.16) разделим на три криволинейных симплекса. Для этого ребра ∂M ориентируем так, чтобы одна из вершин каждого треугольника ∂M была начальной точкой двух ориентированных его сторон.

Алгоритм построения необходимой ориентации достаточно прост. Перебираем последовательно все вершины. Для каждой вершины рассматриваем все неориентированные ребра, содержащие эту вершину, и определяем ориентацию ребра, считая вершину его конечной точкой.

Если P_i и P_j начальная и конечная точки ребра, то проводим криволинейную диагональ, соединяющую $\bar{r}(u_j, v_j)$ и P_i. Например (см. рис. 2.4), криволинейный тетраэдр с вершинами $P_1, P_2, \bar{r}(u_1, v_1)$ и $\bar{r}(u_3, v_3)$ определяется как следующее множество точек:

$$(x,y,z) = \bar{r}(u,v) + n\,\bar{N}_S(u,v), \quad \bar{r}(u,v) \in S_i^{j,\ell},$$

$$d_2(u,v)\cdot d^{-1} < n < [d_1(u,v) + d_2(u,v)]\, d^{-1},$$

где

$$d = \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$d_2 = \det \begin{bmatrix} u_1 & u & u_3 \\ v_1 & v & v_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad d_1 = \det \begin{bmatrix} u & u_2 & u_3 \\ v & v_2 & v_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, приходим к разбиению области Ω на криволинейные тетраэдры $\omega_i^{j,\ell,n}$ из $\bar{\omega}$ и прямолинейные тетраэдры T_i (L штук) из T :

$$\bar{\Omega} = \left(\bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{4} \bigcup_{l=1}^{k^2} \bigcup_{n=1}^{3} \bar{\omega}_i^{j,l,n} \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{L} \bar{T}_i \right). \qquad (2.17)$$

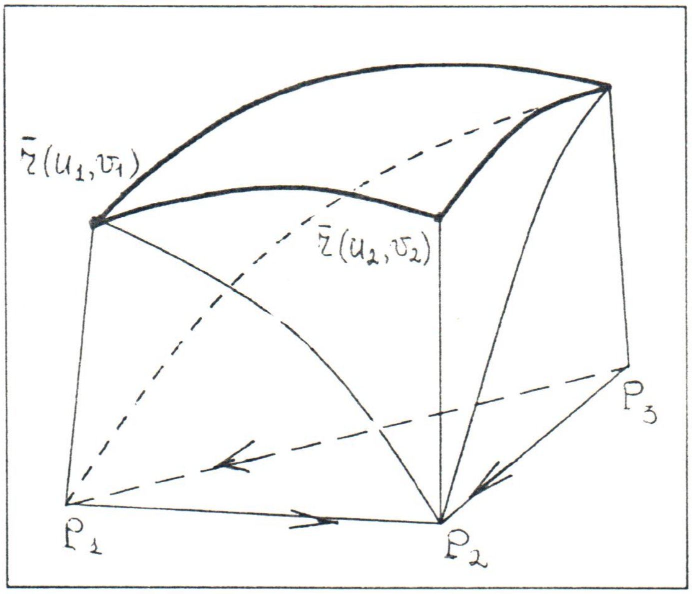

Рис. 2.4. Разбиение призмы на криволинейные симплексы

И наконец, измельчая симплексы из (2.17) при некотором достаточно малом $h>0$, строя на вершинах полученных криволинейных тетраэдров прямолинейные тетраэдры и проводя рассуждения, аналогичные двумерному случаю, получим следующий результат.

Теорема 2.1. Для любой ограниченной области $\Omega \subset R^3$ с кусочно-гладкой границей класса C^2 в смысле определения 2.1 существует решение задачи (Т), сформулированной в § 1.

Замечание 2.1. Предположим, что, область Ω из R^3 составлена из подобластей

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{t} \bar{\Omega}_i, \qquad \Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing, \; i \neq j.$$

параметризация общих частей границ подобластей одинакова, сами подобласти удовлетворяют определению 2.I. Кроме того, предположим, что для любой точки $P \in S = \bigcup_{i=1}^{t} \partial\Omega_i$ существует окрестность, которая разбивается совокупностью границ S на связные открытые подмножества, гомеоморфные шару. Тем самым исключается случай, когда, например, область разбивается на две подобласти, границы которых имеют только одну общую точку. Тогда можно показать, что задача (Т) в этом случае имеет решение

$$\bar{\Omega}_h = \bigcup_{i=1}^{t} \bar{\Omega}_{i,h}, \qquad \Omega_{i,h} \cap \Omega_{j,h} = \emptyset, \ i \neq j,$$

где $\Omega_{i,h}$ - решение задачи (Т) для подобласти Ω_i, т.е. это замечание является аналогом теоремы I.3.

§ 3. Модификация приграничных узлов

Эффективными с практической точки зрения методами построения сеточных областей с "хорошей" аппроксимацией границы исходной области являются методы, основанные на идее модификации некоторой заданной триангуляции в окрестности границы области. Один из таких методов был предложен и исследован автором в работах [82, 83].

Рассмотрим ограниченную связную область $\Omega \subset R^2$ с гладкой границей $\partial\Omega$ класса C^2. Пусть заданы K - максимум модуля кривизны $\partial\Omega$ и $r_0 > 0$ такое, что шары радиуса r_0, касательные к $\partial\Omega$ внешним и внутренним образом, не имеют с $\partial\Omega$ иных общих точек. Определим

$$\delta = \min\left\{\frac{r_0}{2}, \frac{1}{2K}\right\}, \quad h_0 = \frac{\delta}{2\sqrt{2}}. \tag{3.I}$$

На некотором прямоугольнике $D \supset \bar{\Omega}$ построим квадратную сетку D_h с шагом $h \leq h_0$ и узлами

$$(x_i, y_j): \quad x_i' = ih, \quad y_j' = jh, \quad i = \overline{0,n}, \quad j = \overline{0,m} \tag{3.2}$$
$$x_i = a + x_i', \quad y_j = b + y_j'.$$

Каждому узлу (x,y) квадратной сетки D_h поставим в соответствие точку (u,v) по следующему правилу. Обозначим через A, B, C и E ближайшие к (x,y) точки пересечения $\partial\Omega$ с лучами, исходящими из (x,y) и параллельными осям координат (см. рис. 3.I). Если какой-либо точки не существует, то считаем, что она бесконечно удалена.

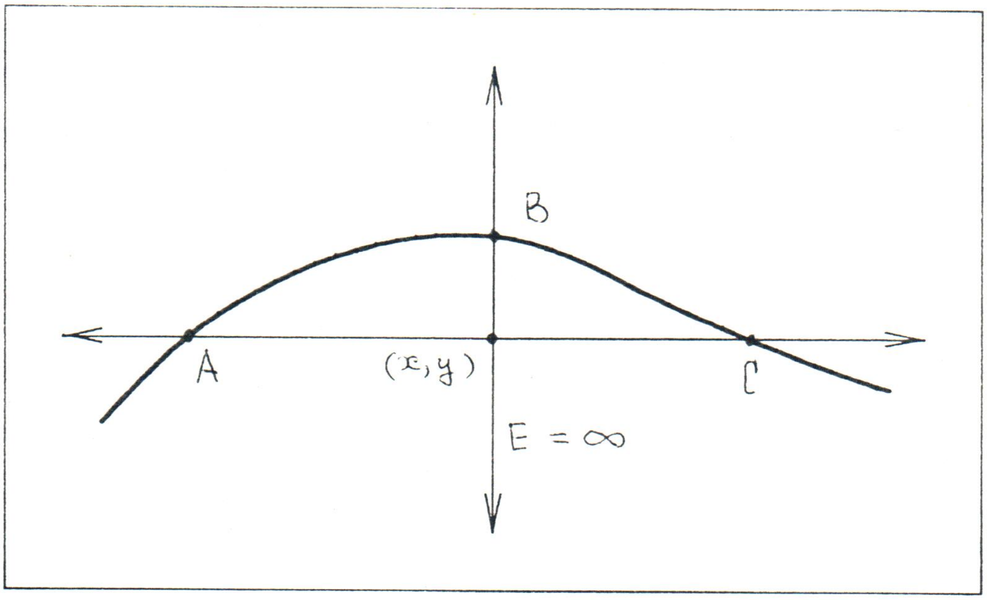

Рис. 3.I. Пересечение $\partial\Omega$ с лучами

Расстояния от точек A, B, C и E до узла (x,y) обозначим соответственно через x_-, y^+, x_+ и y^-, пусть l – минимальное из этих расстояний. Тогда при $l > 0.5h$ положим

$$(u,v) = (x,y) \tag{3.3}$$

при $l = 0.5h$ положим

$$(u,v)=\begin{cases} B, & y^+=\ell, \\ C, & y^+\neq\ell,\ x_+=\ell, \\ (x,y), & y^+\neq\ell,\ x_+\neq\ell, \end{cases} \tag{3.4}$$

при $\ell<0.5h$ положим

$$(u,v)=\begin{cases} B, & y^+=\ell, \\ C, & y^+\neq\ell,\ x_+=\ell, \\ E, & y^+\neq\ell,\ x_+\neq\ell,\ y^-=\ell, \\ A, & y^+\neq\ell,\ x_+\neq\ell,\ y^-\neq\ell \end{cases} \tag{3.5}$$

Таким образом, квадратной сетке D_h сопоставится некоторое ее искажение $\widetilde{D}_h$ из выпуклых четырехугольников A_{ij} с вершинами $(u_{i_1 j_1}, v_{i_1 j_1})$, $i_1=i,i+1$; $j_1=j,j+1$. Проведем в каждом четырехугольнике A_{ij} одну из двух диагоналей так, чтобы минимум из площадей получаемых при этом треугольников был максимальным. При этом выбираемая диагональ не должна пересекать вторую диагональ, если последняя соединяет принадлежащие $\partial\Omega$ вершины. Полученную триангуляцию также будем обозначать через $\widetilde{D}_h$. Имеет место следующий результат [82].

Л е м м а 3.I. Длины сторон и площади треугольников построенной триангуляции $\widetilde{D}_h$ при $h\in(0,h_0]$, h_0 определено в (3.I), принадлежат соответственно интервалам $[\ell_1 h, \ell_2 h]$ и $[\gamma_1 h^2, \gamma_2 h^2]$, где

$$\ell_1=0.5,\quad \ell_2=\frac{3}{\sqrt{2}},\quad \gamma_1=0.125,\quad \gamma_2=1+\gamma_1,$$

а синус любого из углов треугольников D_h не меньше $0.1\sqrt{10}$

Очевидно, что триангуляция $\widetilde{D}_h$ топологически эквивалентна некоторой прямоугольной триангуляции D_h прямоугольника

D . Обозначим через Ω_h совокупность всех треугольников $\tilde{D}_h$, вершины которых принадлежат $\Omega \cup \partial\Omega$. Легко показать, что в силу гладкости $\partial\Omega$ расстояние между точками $\partial\Omega_h$ и $\partial\Omega$, по нормали к последней, не превышает величины $\delta_1 h^2$ для некоторого $\delta_1 > 0$, зависящего только от кривизны $\partial\Omega$.

Следствием леммы 3.I и только что изложенных рассуждений является

Т е о р е м а 3.I. Для любой ограниченной области $\Omega \subset R^2$ с гладкой границей класса C^2 задача (Т), сформулированная в § I, имеет решение: семейство триангуляций Ω_h , $0 < h < h_0$, каждая из которых топологически эквивалентна некоторому подмножеству прямоугольной триангуляции прямоугольника, а $\partial\Omega_h$ приближает $\partial\Omega$ со вторым порядком по h .

Этот алгоритм был обобщен Ю.А.Ткачевым на случаи двумерных областей с кусочно-гладкой границей [I3I] и трехмерных областей с гладкой границей [I32].

ГЛАВА 2

ПРОСТРАНСТВА СЕТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

В этой главе приводятся определения лагранжевых и эрмитовых конечных элементов, соответствующих пространств восполнений дискретных функций из монографий В.Г.Корнеева [52] и Ф.Сьярле [130]. Основным содержанием главы является конструктивное доказательство теорем о продолжении сеточных функций с сохранением нормы пространства Соболева W_2^1.

§ 4. Конечные элементы

Рассмотрим в R^n, $n=2,3$, канонический n-симплекс

$$T=\Big\{\bar{x}\in R^n:\quad \bar{x}=\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\,\bar{e}_i\,,\quad \lambda_i\geq 0\,,\qquad \lambda_0+\lambda_1+\ldots+\lambda_n=1\Big\}, \tag{4.1}$$

где $\bar{e}_0$ - начало декартовой системы координат, а $\bar{e}_i$ - ее орты, $i=1,\ldots,n$. По заданному целому $k\geq 1$ определим множество узлов

$$\Sigma_k(T)=\Big\{\bar{x}_\alpha\in T:\quad \bar{x}_\alpha=\tau\cdot\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\,\bar{e}_i\,,\qquad |\alpha|=k\,,\quad \tau=k^{-1}\Big\}, \tag{4.2}$$

где $\alpha=(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ – мультииндекс с целочисленными неотрицательными компонентами и $|\alpha|=\alpha_0+\alpha_1+\dots+\alpha_n$. Очевидно [130], что $\Sigma_k(T)$ содержит $\Phi(k,n)$ попарно различных точек из T, где

$$\Phi(k,n)=\frac{(n+k)!}{n!\cdot k!},$$

и является множеством всех узлов разбиения T на k^n равновеликих симплексов гиперплоскостями $\lambda_i=j\tau$, $j=1,\dots,k-1$; $i=0,1,\dots,n$, где $\lambda=(\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ система барицентрических координат в T. Таким образом, имеем представление T в виде объединения симплексов:

$$T=\bigcup_{i=1}^{k^n} T_i \quad . \tag{4.3}$$

Впредь будем придерживаться следующих обозначений для точек T:

$$\bar{x}=(x,y)\in R^2 \;\Rightarrow\; \lambda_0=1-x-y,\;\; \lambda_1=x,\;\; \lambda_2=y\;;$$

$$\bar{x}=(x,y,z)\in R^3 \;\Rightarrow\; \lambda_0=1-x-y-z,\;\; \lambda_1=x,\;\; \lambda_2=y,\;\; \lambda_3=z.$$

Обозначим через $P_k(T)$ множество полиномов вида

$$p(\bar{x})\equiv\tilde{p}(\lambda(\bar{x}))=\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha\cdot\lambda^\alpha, \tag{4.4}$$

где $\lambda^\alpha=\lambda_0^{\alpha_0}\cdot\lambda_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_n^{\alpha_n}$, а λ – вектор барицентрических координат точки $\bar{x}\in R^n$.

Л е м м а 4.I. Пространство $P_k(T)$ полиномов вида (4.4) имеет размерность $\Phi(k,n)$, любой полином из $P_k(T)$ однозначно определяется множеством своих значений в узлах $\Sigma_k(T)$ по формуле

$$p(\bar{x})=\sum_{\bar{x}_\alpha\in\Sigma_k(T)} p(\bar{x}_\alpha)\cdot\tilde{p}_\alpha(\lambda(\bar{x})),$$

где

$$\bar{P}_\alpha(\lambda) = \prod_{i=0}^{n} \left(\prod_{\alpha_i'=0}^{\alpha_i-1} \frac{k\lambda_i - \alpha_i'}{\alpha_i - \alpha_i'} \right).$$

Кроме того, сужение $p(\bar{x})$ на грань, ребро или вершину симплекса T однозначно определяется его значениями в узлах грани, ребра и вершины соответственно.

Справедливость этой леммы следует из работы [52, стр.33].

Обозначим через $P_{1,k}(T)$ пространство непрерывных, линейных на каждом симплексе T_i из представления (4.3) функций. Очевидно, что любая функция из $P_{1,k}(T)$ однозначно определяется совокупностью своих значений в узлах множества $\Sigma_k(T)$ из (4.2). Следовательно, размерность пространства $P_{1,k}(T)$ совпадает с размерностью пространства $P_k(T)$.

О п р е д е л е н и е 4.I. Базисным лагранжевым симплициальным элементом типа (k) назовем тройку $\{T, \Sigma_k(T), P_k(T)\}$. Базисным лагранжевым симплициальным элементом типа $(1,k)$ назовем тройку $\{T, \Sigma_k(T), P_{1,k}(T)\}$. Заметим, что функции из $P_k(T)$ или $P_{1,k}(T)$ непрерывны и принадлежат пространству Соболева $W_2^1(T)$.

Рассмотрим n-мерный куб

$$K = \{\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in R^n : \ 0 \le x_i \le 1, \ i = \overline{1,n}\}. \tag{4.5}$$

По заданному целому $k \ge 1$ определим множество узлов

$$\Sigma_k(K) = \{ \bar{x}_\alpha \in R^n : \ \bar{x}_\alpha = \tau \cdot (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \\ \tau = k^{-1}, \ \alpha_i = 0, 1, \dots, k, \ i = \overline{1,n} \}. \tag{4.6}$$

Очевидно, что $\Sigma_k(K)$ является множеством всех вершин разбиения K гиперплоскостями $x_i = jr$, $j=1,\dots,k-1$, $i=\overline{1,n}$, на равновеликие кубы K_i :

$$K = \bigcup_{i=1}^{k^n} K_i \ , \tag{4.7}$$

и состоит из $(k+1)^n$ попарно различных точек из K .

Определим пространство полиномов $Q_k(K)$ вида

$$q(\bar{x}) = \sum_{\substack{0 \le \alpha_i \le k \\ 1 \le i \le n}} a_\alpha \cdot \bar{x}^\alpha ,$$

где $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, α_i – целое, $\bar{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$.

Л е м м а 4.2. Пространство $Q_k(K)$ имеет размерность $(k+1)^n$, любой полином из $Q_k(K)$ однозначно определяется совокупностью своих значений в узлах множества $\Sigma_k(K)$ по формуле:

$$q(\bar{x}) = \sum_{\bar{x}_\alpha \in \Sigma_k(K)} \left\{ \prod_{i=1}^{n} \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \ne \alpha_i}}^{k} \frac{kx_i - j}{\alpha_i - j} \right) \right\} q(\bar{x}_\alpha).$$

Кроме того, сужение $q(\bar{x})$ на грань, ребро или вершину куба однозначно определяется его значениями в узлах грани, ребра и вершины соответственно.

Доказательство леммы элементарно.

Через $Q_{1,k}(K)$ обозначим пространство непрерывных, полилинейных на каждом кубе K_i из (4.7) функций. Очевидно, что любая функция из этого пространства однозначно определяется по своим значениям в узлах $\Sigma_k(K)$. Следовательно, размерность $Q_{1,k}(K)$ совпадает с размерностью $Q_k(K)$.

О п р е д е л е н и е 4.2. Базисным лагранжевым прямоуголь-

ным элементом типа (k) назовем тройку $\{K, \Sigma_k(K), Q_k(K)\}$.
Базисным лагранжевым прямоугольным элементом типа $(1,k)$ назовем тройку $\{K, \Sigma_k(K), Q_{1,k}(K)\}$.

Обозначим через $\mathcal{Э}_m(K)$ пространство $Q_k(K)$ при $k=2m+1$. Через $\Sigma_m^{\mathcal{Э}}(K)$ обозначим совокупность из $2^n(m+1)^n$ правил, по которым каждой функции $q(\bar{x}) \in \mathcal{Э}_m(K)$ сопоставляется множество ее значений:

$$\Sigma_m^{\mathcal{Э}}(K) = \left\{ \frac{\partial^{|\alpha|} q(\bar{x})}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdot \ldots \cdot \partial^{\alpha_n} x_n}, \quad 0 \le \alpha_i \le m, \right.$$

$$\left. \bar{x} = \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n), \quad \beta_i = 0,1; \; i = \overline{1,n} \right\}.$$

Л е м м а 4.3. Любая функция из пространства $\mathcal{Э}_m(K)$ однозначно определяется совокупностью своих значений $\Sigma_m^{\mathcal{Э}}(K)$ по формуле

$$q(\bar{x}) = \sum_{(\alpha,\beta) \in \Sigma_m^{\mathcal{Э}}(K)} \left(\prod_{i=1}^{n} \varphi_{\alpha_i,\beta_j}(x_i) \right) \frac{\partial^{|\alpha|} q(\beta)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_n^{\alpha_n}},$$

где $(\alpha,\beta) \in \Sigma_m^{\mathcal{Э}}(K)$ означает перебор всех $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ таких, что $\alpha_i = 0, 1, \ldots, m$, $\beta_i = 0, 1$, а функции $\varphi_{k,i}(t)$ являются полиномами степени $2m+1$, удовлетворяющими условиям

$$\frac{d^j \varphi_{k,i}(t)}{dt^j} = \begin{cases} 0, & t = 1 - i, \\ \delta_{k,j}, & t = i, \end{cases}$$

$$j = 0, \ldots, m; \quad i = 0, 1; \quad k = 0, \ldots, m.$$

Кроме того, сужение $q(\bar{x})$ на грань, ребро или вершину куба однозначно определяется совокупностью значений вычисленных по правилам $\Sigma^{\text{э}}_m(K)$ в вершинах грани, ребра или самой вершине соответственно.

Доказательство леммы элементарно.

О п р е д е л е н и е 4.3. Базисным эрмитовым прямоугольным элементом типа (m) назовем тройку

$$\{K, \Sigma^{\text{э}}_m(K), Э_m(K)\}.$$

Рассмотрим невырожденный n -симплекс $T_h \subset R^n$ с вершинами $\bar{v}_0, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$, где параметр $h>0$ характеризует длины ребер и объем n -симплекса:

$$\rho(\bar{v}_i, \bar{v}_j) \in [\ell_1 h, \ell_2 h], \quad i \neq j, \quad i,j = \overline{0,n}, \tag{4.8}$$
$$|T_h| \in [\gamma_1 h^n, \gamma_2 h^n], \quad \ell_1 > 0, \quad \gamma_1 > 0.$$

Здесь

$$|T_h| = \frac{n(n+1)}{2} |\det A|, \quad A = \begin{bmatrix} \bar{v}_0 & \bar{v}_1 & \dots & \bar{v}_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Определим линейное преобразование n -симплекса T из (4.I), каждая точка которого определяется вектором $\bar{\lambda}^T = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \leq 1$, в n -симплекс T_h, полагая

$$\bar{x}(\bar{\lambda}) = C\bar{\lambda} + \bar{v}_0, \tag{4.9}$$

где $\bar{x}^T = (x_1, \dots, x_n) \in T_h$,

$$C = (\bar{v}_1 - \bar{v}_0, \dots, \bar{v}_n - \bar{v}_0), \quad \det C = \det A,$$

- квадратная матрица порядка n. Следовательно, преобразование (4.I0) обратимо.

Введем обозначения

$$\Sigma_k(T_h) = \{\bar{x} = C\bar{\lambda} + \bar{v}_0 : \bar{\lambda} \in \Sigma_k(T)\}, \tag{4.I0}$$
$$P_k(T_h) = \{p_h(\bar{x}) = p(C^{-1}(\bar{x} - \bar{v}_0)) \in P_k(T)\},$$

$$P_{1,k}(T_h) = \{ p_{1,h}(\bar{x}) = p_1(C^{-1}(\bar{x} - \bar{v}_0)) \in P_{1,k}(T) \}.$$

О п р е д е л е н и е 4.4. Лагранжевым симплициальным элементом типа (k) назовем тройку $\{T_h, \Sigma_k(T_h), P_k(T_h)\}$, а типа $(1,k)$ назовем тройку $\{T_h, \Sigma_k(T_h), P_{1,k}(T_h)\}$.

В дальнейшем будет использоваться неравенство

$$\min_{1 \le i \le N} \frac{a_i}{b_i} \le \frac{a_1 + \ldots + a_N}{b_1 + \ldots + b_N} \le \max_{1 \le i \le N} \frac{a_i}{b_i} \tag{4.II}$$

справедливое для произвольных вещественных чисел $a_i \ge 0$, $b_i > 0$, $i = 1, \ldots, N$, доказательство которого методом математической индукции не вызывает затруднений.

Норму в $W_2^1(T_h)$ определим стандартным образом

$$\| u \|_{1,T_h} = \left(\int_{T_h} (|\nabla u|^2 + |u|^2)\, d\bar{x} \right)^{0,5} \tag{4.I2}$$

Имеет место следующий результат, доказанный, например, в [52, теорема I0.9] для $n = 2$.

Т е о р е м а 4.I. Для любых функций

$$p_h(\bar{x}) \in P_k(T_h) \quad \text{и} \quad p_{1,h}(\bar{x}) \in P_{1,k}(T_h),$$

значения которых совпадают во всех узлах $\Sigma_k(T_h)$, где T_h - n-симплекс, удовлетворяющий условиям (4.8), справедливы неравенства

$$c_1 \cdot \| p_{1,h} \|^2_{1,T_h} \le \| p_h \|^2_{1,T_h} \le c_2 \cdot \| p_{1,h} \|^2_{1,T_h}$$

с положительными постоянными c_1 и c_2, не зависящими от h и функций $p_h(\bar{x})$ и $p_{1,h}(\bar{x})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим функции

$p(\bar{\lambda}) \in P_k(T)$ и $p_1(\bar{\lambda}) \in P_{1,k}(T)$ по функциям $p_h(\bar{x})$ и $p_{1,h}(\bar{x})$ в соответствии с (4.I0), принимающих одинаковые значения в узлах $\Sigma_k(T)$ и $\Sigma_k(T_h)$. Из (4.8) следует, что радиусы вписанного и описанного вокруг n -симплекса T_h шаров принадлежат интервалу $[r_1 h, r_2 h]$ с положительными постоянными r_1 и r_2, не зависящими от h. Тогда следствием теоремы 3.I.3 из [I30] является существование положительных постоянных c_3 и c_4 таких, что неравенства

$$c_3 h^{2-n} \leq \frac{\int\limits_T (|\nabla v|^2 + h^2 v^2)\, dT}{\|v_h\|^2_{1,T_h}} \leq c_4 h^{2-n} \qquad (4.I3)$$

для любых $v = p$, $v_h = p_h$ или $v = p_1$, $v_h = p_{1,h}$ и любых $h > 0$ справедливы.

Обозначим через $\bar{p}$ вектор значений функции $p(\bar{\lambda})$ в узлах $\Sigma_k(T)$. Тогда

$$\int\limits_T (|\nabla p|^2 + h^2 p^2)\, dT = ((A + h^2 B)\bar{p}, \bar{p}),$$

$$\int (|\nabla p_1|^2 + h^2 p_1^2)\, dT = ((A_1 + h^2 B_1)\bar{p}, \bar{p}),$$

где матрицы A и A_1 симметричны и положительно полуопределены, а матрицы B и B_1 симметричны и положительно определены, а их элементы зависят только от n и k. Легко убедиться в том, что ядра матриц A и A_1 одномерны и совпадают (они состоят из векторов, все компоненты которых равны между собой). Тогда, используя неравенство (4.II), получим для любого $\bar{p} \neq 0$ неравенства

$$C_5 \le \frac{(A\bar{p},\bar{p}) + h^2(B\bar{p},\bar{p})}{(A_1\bar{p},\bar{p}) + h^2(B_1\bar{p},\bar{p})} \le C_6 , \qquad (4.14)$$

где

$$C_5 = \min\{\lambda_1(A)\cdot\rho^{-1}(A_1) ,\ \rho^{-1}(B^{-1}B_1)\} ,$$

$$C_6 = \max\{\rho(A)\cdot\lambda_1^{-1}(A_1) ,\ \rho(BB_1^{-1})\} ,$$

$\lambda_1(A)$ и $\lambda_1(A_1)$ минимальные отличные от нуля собственные значения матриц A и A_1 , а $\rho(D)$ - спектральный радиус матрицы D . Очевидно, что C_5 и C_6 не зависят от h и из неравенств (4.13) и (4.14) следует справедливость утверждения теоремы с постоянными $C_1 = C_3\cdot C_5\cdot C_4^{-1}$, $C_2 = C_4\cdot C_6\cdot C_3^{-1}$.

Теперь рассмотрим n -прямоугольник $K_h \subset R^n$, получаемый линейным преобразованием единичного n-куба K :

$$K_h = \{\bar{x}\in R^n :\ \bar{x} = \bar{x}_0 + D_h\bar{y} ,\ \ \bar{y}\in K\} , \qquad (4.15)$$

где $\bar{x}_0 \in R^n$,

$$D_h = diag\{a_1 , \dots , a_n\} , \qquad a_i \in [l_{1i}h, l_{2i}h] ,\ i=\overline{1,n} ,\ h>0, \qquad (4.16)$$

а положительные постоянные l_{ji} не зависят от h , $j=1,2$, $i = 1,\dots,n$. Введем обозначения

$$\Sigma_k(K_h) = \{\bar{x} = \bar{x}_0 + D_h\bar{y} ,\ \bar{y}\in\Sigma_k(K)\} ,$$

$$Q_k(K_h) = \{q_h(\bar{x}) = q(D_h^{-1}(\bar{x}-\bar{x}_0)) \in Q_k(K)\} , \qquad (4.17)$$

$$Q_{1,k}(K_h) = \{q_{1,h}(\bar{x}) = q_1(D_h^{-1}(\bar{x}-\bar{x}_0)) \in Q_{1,k}(K)\}.$$

О п р е д е л е н и е 4.5. Лагранжевым n-прямоугольным элементом типа (k) назовем тройку $\{K_h, \Sigma_k(K_h), Q_k(K_h)\}$, а типа $(1,k)$ назовем тройку $\{K_h, \Sigma_k(K_h), Q_{1,k}(K_h)\}$.

Т е о р е м а 4.2. Для любых функций $q_h \in Q_k(K_h)$ и $q_{1,h} \in Q_{1,k}(K_h)$, значения которых совпадают во всех узлах множества $\Sigma_k(K_h)$ из (4.17) справедливы неравенства

$$c_1 \cdot \| q_{1,h} \|^2_{1,K_h} \leq \| q_h \|^2_{1,K_h} \leq c_2 \cdot \| q_{1,h} \|^2_{1,K_h}$$

с положительными постоянными c_1 и c_2, не зависящими от $h>0$ и функций q_h и $q_{1,h}$.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 4.I.

Обозначим через $\mathcal{Э}_m(K_h)$ пространство полиномов $Q_{2m+1}(K_h)$ из (4.I7). Через $\Sigma^{\mathcal{Э}}_m(K_h)$ обозначим совокупность из $2^n(m+1)^n$ правил, по которым каждой функции $q(\bar{x}) \in \mathcal{Э}_m(K_h)$ сопоставляется множество значений ее частных производных в вершинах K_h:

$$\Sigma^{\mathcal{Э}}_m(K_h) = \left\{ \frac{\partial^{|\alpha|} q(\bar{x})}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_n^{\alpha_n}} : \quad \bar{x} = \bar{x}_0 + D_h \bar{\beta},\ \beta_i = 0,1,\ \alpha_i = 0,1,\ldots,m,\ i=\overline{1,n} \right\}. \tag{4.I8}$$

Тогда из леммы 4.3 легко получить следующую формулу для $q(\bar{x}) \in \mathcal{Э}_m(K_h)$:

$$q(\bar{x}) = \sum_{\alpha,\beta \in \Sigma^{\mathcal{Э}}_m(K_h)} \prod_{i=1}^{n} a_i^{\alpha_i} \varphi_{\alpha_i,\beta_j}\left(\frac{x_i - x_{0i}}{a_i}\right) \frac{\partial^{|\alpha|} q(\bar{x}_\beta)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_n^{\alpha_n}} =$$

$$= \sum_{l=0}^{m \cdot n} \left\{ \sum_{|\alpha|=l} \sum_{\beta} \prod_{i=1}^{n} a_i^{\alpha_i} \cdot \varphi_{\alpha_i,\beta_j}\left(\frac{x_i - x_{0i}}{a_i}\right) \frac{\partial^{|\alpha|} q(\bar{x}_\beta)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_n^{\alpha_n}} \right\} = \tag{4.I9}$$

$$= \sum_{l=0}^{m\cdot n} q_l(\bar{x}) . \qquad (4.19)$$

В соответствии с этим разложением пространство полиномов $Э_m(K_h)$ можно представить в виде векторной суммы его подпространств:

$$Э_m(K_h) = \sum_{l=0}^{m\cdot n} Э_{m,l}(K_h) .$$

Легко видеть, что полином $q_l \in Э_{m,l}(K_h)$ однозначно определяется значениями всех своих частных производных порядка $|\alpha| = l$ в вершинах K_h, а остальные производные из (4.18) равны нулю. Введем

$$\Sigma^{Э}_{m,l}(K_h) = \left\{ \frac{\partial^{|\alpha|} q(\bar{x})}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_n^{\alpha_n}} : \bar{x} = \bar{x}_0 + D_h \bar{\beta} , \right.$$

$$\beta_i = 0,1; \quad \alpha_i = 0,1,\ldots,m; \quad i = \overline{1,n} ,$$
$$\left. |\alpha| = l \right\}. \qquad (4.20)$$

О п р е д е л е н и е 4.6. Эрмитовым n -прямоугольником типа (m) назовем тройку

$$\{ K_h , \Sigma^{Э}_m(K_h) , Э_m(K_h) \} .$$

Т е о р е м а 4.3. При выполнении условий (4.16) для любой функции $q_h(\bar{x}) \in Э_m(K_h)$, представленной в виде (4.19), справедливы следующие неравенства

$$\| q_{h,l} \|^2_{1,K_h} \le \gamma \cdot \| q_h \|^2_{1,K_h} , \quad l = \overline{0, m\cdot n} , \qquad (4.21)$$

$$c_1 (1 + h^{-2}) \cdot \| q_{h,l} \|^2_{0,K_h} \le \| q_{h,l} \|^2_{1,K_h} \le$$

$$\le c_2 (1 + h^{-2}) \cdot \| q_{h,l} \|^2_{0,K_h} , \quad l = 1, 2, \ldots, m\cdot n , \qquad (4.22)$$

с положительными постоянными γ, C_1 и C_2, не зависящими от $h>0$ и $q_h(\bar{x})$, где

$$\|q\|^2_{0,K_h} = \int\limits_{K_h} |q(\bar{x})|^2 \, d\bar{x}.$$

Доказательство. Введем обозначения

$$q(\bar{y}) = q\ (D_h^{-1}(\bar{x}-\bar{x}_0)), = q_h(\bar{x})$$

$$q_\ell(\bar{y}) = q_\ell\ (D_h^{-1}(\bar{x}-\bar{x}_0)) = q_{h,\ell}(\bar{x})$$

Тогда из (4.16) следует существование положительных постоянных c_3 и c_4, не зависящих от h и $q_h(\bar{x})$, таких, что

$$c_3 h^{n-2} \le \frac{\|v_h\|^2_{1,K_h}}{\int_K (|\nabla v|^2 + h^2 v^2)\, dK} \le c_4 h^{n-2} \qquad (4.23)$$

для $v_h = q_h$, $v = q$ и $v_h = q_{h,\ell}$, $v = q_\ell$, $\ell = 0, 1, \dots, mn$. Обозначим через $\bar{q}_\ell$ вектор значений частных производных порядка $|\alpha| = \ell$ полинома $q_\ell(\bar{y})$, пусть $\bar{q} = (\bar{q}_0^T, \bar{q}_1^T, \dots, \bar{q}_{mn}^T)^T$. Тогда

$$\int_K (|\nabla q_\ell|^2 + h^2 q_\ell^2)\, dK = ((A_{\ell,\ell} + h^2 B_{\ell,\ell})\bar{q}_\ell, \bar{q}_\ell),$$

$$\ell = 0, 1, \dots, m{\cdot}n;$$

$$\int_K (|\nabla q_\ell|^2 + h^2 q^2)\, dK = ((A + h^2 B)\bar{q}, \bar{q}),$$

где матрицы A и $A_{0,0}$ симметричны и положительно полуопределены, а матрицы B, $B_{\ell\ell}$, $\ell = 0, \dots, mn$; $A_{\ell\ell}$, $\ell = 1, \dots, mn$ – симметричны и положительно определены, их элементы не зависят от h и q_h, и

$$A = \begin{bmatrix} A_{0,0} & A_{0,1} \dots & A_{0,mn} \\ A_{1,0} & A_{1,1} \dots & A_{1,mn} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{mn,0} & A_{mn,1} \dots & A_{mn,mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{0,0} & B_{0,1} \dots & B_{0,mn} \\ B_{1,0} & B_{1,1} \dots & B_{1,mn} \\ \dots & \dots & \dots \\ B_{mn,0} & B_{mn,1} \dots & B_{mn,mn} \end{bmatrix}.$$

Легко установить, что ядра матриц $A_{0,0}$ и A одномерны ($q(\bar{y}) = const$) и пусть $\bar{e}_0$ – ненулевой вектор из ядра $A_{0,0}$. Тогда

$$\bar{e} = (\bar{e}_0, 0, \dots, 0)$$

– вектор из ядра матрицы A. Определим матрицы

$$A_\ell = diag\{0, \dots, 0, A_{\ell,\ell}, 0, \dots, 0\},$$

$$B_\ell = diag\{0, \dots, 0, B_{\ell,\ell}, 0, \dots, 0\}, \quad \ell = \overline{0, mn}.$$

Очевидно, что

$$Ker\, A_\ell \supset Ker\, A, \quad Ker\, B_\ell \supset Ker\, B = \{0\},$$

$$((A_{\ell,\ell} + h^2 B_{\ell,\ell})\bar{q}_\ell, \bar{q}_\ell) = ((A_\ell + h^2 B_\ell)\bar{q}, \bar{q}).$$

Тогда для любого $\bar{q} \neq 0$, используя неравенство (4.II), получим

$$\frac{((A_\ell + h^2 B_\ell)\bar{q}, \bar{q})}{((A + h^2 B)\bar{q}, \bar{q})} \leq \gamma_\ell, \quad \ell = 0, \dots, mn, \qquad (4.24)$$

где $\gamma_\ell = \max\{\rho(A^+ A_\ell), \rho(B^{-1} B_\ell)\}$, а $\rho(A^+ A_\ell)$ – максимальное собственное значение спектральной задачи

$$A_\ell \bar{u} = \lambda A \bar{u}.$$

Из (4.23) и (4.24) тогда легко получить неравенства

$$\|q_{h,\ell}\|^2_{1,K_h} \leq \tilde{\gamma}_\ell \|q_h\|^2_{1,K_h}, \quad \tilde{\gamma}_\ell = c_Y \gamma_\ell c_3^{-1},$$

$$\ell = 0, \dots, mn.$$

Следовательно, неравенства (4.2I) справедливы при $\gamma = \max \tilde{\gamma}_\ell$.

Далее, легко видеть, что если $q_{h,\ell}(\bar{x})$ из (4.I9) тождественно не обращается в нуль, то при $\ell = 1, \dots, mn$

$$c_3 h^{n-2} \le \frac{\int_{K_h} |\nabla q_{h,\ell}|^2 \, dK_h}{\int_K |\nabla q_\ell|^2 \, dK} \le c_4 h^{n-2},$$

$$c_5 h^n \le \frac{\int_{K_h} |q_{h,\ell}|^2 \, dK_h}{\int_K |q_\ell|^2 \, dK} \le c_6 h^n,$$

$$\rho^{-1}(B_{\ell,\ell} A^{-1}_{\ell,\ell}) \le \frac{\int_K |\nabla q_\ell|^2 \, dK}{\int_K |q_\ell|^2 \, dK} \le \rho(B^{-1}_{\ell,\ell} A_{\ell,\ell}).$$

Следовательно, неравенства (4.22) справедливы при

$$c_1 = \min_{1 \le \ell \le mn} \{1, \; c_3 \cdot (c_6 \cdot \rho(B_{\ell,\ell} A^{-1}_{\ell,\ell}))^{-1}\},$$

$$c_2 = \max_{1 \le \ell \le mn} \{1, \; c_4 \cdot \rho(B^{-1}_{\ell,\ell} A_{\ell,\ell}) \cdot c_5^{-1}\}.$$

Теорема доказана.

<u>Замечание 4.I.</u> Неравенства (4.2I) и (4.22) справедливы, например, для разложения $q_h(\bar{x}) \in \mathcal{Э}_m(K_h)$ вида

$$q_h(\bar{x}) = q_{h,0}(\bar{x}) + \tilde{q}_{h,1}(\bar{x}),$$

где $q_{h,0}(\bar{x}) \in \mathcal{Э}_{m,0}(K_h)$. Разложение (4.I9) замечательно тем, что диагональные элементы матриц $A^h_{\ell,\ell}$, $B^h_{\ell,\ell}$, построенные для элемента K_h аналогично матрицам $A_{\ell,\ell}$, $B_{\ell,\ell}$

для элемента K, являются величинами $O(h^{n+2\ell-2})$, $O(h^{n+2\ell})$.

В заключение параграфа сформулируем следующую теорему, доказательство которой проводится аналогично предыдущим доказательствам.

Т е о р е м а 4.4. Для любой функции $q_h \in \mathcal{Э}_{m,0}(K_h)$ взаимно однозначно определяется функция $\tilde{q}_h \in Q_1(K_h)$ и справедливы неравенства

$$c_1 \cdot \| \tilde{q}_h \|^2_{1,K_h} \leq \| q_h \|^2_{1,K_h} \leq c_2 \cdot \| \tilde{q}_h \|^2_{1,K_h}$$

с положительными постоянными, не зависящими от $h>0$ и q_h.

§ 5. Пространства лагранжевых восполнений на триангуляциях

Рассмотрим ограниченную область $\Omega \subset R^n$, $n=2,3$, с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ класса C^2. Пусть семейство триангуляций Ω_h, $h\in(0,h_0)$, – решение задачи (T), сформулированной в § I, для области Ω, причем $\partial\Omega_h$ аппроксимирует $\partial\Omega$ с первым порядком точности по h, т.е. $\forall\, \bar{x}\in\partial\Omega_h \ \exists\, \bar{y}\in\partial\Omega$, и наоборот, такие, что $\rho(\bar{x},\bar{y}) \leq \delta_1 h$, где δ_1 не зависит от h. Каждый n-симплекс $T_h \in \Omega_h$ разобьем на k^n, по заданному целому $k\geq 1$, равновеликих n-симплексов с множеством вершин $\Sigma_k(T_h)$ из (4.I0). Этому разбиению соответствует триангуляция $\Omega_{h/k}$, множество вершин которой

$$\Sigma_{h/k} = \bigcup_{T_h\in\Omega_h} \Sigma_k(T_h). \tag{5.I}$$

Через $\Sigma_h = \Sigma_{h/1}$ будем обозначать множество вершин (узлов) триангуляции Ω_h.

Пусть $p_{h/k}(\bar{x})$ – дискретная однозначная функция, определенная на множестве $\Sigma_{h/k}$.

Определение 5.I. Лагранжевым восполнением дискретной функции $p_{h/k}(\bar{x})$ будем называть функцию $p(\bar{x})$, сужение которой на каждый n-симплекс $T_h \in \Omega_h$ принадлежит $P_k(T_h)$ из (4.I0) и однозначно определяется из условий

$$p(\bar{x}) = p_{h/k}(\bar{x}) \quad \forall\, \bar{x} \in \Sigma_k(T_h).$$

Пространство $H(k, \Omega_h)$ полученных функций будем называть пространством лагранжевых восполнений. При $k=1$ положим $H(\Omega_h) \equiv H(1, \Omega_h)$.

Из леммы 4.I и теоремы 4.I вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 5.I. Любая функция из пространства лагранжевых восполнений $H(k, \Omega_h)$ непрерывна и принадлежит пространству Соболева $W_2^1(\Omega_h)$. Кроме того, пространства $H(k, \Omega_h)$ и $H(\Omega_{h/k})$ изоморфны, размерность их конечна и одинакова. Для любых функций $p(\bar{x}) \in H(k, \Omega_h)$ и $p_1(\bar{x}) \in H(\Omega_{h/k})$ таких, что

$$p(\bar{x}) = p_1(\bar{x}) \quad \forall\, \bar{x} \in \Sigma_{h/k},$$

справедливы неравенства

$$c_1 \cdot \|p_1\|^2_{1,\Omega_h} \le \|p\|^2_{1,\Omega_h} \le c_2 \cdot \|p_1\|^2_{1,\Omega_h},$$

где постоянные c_1 и c_2 положительны и не зависят от h и $p(\bar{x})$.

Рассмотрим ограниченную область $D \subset R^n$ с кусочно-гладкой границей класса C^2. Пусть семейство триангуляций D_h,

$h \in (0, h_0)$, является решением задачи (T) о триангуляции области D . Предположим, что

$$D \supset \bar{\Omega}\,, \qquad D_h \ni \Omega_h\,, \tag{5.2}$$

т.е. Ω_h состоит из n-симплексов триангуляции D_h . Следовательно, сужение функций из $H(D_h)$ на Ω_h принадлежит пространству лагранжевых восполнений (кусочно-линейных) $H(\Omega_h)$.

Для каждого n-симплекса $T_h \in D_h$ через $V_i(T_h)$, $i = 0, 1, \dots, n$, обозначим его вершины. Определим

$$\|u\|^2_{1,h,D_h} = \sum_{T_h \in D_h} \Big\{ \sum_{i=0}^{n} |u(V_i(T_h))|^2 h^n +$$

$$+ \sum_{\substack{i,j=0 \\ i>j}}^{n} \Big| \frac{u(V_i(T_h)) - u(V_j(T_h))}{h} \Big|^2 h^n \Big\}. \tag{5.3}$$

Тогда, так как расстояние между вершинами любого n-симплекса $T_h \in D_h$ и его объем принадлежат соответственно интервалам $[\ell_1 h, \ell_2 h]$ и $[\gamma_1 h^n, \gamma_2 h^n]$, то нетрудно проверить справедливость следующего утверждения, учитывая, что $u(\bar{x}) \in H(D_h)$ линейна на $T_h \in D_h$.

Л е м м а 5.I. Существуют положительные, не зависящие от h постоянные C_1 и C_2 такие, что для любой функции $u \in H(D_h)$ справедливы неравенства

$$C_1 \cdot \|u\|_{1,D_h} \le \|u\|_{1,h,D_h} \le C_2 \cdot \|u\|_{1,D_h}\,, \tag{5.4}$$

т.е. нормы $\|u\|_{1,D_h}$ и $\|u\|_{1,h,D_h}$ эквивалентны в $H(D_h)$ $h \in (0, h_0)$.

В каждой точке $\bar{y} \in \partial\Omega$, так как $\partial\Omega$ - кусочно-гладкая класса C^2 , определим внутреннюю псевдонормаль $\bar{N}(\bar{y})$ и приграничные полосы

$$\omega_{\pm\delta_0} = \{ \bar{x} \in \Omega : \bar{x} = \bar{y} \pm n \cdot \bar{N}(\bar{y}) \quad \forall \bar{y} \in \partial\Omega, \ 0 < n < \delta_0 \}, \tag{5.5}$$

где δ_0 не зависит от h и настолько мало, что $(\bar{y}, n)$ образуют систему приграничных координат в $\omega_{\pm\delta_0}$ в соответствии с леммами I.I и 2.I. Тогда, поскольку $\partial\Omega_h$ аппроксимирует $\partial\Omega$ с первым порядком точности по h, то существует h_{00} такое, что при $h \in (0, h_{00})$ $\partial\Omega_h \subset \bar{\omega}_{\delta_0} \cup \bar{\omega}_{-\delta_0}$. Кроме того, если приграничные координаты $\bar{x} \in \partial\Omega_h$ есть пара $(\bar{y}, n)$, то $|n| \leq c_3 h$, где c_3 не зависит от h.

Определим взаимно однозначное преобразование :

$$\bar{x} \in \omega_{\delta_0} \longleftrightarrow \bar{z} \in \omega_{-\delta_0},$$

$$\bar{x} = \bar{y} + n\bar{N}(\bar{y}) \longleftrightarrow \bar{z} = \bar{y} - n \cdot \bar{N}(\bar{y}). \tag{5.6}$$

Л е м м а 5.2. Преобразование (5.6) непрерывно, почти всюду непрерывно дифференцируемо и существуют положительные постоянные C_1 и C_2 такие, что

$$C_1 \leq \frac{D(\bar{x})}{D(\bar{z})} \leq C_2 \qquad \forall \bar{x} \in \omega_{\delta_0}.$$

Кроме того, существуют постоянные $\tau_0 > 0$ и $d_1 < \infty$ такие, что если $\theta(\bar{x}) \subset \omega_{\delta_0}$ окрестность диаметра d точки $\bar{x}$ содержит шар радиуса τ, то образ $\theta_1(\bar{z}) \subset \omega_{-\delta_0}$ ее преобразования по (5.6) имеет диаметр не больше, чем $d_1 \cdot d$ и содержит шар радиуса не меньше, чем $\tau_0 \cdot \tau$. И обратно, если $\theta_1(\bar{z}) \subset \omega_{-\delta_0}$ окрестность точки $\bar{z} \in \omega_{-\delta_0}$ имеет диаметр d и содержит шар радиуса τ, то образ $\theta(\bar{x})$ ее преобразования по (5.6) имеет диаметр не больше $d_1 \cdot d$ и содержит шар радиуса $\tau_0 \cdot \tau$.

Справедливость леммы следует из свойств преобразования (5.6), описываемых леммами I.I ($n=2$) и 2.I ($n=3$).

Основываясь на леммах 5.I и 5.2, докажем теорему о продолжении функций из $H(\Omega_h)$ в $H(D_h)$ с сохранением класса гладкости W_2^1, следуя работе автора [90].

Т е о р е м а 5.2. Если выполняются условия (5.2) и $\partial\Omega_h$ аппроксимирует $\partial\Omega$ с первым порядком точности по h, то существует положительная постоянная c, не зависящая от $h\in(0,h_0)$ и такая, что для любой функции $p(\bar{x})\in H(\Omega_h)$ существует $p^*(\bar{x})\in H(D_h)$:

$$p^*(\bar{x}) = p(\bar{x}) \quad \forall\,\bar{x}\in\Omega_h\,,$$

$$\|p^*\|_{1,D_h} \leq c\cdot\|p\|_{1,\Omega_h}\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 5.I следует, что утверждение теоремы достаточно установить для нормы из (5.3). Пусть $h_{00}\leq h_0$ таково, что $\partial\Omega_h\subset\bar{\omega}_{\delta_0}\cup\bar{\omega}_{-\delta_0}$ $\forall\,h\in(0,h_{00})$. Если $h\in(h_{00},h_0)$, то очевидно существование постоянной C такой, что

$$C^{-1}\cdot\sum_{\bar{x}\in\Sigma_h(\Omega_h)}|p(\bar{x})|^2 \leq \|p\|^2_{1,h,\Omega_h} \leq C\cdot\sum_{\bar{x}\in\Sigma_h(\Omega_h)}|p(\bar{x})|^2.$$

Поэтому, определив

$$p^*(\bar{x}) = p(\bar{x}) \quad \forall\,\bar{x}\in\Omega_h\,,$$

$$p^*(\bar{x}) = 0 \quad \forall\,\bar{x}\in\Sigma_h(D_h)\setminus\Sigma_h(\Omega_h)\,,$$

получим

$$\|p^*\|^2_{1,h,D_h} \leq C_1\sum_{\bar{x}\in\Sigma_h(\Omega_h)}|p(\bar{x})|^2 \leq C_1 C\,\|p\|^2_{1,h,\Omega_h}\,,$$

где постоянная $C_1 = K\cdot C$, а K – максимальное количество n-симплексов $T_h\in D_h$, имеющих общую вершину.

Следовательно, необходимо проверить утверждение теоремы для $h \in (0, h_{00})$. Обозначим $\hat{\Omega}_h$ минимальную совокупность n-симплексов $T_h \in D_h$ такую, что

$$\hat{\Omega}_h \supset \Omega \cup \Omega_h .$$

Очевидно, что $\partial\hat{\Omega}_h$ аппроксимирует $\partial\Omega$ (и $\partial\Omega_h$) с первым порядком точности по h, так как длины ребер T_h не больше $l_2 h$ и $\partial\Omega_h$ аппроксимирует $\partial\Omega$ с первым порядком по h. Определим $\hat{p}(\bar{x}) \in H(\hat{\Omega}_h)$ по ее значениям в узлах $\Sigma_h(\hat{\Omega}_h)$:

$$\hat{p}(\bar{x}) = p(\bar{x}) \quad \forall\ \bar{x} \in \Sigma_h(\Omega_h),$$

$$\hat{p}(\bar{x}) = \hat{p}(\bar{y} + n\cdot\bar{N}(\bar{y})) = p(\bar{x} + \eta\,\bar{N}(\bar{y})) \quad \forall\ \bar{x} \in \Sigma_h(\hat{\Omega}_h) \setminus \Sigma_h(\Omega_h),$$

где $\bar{z} = (\bar{x} + \eta\,\bar{N}(\bar{y})) \in \partial\Omega_h$ – ближайшая к $\bar{x}$ точка $\partial\Omega_h$ на прямой $\bar{\tau}(t) = \bar{x} + t\,\bar{N}(\bar{y})$, т.е. $|\eta| \le c_\gamma h$ и $c_\gamma > 0$ не зависит от h и $\bar{x}$ (см. рис. 5.I)

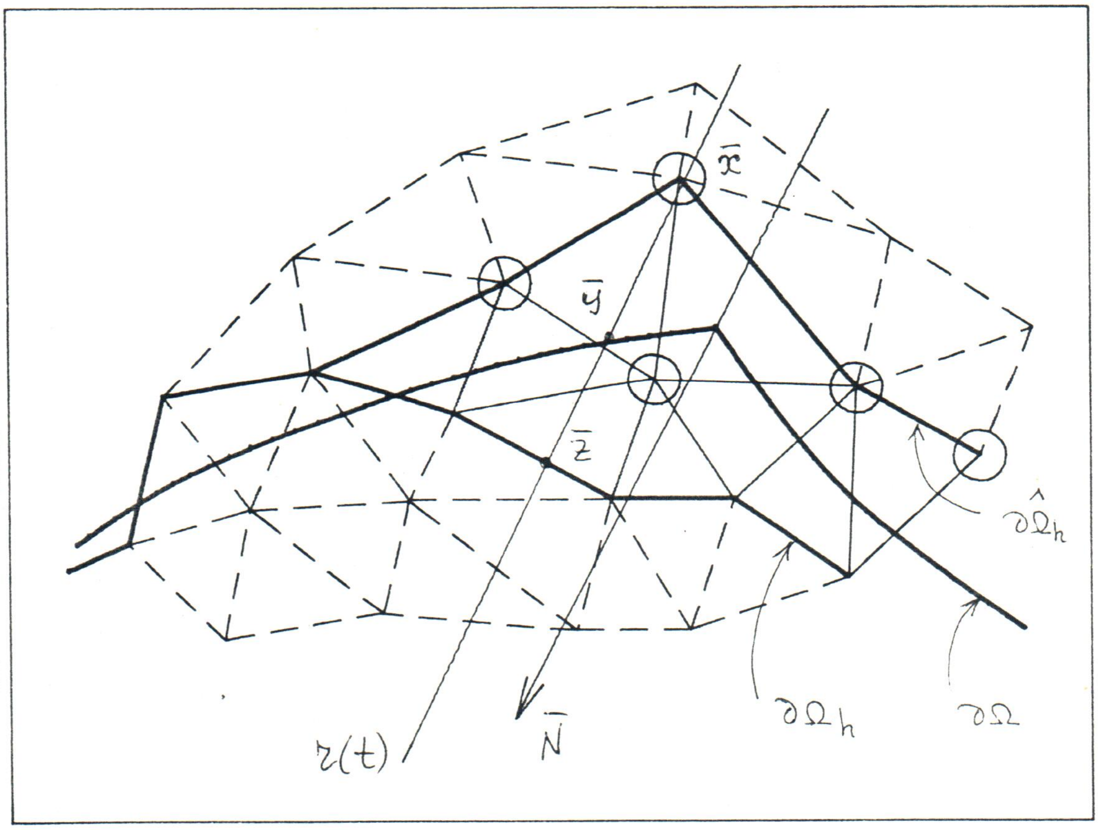

Рис. 5.I. Продолжение из Ω_h в $\hat{\Omega}_h$.

Тогда существует не зависящая от h постоянная c_5 :

$$\|\hat{p}\|^2_{1,h,\hat{\Omega}_h} \le c_5 \cdot \|p\|^2_{1,h,\Omega_h} . \tag{5.7}$$

Действительно, значение $\hat{p}(\bar{x})$ в узле $\bar{x} \in \hat{\Omega}_h \setminus \Omega_h$ определяется по значениям функции $p(\bar{x})$ в узлах из $\Omega_h \cap S(\bar{x},(c_v+\ell_2)h)$ которых не более, чем K_1 , и постоянная K_1 не зависит от h и $\bar{x}$. Кроме того, значение функции $p(\bar{x})$ в любом узле $\bar{x} \in \partial\Omega_h$ используется для определения $\hat{p}(\bar{z})$ только в узлах из $\hat{\Omega}_h \cap S(\bar{z},(c_v+\ell_2)h)$, которых не более K_2 штук. Следовательно,

$$\sum_{\bar{x}\in\Sigma_h(\hat{\Omega}_h\setminus\Omega_h)} |\hat{p}(\bar{x})|^2 \le C_2 \cdot \sum_{\bar{x}\in\Sigma_h(\partial\Omega_h)} |p(\bar{x})|^2 ,$$

где $C_2 \le K_1 \cdot K_2$. Аналогично обосновывается неравенство

$$\sum_{T_h\in\hat{\Omega}_h\setminus\Omega_h} \sum_{\substack{i,j=0\\ i>j}}^{n} |\hat{p}(V_i(T_h)) - \hat{p}(V_j(T_h))|^2 \le$$

$$\le C_3 \cdot \sum_{T_h\in\Omega_h} \sum_{\substack{i,j=0\\ i>j}}^{n} |p(V_i(T_h)) - p(V_j(T_h))|^2$$

с некоторой постоянной C_3 , поскольку точки $\bar{z}_1$ и $\bar{z}_2$, соответствующие вершинам $V_i(T_h)$ и $V_j(T_h)$, $T_h \in \hat{\Omega}_h \setminus \Omega_h$ можно соединить ломаной, лежащей на $\partial\Omega_h$ из конечного числа (не зависящего от h) звеньев, длины которых не больше $\ell_2 h$. Из последних двух неравенств следует неравенство (5.7).

Теперь продолжим $\hat{p}(\bar{x})$ в область $\hat{D}_h$, состоящую из всех n -симплексов $T_h \in D_h$, лежащих в $\omega_{-\delta} \cup \hat{\Omega}_h$. Для этого определим $\hat{q}(\bar{x}) \in H(\hat{D}_h)$ по ее значениям в узлах $\hat{D}_h$:

$$\hat{q}(\bar{x}) = \hat{p}(\bar{x}) \quad \forall\, \bar{x} \in \Sigma_h(\hat{\Omega}_h),$$

$$\hat{q}(\bar{x}) = \hat{p}(\bar{z}) \qquad \forall\ \bar{x} \in \Sigma_h(\hat{D}_h) \setminus \Sigma_h(\hat{\Omega}_h),$$

где $\bar{z} = \bar{y} - n\bar{N}(\bar{y})$, если $\bar{x} = \bar{y} + n\bar{N}(\bar{y})$. Тогда, повторяя рассуждения, аналогичные доказательству неравенства (5.7) и учитывая лемму 5.2, получим что при определении $\hat{q}(\bar{x})$ в узле $\bar{x} \in \hat{D}_h \setminus \hat{\Omega}_h$ используются значения $\hat{p}(\bar{x})$ только в узлах из окрестности $\hat{\Omega}_h \cap S(\bar{z}, c_6 h)$, и наоборот, каждый узел $\bar{x} \in \hat{\Omega}_h$ может использоваться для определения $\hat{q}$ только в узлах окрестности $\hat{D}_h \cap S(\bar{x}, c_7 h)$. И, если $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ – вершины n-симплекса $T_h \in \hat{D}_h \setminus \hat{\Omega}_h$, а $\bar{z}_1$ и $\bar{z}_2$ – соответствующие им точки из $\hat{\Omega}_h$, то последние можно соединить ломаной, лежащей в $\hat{\Omega}_h$ из конечного числа звеньев, длины которых не больше $\ell_2 h$. Отсюда следует существование постоянной C_4 такой, что

$$\|\hat{q}\|^2_{1,h,\hat{D}_h} \le C_4 \|\hat{p}\|^2_{1,h,\hat{\Omega}_h}. \tag{5.8}$$

И наконец, определим $0 < \eta < \gamma < \delta_0$ такие, что для всех достаточно малых h

$$\hat{\Omega}_h \subset (\bar{\omega}_{-\eta} \cup \bar{\Omega}) \subset (\bar{\omega}_{-\gamma} \cup \bar{\Omega}) \subset \hat{D}_h,$$

и функцию

$$\xi(\bar{x}) = \xi(\bar{y} + n\bar{N}(\bar{y})) = \begin{cases} 1, & n \in [-\eta, 0], \\ 0, & n \in [-\delta_0, -\gamma], \\ \dfrac{\gamma + n}{\gamma - \eta}, & n \in (-\gamma, -\eta). \end{cases}$$

Построим $p^*(\bar{x}) \in H(D_h)$ по ее значениям в узлах D_h:

$$p^*(\bar{x}) = \hat{q}(\bar{x}) \qquad \forall\ \bar{x} \in \Sigma_h(\hat{\Omega}_h),$$

$$p^*(\bar{x}) = \xi(\bar{x}) \cdot \hat{q}(\bar{x}) \qquad \forall\ \bar{x} \in \Sigma_h(\hat{D}_h) \setminus \Sigma_h(\hat{\Omega}_h),$$

$$p^*(\bar{x}) = 0 \qquad \forall\ \bar{x} \in \Sigma_h(D_h) \setminus \Sigma_h(\hat{D}_h).$$

Тогда из непрерывности и кусочной гладкости преобразования декартовых координат $\bar{x}$ в приграничные координаты $(\bar{y}, n)$ будет следовать, что

$$|\xi(\bar{x}_1) - \xi(\bar{x}_2)| \leq c_8 \cdot \rho(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

с независимой от h постоянной c_8. Следовательно, если $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ – вершины n-симплекса $T_h \in \hat{D}_h \setminus \hat{\Omega}_h$, то имеем

$$|p^*(\bar{x}_i)|^2 \leq |\hat{q}(\bar{x}_i)|^2, \quad i = 1,2,$$

$$|p^*(\bar{x}_1) - p^*(\bar{x}_2)|^2 = |\xi(\bar{x}_1)\cdot\hat{q}(\bar{x}_1) - \xi(\bar{x}_2)\cdot\hat{q}(\bar{x}_2)|^2 \leq$$

$$\leq 2|\hat{q}(\bar{x}_1) - \hat{q}(\bar{x}_2)|^2 + 2|\xi(\bar{x}_1) - \xi(\bar{x}_2)|^2 \cdot |\hat{q}(\bar{x}_1)|^2 \leq$$

$$\leq 2|\hat{q}(\bar{x}_1) - \hat{q}(x_2)|^2 + 2\cdot c_8^2 \cdot \ell_2^2 h^2 \cdot |\hat{q}(\bar{x}_1)|^2.$$

Применяя эти неравенства для оценки нормы $p^*(\bar{x}) \in H(D_h)$ и учитывая, что в $\hat{\Omega}_h$ $p^*(\bar{x}) = \hat{q}(\bar{x})$, а вне $\hat{D}_h$ $p^*(\bar{x}) = 0$, получим

$$\|p^*\|^2_{1,h,D_h} \leq C_5 \cdot \|\hat{q}\|^2_{1,h,\hat{D}_h} \qquad (5.9)$$

с не зависящей от h и $\hat{q}$ постоянной C_5.

Из неравенств (5.7), (5.8), (5.9) и (5.4) леммы 5.I следует утверждение теоремы с постоянной $C^2 = \max\{CC_1, c_5 C_\gamma C_5\}\cdot c_2^2 c_1^{-2}$.

<u>Замечание 5.I.</u> Если через $\overset{\circ}{H}(D_h)$ обозначить пространство всех функций из $H(D_h)$ равных нулю на ∂D_h, то, как следует из доказательства теоремы 5.2, продолжение функции $p(\bar{x}) \in H(\Omega_h)$ функция $p^*(\bar{x}) \in \overset{\circ}{H}(D_h)$

Теперь, предполагая выполненными все предположения настоящего параграфа относительно областей Ω, D и триангуляций Ω_h и D_h, оценим величину

$$\|p\|^2_{0,\partial\Omega_h} = \int_{\partial\Omega_h} |p(\bar{x})|^2 \, d(\partial\Omega_h) \qquad (5.10)$$

для $p(\bar{x}) \in H(\Omega_h)$. Нетрудно видеть, что объем любой $(n-1)$-грани n-симплекса $T_h \in \Omega_h$ принадлежит интервалу $[\tilde{\gamma}_1 h^{n-1}, \tilde{\gamma}_2 h^{n-1}]$, где положительные постоянные $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$ не зависят от h. Например, при $n=2$ $\tilde{\gamma}_1 = l_1$, $\tilde{\gamma}_2 = l_2$. Введем

$$\|p\|^2_{0,h,\partial\Omega_h} = \sum_{\bar{x} \in \Sigma_h(\partial\Omega_h)} |p(\bar{x})|^2 h^{n-1} . \tag{5.11}$$

Тогда легко установить справедливость следующего утверждения.

Лемма 5.3. Для любой функции $p(\bar{x}) \in H(\Omega_h)$ имеют место неравенства

$$c_1 \cdot \|p\|_{0,\partial\Omega_h} \leq \|p\|_{0,h,\partial\Omega_h} \leq c_2 \cdot \|p\|_{0,\partial\Omega_h}$$

с положительными постоянными c_1 и c_2, не зависящими от h и p.

Предположим, что для $h \in (0, h_{00})$ любой n-симплекс $T_h \in D_h$, хотя бы одна вершина которого лежит на $\partial\Omega_h$, целиком лежит в $\bar{\omega}_{-\delta_0} \cup \bar{\omega}_{\delta_0}$. Обозначим через ω^h объединение всех таких треугольников. Пусть $\bar{x} \in \omega^h$ и $\bar{x} = \bar{y} + n\bar{N}(\bar{y})$, где $\bar{y} \in \partial\Omega$, $n \in R$ – приграничные координаты точки $\bar{x}$. Напомним, что поскольку $\partial\Omega_h$ аппроксимирует $\partial\Omega$ с первым порядком точности по h, а длины ребер T_h имеют первый порядок по h, то $|n(\bar{x})| \leq c_3 h$, где c_3 не зависит от h. Определим

$$\delta = c_3 h < \delta_0 ,$$

$$\omega = \omega_{-\delta} \cup \omega_\delta \cup \partial\Omega , \quad \omega \supset \omega^h , \tag{5.12}$$

$$\|p\|^2_{0,h,\omega^h} = \sum_{T_h \in \omega^h} \sum_{i=0}^{n} |p(V_i(T_h))|^2 h^n \quad \forall p \in H(\omega^h).$$

Тогда легко убедиться в справедливости следующего утверждения (аналогичного лемме 5.I).

Л е м м а 5.4. Существуют положительные, не зависящие от h постоянные c_1 и c_2 такие, что для любой функции $p(\bar{x}) \in H(\omega^h)$ имеют места неравенства

$$c_1 \cdot \|p\|_{0,\omega^h} \leq \|p\|_{0,h,\omega^h} \leq c_2 \|p\|_{0,\omega^h},$$

где

$$\|p\|^2_{0,\omega^h} = \int_{\omega^h} |p(\bar{x})|^2 \, d\bar{x}.$$

Следствием (5.II), (5.I2) и леммы 5.4 является неравенство

$$h \|p\|^2_{0,h,\partial\Omega_h} \leq \|p\|^2_{0,h,\omega^h} \leq c_2^2 \cdot \|p\|^2_{0,\omega^h} \tag{5.I3}$$

для любой $p(\bar{x}) \in H(D_h)$

Л е м м а 5.5. Для любой функции $u \in H(D_h)$ справедливо неравенство

$$\int_{\omega^h} |u(\bar{x})|^2 \, dx \leq \bar{C} \delta \|u\|^2_{1,D_h},$$

где постоянная $\bar{C}$ не зависит от h и δ.

Доказательство леммы практически не отличается от доказательства неравенства (I.4.3) из [I08] для областей с гладкой границей и, поэтому, здесь не приводится.

Т е о р е м а 5.3. Для функции $p(\bar{x}) \in H(\Omega_h)$ имеет место неравенство

$$\|p\|_{0,\partial\Omega_h} \leq c \|p\|_{1,\Omega_h} \tag{5.I4}$$

с постоянной c, не зависящей от h. Кроме того, если определить ее продолжение $\hat{p}(\bar{x}) \in H(D_h)$ по значениям в узлах D_h:

$$\hat{p}(\bar{x}) = p(\bar{x}) \quad \forall\ \bar{x} \in \Sigma_h(\Omega_h),$$

$$\hat{p}(\bar{x}) = 0 \qquad \forall\ \bar{x} \in \Sigma_h(D_h) \setminus \Sigma_h(\Omega_h)$$

то

$$\|\hat{p}\|^2_{1,D_h} \le C\,(h + h^{-1})\,\|p\|^2_{1,\Omega_h}\,. \tag{5.15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $p^*(\bar{x}) \in H(D_h)$ продолжение функции $p(\bar{x}) \in H(\Omega_h)$ с сохранением нормы W_2^1 по теореме 5.2. Тогда из леммы 5.3, неравенства (5.13) и леммы 5.5 следует существование постоянной $\tilde{c}$, не зависящей от h и p^* такой, что

$$\|p^*\|_{0,\partial\Omega_h} \le \tilde{c}\,\|p^*\|_{1,D_h}\,,$$

поскольку $\delta = c_3 h$. Так как $p^* = p$ на $\partial\Omega_h$, то, оценивая $\|p^*\|_{1,D_h}$ по теореме 5.2 через $\|p\|_{1,\Omega_h}$, получим (5.14).

Для доказательства (5.15) достаточно заметить, что

$$\|\hat{p}\|^2_{1,D_h} = \|p\|^2_{1,\Omega_h} + \|\hat{p}\|^2_{1,\hat{\omega}_h}\,, \tag{5.16}$$

где $\hat{\omega}_h$ – объединение всех $T_h \in D_h \setminus \Omega_h$, хотя бы одна вершина каждого из них принадлежит $\partial\Omega_h$. Тогда

$$\|\hat{p}\|^2_{1,h,\hat{\omega}_h} \le K(1 + h^{-2}) \sum_{\bar{x} \in \Sigma_h(\partial\Omega_h)} |p(\bar{x})|^2 h^n\,,$$

где K зависит от n (размерности области Ω) и максимального числа n-симплексов, имеющих общую вершину. Последовательно применяя для оценки правой части лемму 5.3 и неравенство (5.14), получим

$$\|\hat{p}\|^2_{1,h,\hat{\omega}_h} \le K_1(h + h^{-1})\,\|p\|^2_{1,\Omega_h}$$

с постоянной K_1 , не зависящей от h . Оценивая левую часть последнего неравенства по лемме 5.1, получим

$$\|\hat{p}\|^2_{1,\hat{\omega}_h} \leq K_2 (h + h^{-1}) \|p\|^2_{1,\Omega_h} .$$

Из этого неравенства и равенства (5.I6) следует неравенство (5.I5). Теорема доказана.

Сформулируем теорему, доказательство которой элементарно.

Теорема 5.4. Пусть $p(\bar{x}) \in H(\Omega_h)$, $p^*(\bar{x})$ и $\hat{p}(\bar{x})$ из $H(D_h)$ ее продолжения, указанные в теоремах 5.2 и 5.3, тогда

$$\|\hat{p}\|^2_{1,D_h} \geq (1 + C^2)^{-1} \|p^*\|^2_{1,D_h} ,$$

где постоянная C из теоремы 5.2.

Использование пространства лагранжевых восполнений $H(k,\Omega_h)$ на прямолинейной триангуляции Ω_h при $k > 1$ для аппроксимации краевых задач методом конечных элементов в области Ω с криволинейной границей не позволяет получить приближенное решение с максимальной точностью по h . В этом случае необходимо использовать криволинейную триангуляцию $\tilde{\Omega}_h$ области Ω , которую можно построить, исказив приграничные n-симплексы с целью точной или приближенной (изопараметрические конечные элементы [52, I30]) аппроксимации границы $\partial\Omega$. Ради простоты дальнейшего изложения ограничимся случаем $\tilde{\Omega}_h$ с точной аппроксимацией границы $\partial\Omega$.

Предположим, что прямолинейная триангуляция Ω_h построена при помощи алгоритмов, изложенных в главе I, т.е. все узлы $\partial\Omega_h$ лежат на $\partial\Omega$. Тогда, если n-симплекс T_h' имеет вершину, принадлежащую $\partial\Omega_h$, то будем считать, что T_h' целиком лежит в приграничной полосе

$$\Omega(\delta_0) = \omega_{-\delta_0} \cup \omega_{\delta_0} \cup \partial\Omega ,$$

где определена приграничная система координат $(\bar{y}, n)$, $\bar{y} \in \partial\Omega$, $|n| < \delta_0$:

$$\bar{x} = \bar{y} + n \cdot \bar{N}(\bar{y}), \quad \bar{x} \in \Omega(\delta_0),$$

а $\bar{N}(\bar{y})$ - единичный вектор внутренней псевдонормали. Пусть объединение n-симплексов $T_h^1, \ldots, T_h^n$ образует приграничную призму Π_h, а криволинейные симплексы $\tilde{T}_h^1, \ldots, \tilde{T}_h^n$ вспомогательной триангуляциии $\tilde{\Omega}_h$, построенной для доказательства теоремы I.2 $(n=2)$ и теоремы 2.I $(n=3)$, образуют призму $\tilde{\Pi}_h$, т.е. n-симплексы T_h^i получены спрямлением $\tilde{T}_h^i$. Обозначим вершины нижнего основания призмы Π_h (лежащего в Ω и удаленного от $\partial\Omega$ на расстояние $O(h)$) через $P_1, \ldots, P_n$, а вершины верхнего основания (лежащего на $\partial\Omega$) через $Q_1, \ldots, Q_n$ (см. рис. 5.2).

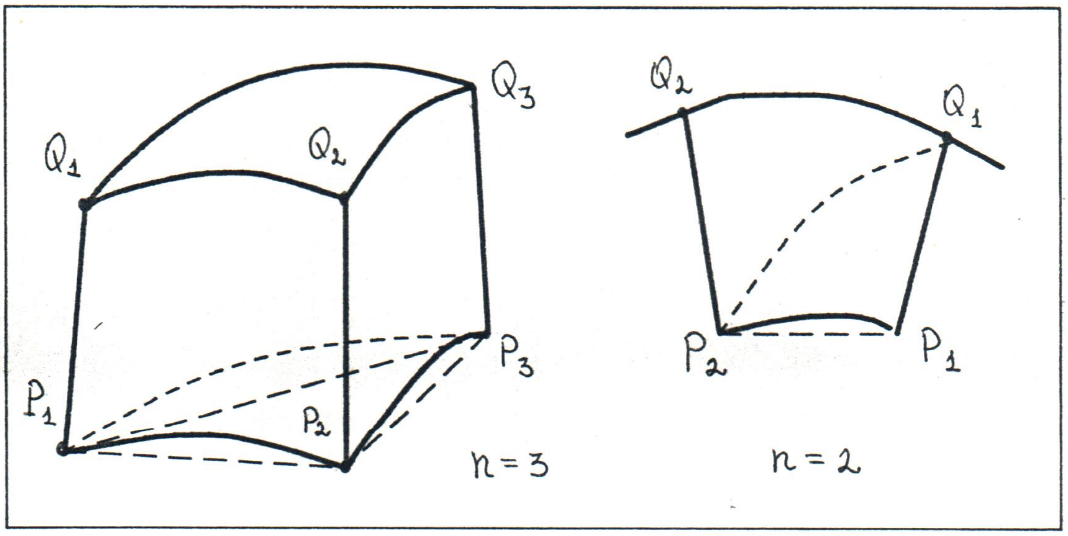

Рис. 5.2. Приграничные призмы

Напомним, что $P_i = Q_i + n_1 \bar{N}(Q_i)$, $l_1 h \le n_1 \le l_2 h$. Определим

$$\bar{N}_h(\bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i - \bar{y}, \tag{5.I7}$$

где, если $\bar{y} = \bar{y}(s)$ при $n=2$ или $\bar{y} = \bar{y}(u,v)$ при $n=3$

параметризация границы $\partial\Omega$ по ее длине или из (2.3), то

$$\lambda_1 = 1-\lambda_2, \quad \lambda_2 = \frac{s-s_1}{s_2-s_1}, \quad Q_i = \bar{y}(s_i), \quad i=1,2,$$

при $n=2$ и

$$\lambda_1 = 1-\lambda_2-\lambda_3, \quad \lambda_2 = \frac{u-u_1}{u_2-u_1}, \quad \lambda_3 = \frac{v-v_1}{v_3-v_1}, \quad Q_i = \bar{y}(u_i, v_i), \quad i=\overline{1,3},$$

при $n=3$, если $u_1 \neq u_2$, $v_1 \neq v_3$ (см. 2.I5).

Тогда определим преобразование

$$\bar{x} \in \widetilde{\Pi}_h \longrightarrow \bar{x}' \in \widetilde{\Pi}_h' \tag{5.I8}$$

формулой

$$\bar{x}' = \bar{y} + n_h(\bar{y})\bar{N}_h(\bar{y}),$$

где

$$\bar{x} = \bar{y} + n\bar{N}(\bar{y}),$$

$$n_h(\bar{y}) = n(\bar{y})/n_1.$$

Преобразование (5.I8) можно рассматривать как преобразование прямоугольной призмы Π в координатах (s, n_h) или (u, v, n_h) в криволинейную призму $\widetilde{\Pi}_h'$. Преобразуя прямолинейные n-симплексы Π в криволинейные n-симплексы $\widetilde{T}_h$ призмы $\widetilde{\Pi}_h'$, получим необходимую триангуляцию (снова ее будем обозначать через $\widetilde{\Omega}_h$) области Ω, причем $\widetilde{\Omega}_h = \Omega$ и n-симплексы $T_h \in \widetilde{\Omega}_h$, не имеющие общих точек с $\partial\Omega$, будут прямолинейными.

Через $\Sigma_{h/k}(T_h)$ обозначим множество преобразованных узлов $\Sigma_k(T)$ канонического n-симплекса T.

О п р е д е л е н и е 5.2. Лагранжевым восполнением на криволинейной триангуляции $\widetilde{\Omega}_h$ дискретной функции $p_{h/k}(\bar{x})$ будем называть функцию $p_h(\bar{x})$, сужение которой на каждый

n-симплекс $T_h \in \tilde{\Omega}_h$ однозначно определяется по своим значениям на множестве $\Sigma_{k/h}(T_h)$ и

$$p_h(\bar{x}) = p(F_h^{-1}\bar{x}) \in P_k(T),$$

где F_h - преобразование T в T_h (линейное, если T_h - прямолинейный n-симплекс, и из (5.I8), если T_h - приграничный n-симплекс). Пространство полученных функций будем обозначать через $H(k, \tilde{\Omega}_h)$ и называть пространством лагранжевых восполнений на криволинейной триангуляции $\tilde{\Omega}_h$.

Используя гладкость преобразования (5.I8) и практически повторяя рассуждения настоящего параграфа для прямолинейных триангуляций, можно легко установить справедливость следующих утверждений.

Т е о р е м а 5.5. Пусть Ω_h - прямолинейная, а $\tilde{\Omega}_h$ - криволинейная (полученная из Ω_h только что описанным методом) триангуляции области $\Omega \subset R^n$, $n=2,3$, с кусочно-гладкой границей, а $H(k,\Omega_h)$ и $H(k,\tilde{\Omega}_h)$ - пространства лагранжевых восполнений. Тогда

$$H(k,\tilde{\Omega}_h) \subset \left(W_2^1(\tilde{\Omega}_h) \cap C(\tilde{\Omega}_h) \right),$$

каждой функции $\tilde{p}(\bar{x}) \in H(k, \tilde{\Omega}_h)$ можно поставить в соответствие функцию $p(\bar{x}) \in H(k, \Omega_h)$, значения которой в узлах $\Sigma_{h/k}(\Omega_h)$ совпадают со значениями функции $\tilde{p}(\bar{x})$ в узлах $\Sigma_{h/k}(\tilde{\Omega}_h)$, будут справедливы неравенства

$$c_1 \cdot \|p\|_{1,\Omega_h} \leq \|\tilde{p}\|_{1,\tilde{\Omega}_h} \leq c_2 \cdot \|p\|_{1,\Omega_h}$$

с положительными не зависящими от h и $p(\bar{x})$ постоянными c_1 и c_2.

Т е о р е м а 5.6. Утверждения теорем 5.I, 5.2, 5.3 и 5.4 справедливы и для случая пространств лагранжевых восполнений на криволинейных триангуляциях, построенных только что описанным способом для областей с кусочно-гладкими границами класса C^2.

Замечание 5.2. Эти утверждения будут справедливы и в случае искажения n-симплексов триангуляции Ω_h с целью точной аппроксимации границ подобластей Ω_i из теоремы I.3 или замечания 2.I.

§ 6. Пространства лагранжевых восполнений на прямоугольных сетках

Рассмотрим ограниченную область $\Omega \subset R^n$, $n = 2,3$, с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ класса C^2 и n-прямоугольник $D \supset \bar{\Omega}$. Построим на D семейство прямоугольных сеток D_h, $h \in (0, h_0)$, разбив D_h гиперплоскостями

$$x_i = a_{ij}, \quad j = 0, \dots, N_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

при условии

$$l_{1i} h \le a_{i\,j+1} - a_{ij} \le l_{2i} h, \quad j = \overline{0, N_i - 1}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{6.I}$$

Обозначим через Ω_h совокупность всех элементарных n-прямоугольников K_h (ячеек) сеточной области D_h, причем потребуем, чтобы полученная область Ω_h была связной и $\partial\Omega_h$ аппроксимировала $\partial\Omega$ с первым порядком точности по h.

Построенное множество Ω_h называется прямоугольной сеткой для Ω. По заданному целому $k \geqslant 1$ разобъем каждый $K_h \in D_h$ на k^n равновеликих n-прямоугольников с множеством вершин $\Sigma_k(K_h)$ из (4.I7). Этому разбиению соответствуют прямоугольные сетки $D_{h/k}$ для D и $\Omega_{h/k}$ для Ω с множеством вершин (узлов)

$$\Sigma_{h/k}(\Omega_h) = \bigcup_{K_h \in \Omega_h} \Sigma_k(K_h).$$

Через $\Sigma_h = \Sigma_{h/1}(\Omega_h)$ будем обозначать множество всех узлов сетки Ω_h.

Пусть $q_{h/k}(\bar{x})$ - дискретная однозначная функция, определенная на множестве $\Sigma_{h/k}(\Omega_h)$

О п р е д е л е н и е 6.I. Лагранжевым восполнением дискретной функции $q_{h/k}(\bar{x})$ будем называть функцию $q(\bar{x})$, сужение которой на каждую ячейку $K_h \in \Omega_h$ принадлежит $Q_k(K_h)$ из (4.I7) и однозначно определяется из условий

$$q(\bar{x}) = q_{h/k}(\bar{x}) \quad \forall\, \bar{x} \in \Sigma_k(K_h).$$

Пространство $H(k, \Omega_h)$ полученных функций будем называть пространством лагранжевых восполнений. При $k=1$ положим $H(\Omega_h) = H(1, \Omega_h)$.

Из леммы 4.2 и теоремы 4.2 вытекает справедливость следующего утверждения.

Т е о р е м а 6.I. Любая функция из пространства лагранжевых восполнений $H(k, \Omega_h)$ непрерывна и принадлежит пространству Соболева $W_2^1(\Omega_h)$. Кроме того, пространства $H(k, \Omega_h)$ и $H(\Omega_{h/k})$ имеют одинаковую конечную размерность. Для любых функций $q \in H(k, \Omega_h)$ и $q_1 \in H(\Omega_{h/k})$ таких, что

$$q(\bar{x}) = q_1(\bar{x}) \quad \forall\, \bar{x} \in \Sigma_{h/k}(\Omega_h)$$

справедливы неравенства

$$c_1 \|q_1\|^2_{1,\Omega_h} \le \|q\|^2_{1,\Omega_h} \le c_2 \|q_1\|^2_{1,\Omega_h},$$

где постоянные c_1 и c_2 положительны и не зависят от h и

$q(\bar{x})$.

Установим возможность продолжения функций из $H(k, \Omega_h)$ в $H(k, D_h)$ с сохранением нормы W_2^1 . Из теоремы 6.I следует, что для этого достаточно доказать возможность продолжения функций из $H(\Omega_{h/k})$ в $H(D_{h/k})$.

Т е о р е м а 6.2. Если выполняются условия (6.I) и $\partial\Omega_h$ аппроксимирует $\partial\Omega$ с первым порядком точности по h , то существует положительная постоянная C , не зависящая от h и такая, что для любой функции $q(\bar{x}) \in H(\Omega_h)$ существует $q^*(\bar{x}) \in H(D_h)$:

$$q^*(\bar{x}) = q(\bar{x}) \quad \forall\ \bar{x} \in \Omega_h ,$$

$$\|q^*\|_{1,D_h} \leq C \cdot \|q\|_{1,\Omega_h}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разделим каждую ячейку $K_h \in D_h$ на n-симплексы в соответствии с рис. 6.I и рис. 6.2.

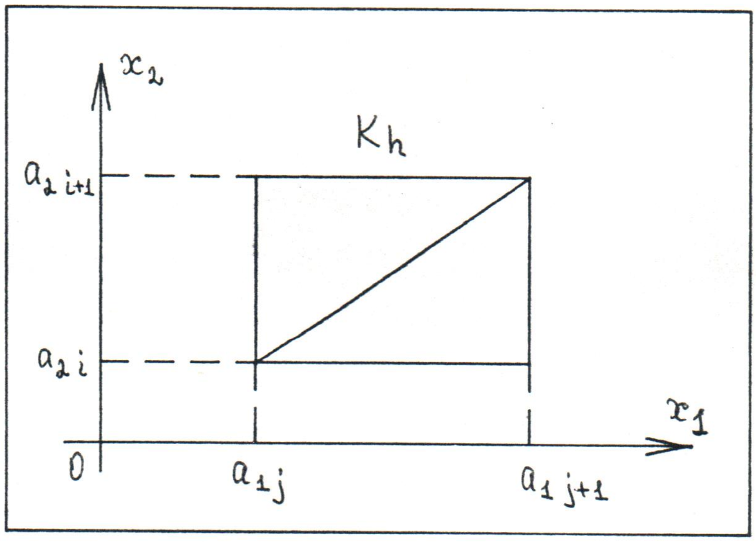

Рис. 6.I. Триангуляция D_h при $n = 2$.

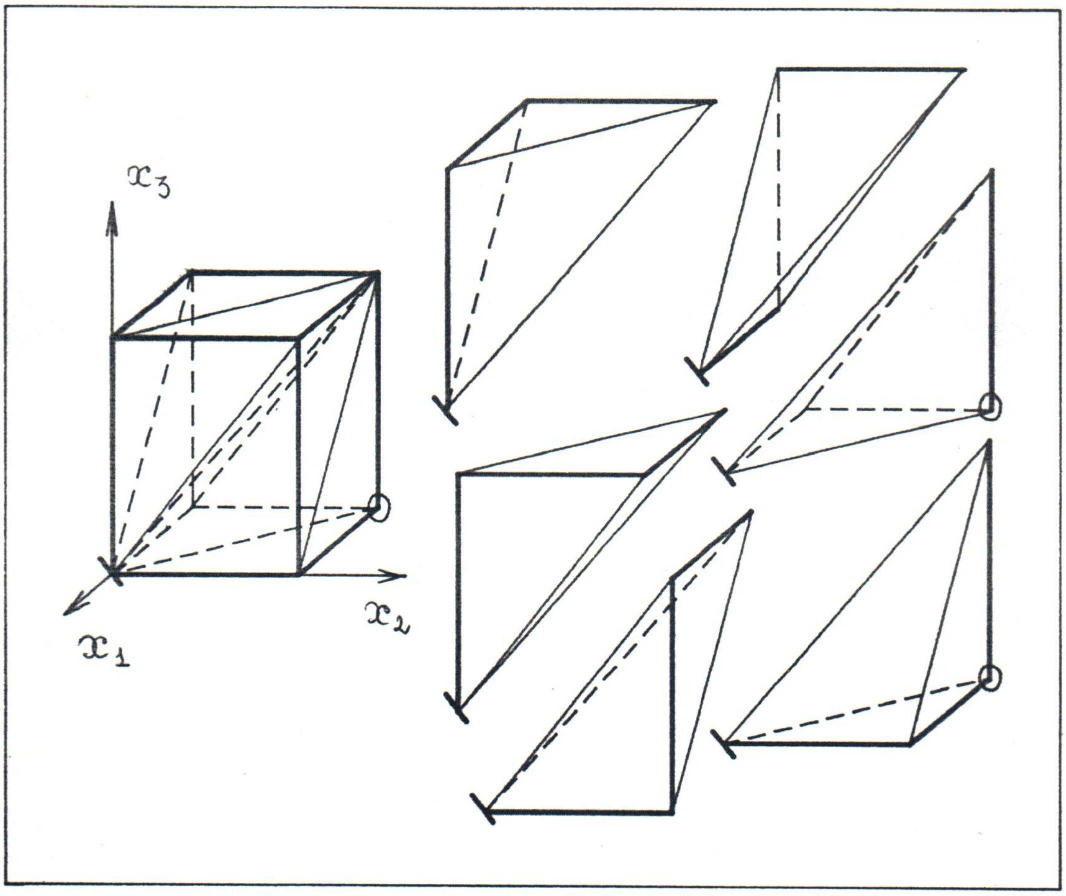

Рис. 6.2. Триангуляция D_h при $n=3$.

В результате получим триангуляции D'_h и Ω'_h для областей D и Ω, множества узлов которых совпадают с $\Sigma_h(D_h)$ и $\Sigma_h(\Omega_h)$ соответственно. Очевидно, что семейства D'_h и Ω'_h являются решениями задачи (T) для областей D и Ω. Определим функцию $p(\bar{x})$ из пространства лагранжевых восполнений $H(\Omega'_h)$ на триангуляции Ω'_h из следующих условий

$$p(\bar{x}) = q(\bar{x}) \quad \forall\, \bar{x} \in \Sigma_h(\Omega'_h).$$

Пусть $p^*(\bar{x})$ из пространства лагранжевых восполнений $H(D'_h)$ продолжение функции $p(\bar{x})$ по теореме 5.2. Построим $q^*(\bar{x}) \in H(D_h)$ такую, что

$$q^*(\bar{x}) = p^*(\bar{x}) \quad \forall\, \bar{x} \in \Sigma_h(D_h).$$

Очевидно, что $q^*(\bar{x})$ является продолжением функции $q(\bar{x}) \in H(\Omega_h)$.

Рассмотрим произвольную ячейку $K_h \in D_h$. Пусть $\bar{q}^*$ - вектор значений функции $q^*(\bar{x})$ (и $p^*(\bar{x})$) в вершинах K_h. Определим линейное преобразование K_h в единичный n-куб K:

$$\bar{y} = A_h^{-1}(\bar{x} - \bar{x}_0) \qquad \forall \bar{x} \in K_h ,$$

где A_h - диагональная матрица (D_h) из (4.I5), а $\bar{x}_0$ - вершина K_h. Тогда получим для любого $\bar{q}^* \neq 0$, что неравенство

$$C_1 h^{2-n} \leq \frac{\int_K (|\nabla \tilde{v}|^2 + h^2 |\tilde{v}|^2)\, d\bar{y}}{\|v\|^2_{1,K_h}} \leq C_2 h^{2-n} \tag{6.2}$$

аналогичное неравенству (4.I3), справедливо для $v(\bar{x}) = p^*(\bar{x})$, $\tilde{v}(\bar{y}) = \tilde{p}(\bar{y}) = p^*(\bar{x}_0 + A_h \bar{y})$ и $v(\bar{x}) = q^*(\bar{x})$, $\tilde{v}(\bar{y}) = \tilde{q}(\bar{y}) = q^*(\bar{x}_0 + A_h \bar{y})$ с постоянными $C_2 \geq C_1 > 0$, которые не зависят от h, $T_h \in D_h$ и функции $q(\bar{x}) \in H(\Omega_h)$ Кроме того,

$$\int_K (|\nabla \tilde{q}(\bar{y})|^2 + h^2 |\tilde{q}(\bar{y})|^2)\, d\bar{y} = ((A + h^2 B)\bar{q}^*, \bar{q}^*),$$

$$\int_K (|\nabla \tilde{p}(\bar{y})|^2 + h^2 |\tilde{p}(\bar{y})|^2)\, d\bar{y} = ((A_1 + h^2 B_1)\bar{q}^*, \bar{q}^*),$$

где матрицы A и A_1 - симметричны и положительно полуопределены, а матрицы B и B_1 - симметричны и положительно определены, а их элементы не зависят от h. Легко убедиться в том, что ядра матриц A и A_1 одномерны и совпадают (они состоят из векторов, все компоненты которых равны между собой). Следовательно, для любого $\bar{q}^* \neq 0$ справедливы неравенства (аналог (4.I4))

$$C_3 \leq \frac{(A\bar{q}^*, \bar{q}^*) + h^2(B\bar{q}^*, \bar{q}^*)}{(A_1\bar{q}^*, \bar{q}^*) + h^2(B_1\bar{q}^*, \bar{q}^*)} \leq C_4 , \tag{6.3}$$

где
$$C_3 = \min\{\lambda_1(A)\cdot\rho^{-1}(A_1);\ \rho^{-1}(B^{-1}B_1)\},$$
$$C_4 = \max\{\rho(A)\cdot\lambda_1^{-1}(A_1);\ \rho(B\,B_1^{-1})\}.$$

Тогда

$$\frac{C_1\cdot C_3}{C_2}\|p^*\|^2_{1,K_h} \leq \|q^*\|^2_{1,K_h} \leq \frac{C_2\cdot C_4}{C_1}\|p^*\|^2_{1,K_h} , \tag{6.4}$$

где постоянные C_1, C_2, C_3 и C_4 из неравенств (6.2) и (6.3). Суммируя правое неравенство из (6.4) по всем $K_h \in D_h$ и учитывая, что

$$\|p^*\|^2_{1,D_h} \leq C\cdot\|p\|^2_{1,\Omega_h}$$

по теореме 5.2, получим

$$\|q^*\|^2_{1,D_h} \leq C\,\frac{C_2\cdot C_4}{C_1}\,\|p\|^2_{1,\Omega_h} . \tag{6.5}$$

Суммируя левое неравенство из (6.4) по всем $K_h \in \Omega_h$ и учитывая, что $p^*(\bar{x}) = p(\bar{x})$, $q^*(x) = q(\bar{x})$ в Ω_h, получим

$$\|p\|^2_{1,\Omega_h} \leq \frac{C_2}{C_1\cdot C_3}\|q\|^2_{1,\Omega_h} .$$

Отсюда и из неравенства (6.5) следует утверждение теоремы.

Замечание 6.I. Если через $\overset{\circ}{H}(D_h)$ обозначить подпространство функций из $H(D_h)$ равных нулю на ∂D_h, то построенное продолжение функции $q(\bar{x}) \in H(\Omega_h)$ функция $q^*(\bar{x}) \in \overset{\circ}{H}(D_h)$.

В заключение параграфа сформулируем аналог теорем 5.3 и 5.4, доказательство которого проводится по схеме доказательства теоремы 6.I с использованием оценок из теорем 5.3 и 5.4.

Теорема 6.3. Для любой функции $q(\bar{x}) \in H(\Omega_h)$ построим $\hat{q}(\bar{x}) \in H(D_h)$ по ее значением в узлах D_h :

$$\hat{q}(\bar{x}) = q(\bar{x}) \quad \forall \ \bar{x} \in \Sigma_h(\Omega_h),$$

$$\hat{q}(\bar{x}) = 0 \quad \forall \ \bar{x} \in \Sigma_h(D_h) \setminus \Sigma_h(\Omega_h),$$

и $q^*(\bar{x}) \in H(D_h)$ по теореме 6.I. Тогда

$$\|q\|_{0,\partial\Omega_h} \leq C_1 \|q\|_{1,\Omega_h},$$

$$\|\hat{q}\|^2_{1,D_h} \leq C_2(h+h^{-1}) \cdot \|q\|^2_{1,\Omega_h},$$

$$\|\hat{q}\|^2_{1,D_h} \geq (1+C^2)^{-1} \|q^*\|^2_{1,\Omega_h},$$

где постоянные C_1 и C_2 не зависят от h и $q(\bar{x})$, а постоянная C из теоремы 6.2.

§ 7. Пространства эрмитовых восполнений на прямоугольных сетках

Рассмотрим ограниченную область $\Omega \subset R^n$, $n = 2,3$, с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ класса C^2 и ограниченный n -прямоугольник $D \supset \bar{\Omega}$. Пусть D_h и Ω_h , $D_h \supset \Omega_h$; $h \in (0, h_0)$ семейство прямоугольных сеток для D и Ω , определенные в § 6 с условием (6.I). Пусть $\Sigma_h(\Omega_h)$, $\Sigma_h(D_h)$ множество узлов сетки Ω_h , D_h . Для заданного целого $m \geq 0$ через $q_{h,m}(\bar{x})$, $\bar{x} \in \Sigma_h(\Omega_h)$ обозначим набор из

$(m+1)^n$ чисел $q_\alpha(\bar{x})$, $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $\alpha_i=0,1,\dots,m$; $i=1,\dots,n$. Множество $\{q_{h,m}(\bar{x})\ \forall\,\bar{x}\in\Sigma_h(\Omega_h)\}$ будем называть дискретной эрмитовой функцией $q_{h,m}(\bar{x})$, определенной на $\Sigma_h(\Omega_h)$.

Определение 7.I. Эрмитовым восполнением дискретной эрмитовой функции $q_{h,m}(\bar{x})$ будем называть функцию $q(\bar{x})$, сужение которой на каждую ячейку $K_h\in\Omega_h$ принадлежит $Э_m(K_h)=Q_{2m+1}(K_h)$ из (4.I7) и однозначно определяется из условий

$$\frac{\partial^{|\alpha|}q(\bar{x})}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\partial x_n^{\alpha_n}}=q_\alpha(\bar{x})\qquad\forall\,\bar{x}\in\Sigma_h(\Omega_h),$$

$$\alpha_i=0,1,\dots,m;\quad i=1,\dots,n.$$

Пространство $H^Э(m,\Omega_h)$ полученных функций будем называть пространством эрмитовых восполнений на Ω_h. При $m=0$ положим $H^Э(\Omega_h)=H^Э(0,\Omega_h)$. Очевидно, что $H^Э(\Omega_h)$ совпадает с пространством лагранжевых восполнений $H(\Omega_h)$, определенным в § 6.

Перепишем (4.I9) в следующем виде:

$$q(\bar{x})=q_0(\bar{x})+\psi(\bar{x}),\tag{7.I}$$

где $\psi(\bar{x})=\sum_{\ell=1}^{mn}q_\ell(\bar{x})$ и $\psi(\bar{x})=0\quad\forall\,\bar{x}\in\Sigma_h(\Omega_h)$. Функции $q_0(\bar{x})$ из (7.I) поставим в соответствие функцию $p_0(\bar{x})\in H(\Omega_h)$, определяемую по ее значениям в узлах Ω_h:

$$p_0(\bar{x})=q_0(\bar{x})\qquad\forall\,\bar{x}\in\Sigma_h(\Omega_h).\tag{7.2}$$

Обозначим через $H_0^Э(m,\Omega_h)$ подпространство всех функций $q_0(\bar{x})$, соответствующих функциям $q(\bar{x})\in H^Э(m,\Omega_h)$, а через $H_1^{э}(m,\Omega_h)$ подпространство функций $q(\bar{x})=0$ $\forall\,\bar{x}\in\Sigma_h(\Omega_h)$. Из леммы 4.3, представления (4.19) (или (7.1)) теоремы 4.3, замечания 4.1 и теоремы 4.4 вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 7.1. Любая функция из пространства эрмитовых восполнений $H^{э}(m,\Omega_h)$ непрерывна и принадлежит пространству Соболева $W_2^1(\Omega_h)$, в действительности $H^{э}(m,\Omega_h)\subset C^m(\Omega_h)\cap W_2^{m+1}(\Omega_h)$. Кроме того, для любой функции $q(\bar{x})\in H^{э}(m,\Omega_h)$, представленной в виде (7.1), справедливы неравенства

$$\begin{aligned} &\|q_0\|^2_{1,\Omega_h}\leq\gamma\,\|q\|^2_{1,\Omega_h},\\ &\|\psi\|^2_{1,\Omega_h}\leq\gamma\,\|q\|^2_{1,\Omega_h}, \end{aligned}\tag{7.3}$$

$$c_1(1+h^{-2})\|\psi\|^2_{0,\Omega_h}\leq\|\psi\|^2_{1,\Omega_h}\leq c_2(1+h^{-2})\|\psi\|^2_{0,\Omega_h}\tag{7.4}$$

И наконец, если $p_0(\bar{x})\in H(\Omega_h)$ определено из условий (7.2), то

$$c_3\,\|p_0\|^2_{1,\Omega_h}\leq\|q_0\|^2_{1,\Omega_h}\leq c_4\,\|p_0\|^2_{1,\Omega_h}.\tag{7.5}$$

Постоянные γ, c_1, c_2, c_3, c_4 – положительны, конечны и не зависят от h и $q(\bar{x})$.

Теорема 7.2. (О продолжении). Если выполняются условия (6.1) и $\partial\Omega_h$ аппроксимирует $\partial\Omega$ с первым порядком точности по h, то существует положительная не зависящая от h постоянная C такая, что для любой функции $q(\bar{x})\in H^{э}(m,\Omega_h)$ существует $q^*(\bar{x})\in H^{э}(m,D_h)$:

$$q^*(\bar{x})=q(\bar{x})\quad\forall\,\bar{x}\in\Omega_h,$$

$$\|q^*\|_{1,D_h} \le C \cdot \|q\|_{1,\Omega_h}.$$

Доказательство. Пусть $q(\bar{x}) \in H^э(m,\Omega_h)$ представлена в виде (7.1):

$$q(\bar{x}) = q_0(\bar{x}) + \psi(\bar{x})$$

и $\Psi_{h,m}(\bar{x})$ – эрмитова дискретная функция, определенная на $\Sigma_h(\Omega_h)$, восполнением которой является $\psi(\bar{x})$. Определим эрмитову дискретную функцию $\Psi^*_{h,m}(\bar{x})$ на $\Sigma_h(D_h)$, полагая

$$\Psi^*_{h,m}(\bar{x}) = \Psi_{h,m}(\bar{x}) \quad \forall\ \bar{x} \in \Sigma_h(\Omega_h),$$

$$\Psi^*_{h,m}(\bar{x}) = \{0\} \qquad \forall\ \bar{x} \in \Sigma_h(D_h) \setminus \Sigma_h(\Omega_h).$$

Обозначим через $\psi^*(\bar{x})$ эрмитово восполнение $\Psi^*_{h,m}(\bar{x})$ на D_h. Очевидно, что $\psi^*(\bar{x}) \in H^э(m, D_h)$ и $\psi^*(\bar{x}) = \psi(\bar{x})\ \ \forall\ \bar{x} \in \Omega_h$.

Введем

$$\psi^*_\alpha(\bar{x}) = \frac{\partial^{|\alpha|}\psi^*(\bar{x})}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| \ge 1, \tag{7.6}$$

$$\alpha_i = 0, 1, \ldots, m; \quad i = 1, \ldots, n; \quad \bar{x} \in \Sigma_h(D_h).$$

Рассмотрим произвольную ячейку $K_h \in D_h$, длины параллельных осям координат ребер ячейки K_h обозначим через a_i. Напомним, что

$$a_i \in [\ell_1 h, \ell_2 h],$$

и пусть

$$A_h = diag\{a_1, \ldots, a_n\}.$$

Пусть $\bar{x}_\beta$ – вершина K_h. Введем вектор $\bar{\Psi}^*$ значений $\psi^*(\bar{x}_\beta)$,

$|\alpha| \geq 1$, $\alpha_i = 0, 1, \dots, m$; $\beta_j = 0, 1$; $i, j = 1, \dots, n$; диагональную матрицу L_h, преобразующую вектор $\bar{\Psi}^*$ в вектор $\bar{\varphi}$ с компонентами $a_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot a_n^{\alpha_n} \cdot \psi_\alpha^*(x_\beta)$. Тогда из (4.19) следует, что

$$\int_{K_h} |\psi^*(\bar{x})|^2 d\bar{x} = \det A_h \cdot (A L_h \bar{\Psi}^*, L_h \bar{\Psi}^*),$$

где элементы симметричной положительно определенной матрицы A не зависят от h. Следовательно,

$$\ell_1^n (L_h^2 \bar{\Psi}^*, \bar{\Psi}^*) \leq h^{-n} \int_{K_h} |\psi^*|^2 d\bar{x} \leq \ell_2^n (L_h^2 \bar{\Psi}^*, \bar{\Psi}^*). \tag{7.7}$$

Определим вектор $\bar{\Psi}^*$ значений $\psi_\alpha^*(\bar{x})$, $\forall\, \bar{x} \in \Sigma_h(D_h)$,

$|\alpha| \geq 1$, $\alpha_i = 0, \dots, m$, $i = 1, \dots, n$;

и диагональную матрицу L, преобразующую вектор $\bar{\Psi}^*$ в вектор $\bar{\Phi}$ с компонентами $a_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot a_n^{\alpha_n} \cdot \psi_\alpha^*(\bar{x})$. Тогда, учитывая, что каждый узел сетки D_h является общим не более, чем для 2^n ячеек K_h, получим, суммируя неравенства (7.7) по всем $K_h \in D_h$, что

$$\ell_1^n (L^2 \bar{\Psi}^*, \bar{\Psi}^*) \leq h^{-n} \int_{D_h} |\psi^*(\bar{x})|^2 d\bar{x} \leq (2\ell_2)^n (L^2 \bar{\Psi}^*, \bar{\Psi}^*).$$

Так как $\psi_\alpha^*(\bar{x}) = 0$ $\forall\, \bar{x} \in \Sigma_h(D_h) \setminus \Sigma_h(\Omega_h)$, то суммируя (7.7) по всем $K_h \in \Omega_h$, получим

$$\ell_1^n (L^2 \bar{\Psi}^*, \bar{\Psi}^*) \leq h^{-n} \int_{\Omega_h} |\psi(\bar{x})|^2 d\bar{x}.$$

Следовательно,

$$\|\psi^*\|_{0,D_h}^2 \leq \left(\frac{2\ell_2}{\ell_1}\right)^n \|\psi\|_{0,\Omega_h}^2.$$

Из этого неравенства и неравенств (7.4) легко получить, что

$$\|\psi^*\|_{1,D_h} \leq \frac{c_2}{c_1} \left(\frac{2\ell_2}{\ell_1}\right)^n \|\psi\|_{1,\Omega_h}^2. \tag{7.8}$$

Теперь построим продолжение $q_0(\bar{x})$. Пусть $p_0(\bar{x})$ – лагранжево восполнение на Ω_h, построенное по $q_0(\bar{x})$, а $p_0^*(\bar{x})$ его продолжение на D_h по теореме 6.2. Обозначим через $q_0^*(\bar{x}) \in H_0^э(m, \Omega_h)$ соответствующую $p_0^*(\bar{x})$. Тогда, применяя последовательно правое неравенство из (7.5) (для D_h), теорему 6.2 и левое неравенство из (7.5), получим

$$\|q_0^*\|^2_{1,D_h} \leq \frac{c_4}{c_3} C^2 \|q_0\|^2_{1,\Omega_h} , \tag{7.9}$$

где постоянная C из теоремы 6.2.

И наконец, определим $q^*(\bar{x}) \in H^э(m, D_h)$:

$$q^*(\bar{x}) = q_0^*(\bar{x}) + \psi^*(\bar{x}).$$

Тогда, используя неравенство треугольника, неравенства (7.3), (7.8) и (7.9), получим

$$\|q^*\|_{1,D_h} \leq C \cdot \|q\|_{1,\Omega_h}$$

где $C^2 = [\gamma \cdot \max\{\tilde{c}_1; \tilde{c}_2\}]$, а через $\tilde{c}_1$ и $\tilde{c}_2$ обозначены произведения констант в (7.8) и (7.9). Теорема доказана.

В заключение параграфа сформулируем аналог теоремы 6.3, доказательство которого легко проводится по схеме доказательства теоремы 7.2 с использованием оценок из теоремы 6.3.

Теорема 7.3. Для любой функции $q(\bar{x}) \in H^э(m, \Omega_h)$ построим $\hat{q}(\bar{x}) \in H^э(m, D_h)$ как восполнение эрмитовой дискретной функции $q_{h,m}(\bar{x})$, продолженной нулем на D_h, и $q^*(\bar{x}) \in H^э(m, D_h)$ по теореме 7.2. Тогда

$$\|q\|_{0,\partial\Omega_h} \leq c_1 \cdot \|q\|_{1,\Omega_h},$$

$$\|\hat{q}\|^2_{1,D_h} \leq c_2 \cdot (h + h^{-1}) \|q\|^2_{1,\Omega_h},$$

$$\|\hat{q}\|^2_{1,D_h} \geq (1+C^2)^{-1} \cdot \|q^*\|^2_{1,D_h} ,$$

где постоянные C_1 и C_2 не зависят от h и $q(\bar{x})$, а постоянная C из теоремы 7.2.

Заметим, что оценки $\|\hat{q}\|_{1,D_h}$ сверху, полученные в теоремах 6.3 и 7.3, и оценка $\|\hat{p}\|_{1,D_h}$ из теоремы 5.3 точны по порядку h . Легко построить пример, подтверждающий это замечание $(q(\bar{x}) \equiv 1$ в $\Omega_h)$.

ГЛАВА 3

МЕТОД ФИКТИВНЫХ КОМПОНЕНТ

Настоящая глава посвящена построению и изучению метода фиктивных компонент для решения систем вариационно-разностных уравнений и задач о представлении линейного функционала в гильбертовом пространстве. При исследовании сходимости метода фиктивных компонент существенным является применение теорем о продолжении сеточных функций. В последнем параграфе главы теория методов фиктивных компонент применяется для построения эффективных методов решения разностной задачи Дирихле для дифференциального уравнения четвертого порядка. Метод фиктивных компонент для решения дискретных задач с естественными краевыми условиями ранее был предложен и исследован Г.П. Астраханцевым.

§ 8. Системы вариационно-разностных уравнений

Пусть $\Omega \subset R^n$, $n=2,3$, - область с кусочно-гладкой границей класса C^2. Рассмотрим краевую задачу

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(\bar{x})\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a(\bar{x})\cdot u = f(\bar{x}), \quad \bar{x}\in\Omega,$$

$$u(\bar{x}) = g(\bar{x}), \quad \bar{x}\in\Gamma_0, \tag{8.1}$$

$$\frac{\partial u(\bar{x})}{\partial N} + \sigma(\bar{x})\cdot u(\bar{x}) = \varphi(\bar{x}), \quad \bar{x}\in\Gamma_1 .$$

Здесь $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \partial\Omega$, $\dfrac{\partial u}{\partial N} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\cos(\bar{n}, x_i)$ -

– производная по конормали, $\bar{n} = \bar{n}(\bar{x})$ – вектор единичной внешней нормали в точке $\bar{x} \in \partial\Omega$. Функции $a_{ij}(\bar{x}), a(\bar{x}) \in L_\infty(\Omega)$, $f(\bar{x}) \in L_2(\Omega)$, $\sigma(\bar{x}) \in L_\infty(\Gamma_1)$, $g(x) \in L_2(\Gamma_0)$, $\varphi(\bar{x}) \in L_2(\Gamma_1)$. Обозначим через $W_2^1(g,\Omega)$ многообразие функций $v(\bar{x}) \in W_2^1(\Omega)$, каждая из которых равна $g(\bar{x})$ на Γ_0, а через $W_2^1(\Gamma_0,\Omega)$ подпространство функций из $W_2^1(\Omega)$, равных нулю на Γ_0.

Тогда проекционной формулировкой задачи (8.I) будет [I05] :

$$u \in W_2^1(g,\Omega): \quad a(u,v) = \ell(v) \quad \forall\, v \in W_2^1(\Gamma_0,\Omega), \tag{8.2}$$

где

$$\ell(v) = \int_\Omega f(\bar{x})\cdot v(\bar{x})\, d\bar{x} + \int_{\Gamma_1} \varphi(\bar{x})\cdot v(\bar{x})\, d\Gamma_1,$$

$$a(u,v) = \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i} + a\cdot u\cdot v\Big)\, d\bar{x} + \tag{8.3}$$

$$+ \int_{\Gamma_1} \sigma(\bar{x})\cdot u(\bar{x})\cdot v(\bar{x})\, d\Gamma_1.$$

Предположим, что коэффициенты и правая часть задачи (8.I) таковы, что

$$a(u,v) = a(v,u), \quad a(v,v) \ge c_0\cdot\|v\|^2_{1,\Omega},$$

$$|a(u,v)| \le c_1\cdot\|u\|_{1,\Omega}\cdot\|v\|_{1,\Omega}, \tag{8.4}$$

$$|\ell(v)| \le c_2\cdot\|v\|_{1,\Omega} \qquad \forall\, u,v \in W_2^1(\Gamma_0,\Omega).$$

$\Gamma_0 \ne \varnothing$ $\sigma > 0$

Тогда известно [I05], что задача (8.2) имеет единственное решение $u \in W_2^1(g,\Omega)$.

Построим сеточную область Ω_h для области Ω. Если $\partial\Omega_h \ne \partial\Omega$, то необходимо: во-первых, определить Γ_0^h и Γ_1^h как части $\partial\Omega_h$, аппроксимирующие Γ_0 и Γ_1 ; во-вторых, продолжить коэффициенты и правую часть дифференциального уравнения в $\Omega_h \setminus \Omega$, а также коэффициент и правую часть второго краевого условия на тех участках Γ_1^h , которые соответствуют участкам Γ_1 , лежащим вне $\bar{\Omega}$; в-третьих, аппроксимировать на Γ_0^h функцию $g(\bar{x})$, $\bar{x} \in \Gamma_0$, следом на Γ_0^h некоторой функции из пространства восполнений на Ω_h . Эти задачи элементарно решаются в случае $\Omega_h = \Omega$ и $g = 0$. Если $\Gamma_0 = \partial\Omega$, то обычно строят $\Omega_h \subseteq \Omega$ и определяют $g_h(\bar{x})$ на Γ_0^h с помощью простого сноса ее значений в узлы $\partial\Omega_h$. Если $\Gamma_1 = \partial\Omega$, то обычно строят $\Omega_h \supseteq \Omega$ и функционалы из (8.3) не меняют [108].

Предположим, что вышеперечисленные задачи так или иначе решены, $H_h(\Omega_h)$ -конечно-мерное пространство лагранжевых или эрмитовых восполнений на Ω_h из предыдущей главы, функция

$$g_h(\bar{x}) \in H_h(\Omega_h)$$

такова, что ее след на Γ_0^h является аппроксимацией $g(\bar{x})$, $\bar{x} \in \Gamma_0$, из (8.1). Через $H_h(\Gamma_0^h, \Omega_h)$ будем обозначать подпространство всех функций из $H_h(\Omega_h)$, равных нулю на Γ_0^h . За доопределенными коэффициентами и правыми частями из (8.1) сохраним старые обозначения. Через Γ_h будем обозначать объединение части Γ_1 , лежащей в Ω_h , и части Γ_1^h , соответствующей оставшимся точкам Γ_1 . Тогда приближенным решением задачи (8.2) (или (8.1)) будем называть решение конечномерной проекционной задачи

$$\begin{gathered} u_h \in H_h(g_h, \Omega_h): \\ a_{\Omega_h}(u_h, v_h) = l_{\Omega_h}(v_h) \quad \forall\, v_h \in H_h(\Gamma_0^h, \Omega_h), \end{gathered} \tag{8.5}$$

где

$$H_h(g_h, \Omega_h) = \{ v \in H_h(\Omega_h) : \quad v = g_h \quad \forall \bar{x} \in \Gamma_0^h \},$$

а формы a_{Ω_h} и ℓ_{Ω_h} получаются из (8.3) заменой Ω на Ω_h, Γ_1 на Γ_h и предполагается, что условия (8.4) для них выполняются с постоянными, не зависящими от h для любых $u, v \in H_h(\Gamma_0^h, \Omega_h)$

Заметим, что выполнимость сделанных предположений не вызывает сомнений по крайней мере, в случае $\Omega_h = \Omega$.

Далее всюду будем полагать, что $g(\bar{x}) = 0$, $\varphi(\bar{x}) = 0$, $g_h(\bar{x}) = 0$. Заметим, что исследование операторов вариацонно-разностных схем от этого ограничения не зависит.

Вопросы сходимости решения задачи (8.5) к решению задачи (8.2) с достаточной полнотой исследованы и описаны, например, в книгах [I05-I08,I29, I30]. В [I30, теорема 3.2.2] доказана, например, оценка гладк. и

$$\| u - u_h \|_{1,\Omega} \leq C h^k \| u \|_{k+1,\Omega}, \tag{8.6}$$

где u - решение задачи (8.I) в многоугольной области Ω, с $\Gamma_0 = \partial\Omega$, $g(\bar{x}) = 0$, u_h - решение задачи (8.5) из пространства лагранжевых восполнений $H(k, \Omega_h)$ на триангуляциях $\Omega_h = \Omega$ с условием (A) из § I.

Пусть n -размерность пространства $H_h(\Gamma_0^h, \Omega_h)$ и $\{ \varphi_i(\bar{x}) \in H_h(\Gamma_0^h, \Omega_h) \}_{i=1}^n$ - базис этого пространства. По тексту всегда будет ясно, когда n -размерность области, а когда - размерность сеточного пространства. Естественно, что в случае лагранжевых восполнений базис строится из функций, значения которых отличны от нуля только в одном из узлов $\Sigma_{h/k}(\Omega_h)$ (они берутся равными единице). В случае эрмитовых восполнений базис строится из условий, чтобы только в одном узле Ω_h и только одна частная производная была отлична от нуля. Тогда, учитывая что $g_h(\bar{x}) = 0$, т.е. $u_h \in H_h(\Gamma_0^h, \Omega_h)$ и

$$u_h(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot \varphi_i(\bar{x}),$$

решение задачи (8.5) заключается в решении системы линейных уравнений [108]:

$$A_h \bar{u}_h = \bar{f}_h \tag{8.7}$$

с симметричной, положительно определенной матрицей A_h порядка n, где

$$\bar{u}_h = (u_1, \ldots, u_n)^T,$$

$$\bar{f}_h = (f_1, \ldots, f_n)^T,$$

$$A_h = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n},$$

$$f_i = l_{\Omega_h}(\varphi_i), \quad \alpha_{ij} = a_{\Omega_h}(\varphi_j, \varphi_i).$$

Систему (8.7) обычно называют системой уравнений метода конечных элементов или системой вариационно-разностных уравнений.

§ 9. Алгебраическая формулировка метода фиктивных компонент

Метод фиктивных компонент, или матричный аналог метода фиктивных областей, был предложен в работе [76] и исследовался автором совместно с Ю.А.Кузнецовым, например, в работах [61, 63, 83]. Следуя в основном работам [63, 87], изложим основные положения метода.

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$A_1 \bar{u}_1 = \bar{f}_1 \tag{9.1}$$

с вещественной, симметричной, положительно определенной матрицей A_1 порядка n и заданным вектором $\bar{f}_1 \in R^n$. Поставим в соответствие (9.I) следующие две системы порядка $N > n$:

$$A\bar{u} = \bar{f}, \qquad A^T\bar{v} = \bar{f}, \tag{9.2}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \ \operatorname{Ker} A_{21}^T \supset \operatorname{Ker} A_{22}, \quad \bar{f} = \begin{bmatrix} \bar{f}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \in R^N, \tag{9.3}$$

и A_{22} – произвольная симметричная и положительно полуопределенная матрица порядка $N-n$, а A_{21} – вещественная $(N-n)\times n$ матрица.

Л е м м а 9.I. При сделанных предположениях системы (9.2) совместны при любом $\bar{f}_1 \in R^n$ и первые n компонент любых решений $\bar{u}$ и $\bar{v}$ этих систем совпадают и образуют вектор $\bar{u}_1$ – решение системы (9.I).

Доказательство леммы элементарно.

Пусть H – произвольная вещественная, симметричная, положительно определенная матрица порядка N:

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}, \quad H^{-1} = B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}, \tag{9.4}$$

где H_{11}, B_{11} – квадратные матрицы порядка n.

О п р е д е л е н и е 9.I. Методом фиктивных компонент для решения системы (9.I) будем называть итерационный процесс

$$\bar{u}^{k+1} = \bar{u}^k - \tau_k \cdot H(C\bar{u}^k - \bar{f}), \qquad k = 0, 1, \ldots, \quad \bar{u}^0 \in R^N, \tag{9.5}$$

где $C = A$ или $C = A^T$ и $\bar{f}$ из (9.3), H из (9.4), $\{\tau_k\}$ – последовательность вещественных параметров.

Из леммы 9.I следует, что в случае сходимости $\bar{u}^k$ к решению $\bar{u}$ системы $C\bar{u}=\bar{f}$, векторы $\bar{u}_1^k$ (первые n компонент $\bar{u}^k$) сходятся к решению $\bar{u}_1$ системы (9.I).

Л е м м а 9.2. Если $A=A^T$, т.е. $A_{21}=0$, то матрица HA имеет N линейно независимых собственных векторов, все ее собственные значения вещественны и неотрицательны. Кроме того,

$$\alpha(A_{22}) \le \alpha(0),$$
$$\beta(A_{22}) \ge \beta(0),$$

где $\alpha(A_{22})$ - минимальное положительное, $\beta(A_{22})$ - максимальные собственные значения матрицы HA как функции симметричной, положительно полуопределенной матрицы A_{22}.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полнота системы собственных векторов и вещественность собственных значений матрицы HA следует из самосопряженности матриц H и A. Неотрицательность собственных значений следует из положительной полуопределенности матриц H и A.

Обозначим через $\tilde{A}$ матрицу из (9.3) с $A_{21}=0$ и $A_{22}=0$. Тогда, если λ - максимальное собственное значение, а $\bar{u}$ - ему соответствующий собственный вектор матрицы HA, имеем

$$\lambda=\frac{(A\bar{u},\bar{u})}{(B\bar{u},\bar{u})}=\sup_{\bar{v}}\frac{(A\bar{v},\bar{v})}{(B\bar{v},\bar{v})} \ge \sup_{\bar{v}}\frac{(\tilde{A}\bar{v},\bar{v})}{(B\bar{v},\bar{v})} = \rho(H\tilde{A}),$$

т.е. $\beta(A_{22}) \ge \beta(0)$.

Теперь пусть λ и $\bar{u}$ - собственные значение и вектор матрицы $H\tilde{A}$:

$$\lambda \ne 0, \quad \bar{u}=\begin{pmatrix}\bar{u}_1\\ \bar{u}_2\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\lambda=\frac{(A_1\bar{u}_1,\bar{u}_1)}{((B_{11}-B_{12}B_{22}^{-1}B_{21})\bar{u}_1,\bar{u}_1)} \ge \frac{(A_1\bar{u}_1,\bar{u}_1)}{(B_{11}\bar{u}_1,\bar{u}_1)} \ge$$

$$\geq \min_{\bar{v}\in \operatorname{im}\tilde{A}} \frac{(A\bar{v},\bar{v})}{(B\bar{v},\bar{v})} \geq \min_{\bar{v}\in \operatorname{im} A} \frac{(A\bar{v},\bar{v})}{(B\bar{v},\bar{v})} = \alpha(A_{22}),$$

если $\operatorname{im} A = R^N$, т.е. $\det A_{22} \neq 0$. Следовательно,

$$\alpha(0) \geq \alpha(A_{22}) \quad \forall A_{22}: \det A_{22} \neq 0.$$

Если $\det A_{22} = 0$, то определим ортогональную матрицу S_{22} порядка $N-n$, столбцами которой являются собственные векторы A_{22}, т.е.

$$S_{22}^T A_{22} S_{22} = \operatorname{diag}\{\lambda_1,\dots,\lambda_m,0,\dots,0\},$$

где $\lambda_i \neq 0$, $i=1,\dots,m$. Тогда рассмотрим спектральную задачу:

$$(S^T H S)(S^T A S)\bar{v} = \lambda\bar{v}, \quad S = \begin{bmatrix} E_{11} & 0 \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix}, \tag{9.6}$$

где E_{11} – единичная матрица порядка n. Очевидно, что собственные значения этой задачи совпадают с собственными значениями матрицы HA. Перепишем задачу (9.6) в виде

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_{11} & \tilde{H}_{12} \\ \tilde{H}_{21} & \tilde{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{pmatrix},$$

где $\tilde{H}_{11}$ и $\tilde{A}_{11}$ – матрицы порядка $n+m$ и

$$\tilde{A}_{11} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_2 = \operatorname{diag}\{\lambda_1,\dots,\lambda_m\}.$$

Тогда ненулевое собственное значение задачи (9.6) определяется как решение задачи

$$\tilde{A}_{11}\bar{v}_1 = \lambda(\tilde{B}_{11} - \tilde{B}_{12} B_{22}^{-1} B_{21})\bar{v}_1, \tag{9.7}$$

где
$$\begin{bmatrix} \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} \\ \tilde{B}_{21} & \tilde{B}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{H}_{11} & \tilde{H}_{12} \\ \tilde{H}_{21} & \tilde{H}_{22} \end{bmatrix}.$$

Поскольку $\det \tilde{A}_{11} \neq 0$,

$$\alpha(A_{22}) = \alpha(\Lambda_2) \leq \alpha(0),$$

где $\alpha(0)$ - минимальное положительное собственное значение задачи

$$\hat{A}_{11}\bar{v}_1 = \lambda(\tilde{B}_{11} - \tilde{B}_{12}\tilde{B}_{22}^{-1}\tilde{B}_{21})\bar{v}_1,$$

$$\hat{A}_{11} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

и, следовательно, минимальное положительное собственное значение задач

$$(S^T H S)(S^T \tilde{A} S)\bar{v} = \lambda \bar{v},$$

$$H\tilde{A}\bar{v} = \lambda\bar{v},$$

что завершает доказательство леммы.

Л е м м а 9.3. Если $A_{21} = B_{21}$ и $A_{22} = B_{22}$, то все собственные значения матрицы HA вещественны и положительны. Если $A_{21} = B_{21}$ и $A_1 = B_{11}$, то все собственные значения матрицы HA^T вещественны и неотрицательны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим спектральную задачу

$$HA\bar{u} = \lambda\bar{u}.$$

Если $\lambda \neq 1$, то легко видеть, что λ является решением спектральной задачи

$$A_1\bar{u}_1 = \lambda(B_{11} - B_{12}B_{22}^{-1}B_{21})\bar{u}_1 = \lambda T_1\bar{u}_1$$

в случае $A_{21} = B_{21}$, $A_{22} = B_{22}$. Так как матрицы A_1 и T_1 симметричны и положительно определены, то все λ положительны. Аналогично доказывается второе утверждение.

Исследуем сходимость метода фиктивных компонент (9.5) в следующих трех случаях.

$C = A = A^T$ – симметричное расширение. В этом случае из леммы 9.2 следует, что лучшим с точки зрения минимальности отношения максимального собственного числа ρ матрицы HC к ее минимальному отличному от нуля собственному значению α будет выбор $A_{22} = 0$. Следовательно, при таком выборе A_{22} и скорость сходимости процесса (9.5) будет максимальной [77]. Итак, имеем итерационный процесс

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \left(\begin{pmatrix} \bar{u}_1^{k+1} \\ \bar{u}_2^{k+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{u}_1^{k} \\ \bar{u}_2^{k} \end{pmatrix} \right) = -\tau_k \cdot \left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_1^{k} \\ \bar{u}_2^{k} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{f}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right). \quad (9.8)$$

Очевидно, что для любого $k \geq 0$

$$B_{21}\bar{u}_1^k + B_{22}\bar{u}_2^k = B_{21}\bar{u}_1^0 + B_{22}\bar{u}_2^0 = \bar{z}_2,$$

т.е.

$$\bar{u}_2^k = -B_{22}^{-1}(B_{21}\bar{u}_1^k - \bar{z}_2).$$

Следовательно, $\bar{u}_1^k$ удовлетворяют соотношению

$$(B_{11} - B_{12}B_{22}^{-1}B_{21})(\bar{u}_1^{k+1} - \bar{u}_1^k) = -\tau_k(A_1\bar{u}_1^k - \bar{f}_1). \quad (9.9)$$

Так как

$$T_1 = (B_{11} - B_{12}B_{22}^{-1}B_{21}) = T_1^T > 0 \quad (9.10)$$

и $A_1 = A_1^T > 0$, то параметры τ_k можно выбирать из вариационных принципов [77] или как параметры чебышевского итерационного процесса [120, стр.271]. Например, формулы обобщенного метода сопряженных градиентов имеют следующий вид:

$$\bar{u}^{k+1} = \bar{u}^k - b_{k+1} \cdot \bar{g}_{k+1},$$

$$\bar{g}_{k+1} = \begin{cases} H\bar{\xi}^0, & k=0, \\ H\bar{\xi}^k - \alpha_{k+1}\bar{g}_k, & k>0, \end{cases}$$

$$\bar{\xi}^k = A\bar{u}^k - \bar{f},$$

$$\alpha_{k+1} = \frac{(H\bar{\xi}^k, A\bar{g}_k^k)}{(\bar{g}_k, A\bar{g}_k)}, \quad k>0,$$

$$b_{k+1} = \frac{(\bar{\xi}^k, \bar{g}_{k+1})}{(\bar{g}_{k+1}, A\bar{g}_{k+1})}, \quad k \geq 0.$$

Формулы чебышевского полуитерационного метода имеют вид [120, стр.320]:

$$\bar{u}^1 = \bar{u}^0 - \tau H(A\bar{u}^0 - \bar{f}),$$

$$\bar{u}^{k+1} = \alpha_{k+1}(\bar{u}^k - \tau H(A\bar{u}^k - \bar{f})) + (1-\alpha_{k+1})\bar{u}^{k-1},$$

$$k = 1, 2, \ldots,$$

$$\tau = \frac{2}{\rho+\alpha}, \quad \alpha_1 = 2, \quad \alpha_{k+1} = \frac{4}{4-\rho_0^2\alpha_k}, \quad k>1,$$

$$\rho_0 = (\rho-\alpha)/(\rho+\alpha).$$

Как для метода сопряженных градиентов, так и для полуитерационного метода Чебышева справедлива оценка

$$\| \bar{\psi}_1^k \|_{A_1} \leqslant \frac{2\rho_1^k}{1+\rho_1^{2k}} \| \psi_1^0 \|_{A_1} , \tag{9.11}$$

$$\| \psi_1 \|^2_{A_1} = (A_1 (\bar{u}_1^k - \bar{u}_1), (\bar{u}_1^k - \bar{u}_1)) ,$$

$$\rho_1 = (\sqrt{\rho} - \sqrt{\alpha}) / (\sqrt{\rho} + \sqrt{\alpha}).$$

$C = A^T$, $A_1 = B_{11}$, $A_{21}^T = B_{12}$ – несимметричное расширение. В этом случае из леммы 9.3 следует, что все собственные значения матрицы HC принадлежат множеству $\{0\} \cup [\alpha, \rho]$, $\alpha > 0$. Перепишем итерационный процесс (9.5) в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \left(\begin{pmatrix} \bar{u}_1^{k+1} \\ \bar{u}_2^{k+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{u}_1^k \\ \bar{u}_2^k \end{pmatrix} \right) = -\tau_k \left(\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_1^k \\ \bar{u}_2^k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{f}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \tag{9.12}$$

Очевидно, что если выбрать $\tau_0 = 1$, то для любого $k > 0$ и любых τ_k будет выполняться равенство

$$B_{11} \bar{u}_1^k + B_{12} \bar{u}_2^k = \bar{f}_1 . \tag{9.13}$$

Тогда для $k > 0$ имеем процесс для $\bar{u}_2^k$:

$$(B_{22} - B_{21} B_{11}^{-1} B_{12})(\bar{u}_2^{k+1} - \bar{u}_2^k) = - \tau_k A_{22} \bar{u}_2^k . \tag{9.14}$$

Так как

$$T_2 = (B_{22} - B_{21} B_{11}^{-1} B_{12}) = T_2^T > 0$$

и $A_{22} = A_{22}^T \geqslant 0$, то параметры τ_k в (9.14), соответственно в (9.12), можно выбирать на основе вариационных принципов или как параметры чебышевского итерационного процесса. Тогда $\bar{u}_2^k$ будет сходиться к некоторому вектору $\bar{u}_2 \in \ker A_{22}$, а для ошибки $\bar{\psi}_2^k = \bar{u}_2^k - \bar{u}_2$ будет иметь место оценка аналогичная (9.11) :

$$\sqrt{(A_{22}\bar{\Psi}_2^{k+1}, \bar{\Psi}_2^{k+1})} \leq \frac{2\rho_1^k}{1+\rho_1^{2k}} \sqrt{(A_{22}\bar{\Psi}_2^1, \bar{\Psi}_2^1)}, \qquad (9.15)$$

если процесс (9.12) реализуется по формулам обобщенного метода сопряженных градиентов или полуитерационного метода Чебышева. Так как $\ker B_{12} \supset \ker A_{22}$, то $\bar{u}_1^k$ будет сходиться к решению u_1 системы (9.1).

$C = A$, $A_{21} = B_{21}$, $A_{22} = B_{22}$ – второй случай несимметричного расширения. В этом случае собственные значения матрицы HC принадлежат отрезку $[\alpha, \rho]$, $\alpha > 0$. Выбирая $\tau_0 = 1$, получим, что в методе фиктивных компонент (9.5) :

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \left(\begin{pmatrix} \bar{u}_1^{k+1} \\ \bar{u}_2^{k+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{u}_1^k \\ \bar{u}_2^k \end{pmatrix} \right) = -\tau_k \left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_1^k \\ \bar{u}_2^k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \qquad (9.16)$$

$$B_{21}\bar{u}_1^k + B_{22}\bar{u}_2^k = 0, \quad k > 0.$$

Следовательно, $\bar{u}_1^k$ определяется по (9.9) при $k > 1$ и дальнейшее исследование сходимости процесса (9.16) совпадает со случаем оптимального симметричного расширения.

§ 10. Симметричное расширение для ВРС

Рассмотрим задачу (8.5). Предположим, что сеточная область Ω_h является частью сеточной области D_h для n-прямоугольника $D \supset \bar{\Omega}$. Обозначим через $H_h(D_h)$ пространство сеточных функций того же типа, что и $H_h(\Omega_h)$, т.е. сужения функций из $H_h(D_h)$ на Ω_h являются функциями из

$H_h(\Omega_h)$.

Определим в $H_h(D_h)$ два подпространства:

$$\overset{\circ}{H}_h(D_h)=\{v(\bar{x})\in H_h(D_h):\ v(\bar{x})=0\quad \forall \bar{x}\in\partial D_h\},$$

$$\widetilde{H}_h(D_h)=\{v(\bar{x})\in H_h(D_h):\ v(\bar{x})=v(\bar{x}+a_i\bar{e}_i),\quad \forall\ \bar{x}\in\partial D_h:(\bar{x}+a_i\bar{e}_i)\in\partial D_h;\quad i=1,\dots,n\},\tag{10.1}$$

где a_i - длины ребер n -прямоугольника $D=D_h$, $\bar{e}_i$ - орты декартовой системы координат,

Зададим в $H_h(D_h)$ некоторую симметричную билинейную форму $a_D(u,v)$ такую, что для любой $v\in H_h(D_h)$ справедливы неравенства

$$c_0\cdot\|v\|^2_{1,D}\leq a_D(v,v)\leq c_1\cdot\|v\|^2_{1,D}\tag{10.2}$$

с положительными постоянными c_0 и c_1 , которые не зависят от h и v . Например, можно выбрать $a_D(u,v)=(u,v)_{1,D}$ - скалярное произведение в $W_2^1(D)$.

Обозначим через H_h пространство $H_h(D_h)$, или одно из его подпространств, определенных в (10.1). Пусть

$$n=\dim H_h(\Gamma_0^h,\Omega_h),$$

$$N=\dim H_h,\tag{10.3}$$

$$m=N-n.$$

Дополним базис $\{\varphi_i(\bar{x})\}_{i=1}^n$ пространства $H_h(\Gamma_0^h,\Omega_h)$, для которого была получена матричная формулировка (8.7) проекционной задачи (8.5), до базиса $\{\varphi_i(\bar{x})\}_{i=1}^N$ пространства H_h . Определим симметричную, положительно определенную матрицу

$$B = (b_{ij})_{i,j=1}^{N}, \quad b_{ij} = a_D(\varphi_j, \varphi_i). \tag{I0.4}$$

Систему (8.7) расширим до системы порядка N вида

$$A\bar{u} = \begin{bmatrix} A_h & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{f}_h \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{f}. \tag{I0.5}$$

И применим метод фиктивных компонент (9.8) с матрицей B из (I0.4). Из оценки (9.II) следует, что скорость сходимости метода определяется максимальным $\rho = \rho(B^{-1}A)$ и минимальным отличным от нуля $\alpha = \alpha(B^{-1}A)$ – собственными значениями матрицы $B^{-1}A$.

Т е о р е м а I0.I. Если $\Gamma_0^h = \partial\Omega_h$, т.е. система (8.7) является аппроксимацией по методу конечных элементов задачи (8.I) с главным краевым условием, то существуют не зависящие от h постоянные C_0, C_1 такие, что

$$0 < C_0 \le \alpha(B^{-1}A) \le \rho(B^{-1}A) \le (h + h^{-1})\, c_1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем для случая лагранжевых восполнений на триангуляциях, так как для лагранжевых или эрмитовых восполнений на прямоугольных сетках доказательство теоремы практически не отличается. Итак, D_h – триангуляция D, Ω_h ее часть и H_h является подпространством $H(k, D_h)$. Пусть $\mu = h/k$, D_μ и Ω_μ – соответствующие измельчения D_h и Ω_h, $H(D_\mu)$ – пространство кусочно-линейных восполнений на D_μ. Теорема 5.I устанавливает взаимно однозначное соответствие между $H(k, D_h)$ и $H(D_\mu)$. Через H_μ обозначим подпространство из $H(D_\mu)$, соответствующее H_h. Через $\overset{\circ}{H}(\Omega_\mu)$ обозначим подпространство, соответсткус-лат.?

ствующее $H_h(\partial\Omega_h, \Omega_h)$. Кроме того, через $\{\psi_i(\bar{x})\}_{i=1}^{N}$ обозначим базис в H_μ. Напомним, что значения функций $\varphi_i(\bar{x})$ и $\psi_i(\bar{x})$ совпадают на множестве узлов Σ_μ триангуляции D_μ и отличаются от нуля только в одном (i-том) узле.

Определим матрицу

$$W = (w_{ij})_{i,j=1}^{N}, \qquad w_{ij} = (\psi_j, \psi_i)_{1,D}, \tag{I0.6}$$

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix},$$

где W_{11} - матрица порядка n. Тогда из теоремы 5.I, неравенств (I0.2) и (8.4) следует, что

$$\begin{gathered} c_2(W\bar{v},\bar{v}) \le (B\bar{v},\bar{v}) \le c_3(W\bar{v},\bar{v}) \quad \forall \bar{v}\in R^N, \\ c_4(W_{11}\bar{v},\bar{v}) \le (A_h\bar{v},\bar{v}) \le c_5(W_{11}\bar{v},\bar{v}) \quad \forall \bar{v}\in R^n, \end{gathered} \tag{I0.7}$$

где постоянные c_2, c_3, c_4, c_5 положительны и не зависят от h.

Пусть $\lambda \ne 0$ - собственное значение матрицы $B^{-1}A$. Очевидно, что

$$A_h\bar{u}_1 = \lambda T_1\bar{u}_1,$$

где T_1 из (9.I0). Из (I0.7) следует, что

$$c_2(T_W\bar{u}_1,\bar{u}_1) \le (T_1\bar{u}_1,\bar{u}_1) \le c_3(T_W\bar{u}_1,\bar{u}_1) \quad \forall \bar{u}_1 \in R^n, \tag{I0.8}$$

если $T_W = W_{11} - W_{12}W_{22}^{-1}W_{21}$. Следовательно,

$$\frac{c_4}{c_3}\min_{\bar{u}_1}\frac{(W_{11}\bar{u}_1,\bar{u}_1)}{(T_W\bar{u}_1,\bar{u}_1)} \le \lambda \le \frac{c_5}{c_2}\max_{\bar{u}_1}\frac{(W_{11}\bar{u}_1,\bar{u}_1)}{(T_W\bar{u}_1,\bar{u}_1)}. \tag{I0.9}$$

Отсюда сразу получаем, что

$$\alpha(B^{-1}A) \geqslant \frac{c_4}{c_3} > 0.$$

Пусть максимум в правой части неравенства (I0.9) достигается на векторе $\bar{u}_1 \in R^n$ и

$$\bar{u}_2 = -W_{22}^{-1} W_{21} \bar{u}_1, \quad \bar{u} = \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{pmatrix}, \tag{I0.I0}$$

а $u(\bar{x}) \in H_\mu$ – функция, соответствующая вектору $\bar{u} \in R^N$. Тогда

$$(T_W \bar{u}_1, \bar{u}_1) = (W\bar{u}, \bar{u}) = \|u\|^2_{1,D}. \tag{I0.II}$$

Обозначим через Ω'_μ все элементарные симплексы из Ω_μ, ни одна из вершин которых не лежит на $\partial\Omega_\mu$, и пусть $v(\bar{x}) \in H(\Omega'_\mu)$ – сужение функции $u(\bar{x})$ на Ω'_μ.

Обозначим через $\hat{u}(\bar{x}) \in H_\mu$ продолжение функции $v(\bar{x}) \in H(\Omega'_\mu)$ в D_μ такое, что

$$\hat{u}(\bar{x}) = 0 \quad \forall\ \bar{x} \in \Sigma_\mu(D_\mu) \setminus \Sigma_\mu(\Omega'_\mu).$$

Тогда легко видеть, что

$$(W_{11} \bar{u}_1, \bar{u}_1) = \|\hat{u}\|^2_{1,D},$$

а из теоремы 5.3 следует, что

$$\|\hat{u}\|^2_{1,D} \leqslant c \cdot (h + h^{-1}) \cdot \|v\|^2_{1,\Omega'_\mu}.$$

Следовательно,

$$\rho(B^{-1}A) \leqslant \frac{c \cdot c_5}{c_2} \frac{(h+h^{-1}) \|v\|^2_{1,\Omega'_\mu}}{\|u\|^2_{1,D}} \leqslant \frac{c \cdot c_5}{c_2}(h + h^{-1}),$$

что завершает доказательство теоремы.

Замечание I0.I. Аналогичным образом доказывается справедливость теоремы I0.I и в случае, когда Γ_0^h является частью границы $\partial\Omega_h$. Заметим также, что оценка $\rho(B^{-1}A)$ неулучшаема по порядку h.

Т е о р е м а I0.2. Если $\Gamma_0^h = \emptyset$, т.е. система (8.7) является аппроксимацией по методу конечных элементов задачи (8.I) с естественным краевым условием, то существуют не зависящие от h постоянные C_0 и C_1 такие, что

$$0 < C_0 \le \alpha(B^{-1}A) \le \rho(B^{-1}A) \le C_1 .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы также приведем только для случая лагранжевых восполнений на триангуляциях, так как в других случаях оно проводится аналогично. Итак, будем считать определенными все вспомогательные пространства и матрицы, введенные при доказательстве теоремы I0.I.

Определим матрицу

$$\mathcal{M}_{11} = (m_{ij})_{i,j=1}^{n}, \quad m_{ij} = (\varphi_j, \varphi_i)_{1,\Omega_\mu} .$$

Тогда из теоремы 5.I и неравенств (8.4) следует, что

$$c_4(\mathcal{M}_{11}\bar{u}_1, \bar{u}_1) \le (A_h \bar{u}_1, \bar{u}_1) \le c_5(\mathcal{M}_{11}\bar{u}_1, \bar{u}_1) \qquad \text{(I0.I2)}$$

и для собственных значений $\lambda \ne 0$ матрицы $B^{-1}A$ справедливы неравенства

$$\frac{c_4}{c_3} \min_{\bar{u}_1} \frac{(\mathcal{M}_{11}\bar{u}_1, \bar{u}_1)}{(T_W \bar{u}_1, \bar{u}_1)} \le \lambda \le \frac{c_5}{c_2} \max_{\bar{u}_1} \frac{(\mathcal{M}_{11}\bar{u}_1, \bar{u}_1)}{(T_W \bar{u}_1, \bar{u}_1)} . \qquad \text{(I0.I3)}$$

Функция $u(\bar{x}) \in H_\mu$ является решением задачи

Что здесь H_μ

$$\|u\|_{1,D} = \min_{v} \|v\|_{1,D} ,$$

где минимум ищется по всем функциям $v(\bar{x}) \in H_\mu$, сужение которых на Ω_μ совпадает с $v(\bar{x}) \in H(\Omega_\mu)$ – сужением $u(\bar{x})$ на Ω_μ. Тогда легко видеть, что

$$(M_{11}\bar{u}_1, \bar{u}_1) = \|v\|^2_{1,\Omega_\mu},$$

а из теоремы 5.2 и замечания 5.I следует, что

$$\|u\|^2_{1,D} \le c\cdot\|v\|^2_{1,\Omega_\mu}.$$

Следовательно, учитывая (I0.II), получим

$$\frac{1}{c} \le \frac{(M_{11}\bar{u}_1, \bar{u}_1)}{(T_W\bar{u}_1, \bar{u}_1)} = \frac{\|v\|^2_{1,\Omega_\mu}}{\|u\|^2_{1,D}} \le 1.$$

Тогда из (I0.I3) получим

$$\frac{c_4}{c\cdot c_3} \le \alpha(B^{-1}A) \le \rho(B^{-1}A) \le \frac{c_5}{c_2},$$

что завершает доказательство теоремы.

Следствием теорем I0.I и I0.2, а также оценки (9.II) является

Теорема I0.3. Пусть метод фиктивных компонент (9.8) с матрицей B из (I0.4) применяется для решения системы вариационно-разностных уравнений (8.7) и реализуется либо по формулам обобщенного метода сопряженных градиентов, либо по формулам полуитерационного метода Чебышева. Тогда для уменьшения энергетической нормы начальной ошибки в ε^{-1} раз:

$$\|\bar{\Psi}^k_1\|_{A_h} \le \varepsilon\,\|\bar{\Psi}^0_1\|_{A_h},$$

достаточно выполнить

$$k = c\cdot h^{-\frac{1}{2}}\ln\varepsilon^{-1}$$

итераций в случае аппроксимации краевой задачи (8.I) с главным или смешанными краевыми условиями и

$$k = c\cdot\ln\varepsilon^{-1}$$

итераций в случае аппроксимации задачи (8.I) с естественными краевыми условиями, где постоянная C не зависит от параметра h.

§ II. Несимметричное расширение для ВРС

Рассмотрим задачу (8.5), предполагая, что $\Gamma_0^h = \partial\Omega_h$, т.е. пространство $H_h(\Gamma_0^h, \Omega_h) = \mathring{H}_h(\Omega_h)$ состоит из функций равных нулю на $\partial\Omega_h$. Будем считать заданными обозначения и определения (I0.I) - (I0.4) предыдущего параграфа.

Относительно билинейных форм $a_{\Omega_h}(u,v)$ из (8.5) и $a_D(u,v)$ из (I0.2), сделаем ряд дополнительных предположений. Обозначим через G_h часть сеточной области D_h:

$$G_h = D_h \setminus \Omega_h . \tag{II.I}$$

Определим операторы сужения S_1 и S_2 функций из H_h на Ω_h и G_h соответственно. Очевидно, что

$$\operatorname{im} S_1 = H_h(\Omega_h),$$

$$\operatorname{im} S_2 \subset H_h(G_h),$$

$$\| S_1 u \|_{1,\Omega_h} \le \| u \|_{1,D} \quad \forall u \in H_h,$$

$$\| S_2 u \|_{1,G_h} \le \| u \|_{1,D} \quad \forall u \in H_h.$$

Предположим, что билинейная форма $a_D(u,v)$ представима в виде:

$$a_D(u,v) = a'_{\Omega_h}(S_1 u, S_1 v) + a_{G_h}(S_2 u, S_2 v) \quad \forall u,v \in H_h, \tag{II.2}$$

$$\begin{aligned} & a'_{\Omega_h}(u,v) = a_{\Omega_h}(u,v) \quad \forall u,v \in \mathring{H}_h(\Omega_h), \\ & a_{G_h}(S_2 u, S_2 v) = 0 \quad \forall u,v \in H_h : S_2 v = 0, \end{aligned} \tag{II.3}$$

$$c_1 \|v\|^2_{1,\Omega_h} \le a'_{\Omega_h}(v,v) \le c_2 \|v\|^2_{1,\Omega_h} \quad \forall v \in H_h(\Omega_h),$$

$$c_3 \|S_2 v\|^2_{1,G_h} \le a_{G_h}(S_2 v, S_2 v) \le c_4 \cdot \|S_2 v\|^2_{1,G_h} \quad \forall v \in H_h, \tag{II.4}$$

где постоянные $c_1, \dots, c_4$ не зависят от h.

Определим симметричную, положительно определенную матрицу

$$A_{22} = (\alpha_{ij})^N_{ij=n+1}, \quad \alpha_{ij} = a_{G_h}(S_2\varphi_j, S_2\varphi_i). \tag{II.5}$$

Систему (8.7) расширим до системы порядка N вида

$$A\bar{u} = \begin{bmatrix} A_h & B_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{f}_h \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{f}. \tag{II.6}$$

Заметим, что соответствующее блочное представление матрицы B из (I0.4), при сделанных предположениях, имеет следующий вид:

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}, \quad B_{11} = A_h. \tag{II.7}$$

Применим для решения системы (II.6) итерационный процесс (9.I2) с матрицей B из (I0.4) и $\tau_0 = 1$.

Т е о р е м а II.I. Собственные значения матрицы $B^{-1}A$, где A из (II.6), B из (II.7), вещественны, положительны и принадлежат интервалу $[\alpha, \rho]$, границы которого не зависят от параметра h.

Д о к а з а т е л ь с т в о этого утверждения принципиально не отличается от доказательства теоремы I0.2. Пусть $\lambda \ne 1$ и $\bar{u} = (\bar{u}_1^T, \bar{u}_2^T)^T$ – собственные значения и вектор матрицы $B^{-1}A$. Тогда легко видеть, что

$$\bar{u}_1 = -A_h^{-1} B_{12} \bar{u}_2, \tag{II.8}$$

$$A_{22}\bar{u}_2 = \lambda \cdot T_2 \bar{u}_2 , \tag{II.8}$$

где $T_2 = B_{22} - B_{21} A_h^{-1} B_{12}$. Пусть $u(\bar{x}) \in H_h$ – восполнение вектора $\bar{u}$, а $v(\bar{x}) = S_2 u(\bar{x})$ – его сужение на G_h . Тогда $u(\bar{x})$ является решением задачи

$$a_D(u,u) = \min a_D(w,w)$$

где минимум ищется по всем функциям $w(\bar{x}) \in H_h$, сужение которых на G_h совпадает с $v(\bar{x}) \in H_h(G_h)$. Обозначим через $v^*(\bar{x}) \in H_h$ продолжение функции $v(\bar{x})$ на Ω_h , построенное по одной из теорем 5.2, 6.2 или 7.2, в зависимости от типа пространства восполнений. Тогда будут справедливы следующие соотношения

$$\|u\|^2_{1,\Omega_h} \le \|v^*\|^2_{1,\Omega_h} \le c\,\|v\|^2_{1,G_h} ,$$

$$(T_2\bar{u}_2 , \bar{u}_2) = a_D(u,u) ,$$

$$(A_{22}\bar{u}_2 , \bar{u}_2) = a_{G_h}(v,v) ,$$

где постоянная c не зависит ни от v , ни от h . Из (II.8), учитывая эти соотношения и неравенства (II.4), получим

$$\rho = 1 \ge \lambda = \frac{a_{G_h}(v,v)}{a_D(u,u)} = \frac{a_{G_h}(v,v)}{a_{G_h}(v,v) + a'_{\Omega'_h}(S_1u, S_1u)} \ge$$

$$\ge \frac{a_{G_h}(v,v)}{a_{G_h}(v,v) + c_2\|u\|^2_{1,\Omega_h}} \ge$$

$$\ge \frac{a_{G_h}(v,v)}{a_{G_h}(v,v) + c_2 \cdot c \cdot c_3^{-1} \cdot a_{G_h}(v,v)} = \frac{c_3}{c_3 + c \cdot c_2} = \alpha > 0 .$$

Теорема доказана.

Оценка (9.15) характеризует скорость сходимости метода фиктивных компонент. На ее основе легко получить оценку для ошибки в области Ω_h. Действительно, обозначим через $u^k(\bar{x}) \in H_h$ восполнения векторов $\bar{u}^k$ итерационного процесса (9.12), сходящихся к $\bar{u} = (\bar{u}_1^T, 0)^T$, восполнение которого $u(\bar{x}) \in H_h$. Тогда для ошибки $\psi^k(\bar{x}) = u^k(\bar{x}) - u(\bar{x})$ получим

$$a_D(\psi^{k+1}, \psi^{k+1}) = (T_2 \bar{\psi}_2^{k+1}, \bar{\psi}_2^{k+1}) \le$$
$$\le \frac{1}{\alpha}(A_{22}\bar{\psi}_2^{k+1}, \bar{\psi}_2^{k+1}) \le \frac{\rho}{\alpha}\left|\frac{2\rho_1^k}{1+\rho_1^{2k}}\right|^2 a_D(\psi^1, \psi^1). \tag{11.9}$$

Поскольку из (10.2) следует, что

$$\|\psi\|^2_{1,\Omega_h} \le c_0^{-1} a_D(\psi, \psi) \qquad \forall \psi \in H_h,$$

то тем самым доказана

Т е о р е м а 11.2. При выполнении всех предположений настоящего параграфа метод фиктивных компонент (9.12) с матрицей B из (11.7), примененный к несимметричному расширению (11.6) системы (8.7) и реализованный либо по формулам метода сопряженных градиентов, либо по формулам чебышевского итерационного метода, сходится, и для восполнений ошибки имеет место оценка

$$\|\psi^{k+1}\|_{1,\Omega_h} \le \sqrt{\frac{\rho}{\alpha \cdot c_0}} \cdot \frac{2\rho_1^k}{1+\rho_1^{2k}} \sqrt{a_D(\psi^1, \psi^1)} \qquad \forall k > 0,$$

где постоянные α и ρ из теоремы 11.1, c_0 из (10.2), $\rho_1 = (\sqrt{\rho} - \sqrt{\alpha})/(\sqrt{\rho} + \sqrt{\alpha})$ не зависят от h.

<u>Замечание 11.1.</u> Особенностью метода фиктивных компонент (9.12) является тот факт, что получаемые приближения не удовлетворяют краевому условию, т.е. сужения $u^k(\bar{x})$ на Ω_h не

принадлежат $\overset{\circ}{H}_h(\Omega_h)$. Определим $\widetilde{u}^k(\bar{x})$ как восполнение вектора $((\bar{u}_1^k)^T, 0)^T$. Очевидно, что сужение $\widetilde{u}^k(\bar{x})$ на Ω_h принадлежит $\overset{\circ}{H}_h(\Omega_h)$, а из теорем о продолжении функций следует, что норма $\widehat{u}^k(\bar{x})$ может возрасти.

Итак, в условиях теоремы II.2 построим оценку для $\bar{u}_1^k - \bar{u}_1$, где $\bar{u}_1$ – решение системы (8.7). Обозначим через A_c матрицу симметричного расширения (I0.5) системы (8.7). Тогда

$$(A_h(\bar{u}_1^k - \bar{u}_1), \bar{u}_1^k - \bar{u}_1) = (A_c \bar{\varphi}^k, \bar{\varphi}^k) =$$

$$= (B^{-\frac{1}{2}} A_c B^{-\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}} \varphi^k, B^{\frac{1}{2}} \varphi^k) \leq$$

$$\leq \rho(B^{-1} A_c) \cdot (B \varphi^k, \varphi^k).$$

Из теоремы I0.I следует, что $\rho(B^{-1}A_c) \leq \widehat{c}_1(h + h^{-1})$ с некоторой постоянной $\widetilde{c}_1$, не зависящей от h. Тогда, применяя неравенство (II.9), получим

$$(A_h(\bar{u}_1^{k+1} - \bar{u}_1), \bar{u}_1^{k+1} - \bar{u}_1) \leq$$

$$\leq C_1 \left| \frac{2\rho_1^k}{1 + \rho_1^{2k}} \right|^2 (h + h^{-1}) \cdot (B \bar{\varphi}^1, \bar{\varphi}^1), \tag{II.I0}$$

где $C_1 = \widehat{c}_1 \cdot \rho / \alpha$ не зависит от h.

Оценим $(B\bar{\varphi}^1, \bar{\varphi}^1)$, предполагая, что $\bar{u}^0 = 0$. Тогда

$$(B\bar{\varphi}^1, \bar{\varphi}^1) = (T_2 \bar{\varphi}_2^1, \bar{\varphi}_2^1) = (T_2 \bar{u}_2^1, \bar{u}_2^1),$$

где $\bar{u}_2^1 = -T_2^{-1} B_{21} A_h^{-1} \bar{f}_1$.

Следовательно,

$$(B\bar{\varphi}^1, \bar{\varphi}^1) = (B_{21}\bar{u}_1, T_2^{-1} B_{21}\bar{u}_1) =$$

$$= (A_h^{-\frac{1}{2}} B_{12} T_2^{-1} B_{21} A_h^{-\frac{1}{2}} A_h^{\frac{1}{2}} \bar{u}_1, A_h^{\frac{1}{2}}\bar{u}_1) \leq$$

$$\leq \rho(A_h^{-1} B_{12} T_2^{-1} B_{21}) \cdot (A_h \bar{u}_1, \bar{u}_1). \qquad (II.II)$$

Нетрудно видеть, что собственные значения λ матрицы $A_h^{-1} B_{12} T_2^{-1} B_{21}$ неотрицательны и определяются как решение задачи

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{pmatrix} = (1+\lambda) \begin{bmatrix} A_h & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{pmatrix}. \qquad (II.I2)$$

Из теоремы I0.I, примененной к (II.I2), следует, что $1+\lambda \leq \tilde{c}_2(h+h^{-1})$. Используя этот факт и неравенства (II.I0) и (II.II), получим

$$(A_h(\bar{u}_1^{k+1} - \bar{u}_1), \bar{u}_1^{k+1} - \bar{u}_1) \leq$$
$$\leq C \left[\frac{2\rho_1^k}{1+\rho_1^{2k}} (h+h^{-1}) \right]^2 (A_h \bar{u}_1, \bar{u}_1), \qquad (II.I3)$$

где $C = \tilde{c}_2 C_1$.

<u>Замечание II.2.</u> Несимметричное расширение можно с успехом применять и для решения методом фиктивных компонент ВРС, аппроксимирующих дифференциальную задачу с естественным краевым условием. В этом случае систему (8.7) расширяют до системы вида

$$A\bar{u} = \begin{bmatrix} A_h & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{f}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{f}, \qquad (II.I4)$$

где B_{21} и B_{22} – блоки матрицы B из (I0.4):

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

и $B_{11} \neq A_h$. Собственные значения матрицы $B^{-1}A$ положительны и принадлежат интервалу $[\alpha, \rho]$, границы которого не зависят от h. Доказательство этого факта практически совпадает с доказательством теоремы 10.2. Применяя для решения системы (11.4) итерационный процесс (9.16) с $\tau_0 = 1$ и реализуя его по формулам метода сопряженных градиентов или чебышевского метода, получим при $\bar{u}^0 = 0$

$$(A_h(\bar{u}_1^{k+1} - \bar{u}_1), \bar{u}_1^{k+1} - \bar{u}_1) \leq$$

$$\leq (2 + 2\rho^2)\left[\frac{2\rho_1^k}{1 + \rho_1^{2k}}\right]^2 (A_h \bar{u}_1, \bar{u}_1). \tag{11.15}$$

В отличие от (11.13) эта оценка от h не зависит.

В заключение параграфа рассмотрим двухступенчатый метод фиктивных компонент для решения ВРС, аппроксимирующих дифференциальную задачу со смешанными краевыми условиями [98], т.е. $\Gamma_0^h \neq \varnothing$, $\Gamma_1^h = \partial\Omega^h \setminus \Gamma_0^h \neq \varnothing$. Дополнение G_h из (11.1) сеточной области Ω_h до D_h разделим на две части $G_{1,h}$ и $G_{2,h}$, не имеющие общих внутренних точек. Предположим, что эти сеточные подобласти аппроксимируют подобласти G_1 и G_2 с кусочно-гладкой границей класса C^2 и $\bar{D} = \bar{\Omega} \cup \bar{G}_1 \cup \bar{G}_2$. Кроме того, предположим

$$\partial\Omega_h \cap \partial G_{1,h} = \bar{\Gamma}_1^h. \tag{11.16}$$

Тогда сужения функций из $\overset{\circ}{H}_h(\Omega_h \cup G_{1,h})$ на Ω_h принадлежат $H_h(\Gamma_0^h, \Omega_h)$, а любая функция из $H_h(\Gamma_0^h, \Omega_h)$ может быть продолжена на $G_{1,h}$ с сохранением нормы W_2^1, а продолженная функция будет из $\overset{\circ}{H}_h(\Omega_h \cup G_{1,h})$. Доказательство последнего утверждения практически совпадают с доказательствами теорем о продолжении сеточных функций, приведенных во второй главе.

Базис $\{\varphi_i(\bar{x})\}_{i=1}^n$ пространства $H_h(\Gamma_0^h, \Omega_h)$ сначала дополним до базиса пространства $\overset{\circ}{H}_h(\Omega_h \cup G_{1,h})$ совокупностью функций $\{\varphi_i\}_{i=n+1}^{n+m_1}$, затем до базиса $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N}$ пространства H_h (см. (10.3)), $m_2 = m - m_1$. Тогда матрицу B из (10.4) можно представить в виде:

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}, \tag{11.17}$$

где порядки диагональных блоков B_{11}, B_{22} и B_{33} равны соответственно n, m_1 и m_2.

Для решения системы (8.7) рассмотрим метод фиктивных компонент (9.8):

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}\left(\begin{pmatrix} \bar{u}_1^{k+1} \\ \bar{u}_2^{k+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{u}_1^{k} \\ \bar{u}_2^{k} \end{pmatrix}\right) = -\tau_k \cdot \left(\begin{bmatrix} A_h & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \bar{u}_1^{k} \\ \bar{u}_2^{k} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{f}_h \\ 0 \end{pmatrix}\right),$$

который можно переписать в виде (9.9):

$$\bar{u}_1^{k+1} = \bar{u}_1^{k} - \tau_k T_1^{-1}(A_h \bar{u}_1^k - \bar{f}_h) \tag{11.18}$$

с матрицей T_1 из (9.10):

$$T_1 = B_{11} - B_{12} B_{22}^{-1} B_{21}.$$

Поскольку операторы продолжения функций из $H_h(\Gamma_0^h, \Omega_h)$ до функций из $\overset{\circ}{H}_h(\Omega_h \cup G_{1,h})$ равномерно по h ограничены, то для исследования метода фиктивных компонент (9.8) или процесса (11.18) применима теорема 10.2, из которой следует, что матрицы T_1 и A_h эквивалентны по спектру, т.е. существуют не зависящие от h положительные постоянные $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ такие, что

$$\tilde{\alpha} \cdot (T_1 \bar{v}, \bar{v}) \le (A_h \bar{v}, \bar{v}) \le \tilde{\beta}(T_1 \bar{v}, \bar{v}) \quad \forall \bar{v} \in R^n. \tag{11.19}$$

На каждом шаге итерационного процесса (11.18) необходимо решить систему вида

$$T_1 \bar{v}_1 = \bar{\xi}_1. \tag{II.20}$$

Очевидно, что для этого достаточно решить систему

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\xi}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{II.2I}$$

являющуюся аппроксимацией первой краевой задачи в $\Omega_h \cup G_{1,h}$. Следовательно, для (II.2I) можно построить несимметричное расширение

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\xi}_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{II.22}$$

и применить метод фиктивных компонент (9.I2) с матрицей B из (II.I7), где матрица

$$A_{33} = (\alpha_{ij})_{i,j=n+m_1+1}^{N}, \qquad \alpha_{ij} = a_{G_{2,h}}(S_3\varphi_j, S_3\varphi_i),$$

строится также, как и матрица A_{22} из (II.5), а S_3 - оператор сужения на $G_{2,h}$.

Положим $\tau_0 = 1$, $\bar{v}^0 = 0$ и для определенности будем считать, что процесс (9.I2) реализуется по формулам чебышевского метода. Введем обозначения

$$B_h = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}, \qquad C_h = \begin{bmatrix} B_{13} \\ B_{23} \end{bmatrix},$$

$$T_3 = B_{33} - C_h^T B_h^{-1} C_h,$$

$$S_\varepsilon = B_h^{-1} C_h T_3^{-\frac{1}{2}} \Big[\prod_{i=1}^{k(\varepsilon)} (E - \tau_i T_3^{-\frac{1}{2}} A_{33} T_3^{-\frac{1}{2}})\Big] T_3^{-\frac{1}{2}} C_h^T B_h^{-1},$$

$$S_\varepsilon = \begin{bmatrix} P_\varepsilon & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}, \quad S_\varepsilon = S_\varepsilon^T, \quad \bar{\eta} = \begin{pmatrix} \bar{\xi}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{w} = \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда нетрудно проверить, что приближения метода (9.12) вычисляются по формуле

$$\begin{pmatrix} \bar v_1^{\,k+1} \\ \bar v_2^{\,k+1} \end{pmatrix} = B_h^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \bar\xi_1 \\ 0 \end{pmatrix} + S_\varepsilon \cdot \begin{pmatrix} \bar\xi_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

или

$$\bar v_1^{\,k+1} = T_1^{-1} \bar\xi_1 + P_\varepsilon \bar\xi_1 = T_{1,\varepsilon}^{-1} \bar\xi_1 . \qquad (11.23)$$

По заданному ε определим количество итераций $k = k(\varepsilon)$, для которого оценка (11.13) примет вид

$$(B_h S_\varepsilon \bar\eta , S_\varepsilon \bar\eta) \leq \varepsilon^2 (B_h \bar w , \bar w) . \qquad (11.24)$$

Из оценки (11.13) и теоремы (1.10) следует, что $k(\varepsilon) = O(|\ln h \cdot \ln \varepsilon|)$.

Из (11.21) следует, что

$$(B_h \bar w , \bar w) = (T_1^{-1} \bar\xi_1 , \bar\xi_1).$$

Кроме того, легко показать, что для любого вектора $\bar w = (\bar w_1^T, w_2^T)^T$

$$(B_h \bar w , \bar w) \geq (T_1 \bar w_1 , \bar w_1) .$$

Следовательно, из (11.24) можно получить неравенство

$$(T_1 P_\varepsilon \bar\xi_1 , P_\varepsilon \bar\xi_1) \leq \varepsilon^2 (T_1^{-1} \bar\xi_1 , \bar\xi_1) \qquad (11.25)$$

справедливое для любого $\bar\xi_1 \in R^n$.

Теперь оценим $(P_\varepsilon \bar\xi_1 , \bar\xi_1)$, используя (11.25):

$$|(P_\varepsilon \bar\xi_1 , \bar\xi_1)| = |(T_1^{1/2} P_\varepsilon \bar\xi_1 , T_1^{-1/2} \bar\xi_1)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\varepsilon} (T_1 P_\varepsilon \bar\xi_1 , P_\varepsilon \bar\xi_1) + \frac{\varepsilon}{2} (T_1^{-1} \bar\xi_1 , \bar\xi_1) \leq$$

$$\leq \varepsilon (T_1^{-1} \bar\xi_1 , \bar\xi_1) .$$

Следовательно, матрицы T_1^{-1} и $T_{1,\varepsilon}^{-1}$ эквивалентны по спектру, если $\varepsilon<1$, т.е.

$$(1-\varepsilon)\cdot(T_1^{-1}\bar{\xi}_1,\bar{\xi}_1)\le(T_{1,\varepsilon}^{-1}\bar{\xi}_1,\bar{\xi}_1)\le(1+\varepsilon)\cdot(T_1^{-1}\bar{\xi}_1,\bar{\xi}_1) \qquad (\text{II.26})$$

для любого $\bar{\xi}_1\in R^n$.

Выбрав, например, $\varepsilon=0.5$, для решения системы (8.7) можно предложить итерационный процесс

$$\bar{u}_1^{k+1}=\bar{u}_1^k-\tau_k T_{1,0.5}^{-1}(A_h\bar{u}_1^k-\bar{f}_h), \qquad (\text{II.27})$$

причем из (II.I9) и (II.26) следует, что матрицы $T_{1,0.5}$ и A_h эквивалентны по спектру:

$$\frac{\tilde{\alpha}}{2}(T_{1,0.5}\bar{v},\bar{v})\le(A_h\bar{v},\bar{v})\le\frac{3\tilde{\beta}}{2}(T_{1,0.5}\bar{v},\bar{v}) \quad \forall\bar{v}\in R^n.$$

Реализуя (II.27), например, по формулам обобщенного метода сопряженных градиентов, имеем для ошибки $\bar{\psi}^k=\bar{u}_1^k-\bar{u}_1$ оценку (9.II):

$$(A_h\bar{\psi}^k,\bar{\psi}^k)\le\left[\frac{2\rho_1^k}{1+\rho_1^{2k}}\right]^2(A_h\bar{\psi}^0,\bar{\psi}^0), \qquad (\text{II.28})$$

где

$$\rho_1=\frac{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha}}, \quad \beta=\frac{3}{2}\tilde{\beta}, \quad \alpha=\frac{\tilde{\alpha}}{2}.$$

Полученные результаты можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Т е о р е м а II.3. Для уменьшения начальной ошибки итерационного процесса (II.27), применяемого для решения ВРС (8.7), аппроксимирующей дифференциальную задачу (8.I) со смешанными краевыми условиями, и реализуемого по формулам обобщенного метода сопряженных градиентов, в ε^{-1} раз достаточно выполнить $c|\ln\varepsilon|$ итераций, где c не зависит от h . Кроме того, на каждом шаге процесса (11.27) умножение на матрицу $T^{-1}_{1,0.5}$ является результатом выполнения $c_1|\ln h|$ итераций метода фиктивных компонент (9.12) для системы вида (11.22), где c_1 не зависит от h.

Замечание 11.3. Вместо итерационного процесса (11.27) можно было комбинировать методы фиктивных компонент в другом порядке: сначала продолжить задачу в $G_{2,h}$, а затем в $G_{1,h}$.

Замечание 11.4. Очевидно, что эффективность рассмотренных вариантов метода фиктивных компонент для решения систем вариационно-разностных уравнений во многом определяется тем, насколько просто решаются системы с матрицей B из (10.4), соответствующие сеточным задачам в параллелепипеде D. Эта задача будет рассмотрена в следующей главе в §§ 17, 18.

§ 12. Проекционная формулировка метода фиктивных компонент

Несимметричное расширение ВРС, аппроксимирующих дифференциальную задачу (8.1) с главным или естественным краевым условием, приводит к идее о построении метода фиктивных компонент непосредственно для краевой задачи или ее проекционной формулировки. Рассмотрим следующий простой пример [89]. Пусть Ω_1 и Ω_2 - ограниченные области в R^n, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$, $S = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ и $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S$ - связная область. Предположим, что операторы продолжения функций из $W^1_2(\Omega_i)$ в $W^1_2(\Omega)$ ограничены, а образы операторов сужения r_i функций из $W^1_2(\Omega)$ на Ω_i совпадают с $W^1_2(\Omega_i)$, $i=1,2$. Определим билинейные формы

$$b_i(u,v)=\int\limits_{\Omega_i}(\nabla u\cdot\nabla v+u\cdot v)\,d\Omega_i \quad \forall\, u,v\in W_2^1(\Omega_i),$$

$$a_i(u,v)=b_i(r_i u, r_i v) \quad \forall\, u,v\in W_2^1(\Omega), \tag{I2.I}$$

$$a(u,v)=a_1(u,v)+a_2(u,v) \quad \forall\, u,v\in W_2^1(\Omega)$$

и пространства

$$H=W_2^1(\Omega),$$

$$H_0=\{u\in H:\ u(\bar x)=0 \quad \forall\, \bar x\in S\}, \tag{I2.2}$$

$$H_1=\{u\in H:\ a(u,v)=0 \quad \forall\, v\in H_0\}.$$

Предположим, что $\Omega\supset\bar\Omega_1$, т.е. $S=\partial\Omega_1$. Пусть $f_1\in L_2(\Omega_1)$, а $g_2\in L_2(\Omega_2)$ и

$$f_1(v)=\int\limits_{\Omega_1} f_1(\bar x)\cdot v(\bar x)\,d\bar x \quad \forall\, v\in W_2^1(\Omega_1),$$

$$f(v)=f_1(r_1 v) \quad \forall\, v\in H, \tag{I2.3}$$

$$g_2(v)=\int\limits_{\Omega_2} g_2(\bar x)\cdot v(\bar x)\,d\bar x \quad \forall\, v\in W_2^1(\Omega_2),$$

$$g(v)=g_2(r_2 v) \quad \forall\, v\in H \tag{I2.4}$$

- линейные функционалы.

Рассмотрим в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega_1)=r_1 H_0$ задачу

$$u\in r_1H_0:\quad b_1(u,v)=f_1(v) \quad \forall\, v\in r_1 H_0. \tag{I2.5}$$

Очевидно, что (I2.5) является проекционной формулировкой дифференциальной задачи

$$-\Delta u(\bar x)+u(\bar x)=f_1(\bar x) \quad \forall\, \bar x\in\Omega_1,$$

$$u(\bar x)=0 \quad \forall\, \bar x\in\partial\Omega_1.$$

Рассмотрим следующее расширение задачи (I2.5):

$$u \in H: \quad a_1(u,v) = f(v) \quad \forall\, v \in H_0, \qquad (12.6)$$
$$a_2(u,v) = 0 \quad \forall\, v \in H.$$

Тогда легко видеть, что (12.6) соответствует дифференциальной задаче

$$-\Delta u + u = f_1(\bar{x}) \quad \forall\, \bar{x} \in \Omega_1,$$
$$-\Delta u + u = 0 \quad \forall\, \bar{x} \in \Omega_2,$$
$$\tau_1 u(\bar{x}) = \tau_2 u(\bar{x}) \quad \forall\, \bar{x} \in \partial\Omega_1,$$
$$\frac{\partial(\tau_2 u(\bar{x}))}{\partial \nu} = 0 \quad \forall\, \bar{x} \in \partial\Omega_2;$$

$\tau_2 u = 0$, $\tau_1 u$ - решение задачи (12.5).

Рассмотрим в $W_2^1(\Omega_2) = \tau_2 H$ задачу

$$u \in \tau_2 H: \quad b_2(u,v) = g_2(v) \quad \forall\, v \in \tau_2 H. \qquad (12.7)$$

Очевидно, что (12.7) является проекционной формулировкой дифференциальной задачи

$$-\Delta u(\bar{x}) + u(\bar{x}) = g_2(\bar{x}) \quad \forall\, \bar{x} \in \Omega_2,$$
$$\frac{\partial u(\bar{x})}{\partial \nu} = 0 \quad \forall\, \bar{x} \in \partial\Omega_2.$$

Рассмотрим следующее расширение задачи (12.7):

$$u \in H: \quad a_1(u,v) = 0 \quad \forall\, v \in H_0, \qquad (12.8)$$
$$a_2(u,v) = g(v) \quad \forall\, v \in H.$$

Тогда легко получить, что $\tau_2 u$ является решением задачи (12.7), а $\tau_1 u$ - его продолжение в Ω_1.

Следовательно, метод фиктивных компонент для решения задачи (12.5) можно построить в виде итерационного процесса

$$u^0 \in H: \quad a(u^0, v) = f(v) \quad \forall\, v \in H, \qquad (12.9)$$

$$u^{k+1} \in H: \quad a(u^{k+1}-u^k, v) = -\tau_k \cdot a_2(u^k, v) \quad \forall v \in H, \quad k=0,1,2,\ldots, \tag{12.9}$$

а для решения задачи (12.7) – в виде процесса

$$\begin{gathered} u^0 \in H: \quad a(u^0, v) = g(v) \quad \forall v \in H, \\ u^{k+1} \in H: \\ a(u^{k+1}-u^k, v) = -\tau_k [a_2(u^k, v) - g(v)] \quad \forall v \in H, \\ k = 0,1,2,\ldots . \end{gathered} \tag{12.10}$$

Прежде, чем исследовать сходимость этих процессов (в несколько более общей формулировке), заметим, что название "метод фиктивных компонент" уже связано не с компонентами векторов, а с дополнительными областями или подпространствами.

Итак, рассмотрим гильбертово пространство H со скалярным произведением (u,v). Пусть H_0, H_1 и H_{0i}, $i=1,2$ – его замкнутые подпространства и

$$H = H_0 \oplus H_1, \quad H_0 = H_{01} \oplus H_{02} \tag{12.11}$$

– ортогональные, относительно скалярного произведения (u,v) разложения H и H_0. Заметим, что для рассмотренного примера H_0 и H_1 определены в (12.2), а H_{02} состоит из функций, равных нулю в Ω_1.

Предположим, что в H заданы непрерывные билинейные, симметричные формы $(u,v)_i$, $i=1,2$, $(u,v)_*$ и линейные функционалы $g_i(v)$, $i=1,2$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{gathered} (u,v) = (u,v)_1 + (u,v)_2 \quad \forall u,v \in H, \\ (u,u)_i \geq 0, \quad i=1,2, \quad (u,u)_* \geq 0 \quad \forall u \in H, \end{gathered} \tag{12.12}$$

$$(u,v)_i = 0 \quad \forall\ u \in H_{0\,3-i},\ v \in H; \qquad (12.13)$$

$$\forall\ u \in H_{0i},\ v \in H_1; \quad i=1,2,$$

$$(u,v)_* = 0 \quad \forall\ u \in H_0,\ v \in H;$$

$$\alpha_i (u,u) \leq (u,u)_i + (u,u)_* \leq \beta_i (u,u) \quad \forall\ u \in H_1, \qquad (12.14)$$

$$g_i(v) = 0 \quad \forall\ v \in H_{0\,3-i}, \qquad i=1,2, \qquad (12.15)$$

где постоянные α_i и β_i, $i=1,2$, положительны.

Заметим, что для рассмотренного в начале параграфа примера эти условия выполняются, если положить $(u,v)_* \equiv 0$, постоянные α_i и $\beta_i < 1$ зависят от норм операторов продолжения функций из Ω_i в Ω_{3-i}.

Проекции любого элемента $v \in H$ на подпространства H_0, H_{01}, H_{02} и H_1 будем обозначать соответственно через v_0, v_{01}, v_{02} и v_1:

$$v = v_0 + v_1, \qquad v_0 = v_{01} + v_{02}. \qquad (12.16)$$

Рассмотрим в H следующую задачу:

$$u^* \in H: \quad (u^*, v)_1 = g_1(v) \quad \forall\ v \in H_{01}, \qquad (12.17)$$

$u \in H_0$

$$(u^*, v)_* + (u^*, v)_2 = g_2(v) \quad \forall\ v \in H. \qquad (12.18)$$

Легко видеть, что задачи (12.6) и (12.8) являются частными случаями задачи (12.17) - (12.18).

Л е м м а 12.1. Если выполняются условия (12.11) - (12.15), то существуют единственный элемент $w_1 \in H_1$ и единственный элемент $w_{02} \in H_{02}$ такие, что элемент

$$w = w_1 + w_{02} + w_{01} \qquad (12.19)$$

является решением задачи (12.18) при произвольном $w_{01} \in H_{01}$. Других решений задача (12.18) не имеет.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя обозначения (12.16) и условия (12.11) – (12.15), легко показать справедливость следующих соотношений:

$$(u,v)_* + (u,v)_2 = (u_1,v_1)_* + (u_1,v_1)_2 + (u_{02},v_{02})_2 \quad \forall u,v \in H,$$

$$\tilde{\alpha}_2 \cdot (u,u) \le (u,u)_* + (u,u)_2 \le \tilde{\beta}_2 \cdot (u,u) \quad \forall u \in H_1 \oplus H_{02},$$

$$\tilde{\alpha}_2 = \min\{1, \alpha_2\}, \quad \tilde{\beta}_2 = \max\{1, \beta_2\},$$

$$g_2(v) = g_2(v_1 + v_{02}) \quad \forall v \in H.$$

Отсюда следует, что задача

$$u \in H_1 \oplus H_{02}:$$
$$(u,v)_* + (u,v)_2 = g_2(v) \quad \forall v \in H_1 \oplus H_{02}$$

имеет единственное решение

$$u = w_1 + w_{02}, \quad w_1 \in H_1, \quad w_{02} \in H_{02}, \qquad (12.20)$$

и это решение является также решением задачи (12.18). Так как разложение (12.20) элемента $u \in H_1 \oplus H_{02}$ определяется однозначно и

$$(w_{01},v)_* + (w_{01},v)_2 = 0 \quad \forall v \in H, w_{01} \in H_{01},$$

то тем самым доказано первое утверждение леммы. Пусть z и y – произвольные решения задачи (12.18). Очевидно, что для их разности $v = z - y$ справедливы неравенства

$$0 = (v,v)_* + (v,v)_2 \ge \tilde{\alpha}_2 \left[(v_1,v_1) + (v_{02},v_{02}) \right] \ge 0.$$

Отсюда следует, что $z_1 = y_1$, $z_{02} = y_{02}$ и проекции решения задачи (12.18) на подпространства H_1 и H_{02} определяются однозначно из (12.20), что завершает доказательство леммы.

Л е м м а 12.2. Если выполняются условия (12.11) - (12.15), то существует единственный элемент $w_{01} \in H_{01}$ такой, что элемент $w \in H$:

$$w = w_{01} + w_{02} + w_1 \tag{12.21}$$

является решением задачи (12.17) при произвольных $w_{02} \in H_{02}$, $w_1 \in H_1$. Других решений задача (12.17) не имеет.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя обозначения (12.16) и условия (12.11) - (12.15), легко показать справедливость следующих соотношений:

$$(u, v)_1 = (u_{01}, v_{01}) \quad \forall\, u \in H,\ v \in H_{01},$$

$$g_1(v) = g_1(v_{01}) \quad \forall\, v \in H_{01}.$$

Следовательно, задача

$$u \in H_{01} : \quad (u, v) = g_1(v) \quad \forall\, v \in H_{01}$$

имеет единственное решение $u = w_{01} \in H_{01}$, а $u = w_{01} + w_{02} + w_1$ удовлетворяет уравнению

$$(u, v)_1 = g_1(v) \quad \forall\, v \in H_{01}$$

для любых $w_1 \in H_1$ и $w_{02} \in H_{02}$. Кроме того, легко видеть, что разность двух решений этого уравнения принадлежит $H_1 \oplus H_{02}$ т.е. ортогональна H_{01} . Следовательно формула (12.21) описывает множество всех решений уравнения (12.17).

Т е о р е м а 12.1. Если выполняются условия (12.11) - (12.15), то задача (12.17) - (12.18) имеет единственное решение

$$u^* = u^*_{01} + u^*_{02} + u^*_1 , \tag{12.22}$$

где $u^*_{01} = w_{01} \in H_{01}$ из (I2.2I), $u^*_{02} = w_{02} \in H_{02}$ и $u^*_1 = w_1 \in H_1$ из (I2.I9).

Справедливость теоремы является прямым следствием лемм I2.I и I2.2, так как пересечение множеств решений задач (I2.I8) и (I2.I7) очевидным образом состоит из одного элемента, который является решением задачи (I2.I7) - (I2.I8).

Методом фиктивных компонент для решения задачи (I2.I7)-(I2.I8) будем называть итерационный процесс

$$
\begin{aligned}
&u^0 \in H: \quad (u^0, v) = g_1(v) + g_2(v) \quad \forall v \in H,\\
&u^{k+1} \in H:\\
&(u^{k+1} - u^k, v) = -\tau_k\left[(u^k, v)_2 + (u^k, v)_* - g_2(v)\right] \quad \forall v \in H,\\
&k = 0, 1, 2, \dots,
\end{aligned}
\tag{I2.23}
$$

с некоторыми вещественными параметрами τ_k. Очевидно, что процессы (I2.9) и (I2.I0) являются частными случаями процесса (I2.23).

Т е о р е м а I2.2. Если выполняются условия (I2.II) - (I2.I5), то последовательность $\{u^k\}$ метода фиктивных компонент (I2.23) с $\tau_k \equiv \tau \in (0, 2\beta_2^{-1})$ сходится к решению u^* задачи (I2.I7) - (I2.I8), ошибка $\psi^k = u^k - u^*$ принадлежит подпространству H_1 и справедлива следующая оценка

$$
\|\psi^k\|^2 \equiv (\psi^k, \psi^k) \le q^{2k} \cdot \|\psi^0\|^2 \tag{I2.24}
$$

для любого $k \ge 0$, где

$$
q = \max\{|1 - \alpha_2\tau|, |1 - \beta_2\tau|\} < 1,
$$

а положительные постоянные, α_2 и β_2 из (I2.I4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала докажем, что $\psi^k \in H_1$ при любом $k \ge 0$. Действительно, из (I2.23) и условий (I2.II)-

- (I2.I5) следует, что

$$(u^0, v) = (u^0_{0i}, v)_i = g_i(v) \quad \forall v \in H_{0i},$$
$$i = 1, 2,$$

а из лемм I2.I, I2.2 и теоремы I2.I следует, что

$$u^0_{0i} = u^*_{0i}, \quad i = 1, 2.$$

Предположим, что проекции элементов u^k на подпространства H_{01} и H_{02} равны соответственно u^*_{01} и u^*_{02} для некоторого k . Тогда из (I2.23) получим

$$(u^{k+1}, v) = (u^{k+1}_{01}, v)_1 = (u^k_{01}, v)_1 \quad \forall v \in H_{01},$$

т.е.

$$u^{k+1}_{01} = u^k_{01} = u^*_{01};$$

$$(u^{k+1}, v) = (u^{k+1}_{02}, v)_2 =$$
$$= (u^k_{02}, v)_2 - \tau\left[(u^k_{02}, v)_2 - g_2(v)\right] \quad \forall v \in H_{02}.$$

Так как из (I2.I8) следует, что

$$(u^k_{02}, v_{02})_2 - g_2(v_{02}) = (u^*_{02}, v_{02})_2 - g_2(v_{02}) = 0,$$

то $u^{k+1}_{02} = u^k_{02} = u^*_{02}$. Следовательно, $\psi^k \in H_1$ для любого $k \geq 0$.

Но тогда нетрудно видеть, что для ψ^k справедливы соотношения

$$(\psi^{k+1}, v) = (\psi^k, v) - \tau\left[(\psi^k, v)_2 + (\psi^k, v)_*\right] \quad \forall v \in H_1, \tag{I2.25}$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Из (I2.I4) следует, что билинейная форма $(\psi,v)_2+(\psi,v)_*$ определяет самосопряженный линейный оператор A_2 из H_1 в H_1:

$$(\psi,v)_2+(\psi,v)_*=(A_2\psi,v)\quad\forall\,\psi,v\in H_1, \tag{I2.26}$$
$$\alpha_2\cdot(\psi,\psi)\le(A_2\psi,\psi)\le\beta_2\cdot(\psi,\psi)\quad\forall\,\psi\in H_1.$$

Тогда итерационный процесс (I2.25) можно переписать в виде

$$\psi^{k+1}=\psi^k-\tau\cdot A_2\psi^k\equiv T_\tau\psi^k$$

и

$$(1-\beta_2\tau)\cdot(\psi,\psi)\le(T_\tau\psi,\psi)\le(1-\alpha_2\tau)\cdot(\psi,\psi)\quad\forall\psi\in H_1.$$

По известной теореме [II5, стр. 248] имеем

$$\|T_\tau\|=\sup_{\psi\in H_1}\frac{\|T_\tau\psi\|}{\|\psi\|}\le\max\{|1-\alpha_2\tau|,|1-\beta_2\tau|\}=q.$$

Следовательно, $\|T_\tau\|<1$ для любого $\tau\in(0,2\beta_2^{-1})$ и

$$\|\psi^k\|\le q^k\|\psi^0\|,$$

$\psi^k\to0$, т.е. $u^k\to u^*$, что завершает доказательство теоремы.

Так как оператор A_2, определяемый соотношением (I2.26), самосопряжен, ограничен и строго положительно определен, то для ускорения сходимости метода фиктивных компонент (I2.23) параметры τ_k можно выбирать, основываясь на вариационных принципах. Например, справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а I2.3. Если выполняются условия (I2.II) - (I2.I5), то последовательность $\{u^k\}$ метода фиктивных компонент (I2.23), параметры τ_k которого определяются по формуле

$$\tau_k = \frac{(\xi^k, \xi^k)}{(A_2 \xi^k, \xi^k)}, \tag{I2.27}$$

$$\xi^k = A_2 \psi^k \in H_1 , \quad \psi^k = u^k - u^* , \ k=0,1,\dots ,$$

сходится к решению u^* задачи (I2.I7) - (I2.I8).

Заметим, что выбор τ_k по формулам (I2.27) соответствует выбору параметров в методе наискорейшего спуска и, следовательно, сходимость будет не медленнее, чем в случае постоянного параметра τ . Нетрудно показать, что очередной шаг метода фиктивных компонент (I2.23) в этом случае может быть реализован по следующим формулам:

$$\xi^k \in H: \ (\xi^k, v) = (u^k, v)_2 + (u^k, v)_* - g_2(v) \quad \forall v \in H ,$$

$$\tau_k = (\xi^k, \xi^k) / [(\xi^k, \xi^k)_2 + (\xi^k, \xi^k)_*] ,$$

$$u^{k+1} = u^k - \tau_k \xi^k ,$$

$$k = 0, 1, \dots .$$

Таким образом, в явном виде оператор A_2 не используется.

<u>Замечание I2.I.</u> Наличие в условиях (I2.I3)-(I2.I4) билинейной формы $(u,v)_*$ может оказаться необходимым по следующей причине. Если $H = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и нам необходимо решить однородную задачу Дирихле для уравнения Пуассона в области Ω_1 , т.е. $H_{01} = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega_1)$, то естественно билинейную форму (u,v) в H определить по формуле

$$(u;v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega .$$

Но тогда ее сужение на Ω_2 не будет скалярным произведением в H_1 , если, например, Ω_1 является кольцом, а Ω - квадратом. Взяв в этом случае в качестве $(u,v)_*$ интеграл от произведения функций u и v по общей границе Ω_1 и Ω_2, получим условие (I2.I4) при $i=2$, необходимое для доказательства сформулированных утверждений о сходимости метода фиктивных компонент.

Заменим условие (I2.I4) на следующее условие

$$\alpha_2 \cdot (u,u) \le (u,u)_{2*} \le \beta_2 \cdot (u,u) \quad \forall u \in H_1 \oplus H_{02}, \tag{I2.28}$$

где $\alpha_2 > 0$ и симметричная, билинейная форма $(u,v)_{2*}$ удовлетворяет условию

$$(u,v)_{2*} = 0 \quad \forall u \in H_{01}, v \in H. \tag{I2.29}$$

Рассмотрим задачу

$$u^* \in H_1 \oplus H_{02}:$$
$$(u^*, v)_{2*} = g_2(v) \quad \forall v \in H_1 \oplus H_{02}. \tag{I2.30}$$

Из (I2.28) следует, что эта задача имеет единственное решение. Заметим, что к такой формулировке сводятся дифференциальные задачи с естественными краевыми условиями. Тогда метод фиктивных компонент для решения этой задачи имеет следующий вид:

$$u^0 \in H: \quad (u^0, v) = g_2(v) \quad \forall v \in H,$$
$$u^{k+1} \in H:$$
$$(u^{k+1} - u^k, v) = -\tau_k \left[(u^k, v)_{2*} - g_2(v) \right] \quad \forall v \in H, \tag{I2.3I}$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots,$$

т.е. фиктивной компонентой здесь является подпространство H_{01}.

Т е о р е м а I2.4. Если выполняются условия (I2.II), (I2.I5), (I2.28) и (I2.29), то последовательность $\{u^k\}$ метода фиктивных компонент (I2.3I) с $\tau_k \equiv \tau \in (0, 2\beta_2^{-1})$ сходится к решению u^* задачи (I2.30), ошибка $\psi^k = u^k - u^*$ ортогональна подпространству H_{01} и справедлива следующая оценка:

$$\|\psi^k\| \leq q^k \|\psi^0\|$$

для любого $k \geq 0$, где

$$q = \max\{|1-\alpha_2\tau|, |1-\beta_2\tau|\} < 1,$$

а положительные постоянные α_2 и β_2 из (12.28).

Доказательство. Из (12.11), (12.15), (12.29) и (12.31) следует, что

$$(u^0, v) = 0 \quad \forall v \in H_{01},$$

$$(u^{k+1}, v) = (u^k, v) \quad \forall v \in H_{01}, \ k \geq 0,$$

$$u^k_{01} = 0 \quad \forall k \geq 0.$$

Значит $\psi^k \in H_1 \oplus H_{02}$ при любом $k \geq 0$. Но тогда нетрудно видеть, что

$$(\psi^{k+1}, v) = (\psi^k, v) - \tau \cdot (\psi^k, v)_{2*} \quad \forall v \in H_1 \oplus H_{02},$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Из (12.28) следует, что билинейная форма $(u,v)_{2*}$ определяет линейный самосопряженный оператор A_{2*} из $H_1 \oplus H_{02}$ в $H_1 \oplus H_{02}$:

$$(u, v)_{2*} = (A_{2*} u, v) \quad \forall u, v \in H_1 \oplus H_{02},$$

$$\alpha_2 (u, u) \leq (A_{2*} u, u) \leq \beta_2 (u, u)$$
$$\forall u \in H_1 \oplus H_{02}.$$

Тогда имеем

$$\psi^{k+1} = \psi^k - \tau \cdot A_{2*} \psi^k = T_\tau \psi^k$$

и $$\|T_\tau\| \leq q = \max\{|1-\alpha_2\tau|, |1-\beta_2\tau|\} < 1$$

при любом $\tau \in (0, 2\beta_2^{-1})$. Следовательно,

$$\|\psi^k\| \le q^k \|\psi^0\| \to 0 \ , \quad k \to \infty \ ,$$

что завершает доказательство теоремы.

<u>Замечание I2.2.</u> Для ускорения сходимости процесса (I2.3I) параметры τ_k можно выбирать, например, на основе вариационных принципов. В частности будет сходиться метод наискорейшего спуска (см. теорему I2.3):

$$u^0 \in H: \quad (u^0, v) = g_2(v) \quad \forall v \in H,$$

$$\xi^k \in H: \quad (\xi^k, v) = (u^k, v)_{2*} - g_2(v) \quad \forall v \in H,$$

$$\tau_k = (\xi^k, \xi^k) / (\xi^k, \xi^k)_{2*} \ ,$$

$$u^{k+1} = u^k - \tau_k \xi^k \ ,$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots \ .$$

<u>Замечание I2.3.</u> Если $g_1(v) = (g_1, v)$, $g_2(v) = (g_2, v)$, а $g_{1,1}$ и $g_{2,1}$ - проекции элементов g_1 и g_2 на H_1 , то легко показать, что $\|\psi^0\| = \| g_{1,1} + (1 - A_2^{-1}) g_{2,1} \|$. Очевидно, что решение u^* задачи (I2.I7)-(I2.I8) не зависит от $g_{1,1}$, а ψ^0 - зависит. Именно этим обстоятельством объясняется наличие множителя $(h + h^{-1})$ в оценке спектрального радиуса из (II.II).

§ 13. Применение метода фиктивных компонент для решения простейшей разностной схемы для уравнения четвертого порядка

В этом параграфе исследуется возможность применения метода фиктивных компонент для решения разностной схемы, аппроксимирующей задачу Дирихле для бигармонического уравнения в области, составленной из прямоугольников. В определенном смысле метод близок к классу итерационных процессов, описанных в работах [10, 28, 46] и основанных на сведении исходной задачи к системе задач Дирихле для двух уравнений Пуассона, в то время, как метод фиктивных компонент строится таким образом, что реализация каждого его шага заключается в решении двух разностных задач Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике.

Итак, в области Ω_1, составленной из прямоугольников, рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} &\Delta^2 u(x,y) = f(x,y) \quad \forall (x,y) \in \Omega_1, \\ &u(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial \nu} = 0 \quad \forall (x,y) \in \gamma, \end{aligned} \tag{13.1}$$

где Δ - оператор Лапласа, ν - вектор внешней нормали, γ - граница области Ω_1, $f \in L_2(\Omega_1)$. Если в $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega_1)$ определить скалярное произведение

$$(u,v)_1 = \int\limits_{\Omega_1} (u_{xx} \cdot v_{xx} + 2u_{xy} \cdot v_{xy} + u_{yy} \cdot v_{yy})\,dx\,dy \tag{13.2}$$

и функционал

$$f(v) = \int\limits_{\Omega_1} f(x,y) \cdot v(x,y)\,dx\,dy. \tag{13.3}$$

то проекционная формулировка задачи (13.1) имеет следующий вид:

$$u \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega_1):$$

$$(u, v)_1 = f(v) \quad \forall\, v \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega_1). \qquad (13.4)$$

Пусть прямоугольник Ω содержит $\bar{\Omega}_1$ и $\Omega_2 = \Omega \setminus \bar{\Omega}_1$. В гильбертовом пространстве $H = W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ определим скалярное произведение

$$(u, v) = \int_\Omega (u_{xx} \cdot v_{xx} + 2 u_{xy} \cdot v_{xy} + u_{yy} \cdot v_{yy})\, dx\, dy. \qquad (13.5)$$

Билинейную форму $(u, v)_1$ и функционал $f(v)$ будем считать заданными в H по формулам (13.2) и (13.3). Определим

$$(u, v)_2 = (u, v) - (u, v)_1 \quad \forall\, u, v \in H, \qquad (13.6)$$

$$(u, v)_* = \int_\gamma \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot \frac{\partial v}{\partial \nu} + u \cdot v \right) d\gamma \quad \forall\, u, v \in H \qquad (13.7)$$

и подпространства

$$H_{0i} = \{ v \in H: \ v(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega_{3-i} \}, \ i = 1, 2,$$

$$H_0 = H_{01} \oplus H_{02}, \qquad (13.8)$$
$$H_1 = \{ v \in H: \ (v, u) = 0 \quad \forall\, u \in H_0 \}.$$

Тогда можно показать, что условия (12.11)-(12.15) выполняются для только что определенных подпространств и билинейных форм. Следовательно, для решения задачи (13.4) применим метод фиктивных компонент (12.23):

$$u^0 \in H: \ (u^0, v) = f(v) \quad \forall\, v \in H,$$

$$u^{k+1} \in H: \ (u^{k+1} - u^k, v) = -\tau_k \left[(u, v)_2 + (u, v)_* \right] \qquad (13.9)$$
$$\forall\, v \in H,$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots,$$

сходимость которого характеризуется теоремой I2.2.

Теперь построим разностные аналоги задачи (I3.4) и метода ее решения (I3.9). Предположим, что в прямоугольнике $\bar{\Omega}$ можно построить квадратную сетку с шагом $h>0$ такую, что границы областей Ω_1 и Ω_2 проходят по линиям сетки. Обозначим через $\bar{\Omega}_h$ множество всех узлов построенной сетки и определим несколько его подмножеств:

$$\Omega_h = \bar{\Omega}_h \cap \Omega,$$

$$\bar{\Omega}_{1,h} = \Omega_h \cap \bar{\Omega}_1,$$

$$\Omega_{1,h} = \bar{\Omega}_{1,h} \cap \Omega_1,$$

$$\mathring{\Omega}_{1,h} = \{(x,y) \in \Omega_{1,h} : \\ (x+ih, y+jh) \in \Omega_{1,h}, \quad i,j = 0, \pm 1\},$$

$$\gamma_h = \bar{\Omega}_{1,h} \setminus \mathring{\Omega}_{1,h},$$

$$K(\Omega_h) = \{(x,y) \in \bar{\Omega}_h : \\ (x+ih, y+jh) \in \bar{\Omega}_h, \quad i,j = 0, 1\},$$

$$\bar{\Omega}_{2,h} = \bar{\Omega}_h \setminus \mathring{\Omega}_{1,h},$$

$$\Omega_{2,h} = \Omega_h \setminus \Omega_{1,h},$$

$$\gamma_{h,\nu} = \{(x,y) \in \gamma_h \cap \Omega_{2,h} : \\ ((x,y) - h\nu) \in \gamma_h \cap \Omega_{1,h}\}.$$

Заметим, что при определении $\gamma_{h,\nu}$ в угловых точках области Ω_1 единичный вектор внешней нормали ν имеет два значения.

Обозначим через H_h линейное пространство вещественных дискретных функций, определенных на $\bar{\Omega}_h$ и равных нулю на $\bar{\Omega}_h \setminus \Omega_h$. Определим в H_h разностные операторы [119]:

$$(u(x,y))_x = (u(x+h,y) - u(x,y))/h,$$

$$(u(x,y))_{\bar{x}} = (u(x,y) - u(x-h,y))/h,$$

$$\Delta_h u(x,y) = (u(x,y))_{x\bar{x}} + (u(x,y))_{y\bar{y}} \quad \forall (x,y) \in \Omega_h,$$

$$(u(x,y))_\nu = (u(x,y) - u((x,y) - h\nu))/h \quad \forall (x,y) \in \gamma_{h,\nu},$$

билинейные формы:

$$(u,v)_h = \Big[\sum_{\bar{\Omega}_h} (u_{x\bar{x}} \cdot v_{x\bar{x}} + u_{y\bar{y}} \cdot v_{y\bar{y}}) + 2 \sum_{K(\Omega_h)} u_{xy} v_{xy}\Big] h^2,$$

$$(u,v)_{i,h} = \Big[\sum_{\bar{\Omega}_{i,h}} (u_{x\bar{x}} \cdot v_{x\bar{x}} + u_{y\bar{y}} \cdot v_{y\bar{y}}) + 2 \sum_{K(\Omega_{i,h})} u_{xy} v_{xy}\Big] h^2,$$

$$i = 1, 2,$$

$$(u,v)_{*,h} = \Big[\sum_{\gamma_h} u \cdot v + \sum_{\gamma_{h,\nu}} u_\nu \cdot v_\nu\Big] h,$$

и линейный функционал

$$f_h(v) = \sum_{\mathring{\Omega}_{1,h}} f \cdot v \cdot h^2,$$

где суммирование выполняется по всем узлам из указанных множеств, для которых шаблоны разностных операторов принадлежат этим множествам.

Легко показать, что билинейная форма $(u,v)_h$ определяет в H_h скалярное произведение. Определим в H_h следующие подпространства:

$$H_{01,h} = \{ u \in H_h : \quad u(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \bar{\Omega}_{2,h} \},$$

$$H_{02,h} = \{ u \in H_h : \quad u(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \bar{\Omega}_{1,h} \},$$

$$H_{0,h} = H_{01,h} \oplus H_{02,h} ,$$

$$H_{1,h} = \{ u \in H_h : \quad (u,v)_h = 0 \quad \forall v \in H_{0,h} \},$$

$$H_h = H_{0,h} \oplus H_{1,h} .$$

Рассмотрим простейшую разностную схему, аппроксимирующую задачу (13.1),

$$\begin{gathered} \Delta_h (\Delta_h u_h(x,y)) = f(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathring{\Omega}_{1,h} , \\ u_h(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \gamma_h . \end{gathered} \tag{13.10}$$

Если решение этой задачи считать продолженным нулем на $\bar{\Omega}_h$, то легко показать, что оно является решением следующей проекционной задачи:

$$u_h \in H_{01,h} : \quad (u_h, v)_{1,h} = f_h(v) \quad \forall v \in H_{01,h} . \tag{13.11}$$

Исследуем сходимость метода фиктивных компонент

$$\begin{gathered} \overset{0}{u}_h \in H_h : \quad (\overset{0}{u}_h, v)_h = f_h(v) \quad \forall v \in H_h , \\ u_h^{k+1} \in H_h : \end{gathered} \tag{13.12}$$

$$(u_h^{k+1}-u_h^k, v)_h = -\tau_k\left[(u_h^k, v)_{2,h} + (u_h^k, v)_{*,h}\right] \qquad \forall v \in H_h, \tag{13.12}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Заметим, что для доказательства утверждений теоремы 12.2 о сходимости метода фиктивных компонент (13.12) достаточно проверить следующие условия:

$$(u, v)_{i,h} = (u, v)_h \qquad \forall\ u \in H_{0i,h},\ v \in H_h;$$

$$(u, u)_{i,h} \geq 0 \qquad \forall\ u \in H_h;$$

$$(u, v)_{i,h} = 0 \qquad \forall\ u \in H_{0\,3-i,h},\ v \in H_h;$$

$$\forall\ u \in H_{0i,h},\ v \in H_{1,h};$$

$$i = 1, 2;$$

$$(u, u)_{*,h} \geq 0 \qquad \forall\ u \in H_h;$$

$$(u, v)_{*,h} = 0 \qquad \forall\ u \in H_{0,h},\ v \in H_h;$$

$$f_h(v) = 0 \qquad \forall\ v \in H_{02,h};$$

$$\alpha_2 \cdot (u, u)_h \leq (u, u)_{2,h} + (u, u)_{*,h} \leq (u, u)_h \cdot \beta_2 \qquad \forall u \in H_{1,h}. \tag{13.13}$$

Выполнение этих условий, кроме последнего, проверяется непосредственно без каких-либо затруднений. Неравенства (13.13) являются следствием аналогичных неравенств в $W_2^1(\Omega)$.

Определим в H_h новое скалярное произведение:

$$(u, v)_{\Omega_h} = (u, v)_h + \sum_{(x,y) \in \bar{\Omega}_h} u(x,y) \cdot v(x,y)\, h^2 \ +$$

$$+\sum_{(x,y)\in K_{\bar{x}}(\Omega_h)} (u(x,y))_{\bar{x}} \cdot (v(x,y))_{\bar{x}} \cdot h^2 +$$

$$+\sum_{(x,y)\in K_{\bar{y}}(\Omega_h)} (u(x,y))_{\bar{y}} \cdot (v(x,y))_{\bar{y}} \cdot h^2 \quad , \qquad (I3.I4)$$

где

$$K_{\bar{x}}(\Omega_h)=\{(x,y)\in\bar{\Omega}_h : \ (x-h,y)\in\bar{\Omega}_h\},$$

$$K_{\bar{y}}(\Omega_h)=\{(x,y)\in\bar{\Omega}_h : \ (x,y-h)\in\bar{\Omega}_h\}.$$

Л е м м а I3.I. Существуют положительные не зависящие от h постоянные C_1 и C_2 такие, что

$$C_1\cdot(u,u)_h \leq (u,u)_{\Omega_h} \leq C_2\cdot(u,u)_h \qquad \forall\, u\in H_h .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что $C_1 \geq 1$. Предположим для определенности, что

$$\bar{\Omega}_h = \{(ih,jh) : \quad i=\overline{0,n} \quad , \quad j=\overline{0,m} \quad \}.$$

Тогда для любой $u\in H_h$ имеем:

$$u(0,jh)=0 \quad , \quad j=0,\dots,m ,$$

$$u(ih,jh)=u(ih,jh)-u(ih-h,jh) \;+$$

$$+u(ih-h,jh)-u(ih-2h,jh)+\dots+u(h,jh)-u(0,jh)=$$

$$=\sum_{k=1}^{i}(u(kh,jh))_{\bar{x}}\cdot h \quad , \quad i=1,\dots,n .$$

Отсюда, используя неравенство Коши, получим неравенство

$$|u(ih,jh)|^2\leq nh^2\sum_{k=1}^{n}|(u(kh,jh))_{\bar{x}}|^2 ,$$

суммируя которое по всем i , j , придем к неравенству

$$\sum_{\bar\Omega_h} |u(x,y)|^2 h^2 \leqslant (nh)^2 \cdot \sum_{K_{\bar x}(\Omega_h)} |u_{\bar x}|^2 h^2 . \qquad (13.15)$$

Далее, для любой $u \in H_h$ имеем:

$$\sum_{k=1}^{n} |(u(kh,y))_{\bar x}|^2 = -\sum_{k=1}^{n-1} u(kh,y)\cdot(u(kh,y))_{x\bar x} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{n-1} |u(kh,y)|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \sum_{k=1}^{n-1} |(u(kh,y))_{x\bar x}|^2 .$$

Просуммировав это неравенство по всем y и использовав (13.15), получим

$$(1-\varepsilon(nh)^2)\cdot \sum_{K_{\bar x}(\Omega_h)} |u_{\bar x}|^2 \cdot h^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{4\varepsilon} \sum_{\Omega_h} |(u(x,y))_{x\bar x}|^2 h^2 . \qquad (13.16)$$

Построив аналогичную оценку

$$(1-\varepsilon(mh)^2)\cdot \sum_{K_{\bar y}(\Omega_h)} |u_{\bar y}|^2 \cdot h^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{4\varepsilon} \sum_{\Omega_h} |(u(x,y))_{y\bar y}|^2 \cdot h^2 \qquad (13.17)$$

и выбрав $\varepsilon = (2\cdot \max\{a^2, b^2\})^{-1}$, где $a = h\cdot n$, $b = h\cdot m$ — длины сторон Ω, получим, что

$$(u,u)_{\Omega_h} \leqslant (u,u)_h + a^2 \cdot \max\{a^2,b^2\} \cdot \sum_{\Omega_h} |u_{x\bar x}|^2 h^2 +$$
$$+ \max\{a^2,b^2\}\cdot \Big[\sum_{\Omega_h} (|u_{x\bar x}|^2 + |u_{y\bar y}|^2)\, h^2 \Big] \leqslant$$

$$\leqslant \left(1+(1+a^2)\cdot \max\{a^2, b^2\}\right)\cdot (u,u)_h ,$$

что и требовалось доказать.

Л е м м а 13.2. Для любой дискретной функции u , заданной на множестве узлов $\bar{\Omega}_{1,h}$, существует ее продолжение u^* на $\bar{\Omega}_h$ такое, что

$$u^*(x,y) = u(x,y) \quad \forall (x,y) \in \bar{\Omega}_{1,h} ,$$

$$(u^*, u^*)_{\Omega_h} \leqslant c\cdot (u,u)_{\Omega_{1,h}} ,$$

где постоянная c не зависит от h и u .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что $\bar{\Omega}_{1,h}$ является множеством узлов для области $\bar{\Omega}_1$, составленной из конечного числа, не зависящего от h , прямоугольников. Следовательно, существует $a>0$ такое, что можно построить совокупность квадратов со сторонами равными $2a$, являющуюся конечным покрытием области Ω_1 . Это покрытие можно построить таким образом, что, если квадрат содержит угловую точку границы, то она является его центром. Если квадрат содержит точку границы, то его центр лежит на границе. Обозначим центры квадратов покрытия через $\{x^{(i)}, y^{(i)}\}_{i=1}^N$ и будем считать, что M первых центров лежат на $\partial\Omega_1$, а остальные - внутри области.

Определим функцию

$$\xi(x) = \begin{cases} \exp(x^4/(x^4-a^4)), & x \in (-a,a), \\ 0, & x \leqslant -a, \ x \geqslant a. \end{cases} \tag{13.18}$$

Очевидно, что $\xi(x) \in C^2(R)$ и

$$\frac{d^k \xi(0)}{dx^k} = \begin{cases} 1, & k=0, \\ 0, & k=1,2, \end{cases}$$

$$\frac{d^k \xi(\pm a)}{dx^k} = 0\ , \quad k = 0, 1, 2\ ; \qquad 0 \le \xi(x) \le 1 \quad \forall x \in R\ .$$

Построим разложение единицы на Ω_1 :

$$\eta_i(x,y) = \xi(x - x^{(i)}) \cdot \xi(y - y^{(i)}) \cdot \left[\sum_{j=1}^{N} \xi(x - x^{(j)}) \cdot \xi(y - y^{(j)}) \right]^{-1},$$

т.е.

$$u(x,y) = \sum_{i=1}^{N} \eta_i(x,y) \cdot u(x,y) \quad \forall (x,y) \in \Omega_1\ . \qquad (13.19)$$

Очевидно, что $\eta_i(x,y) \in C^2(R)$ и обращаются в нуль вне квадрата P_i с центром в $(x^{(i)}, y^{(i)})$ со стороной равной $2a$.

Нетрудно показать, что для любой дискретной функции $u(x,y)$, определенной на $\bar{\Omega}_{1,h}$, и функций

$$v_i(x,y) = \eta_i(x,y) \cdot u(x,y) \quad \forall (x,y) \in \bar{\Omega}_{1,h}$$

справедливы неравенства

$$(v_i, v_i)_{\Omega_{1,h}} \le C_1 \cdot (u,u)_{\Omega_{1,h}}\ , \qquad (13.20)$$
$$i = 1, \dots, N\ .$$

Кроме того, любую функцию v_i можно продолжить нулем на $\bar{\Omega}_h$ и

$$(v_i^*, v_i^*)_{\Omega_h} \le C_2 \cdot (u,u)_{\Omega_{1,h}}\ , \qquad (13.21)$$
$$i = M+1, \dots, N\ .$$

Тогда, если для $i = 1, \dots, M$ продолжить v_i на $\bar{\Omega}_h$ так, чтобы

$$(v_i^*, v_i^*)_{\Omega_h} \le C_3 \cdot (v_i, v_i)_{\Omega_{1,h}} \qquad (13.22)$$

то для

$$u^*(x,y) = \sum_{i=1}^{N} v_i^*(x,y) \quad \forall (x,y) \in \bar{\Omega}_h$$

получим

$$(u^*, u^*)_{\Omega_h} \leq C \cdot (u, u)_{\Omega_1, h}$$

с постоянной $C = N(C_1 C_3 M + C_2(N-M))$.

Следовательно, для доказательства леммы достаточно указать конструкцию продолжения функций $v_i(x,y)$ при $1 \leq i \leq M$, носитель которой совпадает с $P_i \cap \Omega_1$. Напомним, что центр квадрата P_i лежит на $\partial\Omega_1$ и либо является угловой точкой $\partial\Omega_1$, либо квадрат P_i не содержит угловых точек. Не уменьшая общности, предположим, что a пропорционально шагу сетки и квадрат P_i лежит в Ω.

Пусть $a = nh$, $x^{(i)} = y^{(i)} = 0$, $(kh, jh) \in \bar{\Omega}_{1,h}$ для всех $k = \overline{-n,0}$, $j = \overline{-n,n}$; а для $k = \overline{1,n}$, $j = \overline{-n,n}$ узлы (kh, jh) лежат вне $\bar{\Omega}_1$. Ради простоты будем считать, что n четно. Определим сеточную функцию $v_i^*(x,y)$:

$$v_i^*(x,y) = v_i(x,y) \quad \forall (x,y) \in \bar{\Omega}_{1,h},$$

$$v_i^*(2kh, jh) = \xi(2kh) \cdot [4 \cdot v_i(-kh, jh) - 3 \cdot v_i(-2kh, jh)],$$

$$k = 1, \dots, 0.5n; \quad j = -n, \dots, n;$$

$$v_i^*((2k+1)h, jh) = \xi((2k+1)h) \times$$

$$\times [-3 \cdot v_i(-(2k+1)h, jh) + 2 \cdot v_i(-(k+1)h, jh) + $$
$$+ 2 \cdot v_i(-kh, jh)],$$

$$k = 0, 1, \dots, 0.5n - 1; \quad j = -n, \dots, n;$$

$$v_i^*(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in (\bar{\Omega}_h \setminus (\bar{\Omega}_1 \cup \bar{P}_i)).$$

Тогда носитель функции v_i^* совпадает с P_i, $v_i^* \in H_h$ и с помощью несложных, но громоздких выкладок можно получить неравенство (13.22) с постоянной C_3, не зависящей от v_i и h.

Если центр квадрата P_i является угловой точкой $\partial\Omega_1$, то достаточно рассмотреть два случая. Пусть $P_i \cap \Omega_1$ – квадрат p_i. Тогда сначала строим продолжение v_i через одну сторону p_i, затем полученную функцию продолжаем на оставшуюся часть P_i и дальше нулем. Последний случай, когда $P_i \cap \Omega_1$ состоит из трех квадратов p_1, p_2, p_3, а $p_4 = P_i \setminus \bar{\Omega}_1$. В этом случае функция v_i сначала продолжается из прямоугольника $\bar{p}_1 \cup \bar{p}_2$ на прямоугольник $\bar{p}_3 \cup \bar{p}_4$, получаем функцию w_i. Затем функция $w_i - v_i$ продолжается из прямоугольника $\bar{p}_2 \cup \bar{p}_3$ на $\bar{p}_1 \cup \bar{p}_4$, получаем функцию z_i. И наконец, в P_i полагаем

$$v_i^* = w_i + z_i,$$

а в остальных точках $\bar{\Omega}_h$ $v_i^* = 0$. Эта схема продолжения изложена, например, в [107, стр.36]. Лемма доказана.

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Л е м м а 13.3. Для любой дискретной функции u, заданной на множестве $\bar{\Omega}_{2,h}$, существует ее продолжение u^* на Ω_h такое, что

$$u^*(x,y) = u(x,y) \quad \forall (x,y) \in \bar{\Omega}_{2,h},$$

$$(u^*,u^*)_{\Omega_h} \le C \cdot (u,u)_{\Omega_{2,h}},$$

где постоянная C не зависит от u и h.

Л е м м а 13.4. Для любой функции $u \in H_h$

$$C_3 \cdot (u,u)_{\Omega_{2,h}} \le (u,u)_{2,h} + (u,u)_{*,h} \le C_4 \cdot (u,u)_{\Omega_{2,h}}, \quad (13.23)$$

где положительные постоянные не зависят от u и h.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего заметим, что справедливы неравенства

$$\sum_{\bar{\Omega}_{2,h}} |u|^2 h^2 \le C_1 \Big(\sum_{K_{\bar{x}}(\Omega_{2,h})} |u_{\bar{x}}|^2 + \sum_{K_{\bar{y}}(\Omega_{2,h})} |u_{\bar{y}}|^2 + \sum_{\gamma_h} |u|^2 h^{-1} \Big) h^2 \le$$

$$\le C_2 \Big[(u,u)_{2,h} + \sum_{\gamma_h} |u^2| h \Big] ,$$

доказательства которых аналогичны доказательству неравенств (13.15)-(13.17). Отсюда следует справедливость левого неравенства из (13.23).

Для доказательства правого неравенства достаточно установить следующее неравенство:

$$(u,u)_{*,h} \le C_3 \cdot (u,u)_{\Omega_{2,h}} . \tag{13.24}$$

Пусть Π_h множество узлов квадратной сетки для некоторого прямоугольника $\Pi \supset \Omega$. Используя лемму 13.3, построим продолжение u^* дискретной функции u с $\bar{\Omega}_{2,h}$ на $\bar{\Pi}_h$, причем u^* равно нулю в граничных и приграничныз узлах $\bar{\Pi}_h$ и

$$(u^*,u^*)_{\Pi_h} \le C_4 \cdot (u,u)_{\Omega_{2,h}} .$$

Тогда для доказательства (13.24) достаточно установить неравенство

$$(u,u)_{*,h} \le C_5 \cdot (u^*,u^*)_{\Pi_h} . \tag{13.25}$$

Так как γ_h состоит из узлов конечного числа отрезков, не зависящего от h , то для проверки неравенства (13.25) достаточно рассмотреть произвольный отрезок θ с множеством узлов θ_h и доказать неравенства

$$\sum_{(x,y)\in\theta_h} |u(x,y)|^2 h \le C_6 \cdot (u^*,u^*)_{\Pi_h} , \tag{13.26}$$

$$\sum_{(x,y)\in\Theta_h} |(u(x,y))_y|^2 h \le C_7\cdot(u^*,u^*)_{\Pi_h}. \qquad (I3.27)$$

Для определенности будем считать, что

$$\Theta_h = \{(0,jh),\ j=0,\dots,n\},$$

$$\overline{\Pi}_h = \{(ih,jh),\ i,j=-2n,\dots,2n\}.$$

Тогда

$$|u(0,jh)|^2 = |\sum_{i=1}^{2n}(u^*(ih,jh))_{\bar{x}}\, h|^2 \le$$

$$\le 2n\sum_{i=1}^{2n}|(u^*(ih,jh))_{\bar{x}}|^2 h^2, \quad j=\overline{0,n}.$$

Отсюда получим

$$\sum_{(x,y)\in\Theta_h}|u(x,y)|^2 h \le 2nh\cdot\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=1}^{2n}|(u^*(ih,jh))_{\bar{x}}|^2h^2 \le$$

$$\le \tilde{C}_6\cdot(u^*,u^*)_{\Pi_h},$$

так как $2nh \le \tilde{C}_6$, где $\tilde{C}_6$ – длина стороны Π. Аналогично доказывается неравенство (I3.27):

$$\sum_{(x,y)\in\Theta_h}|(u(x,y))_y|^2h \le 2nh\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=1}^{2n-1}|(u^*(ih,jh)_{x\bar{x}}|^2h^2,$$

так как $u^*(2nh,jh)_{\bar{x}}=0$. Очевидно, что для отрезков, параллельных оси x, неравенства (I3.26)-(I3.27) доказываются аналогично. Тем самым лемма доказана.

Т е о р е м а I3.I. Для любой сеточной функции $u\in H_{1,h}$ справедливы неравенства (I3.I3) с постоянными α_2 и β_2, которые не зависят от u и h. Следовательно, сходимость итерационного процесса (I3.I2) характеризуется теоремой I2.2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы I3.4 следует, что в качестве β_2 можно взять постоянную c_4 из (I3.23). Пусть

$u \in H_{1,h}$, а $u^* \in H_h$ продолжение u из $\bar{\Omega}_{2,h}$ на $\bar{\Omega}_h$. Из леммы I3.4 следует, что

$$c_3 \cdot (u,u)_{\Omega_{2,h}} \leq (u,u)_{2,h} + (u,u)_{*,h} \,,$$

а из леммы I3.3 следует, что

$$(u^*, u^*)_{\Omega_h} \leq c \cdot (u,u)_{\Omega_{2,h}} \,.$$

Так как $u \in H_{1,h}$, $u = u^*$ в $\bar{\Omega}_{2,h}$, то $u^* = u + u_{01}$, где $u_{01} \in H_{01,h}$. Но тогда

$$(u^*, u^*)_h \geq (u,u)_h \,,$$

а из леммы I3.I следует, что

$$(u^*, u^*)_{\Omega_h} \geq c_1 \cdot (u^*, u^*)_h \,.$$

Следовательно,

$$(u,u)_{2,h} + (u,u)_{*,h} \geq \frac{c_1 \cdot c_3}{c} (u,u)_h \,,$$

что и требовалось доказать.

На каждом шаге итерационного процесса (I3.I2) необходимо решать задачу вида

$$u \in H_h : \quad (u,v)_h = \sum_{(x,y) \in \Omega_h} g(x,y) \cdot v(x,y) \cdot h^2 \quad \forall v \in H_h \tag{I3.28}$$

Л е м м а I3.5. Решение задачи (I3.28) может быть получено как результат последовательного решения двух следующих задач:

$$\begin{aligned} &w \in H_h : \quad \Delta_h w(x,y) = g(x,y) \quad \forall (x,y) \in \Omega_h, \\ &u \in H_h : \quad \Delta_h u(x,y) = w(x,y) \quad \forall (x,y) \in \Omega_h . \end{aligned} \tag{I3.29}$$

Доказательство леммы следует из тождества

$$(u,v)_h = \sum_{\Omega_h} (\Delta_h u)\cdot(\Delta_h v) \qquad \forall\, u,v \in H_h ,$$

которое легко проверяется.

Т е о р е м а 13.2. Если для решения задач (13.29) применяется прямой метод с объемом вычислений $O(h^{-2}\ln h^{-1})$, например метод циклической редукции, то для уменьшения начальной ошибки метода фиктивных компонент (13.12) в ε^{-1} раз достаточно выполнить $O(\ln \varepsilon^{-1})$ итераций, затратив при этом $O(h^{-2}\ln h^{-1}\ln \varepsilon^{-1})$ арифметических операций.

Это утверждение является следствием теорем 13.1, 12.1 и леммы 13.5.

Г Л А В А 4

МЕТОД АЛЬТЕРНИРОВАНИЯ ПО ПОДПРОСТРАНСТВАМ

Настоящая глава посвящена построению и исследованию методов альтернирования по подпространствам для решения вариационно-разностных задач и задач о представлении линейного функционала. В §§ I7, I8 теория методов альтернирования по подпространствам применяется для построения эффективных процессов решения вариационно-разностных задач в случае сеточных областей для прямоугольника или параллелепипеда. Эти результаты позволяют получить окончательную оценку объема вычислений решений вариационно-разностных задач методом фиктивных компонент. В последнем параграфе теория метода альтернирования по подпространствам применяется для построения эффективных методов решения дискретных задач, аппроксимирующих эллиптические краевые задачи в ограниченных двумерных областях для дифференциальных уравнений второго порядка, коэффициенты которых слабо изменяются в подобластях исходной области, но могут резко изменяться при переходе из подобласти в подобласть.

§ 14. Метод альтернирования по подобластям

В ограниченной области $\Omega \subset R^n, n=2,3$, с кусочно-гладкой границей рассмотрим задачу (8.1) с однородными краевыми условиями. Пусть $H = W_2^1(\Gamma_0, \Omega)$ – гильбертово пространство со скалярным произведением $(u,v) = a(u,v)$ из (8.3). Предположим, что $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$, $S = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ и

$$
\begin{aligned}
&H = H_0 \oplus H_1 ,\\
&H_0 = H_{01} \oplus H_{02} ,
\end{aligned}
\tag{14.1}
$$

где H_0, H_{01}, H_{02} и H_1 – замкнутые подпространства из (12.11) пространства H. Пусть в H заданы симметричные билинейные формы $(u,v)_1$, $(u,v)_2$ и $(u,v)_*$, причем $(u,v)_i$ определяются по (8.3) заменой области интегрирования Ω на Ω_i, Γ_1 на $\Gamma_1 \cap \partial\Omega_i$. Предположим, что выполняются условия (12.12)-(12.14), $\Omega \supset \bar{\Omega}_1$, $\Gamma_1 = \partial\Omega$.

Тогда для решения задачи (8.1), проекционная формулировка которой (8.2) имеет вид:

$$
u \in H: \quad (u,v) = l(v) \quad \forall\, v \in H, \tag{14.2}
$$

методом альтернирования по подобластям будем называть итерационный процесс [88, 89] :

$$
\begin{aligned}
&u^0 \in H \text{ - задан},\\
&u^{k+1} \in H: \quad u^{k+1} = u^k + v^k + w^k ,
\end{aligned}
\tag{14.3}
$$

$$
v^k \in H_{01}:
$$

$$
(v_k, v)_1 = \tau_k [\, l(v) - (u^k, v)\,] \quad \forall\, v \in H_{01} , \tag{14.4}
$$

$$w^k \in H_1 + H_{02}:$$

$$(w^k, v)_2 + (w^k, v)_* = \tau_k [\ell(v) - (u^k, v)] \qquad \forall v \in H_1 \oplus H_{02}, \tag{I4.5}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots,$$

с некоторыми вещественными параметрами τ_k и $\tau_0 = 1$. Заметим, что на каждом шаге этого процесса задачи (I4.4) и (I4.5) соответствуют краевым задачам в областях Ω_1 и Ω_2. Из условий (I2.I2) и (I2.I4) следует, что эти задачи однозначно разрешимы при любом $u^k \in H$.

Исследование сходимости метода альтернирования по подобластям (I4.3) – (I4.5) почти совпадает с исследованием метода фиктивных компонент (I2.23). Действительно, используя обозначения (I2.I6) и условия (I2.I2) – (I2.I4), легко проверить справедливость следующих соотношений:

$$v^0 = v^0_{01} = u_{01} - u^0_{01},$$

$$w^0 = w^0_{02} + w^0_1,$$

$$w^0_{02} = u_{02} - u^0_{02}, \qquad w^0_1 = A_2^{-1}(u_1 - u^0_1),$$

$$u^1 = u_{01} + u_{02} + w^1_1,$$

$$v^k = 0, \quad w^k = w^k_1,$$

$$u^{k+1} = u_{01} + u_{02} + w^1_1 + \ldots + w^k_1, \tag{I4.6}$$

$$A_2 w^k_1 = \tau_k [u_1 - w^0_1 - \ldots - w_1^{k-1}], \qquad k \geq 1, \tag{I4.7}$$

где оператор A_2 из H_1 в H_1 определяется по (I2.26). Из

(I2.26) следует, что A_2^{-1} из H_1 в H_1 самосопряжен и

$$\beta_2^{-1}\cdot(v,v) \le (A_2^{-1} v, v) \le \alpha_2^{-1}\cdot(v,v) \quad \forall v \in H_1 . \tag{I4.8}$$

Из (I4.6) следует, что $\psi^k = (u^k - u) \in H_1$. Тогда (I4.7) можно переписать в следующем виде

$$\psi^{k+1} = \psi^k - \tau_k A_2^{-1} \psi^k , \tag{I4.9}$$

так как

$$w_1^k = u^{k+1} - u^k = \psi^{k+1} - \psi^k ,$$

$$u_1 - w_1^0 - \ldots - w_1^{k-1} = -\psi^k , \quad k \ge 1 .$$

Из проведенных рассуждений, неравенств (I4.8) вытекает справедливость следующего утверждения, аналогичного теореме I2.2.

Т е о р е м а I4.I. Если выполняются условия (I4.I), (I2.I2) – (I2.I4), то последовательность $\{u^k\}$ итерационного процесса (I4.3) – (I4.5) с $\tau_0 = 1$, $\tau_k \equiv \tau \in (0, 2\alpha_2)$ сходится к решению u задачи (I4.2), ошибка $\psi^k = u^k - u$ принадлежит подпространству H_1 и справедлива следующая оценка

$$\|\psi^{k+1}\| \le q^k \cdot \|\psi^1\|$$

для любого $k \ge 0$, где

$$q = \max\{ |1 - \alpha_2^{-1}\tau| , |1 - \beta_2^{-1}\tau| \} < 1 .$$

Так как оператор A_2^{-1} самосопряжен ограничен и строго положительно определен, то для ускорения сходимости метода альтернирования по подобластям (I4.3) – (I4.5) параметры τ_k можно выбирать, основываясь на вариационных принципах. Например, будет сходиться метод наискорейшего спуска (см. теоремы I2.3), формулы реализации которого имеют следующий вид:

$$
\begin{gathered}
\xi^k \in H: \quad (\xi^k, v)_1 = l(v) - (u^k, v) \quad \forall v \in H_{01}, \\
(\xi^k, v)_2 + (\xi^k, v)_* = l(v) - (u^k, v) \quad \forall v \in H_1 \oplus H_{02}, \\
\tau_k = [(\xi^k, \xi^k)_2 + (\xi^k, \xi^k)_*] / (\xi^k, \xi^k), \\
u^{k+1} = u^k + \tau_k \xi^k, \\
k = 1, 2, \ldots .
\end{gathered} \tag{I4.I0}
$$

Очевидно, что метод альтернирования по подобластям (I4.3) - (I4.5) можно применять для решения систем вариационно-разностных уравнений (8.5), аппроксимирующих задачу (8.I) или (I4.2) в пространстве сеточных функций $H_h = H_h(\Omega_h)$. Естественно, что при этом сеточную область Ω_h нужно строить так, чтобы ее части были сеточными областями для Ω_1 и Ω_2. Условия (I2.I2) и (I2.I3) практически всегда выполняются, а для проверки неравенств (I2.I4) обычно достаточно установить справедливость условий теорем о продолжении сеточных функций из второй главы. Тогда скорость сходимости метода альтернирования по подобластям не будет зависеть от параметра h сеточной области Ω_h.

Заметим также, что задачу (I4.2) можно рассматривать как задачу представления линейного функционала в гильбертовом пространстве. Тогда итерационный процесс (I4.3) - (I4.5) будем называть методом альтернирования по подпространствам H_{01} и $H_1 \oplus H_{02}$, которые ортогональны друг другу.

§ I5. Критерий сходимости метода альтернирования по подпространствам

Рассмотрим в гильбертовом пространстве H со скалярным произведением (u, v) задачу представления линейного функционала $l(v)$:

$$u \in H: \quad (u,v) = l(v) \quad \forall v \in H. \tag{15.1}$$

Предположим, что H разложено в векторную сумму конечного числа m своих подпространств H_i (замкнутых):

$$H = H_1 + \ldots + H_m \tag{15.2}$$

и для любого элемента $v \in H$ существует хотя бы одно разложение

$$\begin{gathered} v = v_1 + \ldots + v_m, \quad v_i \in H_i, \\ (v_i, v_i) \le \gamma (v,v), \quad i = \overline{1,m}, \end{gathered} \tag{15.3}$$

где постоянная γ не зависит от v.

Тогда методом альтернирования по подпространствам $H_1, \ldots, H_m$ для решения задачи (15.1) будем называть следующий итерационный процесс [96] :

$$u^0 \in H \text{ - задан},$$

$$u^{k+\frac{i}{m}} = u^{k+\frac{i-1}{m}} + z_i^k, \tag{15.4}$$

$$z_i^k \in H_i: \quad (z_i^k, v) = l(v) - (u^{k+\frac{i-1}{m}}, v) \quad \forall v \in H_i, \tag{15.5}$$

$$i = 1, \ldots, m,$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Пусть в подпространствах H_i заданы скалярные произведения $(u,v)_i$ такие, что

$$\alpha \cdot (u,u) \le (u,u)_i \le \beta \cdot (u,u) \quad \forall u \in H_i, \tag{15.6}$$
$$i = 1, \ldots, m,$$

где постоянные α и β положительны. Например, можно задать

$$(u,v)_i = (u,v) \quad \forall\ u,v \in H_i . \tag{I5.7}$$

Тогда итерационный процесс [96] :

$$u^0 \in H - \text{задан},$$

$$u^{k+1} = u^k + \tau_k \sum_{i=1}^{m} z_i^k , \tag{I5.8}$$

$$z_i^k \in H_i : \ (z_i^k, v)_i = \ell(v) - (u^k, v) \quad \forall v \in H_i, \tag{I5.9}$$

$$i = 1, \ldots, m;$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots ,$$

также будем называть методом альтернирования по подпространствам $H_1, \ldots, H_m$ для решения задачи (I5.I).

Очевидно, что задачи (I5.5) и (I5.9) совпадают, если $(u,v)_i$ определяется по (I5.7). Следовательно, в этом случае реализация процессов (I5.4) - (I5.5) и (I5.8) - (I5.9) отличается выбором параметров τ_k и тем фактом, что задачи (I5.5) должны решаться последовательно, а задачи (I5.9) можно решать одновременно.

Определим операторы ортогонального проектирования [II3] :

$$R_i : H \to H_i ,$$
$$Q_i : H \to H_i^{\perp} , \quad i = \overline{1,m} , \tag{I5.I0}$$

где

$$H_i^{\perp} = \{ v \in H : \ (v,u) = 0 \quad \forall\ u \in H_i \} , \quad i = \overline{1,m} ,$$

т.е. $E = R_i + Q_i$, где E - тождественный оператор. Тогда легко видеть, что итерационный процесс (15.4) - (15.5) можно переписать в виде:

$$u^0 \in H \text{ - задан},$$
$$u^{k+\frac{i}{m}} = Q_i u^{k+\frac{i-1}{m}} + R_i u, \tag{15.11}$$
$$i = 1, \dots, m; \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

Если определить самосопряженные операторы B_i из H_i в H_i :

$$(B_i u, v) = (u, v)_i \quad \forall\ u, v \in H_i \tag{15.12}$$
$$i = 1, \dots, m$$

то из (15.6) следует, что эти операторы обратимы и для B_i^{-1} выполняются неравенства

$$\beta^{-1} \cdot (u, u) \le (B_i^{-1} u, u) \le \alpha^{-1} \cdot (u, u) \quad \forall\ u \in H_i, \tag{15.13}$$
$$i = 1, \dots, m.$$

Тогда нетрудно показать, что итерационный процесс (15.8) - (15.9) можно переписать в следующем виде

$$u^0 \in H \text{ - задан},$$
$$u^{k+1} = u^k - \tau_k \cdot R(u^k - u), \tag{15.14}$$
$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$R = R_1 B_1^{-1} R_1 + \dots + R_m B_m^{-1} R_m \tag{15.15}$$

- самосопряженный оператор из H в H .

Т е о р е м а 15.1. Если выполняются условия (15.2) и (15.3), то справедливы неравенства

$$(R_1 u,u) + \dots + (R_m u,u) \geq c\cdot(u,u) \quad \forall u\in H, \tag{15.16}$$

где $c=(\gamma m)^{-1}$, R_i из (15.10). И наоборот, если выполняется условие (15.16), то существует постоянная γ, для которой справедливо условие (15.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть выполняется условие (15.3). Тогда для любого $u\in H$ имеем

$$\|u\| = \sup_{v\neq 0}\frac{|(u,v)|}{\|v\|} =$$

$$= \sup_{\bar{v}\neq 0}\frac{|(u,v_1+\dots+v_m)|}{\|v\|} \leq$$

$$\leq \sup_{\bar{v}\neq 0}\sum_{i=1}^{m}\frac{|(u,v_i)|}{\|v\|} = \sup_{\bar{v}\neq 0}\sum_{i=1}^{m}\frac{|(R_i u,v_i)|}{\|v\|} \leq$$

$$\leq \sqrt{\gamma}\cdot\sum_{i=1}^{m}\|R_i u\|.$$

Отсюда,учитывая, что R_i самосопряжен и $R_i R_i = R_i$, получим

$$(u,u) \leq \gamma\Big(\sum_{i=1}^{m}\|R_i u\|\Big)^2 \leq \gamma\cdot m\cdot\sum_{i=1}^{m}(R_i u,u),$$

т.е. $c \geq (\gamma m)^{-1} > 0$.

Очевидно, что оператор

$$\tilde{R} = R_1 + \dots + R_m \tag{15.17}$$

самосопряжен и ограничен: $\|\tilde{R}\| \leq m$. Следовательно [113, стр. 254], $\tilde{R}$ осуществляет взаимно однозначное отображение

H на H и имеет ограниченный обратный:

$$\|\tilde{R}^{-1}\| \leq \gamma m. \tag{15.18}$$

Теперь предположим, что выполняется условие (15.16). Тогда $\|\tilde{R}^{-1}\| \leq c^{-1}$ и для любого $v \in H$ уравнение

$$\tilde{R} g = v$$

имеет решение

$$g = \tilde{R}^{-1} v, \quad \|g\| \leq c^{-1} \cdot \|v\|.$$

Тогда

$$v = v_1 + \ldots + v_m, \quad v_i = R_i g \in H_i,$$

$$(v_i, v_i) \leq c^{-2} \cdot (v, v), \quad i = 1, \ldots, m,$$

т.е. $\gamma \leq \|\tilde{R}^{-1}\|^2$, что и требовалось доказать.

Т е о р е м а 15.2. Пусть выполняются условия (15.2), (15.3) и (15.6). Тогда справедливы неравенства

$$c_1 \cdot (u, u) \leq (Ru, u) \leq c_2 \cdot (u, u) \quad \forall u \in H, \tag{15.19}$$

где $c_1 = (\gamma \beta m)^{-1}$, $c_2 = \alpha^{-1} \cdot m$, а R из (15.15).

Д о к а з а т е л ь с т в о . Правое неравенство следует из (15.13):

$$(Ru, u) = (R_1 B_1^{-1} R_1 u, u) + \ldots + (R_m B_m^{-1} R_m u, u) =$$

$$= (B_1^{-1} R_1 u, R_1 u) + \ldots + (B_m^{-1} R_m u, R_m u) \leq$$

$$\leq \alpha^{-1} (\|R_1 u\|^2 + \ldots + \|R_m u\|^2) \leq$$

$$\leq \alpha^{-1} \cdot m \cdot \|u\|^2 = \alpha^{-1} m \cdot (u, u).$$

Левое неравенство (15.19) является следствием неравенств

(15.13) и (15.16):

$$(Ru,u) \geq \beta^{-1}\left[(R_1u,u)+\ldots+(R_mu,u)\right] =$$
$$= \beta^{-1}\cdot(\tilde{R}u,u) \geq \beta^{-1}(\gamma m)^{-1}\cdot(u,u),$$

что и требовалось доказать.

Сходимость метода альтернирования по подпространствам (15.4)-(15.5) определяется нормой оператора перехода T :

$$T = Q_m\cdot Q_{m-1}\cdot\ldots\cdot Q_1, \qquad (15.20)$$

так как из (15.11) следует, что

$$\psi^{k+1} = T\psi^k, \quad \psi^k = u^k - u, \qquad (15.21)$$
$$k = 0,1,2,\ldots,$$

где u - решение задачи (15.1).

Т е о р е м а 15.3. Если для разложения (15.2) гильбертова пространства H выполняется условие (15.3), то норма оператора T из (15.20) меньше единицы:

$$\|T\| \leq q(m,\gamma) < 1, \qquad (15.22)$$

где постоянная $q(m,\gamma)$ зависит только от m и γ .

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $T_i = Q_m\cdot\ldots\cdot Q_i$, $i=\overline{1,m}$, т.е. $T_1 = T$. Так как T_i является произведением ортогональных проекторов, то $\|T_i\| \leq 1$. Предположим, что $\|T_1\| = 1$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $v_\varepsilon \in H$ такой, что

$$\|v_\varepsilon\| = 1, \qquad 1-\varepsilon \leq \|T_1 v_\varepsilon\|^2 \leq 1.$$

Пусть $\varepsilon_1 = \varepsilon$, легко видеть, что

$$1-\varepsilon_1 \leq \| T_2 Q_1 v_\varepsilon \|^2 \leq \| Q_1 v_\varepsilon \|^2 \leq 1 . \qquad (I5.23)$$

Отсюда, так как $\| Q_1 v_\varepsilon \|^2 + \| R_1 v_\varepsilon \|^2 = 1$, следует, что

$$\| R_1 v_\varepsilon \|^2 \leq \varepsilon_1 . \qquad (I5.24)$$

Далее, так как $T_2 = T_1 + T_2 R_1$, то

$$\| T_1 v_\varepsilon \| - \| T_2 R_1 v_\varepsilon \| \leq \| T_2 v_\varepsilon \| .$$

Учитывая (I5.23) и (I5.24), из этого неравенства следует, что

$$1-\varepsilon_2 = \left(\sqrt{1-\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_1}\right)^2 \leq \| T_2 v_\varepsilon \|^2 \leq 1 .$$

Очевидно, что методом математической индукции получим для достаточного малого ε следующие оценки:

$$1-\varepsilon_i \leq \| Q_i v_\varepsilon \|^2 \leq 1 ,$$

$$\| R_i v_\varepsilon \|^2 \leq \varepsilon_i , \quad i = 1, \ldots, m ;$$

$$\varepsilon_i = 1 - \left(\sqrt{1-\varepsilon_{i-1}} - \sqrt{\varepsilon_{i-1}}\right)^2 , \; i = 2, \ldots, m .$$

Следовательно,

$$1 = \| v_\varepsilon \| = \| \tilde{R}^{-1} \tilde{R} v_\varepsilon \| \leq \| \tilde{R}^{-1} \| \cdot \| \tilde{R} v_\varepsilon \| \leq$$

$$\leq \| \tilde{R}^{-1} \| \cdot \sum_{i=1}^{m} \| R_i v_\varepsilon \| \leq \| \tilde{R}^{-1} \| \cdot \sum_{i=1}^{m} \sqrt{\varepsilon_i} . \qquad (I5.25)$$

Так как по теореме I5.I $\| \tilde{R}^{-1} \| \leq \gamma m$ (см. (I5.I8)) и $\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то полученное неравенство противоречиво и, следовательно, $\| T \| < 1$.

Теперь предположим, что оценка (I5.22) не выполняется, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует гильбертово пространство H_ε

такое, что для его разложения (15.2) выполняется (15.3) и $\|T_\varepsilon\| \geq 1-0.5\,\varepsilon$. Но тогда существует $v_\varepsilon \in H_\varepsilon$ такой, что

$$\|v_\varepsilon\| = 1, \qquad 1-\varepsilon \leq \|T_\varepsilon v_\varepsilon\|^2 < 1.$$

Следовательно, повторив первую часть доказательства для достаточно малого $\varepsilon > 0$, получим противоречивое неравенство (15.25):

$$1 \leq \|\tilde{R}_\varepsilon^{-1}\| \cdot \sum_{i=1}^{m} \sqrt{\varepsilon_i} \leq m\gamma \cdot \sum_{i=1}^{m} \sqrt{\varepsilon_i}\,,$$

а значит оценка (15.22) справедлива.

Т е о р е м а 15.4. Пусть гильбертово пространство H разложено в векторную сумму (15.2) и норма оператора перехода T метода альтернирования по подпространствам (15.4) - (15.5) меньше единицы. Тогда выполняется условие (15.3) с постоянной

$$\gamma = (1-\|T\|)^{-2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Легко проверить, что

$$E - T = R_1 + R_2 Q_1 + R_3 Q_2 Q_1 + \ldots + R_m \cdot Q_{m-1} \cdot \ldots \cdot Q_1 .$$

Так как $\|T\| < 1$, то $(E-T)^{-1}$ существует и $\|(E-T)^{-1}\| \leq$ $\leq (1-\|T\|)^{-1}$. Тогда любой элемент $v \in H$ представим в виде суммы

$$v = \sum_{i=1}^{m} v_i\,, \qquad v_i = R_i Q_{i-1} \cdot \ldots \cdot Q_1 \cdot (E-T)^{-1} v,$$

$$v_i \in H_i\,, \qquad \|v_i\| \leq (1-\|T\|)^{-1} \cdot \|v\|,$$

$$i = 1, \ldots, m,$$

что и требовалось доказать.

Очевидным следствием теорем 15.3 и 15.4 является следующее утверждение.

Т е о р е м а 15.5. Необходимым и достаточным условием геометрической скорости сходимости метода альтернирования по подпространствам (15.4) - (15.5) к решению u задачи (15.1), т.е.

$$\|\psi^k\| \le q^k \cdot \|\psi^0\|, \quad q < 1, \quad k \ge 0,$$

является условие (15.3), причем q зависит только от m и γ.

Следствием теорем 15.1 и 15.2 является

Т е о р е м а 15.6. Необходимым и достаточным условием геометрической скорости сходимости метода альтернирования по подпространствам (15.8) - (15.9) при условии (15.6) и при $\tau_k = \tau \in (0, 2\alpha/m)$ к решению u задачи (15.1), т.е.

$$\|\psi^k\| \le q^k \|\psi^0\|, \quad q < 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{15.26}$$

является условие (15.3), причем

$$q = \max\left\{ \left|1 - \frac{\tau}{\gamma\beta m}\right|, \left|1 - \tau\frac{m}{\alpha}\right| \right\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (15.14) следует, что

$$\psi^{k+1} = (E - \tau R)\psi^k = T_\tau \psi^k, \quad k = 0, 1, \dots .$$

Из (15.19) следует, что

$$(1 - \tau c_2)\cdot(\psi, \psi) \le (T_\tau\psi, \psi) \le (1 - \tau c_1)\cdot(\psi, \psi) \quad \forall \psi \in H.$$

Так как оператор T_τ самосопряжен, то отсюда имеем

$$\|T_\tau\| \le q = \max\left\{ \left|1 - \frac{\tau}{\gamma\beta m}\right|, \left|1 - \tau\frac{m}{\alpha}\right| \right\}$$

и $q < 1$, если $\tau \in (0, 2\alpha / m)$, поскольку $\gamma \geq 1$, $\beta \geq \alpha$, $m \geq 1$. Следовательно, из условий (I5.3) и (I5.6) следует оценка (I5.26).

Докажем необходимость условия (I5.3). Пусть для некоторого $\tau > 0$ справедлива оценка (I5.26):

$$\| T_\tau \psi \| \leq q \cdot \| \psi \| \quad \forall \psi \in H , \quad q < 1 .$$

Тогда

$$-((E - \tau R) \psi, \psi) \geq -q \cdot (\psi, \psi)$$

или

$$(R \psi, \psi) \geq \frac{1-q}{\tau} (\psi, \psi) \quad \forall \psi \in H .$$

Далее, из (I5.6) следует, что

$$(R \psi, \psi) = \sum_{i=1}^{m} (B_i^{-1} R_i \psi, R_i \psi) \leq$$

$$\leq \alpha^{-1} \cdot (\tilde{R} \psi, \psi) \quad \forall \psi \in H .$$

Следовательно,

$$(\tilde{R} \psi, \psi) = \sum_{i=1}^{m} (R_i \psi, \psi) \geq \frac{1-q}{\tau} \alpha \cdot (\psi, \psi) \quad \forall \psi \in H$$

и по теореме I5.I будет справедливо условие (I5.3), так как $c = (1-q) \tau^{-1} \alpha > 0$, что и требовалось доказать.

§ 16. Матричная формулировка методов альтернирования по подпространствам

Рассмотрим семейство конечномерных гильбертовых пространств H_h , $h\in(0,h_0)$, со скалярными произведениями $(u,v)_h$. Предположим, что

$$n_h = \dim H_h ,$$

$$u_h = \sum_{i=1}^{n_h} u_i \cdot \varphi_h^{(i)} \qquad \forall\, u_h \in H_h , \tag{16.1}$$

где $\{\varphi_h^{(i)}\}_{i=1}^{n_h}$ – базис в H_h . Тогда, если в векторном пространстве R^{n_h} ввести скалярное произведение

$$(\bar u, \bar v) = \sum_{i=1}^{n_h} u_i \cdot v_i \qquad \forall\, \bar u, \bar v \in R^{n_h} , \tag{16.2}$$

то разложение (16.1) определяет взаимно однозначное соответствие между элементами H_h и векторами R^{n_h} :

$$u_h \longleftrightarrow \bar u_h = (u_1, \ldots, u_{n_h})^T . \tag{16.3}$$

Тогда, очевидно, задача представления линейного функционала ℓ_h в H_h :

$$u_h \in H_h : \quad (u_h, v)_h = \ell_h(v) \qquad \forall\, v \in H_h \tag{16.4}$$

заключается в решении системы линейных алгебраических уравнений

$$A_h \bar u_h = \bar \ell_h \tag{16.5}$$

с симметричной, положительно определенной в R^{n_h} матрицей

$$A_h = (a_{ij})_{i,j=1}^{n_h}, \quad a_{ij} = (\varphi_h^{(j)}, \varphi_h^{(i)})_h,$$

и вектором

$$\bar{l}_h = (l_1, \dots, l_{n_h})^T, \quad l_i = l_h(\varphi_h^{(i)}).$$

Легко видеть, что

$$(\bar{u}_h, \bar{v}_h)_{A_h} \equiv (A_h \bar{u}_h, \bar{v}_h) = (u_h, v_h)_h \tag{16.6}$$

определяет в R^{n_h} скалярное произведение, которое в отличие от основного скалярного произведения (16.2) обычно называют энергетическим.

Предположим, что H_h и R^{n_h} разложены в суммы своих подпространств

$$\begin{gathered} H_h = H_{1,h} + \dots + H_{m,h}, \\ R^{n_h} = R_{1,h} + \dots + R_{m,h}, \end{gathered} \tag{16.7}$$

где (16.3) устанавливает взаимно однозначное соответствие между $H_{i,h}$ и $R_{i,h}$, $i = \overline{1, m}$. Пусть в $H_{i,h}$ заданы скалярные произведения

$$(u, v)_{i,h} = (B_{i,h} \bar{u}, \bar{v}) \quad \forall u, v \in H_{i,h}, \tag{16.8}$$
$$i = 1, \dots, m$$

где $B_{i,h}$ – симметричные, положительно полуопределенные матрицы, образ которых совпадает с $R_{i,h}$, $i = 1, \dots, m$, т.е. матрицы $B_{i,h}$ положительно определены в $R_{i,h}$ в силу конечномерности подпространства, $i = 1, \dots, m$.

Очевидно, что ядро матрицы $B_{i,h}$ ортогонально подпространству $R_{i,h}$ и, следовательно, существует симметричная матрица $B^+_{i,h}$, псевдообратная матрице $B_{i,h}$ [27]:

$$B^+_{i,h} B_{i,h} \bar{u} = B_{i,h} B^+_{i,h} \bar{u} = \bar{u} \quad \forall \bar{u} \in R_{i,h} ,$$
$$\operatorname{im} B^+_{i,h} = \operatorname{im} B_{i,h} = R_{i,h} , \tag{16.9}$$
$$i = 1, \ldots, m .$$

Из конечномерности пространства H_h , следует существование постоянной γ_h такой, что для любого $u \in H_h$ существует разложение

$$u = u_1 + \ldots + u_m , \quad u_i \in H_{i,h} ,$$
$$(u_i , u_i)_h \le \gamma_h \cdot (u,u)_h . \tag{16.10}$$

Из положительной определенности в $R_{i,h}$ матрицы $B_{i,h}$ следует существование постоянных $\alpha_h > 0$, β_h таких, что

$$\alpha_h \cdot (u,u)_h \le (u,u)_{i,h} \le \beta_h \cdot (u,u)_h \quad \forall u \in H_{i,h} , \tag{16.11}$$
$$i = 1, \ldots, m.$$

Тогда метод альтернирования по подпространствам $R_{1,h}, \ldots$ $\ldots, R_{m,h}$ (15.4) - (15.5) для решения задачи (16.5) можно переписать в следующем виде:

$$\bar{u}^0_h \in R^{n_h} \text{ — задан} ,$$
$$\bar{u}_h^{k+\frac{i}{m}} = \bar{u}_h^{k+\frac{i-1}{m}} - P^+_i \left(A_h \bar{u}_h^{k+\frac{i-1}{m}} - \bar{\ell}_h \right) , \tag{16.12}$$
$$i = 1, \ldots, m ; \quad k = 0, 1, 2, \ldots ,$$

где матрица P^+_i - псевдообратная к матрице P_i :

$$P_i = B_{i,h} B^+_{i,h} A_h B^+_{i,h} B_{i,h} = P_i^T , \qquad (I6.I3)$$

$$im\, P_i = R_{i,h} , \quad i = \overline{1,m} .$$

Для доказательства этого утверждения достаточно проверить, что матрица

$$R_i = P_i^+ A_h , \quad i = \overline{1,m} , \qquad (I6.I4)$$

является оператором ортогонального проектирования из R^{n_h} в $R_{i,h}$ относительно энергетического скалярного произведения (I6.6). Используя (I6.9), и так как $A_h R_i = R_i^T A_h$, получим

$$(R_i \bar{u} , \bar{v})_{A_h} = (\bar{u} , R_i \bar{v})_{A_h} \quad \forall\, \bar{u}, \bar{v} \in R^{n_h} ,$$

$$im\, R_i = R_{i,h} ,$$

$$(R_i \bar{u} , \bar{v})_{A_h} = (\bar{u} , \bar{v})_{A_h} \quad \forall\, \bar{u}, \bar{v} \in R_{i,h} .$$

Следовательно, R_i – ортогональный проектор, $i = 1, \dots, m$.

Аналогично метод альтернирования по подпространствам $R_{1,h}, \dots, R_{m,h}$ (I5.8) – (I5.9) для решения задачи (I6.5) можно переписать в следующем виде:

$$\bar{u}_h^0 \in R^{n_h} \text{ – задан},$$

$$\bar{u}_h^{k+1} = \bar{u}_h^k - \tau_k \cdot \sum_{i=1}^{m} B^+_{i,h} (A_h \bar{u}_h^k - \bar{f}_h) , \qquad (I6.I5)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots ,$$

так как $R_i \cdot B_i^{-1} \cdot R_i = B^+_{i,h} A_h$, $i = 1, \dots, m$; $B_i^{-1} = B^+_{i,h} \cdot P_i$.

Сходимость итерационного процесса (I6.I2) к решению задачи (I6.5) характеризуется теоремой I5.5:

$$\|\bar{u}_h^{k+1} - \bar{u}_h\|_{A_h} \leq q_h \cdot \|\bar{u}_h^k - \bar{u}_h\|_{A_h},$$
$$q_h = q_h(m, \gamma_h) < 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{16.16}$$

Сходимость итерационного процесса (16.15) характеризуется теоремой 15.6:

$$\|\bar{u}_h^{k+1} - \bar{u}_h\|_{A_h} \leq q_h \cdot \|\bar{u}_h^k - \bar{u}_h\|_{A_h}, \tag{16.17}$$

$$\tau_k \equiv \tau \in (0, 2 \cdot \alpha_h \cdot m^{-1}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$q_h = q_h(m, \gamma_h, \alpha_h, \beta_h) =$$
$$= \max\left\{ \left|1 - \frac{\tau}{m \cdot \gamma_h \cdot \beta_h}\right|, \left|1 - \tau \cdot \frac{m}{\alpha_h}\right| \right\}$$

Заметим, что τ_k в (16.15) можно выбирать на основе вариационных принципов или как параметры чебышевских итерационных методов.

В следующих двух параграфах эти результаты применяются для построения итерационных процессов решения систем с матрицей из (10.4) метода фиктивных компонент.

§ 17. Метод альтернирования по подпространствам восполнений функций, заданных на прямоугольных сетках

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений:

$$A_h \bar{u}_h = \bar{b}_h \tag{17.1}$$

с симметричной, положительно определенной матрицей $A_h = B$

из (10.4). Предположим, что D_h - прямоугольная сеточная область для n -прямоугольника D, $n=2,3$, удовлетворяющая условию (6.1).

Рассмотрим сначала случай, когда $H_h(D_h)$ является пространством лагранжевых восполнений $H(k, D_h)$. Из теоремы 6.1 и условия (10.2) следует, что

$$c_1 \cdot \|\tilde{u}\|^2_{1,D_h} \le a_D(u,u) \le c_2 \cdot \|\tilde{u}\|^2_{1,D_h} \tag{17.2}$$

для любой $u \in H(k, D_h)$, где $\tilde{u} \in H(D_{h/k})$ совпадает с u в узлах сетки $D_{h/k}$, а постоянные c_1 и c_2 положительны и не зависят от h.

Определим в $H(D_{h/k})$ и $H(k, D_h)$ скалярное произведение

$$\begin{aligned}(u,v)_{1,h,D_{h/k}} &= \sum_{\bar{x} \in \Sigma_{h/k}} u(\bar{x}) \cdot v(\bar{x}) \cdot h^n + \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{\bar{x} \in \Sigma^i_{h/k}} (u(\bar{x}))_{x_i} \cdot (v(\bar{x}))_{x_i} h^n ,\end{aligned} \tag{17.3}$$

где $\Sigma_{h/k}$ - множество узлов сетки $\bar{D}_{h/k}$, $\Sigma^i_{h/k}$ - его подмножество, состоящее из узлов $\bar{x} \in \Sigma_{h/k}$ таких, что

$$\bar{x} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

$$\bar{x} - h_i \bar{e}_i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i - h_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \Sigma_{h/k}$$

и

$$(u(\bar{x}))_{x_i} = \frac{u(\bar{x}) - u(\bar{x} - h_i \bar{e}_i)}{h}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Тогда нетрудно показать, что из (6.1) следует существование положительных, не зависящих от h , постоянных c_3 и c_4 таких, что

$$C_3 \le \frac{\|u\|^2_{1,D_h}}{\|u\|^2_{1,h,D_h}} \qquad \forall\, u \in H(D_{h/k}), \quad u \ne 0. \tag{17.4}$$

Напомним, что матрица B из (10.4) определяется по билинейной форме $a_D(u,v)$ в пространстве H_h , совпадающим с $H_h(D_h)$ или его подпространством из (10.1). Пусть n_h — размерность H_h . Тогда разложение $u \in H_h$ по базису $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n_h}$:

$$u(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n_h} u_i \cdot \varphi_i(\bar{x})$$

взаимно однозначно определяет вектор

$$\bar{u} = (u_1, \dots, u_{n_h})^T \in R^{n_h} \longleftrightarrow u \in H_h.$$

Напомним, что базисные функции в $H_h(D_h)$ можно построить так, что каждая из них будет иметь ненулевое значение только в одном из узлов $\Sigma_{h/k}$. Будем считать это условие выполненным.

Определим матрицу $A_{1,h}$:

$$(A_{1,h}\bar{u}, \bar{v}) = (u, v)_{1,h,D_{h/k}} \qquad \forall\, u, v \in H_h. \tag{17.5}$$

Тогда из (17.2) и (17.4) следует, что для любого $\bar{u} \in R^{n_h}$

$$\alpha \cdot (A_h\bar{u}, \bar{u}) \le (A_{1,h}\bar{u}, \bar{u}) \le \beta \cdot (A_h\bar{u}, \bar{u}) \tag{17.6}$$

с постоянными $\alpha = c_1 c_3$, $\beta = c_2 c_4$, которые положительны и не зависят от h, т.е. матрицы A_h и $A_{1,h}$ эквивалентны по спектру [35].

Следовательно, итерационный процесс

$$A_{1,h}(\bar{u}^{k+1} - \bar{u}^k) = -\tau_k \cdot (A_h \bar{u}^k - \bar{f}_h), \qquad (17.7)$$
$$\bar{u}^0 \in R^{n_h}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

при подходящем выборе параметров τ_k будет сходиться к решению системы (I7.I), а скорость его сходимости не будет зависеть от h, т.е. множитель q_h в оценке (I6.I7) не зависит от h. Заметим, что (I7.7) является частным случаем процесса (I6.I5) с $m = 1$, $\gamma_h = 1$.

Для решения на каждом шаге итерационного процесса (I7.7) системы с матрицей $A_{1,h}$ можно использовать прямой метод, например, метод циклической редукции [I20], с оценкой объема вычислений $O(h^{-n} \ln h^{-1})$. Из (I7.3) следует, что матрица $A_{1,h}$ соответствует пятиточечной $(n=2)$ или семиточечной $(n=3)$ разностной схеме на квадратной сетке с шагом h, аппроксимирующей уравнение $-\Delta u + u = f$ в некотором n-прямоугольнике. Приведем явный вид матрицы $A_{1,h}$ при $n = 1$. Если $H_h = H(k, D_h)$, то

$$h \cdot A_{1,h} = \begin{bmatrix} 1+h^2 & -1 & & & & 0 \\ -1 & 2+h^2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & -1 & 2+h^2 & -1 \\ & & & & -1 & 1+h^2 \end{bmatrix}. \qquad (17.8)$$

Если $H_h = \mathring{H}_h(D_h)$, то первый и последний элементы главной диагонали нужно увеличить на единицу. Если $H_h = \tilde{H}_h(D_h)$, то нули в правом верхнем и левом нижнем углах матрицы $h \cdot A_{1,h}$ нужно заменить на единицу.

Теперь рассмотрим случай, когда $H_h(D_h)$ является пространством эрмитовых восполнений $H^э(t, D_h)$. Тогда (7.I) определяет разложение

$$H^э(t, D_h) = H^э_0(t, D_h) + H^э_1(t, D_h). \qquad (17.9)$$

Сеточная функция $q(\bar{x}) \in H^э(t, D_h)$ по определению 7.I взаимно однозначно определяется значениями своих производных

$$\frac{\partial^\alpha q(\bar{x})}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_n^{\alpha_n}} = q_\alpha(\bar{x}) \quad \forall\ \bar{x} \in \Sigma_h, \qquad (17.10)$$

$$\alpha_i = 0, 1, \ldots, t; \quad i = 1, \ldots, n,$$

где Σ_h – множество узлов сетки $\bar{D}_h$.
Напомним, что $H^э_0(t, D_h)$ состоит из функций $q_0(\bar{x})$ таких, что $(q_0(\bar{x}))_\alpha = 0$ при любом $\bar{x} \in \Sigma_h$, если $|\alpha| > 0$. Если $q_1(\bar{x}) \in H^э_1(t, D_h)$, то $q_1(\bar{x}) = 0$ при любом $\bar{x} \in \Sigma_h$, т.е. (17.9) определяет единственное представление

$$q(\bar{x}) = q_0(\bar{x}) + q_1(\bar{x})$$

для любой $q \in H^э(t, D_h)$.

Для определенности будем считать, что $H_h = H^э(t, D_h)$. Случаи, когда H_h совпадает с одним из подпространств $H_h(D_h)$, рассматриваются аналогично. Поставим множеству значений $\{q_\alpha(\bar{x})\}$ из (17.10) в соответствие вектор $\bar{q} \in R^{n_h}$:

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} \bar{q}^{(0)} \\ \bar{q}^{(1)} \\ \vdots \\ \bar{q}^{(nt)} \end{bmatrix}, \quad \bar{q}^{(i)} \in R^{m_i}, \tag{17.11}$$

где $\bar{q}^{(i)}$ – вектор значений $q_\alpha(\bar{x})$ для всех $\bar{x} \in \Sigma_h$, всех $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $0 \le \alpha_j \le t$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = i$.

По вектору $\bar{q}^{(0)}$ построим функцию $p_0(\bar{x}) \in H(D_h)$ – билинейное восполнение. Пусть матрица $B_{0,h}$ порядка m_0 определена по (17.5) при $k = 1$:

$$(B_{0,h}\bar{u}, \bar{v}) = (u, v)_{1,h,D_h} \qquad \forall u, v \in H(D_h). \tag{17.12}$$

Определим диагональную матрицу E_h :

$$E_h = (1+h^{-2}) \cdot h^n \cdot diag\{\Theta_0, h^2 E_1, \dots, h^{2i} E_i, \dots, h^{2nt} E_{nt}\}, \tag{17.13}$$

где Θ_0 – нулевая матрица порядка m_0, E_i – единичные матрицы порядка m_i, $i = \overline{1, nt}$.

Тогда используя замечание 4.1 и определение подпространства $H_1^Э(t, D_h)$, нетрудно доказать справедливость следующих неравенств:

$$c_1 \cdot (E_h \bar{q}, \bar{q}) \le \|q\|^2_{1,D_h} \le c_2 \cdot (E_h \bar{q}, \bar{q}) \tag{17.14}$$

для любой функции $q(\bar{x}) \in H_1^Э(t, D_h)$ с положительными постоянными c_1 и c_2, не зависящими от h.

Введем матрицу $A^Э_{0,h}$ порядка n_h :

$$A^{э}_{0,h} = \mathrm{diag}\{B_{0,h}, \Theta\}, \qquad (17.15)$$

где Θ – нулевая матрица порядка $n_h - m_0$, а $B_{0,h}$ из (17.12). Разложим векторное пространство R^{n_h} в сумму подпространств

$$R^{n_h} = R_{0,h} + R_{1,h}, \qquad (17.16)$$

где
$$R_{0,h} = \{\bar{q} \in R^{n_h} : \bar{q}^{(i)} = 0,\ i = \overline{1, nt}\},$$
$$R_{1,h} = \{\bar{q} \in R^{n_h} : \bar{q}^{(0)} = 0\}.$$

Тогда из теоремы 7.1, неравенств (17.6) и (17.14) следует, что существуют положительные, не зависящие от h, постоянные γ, α и β такие, что для любого $\bar{q} \in R^{n_h}$ существует разложение

$$\bar{q} = \bar{q}_0 + \bar{q}_1, \quad \bar{q}_0 \in R_{0,h}, \bar{q}_1 \in R_{1,h},$$

$$\begin{aligned} &(A_h \bar{q}_0, \bar{q}_0) \le \gamma (A_h \bar{q}, \bar{q}), \\ &(A_h \bar{q}_1, \bar{q}_1) \le \gamma (A_h \bar{q}, \bar{q}); \end{aligned} \qquad (17.17)$$

$$\alpha \cdot (A_h \bar{q}, \bar{q}) \le (A^{э}_{0,h} \bar{q}, \bar{q}) \le \beta \cdot (A_h \bar{q}, \bar{q}) \quad \forall \bar{q} \in R_{0,h},$$

$$\alpha \cdot (A_h \bar{q}, \bar{q}) \le (E_h \bar{q}, \bar{q}) \le \beta \cdot (A_h \bar{q}, \bar{q}) \quad \forall \bar{q} \in R_{1,h}. \qquad (17.18)$$

Таким образом, условия сходимости метода альтернирования по подпространствам $R_{0,h}$ и $R_{1,h}$ (16.15) решения задачи

(I6.5) выполняются с постоянными, не зависящими от h. Легко видеть, что

$$(A^{\text{э}}_{0,h})^{+} = \mathrm{diag}\{B^{-1}_{0,h}, \Theta\},$$

$$E^{+}_{h} = \frac{h^{2-n}}{1+h^{2}} \mathrm{diag}\{\Theta_0, h^{-2}E_1, \ldots, h^{-2nt}E_{nt}\},$$

и пусть

$$A^{-1}_{1,h} = (A^{\text{э}}_{0,h})^{+} + E^{+}_{h}. \tag{I7.I9}$$

Из (I7.I7) - (I7.I8) и теоремы I5.2 следует, что

$$0.5\alpha\cdot(A_h\bar{q},\bar{q}) \le (A_{1,h}\bar{q},\bar{q}) \le 2\gamma_\beta(A_h\bar{q},\bar{q}) \quad \forall q\in R^{n_h}, \tag{I7.20}$$

т.е. матрицы A_h и $A_{1,h}$ эквивалентны по спектру. Следовательно, скорость сходимости метода альтернирования по подпространствам, который реализуется по формулам (I7.7), при подходящем выборе параметров τ_k не зависит от h.

Заметим, что для решения на каждом шаге итерационного процесса (I7.7) системы с матрицей $A_{1,h}$ из (I7.I9) можно использовать прямой метод, как и в случае лагранжевых восполнений, с оценкой объема вычислений $O(h^{-n}\ln h^{-1})$.

§ I8. Метод альтернирования по подпространствам восполнений функций, заданных на триангуляциях

Снова рассмотрим систему (I7.I):

$$A_h\bar{u}_h = \bar{b}_h \tag{I8.I}$$

с матрицей $A_h = B$ из (10.4). Но в этом параграфе будем предполагать, что семейство сеточных областей $\{D_h\}$ является семейством триангуляций с условием (A) n-прямоугольника D, причем $D_h = D$. Кроме того, предположим, что $H_h(D_h)$ является пространством лагранжевых восполнений $H(k, D_h)$ на триангуляции D_h.

Напомним, что любая функция $u \in H(k, D_h)$ определяется множеством своих значений $\{u(\bar{x}) : \bar{x} \in \Sigma_{h/k}\}$, где $\Sigma_{h/k}$ – множество узлов триангуляции $\bar{D}_{h/k}$.

Для определенности будем полагать, что $H_h = H_h(D_h)$. Случаи, когда H_h совпадает с одним из подпространств $H_h(D_h)$ рассматриваются аналогично. Поставим в соответствие каждой функции $u \in H_h(D_h)$ функцию $u_1 \in H(D_{h/k})$:

$$u_1(\bar{x}) = u(\bar{x}) \quad \forall\ \bar{x} \in \Sigma_{h/k}. \tag{18.2}$$

Тогда по теореме 5.1 существуют положительные не зависящие от h постоянные C_3 и C_4 такие, что

$$C_3 \cdot \|u_1\|^2_{1,D_h} \le \|u\|^2_{1,D_h} \le C_4 \cdot \|u_1\|^2_{1,D_h} \quad \forall u \in H_h \tag{18.3}$$

Совокупность n-симплексов из $D_{h/k}$ будем называть макроэлементом, если:

- их объединение гомеоморфно n-кубу;
- определены 2^n различных узлов на границе этого объединения (вершины макроэлемента);
- граница объединения ломаными (ребрами макроэлемента), проходящими по ребрам n-симплексов, лежащих на границе объединения и соединяющих вершины макроэлемента, разделяется на части (грани макроэлемента) гомеоморфные $(n-1)$-кубу, которые не имеют общих внутренних точек.

Тогда предположим, что триангуляция $D_{h/k}$ n - прямоугольника D представлена как множество своих макроэлементов Q_h :

$$D_{h/k} = \{ Q_h \} , \tag{18.4}$$

причем любые два макроэлемента либо не имеют общих точек, либо имеют одну общую вершину, или одно общее ребро, или одну общую грань. Кроме того, предположим, что любой макроэлемент из (18.4) состоит не более, чем из K n-симплексов триангуляции $D_{h/k}$ и K не зависит от h .

Множество вершин всех макроэлементов из (18.4) будем обозначать через $Q(D_{h/k})$. Очевидно, что $Q(D_{h/k}) \subset \Sigma_{h/k}$ и существует непрерывное линейное на каждом n-симплексе из $D_{h/k}$ отображение D на D , преобразующее каждый макроэлемент Q_h из (18.4) в ячейку n-прямоугольной сетки для D .

Заметим, что построение представления (18.4) чрезвычайно просто осуществляется в случае, когда триангуляция D_h топологически эквивалентна прямоугольной (см. определение 1.4). Легко видеть, что в этом случае любой макроэлемент Q_h состоит из двух n-симплексов $D_{h/k}$, и $Q(D_{h/k}) = \Sigma_{h/k}$ $k \geqslant 1$. Можно, конечно, строить более крупные макроэлементы.

В случае, когда триангуляция $D_{h/k}$ не является топологически эквивалентной прямоугольной, представление (18.4) можно построить способом, изложенным в [93]. Также можно применить для построения макроэлементов следующий простой алгоритм. Построим на D равномерную прямоугольную сетку $\tilde{D}_h$, каждая ячейка которой содержит, по крайней мере, один n-симплекс из $D_{h/k}$ и покрывается K n-симплексами из $D_{h/k}$. Очевидно, что $\tilde{D}_h$ можно построить так, что ее узлы будут принадлежать попарно непересекающимся n-симплексам из $D_{h/k}$. Каждому узлу сетки $\tilde{D}_h$ поставим в соответствие вершину n-симплекса, которому он принадлежит. Нетрудно видеть, что множеству узлов $\tilde{D}_h$ будет поставлено в соответствие подмножество попарных различных узлов, которое и будет являться множеством $Q(D_{h/k})$. Затем следует заменить ребра ячеек $\tilde{D}_h$ ломаными, соединяющими соответствующие узлы $Q(D_{h/k})$ и грани ячеек $\tilde{D}_h$ на поверхности, состоящие из граней n-симплексов. Примером такого построения является рис. 18.1.

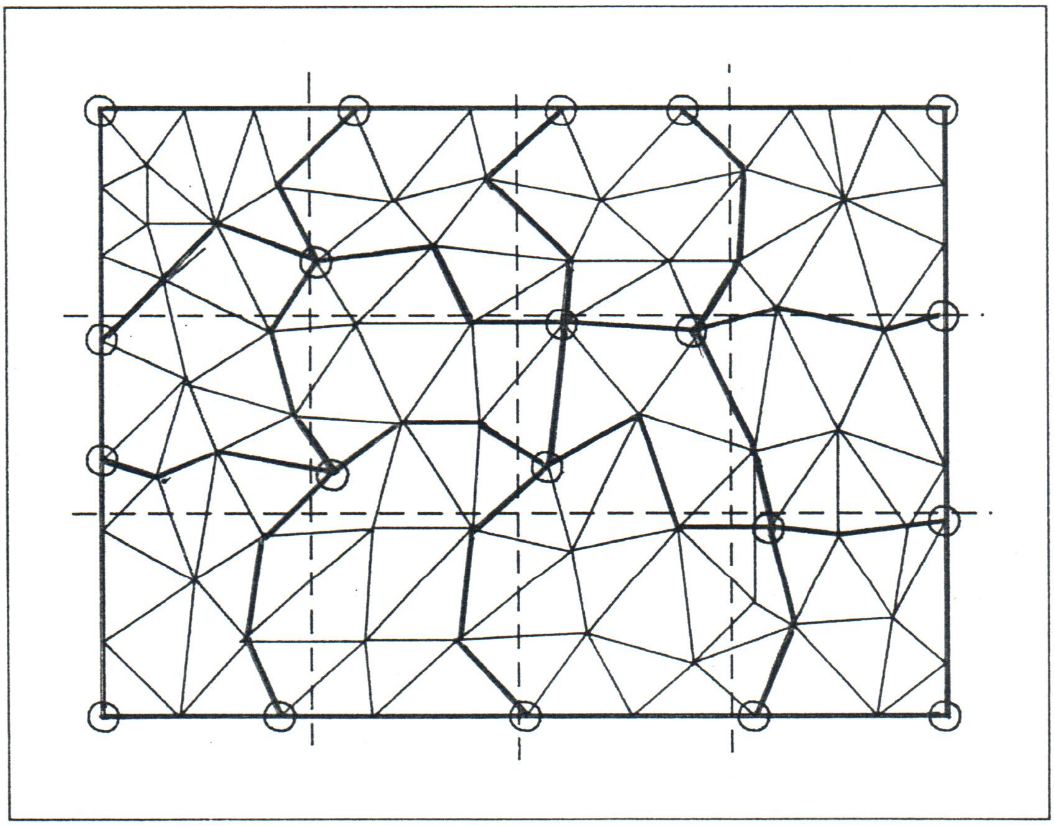

Рис. 18.1. Пример разбиения триангуляции на макроэлементы при $n=2$.

Каждой функции $u_1(\bar{x}) \in H(D_{h/k})$ поставим в соответствие вектор $\bar{u}_1 \in R^{n_h}$:

$$\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} \bar{u}_1^{(0)} \\ \bar{u}_1^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \bar{u}_1^{(i)} \in R^{n_i}, \tag{I8.5}$$

где n_0 – количество узлов в $Q(D_{h/k})$, $n_1 = n_h - n_0$, компоненты вектора $\bar{u}_1^{(0)}$ равны значениям $u_1(\bar{x})$ в узлах $Q(D_{h/k})$, а компоненты вектора $\bar{u}_1^{(1)}$ равны значениям $u_1(\bar{x})$ в узлах $\Sigma_{h/k} \setminus Q(D_{h/k})$.

Далее, поставим в соответствие каждой функции $u_1(\bar{x}) \in H(D_{h/k})$ функцию $u_{10}(\bar{x}) \in H(D_{h/k})$:

- $u_{10}(\bar{x}) = u_1(\bar{x}) \quad \forall\, \bar{x} \in Q(D_{h/k})$;
- если $\bar{x}$ – узел ребра макроэлемента Q_h, то положим $u_{10}(\bar{x})$ равной полусумме значений $u_1(\bar{x})$ в концах ребра;
- если $\bar{x}$ – узел грани, но не ребра макроэлемента, то положим $u_{10}(\bar{x})$ равной четверти суммы значений $u_1(\bar{x})$ в вершинах грани; (I8.6)
- если $\bar{x}$ – внутренний узел макроэлемента, то положим $u_{10}(\bar{x})$ равной восьмой части суммы значений $u_1(\bar{x})$ в вершинах макроэлемента.

Очевидно, что $u_{10}(\bar{x})$ однозначно определяется по значениям функции $u_1(\bar{x})$ в узлах $Q(D_{h/k})$. Кроме того, функции $u_{10}(\bar{x})$ соответствует вектор $\bar{u}_{10}$, определяемый по вектору $\bar{u}_1$ по формуле

$$\bar{u}_{10} = \tilde{Q}\,\bar{u}_1 = \begin{bmatrix} E_0 & 0 \\ L & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_1^{(0)} \\ \bar{u}_1^{(1)} \end{pmatrix}, \tag{I8.7}$$

где E_0 – единичная матрица порядка n_0, а L – $n_1 \times n_0$ матрица, количество ненулевых элементов в каждом столбце и каждой строке которой ограничено сверху постоянной, не зависящей от h .

Через $u_{11}(\bar{x}) \in H(D_{h/k})$ будем обозначать функцию, определяемую по значениям функции $u_1(\bar{x}) \in H(D_{h/k})$ в узлах $\Sigma_{h/k} \setminus Q(D_{h/k})$:

$$u_{11}(\bar{x}) = u_1(\bar{x}) \quad \forall\, \bar{x} \in \Sigma_{h/k} \setminus Q(D_{h/k}),$$

$$u_{11}(\bar{x}) = 0 \quad \forall\, \bar{x} \in Q(D_{h/k}).$$

Очевидно, что соответствующий ей вектор $\bar{u}_{11}$ определяется по вектору $\bar{u}_1$ формулой

$$\bar{u}_{11} = \tilde{E}\, u_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_1^{(0)} \\ \bar{u}_1^{(1)} \end{pmatrix}, \tag{18.8}$$

где E_1 – единичная матрица порядка n_1 .

Определим симметричные матрицы порядка n_h :

$$P_0 = \tilde{Q}(\tilde{Q}^T \tilde{Q})^+ \tilde{Q}^T, \tag{18.9}$$

$$B_0 = P_0 \tilde{\Delta} P_0, \quad B_1 = (1+h^{-2}) h^n \tilde{E}, \tag{18.10}$$

$$\tilde{\Delta} = \begin{bmatrix} B_{0,h} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где матрица $B_{0,h}$ порядка n_0 определяется также, как и матрица $A_{1,h}$ из (17.5) при условии замены триангуляций $D_{h/k}$ на прямоугольную сетку $\tilde{D}_h$, т.е. матрица $B_{0,h}$ имеет вид (17.8) (при $n = 1$).

Т е о р е м а 18.1. Векторное пространство R^{n_h} можно представить в виде суммы подпространств:

$$R^{n_h} = R_{0,h} + R_{1,h}, \tag{18.11}$$

где $R_{0,h} = \operatorname{im} \widetilde{Q}$, $R_{1,h} = \operatorname{im} \widehat{E}$.

Для любого $\bar{u} \in R^{n_h}$ разложение

$$\bar{u} = \bar{v}_0 + \bar{v}_1, \quad \bar{v}_0 \in R_{0,h}, \quad \bar{v}_1 \in R_{1,h},$$

единственно и

$$(A_h \bar{v}_i, \bar{v}_i) \le \gamma \cdot (A_h \bar{u}, \bar{u}) \qquad (18.12)$$
$$i = 0, 1,$$

где постоянная γ не зависит от $\bar{u}$ и h.

Кроме того, неравенства

$$\alpha \cdot (A_h \bar{u}, \bar{u}) \le (B_i \bar{u}, \bar{u}) \le \beta (A_h \bar{u}, \bar{u}) \qquad (18.13)$$
$$\forall \bar{u} \in R_{i,h},$$

$i = 0, 1$, справедливы с некоторыми положительными постоянными α и β, которые не зависят от $\bar{u}$ и h.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование разложения (18.11) очевидно. Пусть $(\bar{u}, \bar{v})_*$ – скалярное произведение в R^{n_h} и

$$\tilde{c}_1 \cdot (\bar{u}, \bar{u})_* \le (A_h \bar{u}, \bar{u}) \le \tilde{c}_2 \cdot (\bar{u}, \bar{u})_* \qquad (18.14)$$

для любого $\bar{u} \in R^{n_h}$ с положительными не зависящими от h постоянными $\tilde{c}_1$ и $\tilde{c}_2$. Тогда легко видеть, что если

$$(\bar{v}_i, \bar{v}_i)_* \le \tilde{\gamma} \cdot (\bar{u}, \bar{u})_* \quad \forall \bar{u} \in R^{n_h}, \qquad (18.15)$$

$$\tilde{\alpha} \cdot (\bar{u}, \bar{u})_* \le (B_i \bar{u}, \bar{u}) \le \tilde{\beta} \cdot (\bar{u}, \bar{u})_* \qquad (18.16)$$
$$\forall \bar{u} \in R^{n_h},$$
$$i = 0, 1,$$

то (18.12) и (18.13) выполняются с постоянными $\gamma = \tilde{c}_1^{-1} \tilde{c}_2 \tilde{\gamma}$, $\alpha = \tilde{c}_2^{-1} \tilde{\alpha}$, $\beta = \tilde{c}_1^{-1} \tilde{\beta}$.

Определим $(u,v)_*$, порождающее норму (5.3):

$$(\bar{u},\bar{v})_* = \sum_{T_h \in D_{h/k}} \left\{ \sum_{\substack{i,j=0 \\ i>j}}^{n} \frac{u(V_i)-u(V_j)}{h} \cdot \frac{v(V_i)-v(V_j)}{h} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{n} u(V_i)\cdot v(V_i) \right\} h^n, \tag{I8.I7}$$

где $\{V_i\}_{i=0}^{n}$ – множество вершин n-симплекса T_h, а $u(\bar{x})$ и $v(\bar{x})$ – функции из $H(D_{h/k})$, соответствующие векторам $\bar{u}$ и $\bar{v}$ по (I8.5). Тогда неравенства (I8.I4) являются следствием леммы 5.I, неравенств (I8.3), (I7.2) и определения матрицы $A_h = B$ из (I0.4).

Очевидно, что любой вектор $\bar{u}_1 \in R^{n_h}$ может быть разложен по подпространствам из (I8.II) единственным образом:

$$\bar{u}_1 = \bar{u}_{10} + (\bar{u}_1 - \bar{u}_{10}), \quad \bar{u}_{10} = \tilde{Q}\,\bar{u}_1 .$$

Тогда для доказательства (I8.I5) достаточно установить неравенство

$$(\tilde{Q}\bar{u}_1, \tilde{Q}\bar{u}_1)_* \le \gamma_1 \cdot (\bar{u}_1,\bar{u}_1)_* \quad \forall\, \bar{u}_1 \in R^{n_h}, \tag{I8.I8}$$

так как

$$(\bar{u}_1-\bar{u}_{10}, \bar{u}_1-\bar{u}_{10})_* \le 2(\bar{u}_1,\bar{u}_1)_* + 2(\bar{u}_{10},\bar{u}_{10})_* \le$$

$$\le 2(1+\gamma_1)\cdot(\bar{u}_1,\bar{u}_1),$$

т.е. $\tilde{\gamma} = 2(1+\gamma_1)$.

Используя определение (I8.7) матрицы $\tilde{Q}$ и свойства представления $D_{h/k}$ в виде (I8.4), легко показать, что существует не зависящая от h постоянная γ_2 такая, что

$$(\tilde{Q}\bar{u}_1, \tilde{Q}\bar{u}_1)_* \le \gamma_2 \cdot (B_{0,h}\bar{u}_1^{(0)}, \bar{u}_1^{(0)}) \quad \forall\, \bar{u}_1 \in R^{n_h}. \tag{I8.I9}$$

Тогда для доказательства (I8.I8) достаточно установить неравенство

$$(B_{0,h}\bar{u}_1^{(0)}, \bar{u}_1^{(0)}) \le \gamma_3 \cdot (\bar{u}_1, \bar{u}_1)_* \quad \forall\, \bar{u}_1 \in R^{n_h}, \tag{I8.20}$$

так как из него следует, что $\gamma_1 = \gamma_2 \cdot \gamma_3$.

Разложим R^{n_h} в ортогональную относительно скалярного произведения $(\bar{u}, \bar{v})_*$ сумму подпространств:

$$R^{n_h} = R^{\perp}_{1,h} + R_{1,h}\,. \tag{I8.2I}$$

Очевидно, что разложение вектора $\bar{u}_1 \in R^{n_h}$ по этим подпространствам определяется формулой

$$\bar{u}_1 = \hat{Q}\,\bar{u}_1 + (\bar{u}_1 - \hat{Q}\,\bar{u}_1)\,, \tag{I8.22}$$

где

$$\hat{Q}\,\bar{u}_1 = \begin{bmatrix} E_0 & 0 \\ \tilde{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_1^{(0)} \\ \bar{u}_1^{(1)} \end{pmatrix},$$

$$(\hat{Q}\bar{u}_1, \bar{v})_* = 0 \quad \forall\, \bar{v} \in R^{n_h} : \bar{v}^{(0)} = 0.$$

Легко видеть, что

$$(\hat{Q}\bar{u}_1, \hat{Q}\bar{u}_1)_* \le (\tilde{Q}\bar{u}_1, \tilde{Q}\bar{u}_1)_* \le$$
$$\le \gamma_2 \cdot (B_{0,h}\bar{u}_1^{(0)}, \bar{u}_1^{(0)}) \quad \forall\, \bar{u}_1 \in R^{n_h}. \tag{I8.23}$$

Докажем обратное неравенство:

$$(B_{0,h}\bar{u}_1^{(0)}, \bar{u}_1^{(0)}) \le \gamma_3 \cdot (\hat{Q}\bar{u}_1, \hat{Q}\bar{u}_1)_* \quad \forall\, \bar{u}_1 \in R^{n_h} \tag{I8.24}$$

с постоянной γ_3, не зависящей от h.

Пусть Q_h – произвольный макроэлемент из (I8.4) с вершинами $\{\bar{x}^{(l)}\}$, $\hat{Q}\,\bar{u}_1 = \bar{u}_1$, $u_1(\bar{x}) \in H(D_{h/k})$ – соответствующее восполнение $\bar{u}_1$. Тогда количество t узлов $\bar{y}^{(i)}$

на ребре Q_h, соединяющем вершины $\bar{x}^{(\ell)}$ и $\bar{x}^{(\ell_-)}$, ограничено не зависящей от h постоянной $(n+1)K$. Следовательно,

$$\left| \frac{u_1(\bar{x}^{(\ell)}) - u_1(\bar{x}^{(\ell_-)})}{h} \right|^2 \leq \leq (n+1)K \cdot \sum_{i=2}^{t} \left| \frac{u(\bar{y}^{(i)}) - u(\bar{y}^{(i-1)})}{h} \right|^2. \qquad (18.24')$$

Напомним, что каждое ребро может быть общим не более, чем для 2^{n-1} макроэлементов. Тогда просуммируем (18.24′) сначала по всем ребрам макроэлемента Q_h, затем полученные неравенства просуммируем по всем макроэлементам. К итоговому неравенству прибавим неравенство

$$\sum_{\bar{x} \in Q(D_{h/k})} |u_1(\bar{x})|^2 \leq \sum_{\bar{x} \in \Sigma_{h/k}} |u_1(\bar{x})|^2$$

и результат умножим на h^n. Легко видеть, что из полученного неравенства будет следовать (18.24) с постоянной $\gamma_3 = 4(n+1)K$.

Так как для любого $\bar{u}_1 \in R^{n_h}$

$$(\hat{Q}\bar{u}_1, \hat{Q}\bar{u}_1)_* \leq (\bar{u}_1, \bar{u}_1)_*,$$

то из (18.24) следует (18.20), что завершает доказательство неравенств (18.12).

Далее, заметим, что из (18.23) и (18.24) следует справедливость неравенств

$$\gamma_2^{-1} \cdot (\bar{u}_1, \bar{u}_1)_* \leq (B_{0,h}\bar{u}_1^{(0)}, \bar{u}_1^{(0)}) \leq \gamma_3 \cdot (\bar{u}_1, \bar{u}_1)_* \qquad (18.25)$$
$$\forall\, \bar{u}_1 \in R_{0,h}.$$

Так как $(B_0\bar{u}_1, \bar{u}_1) = (B_{0,h}\bar{u}_1^{(0)}, \bar{u}_1^{(0)}) \quad \forall\, \bar{u}_1 \in R_{0,h},$

то из (I8.25) и (I8.I4) следует справедливость неравенств (I8.I3) при $i=0$ с $\alpha_0 = \gamma_2^{-1} \tilde{c}_2^{-1}$, $\beta_0 = \gamma_3 \tilde{c}_1^{-1}$.

И наконец, для любого вектора $\bar{u}_1 \in R_{1,h}$ по определению $\bar{u}_1^{(0)} = 0$, т.е. $\bar{u}_1 = \tilde{E}\bar{u}_1$. Так как

$$\left| \frac{u(V_i) - u(V_j)}{h} \right|^2 \le 2h^{-2} \left(|u(V_i)|^2 + |u(V_j)|^2 \right),$$

то из (I8.I7) следует неравенство

$$(\bar{u}, \bar{u})_* \le \beta_1 (1 + h^{-2}) h^n \cdot (\bar{u}, \bar{u}) \quad \forall \bar{u} \in R^{n_h} \qquad (I8.26)$$

с постоянной β_1, не зависящей от h, поскольку число тетраэдров T_h, имеющих общую вершину, ограничено постоянной, не зависящей от h.

Для доказательства обратного неравенства

$$\alpha_1 (1 + h^{-2}) \cdot h^n \cdot (\bar{u}_1, \bar{u}_1) \le (\bar{u}_1, \bar{u}_1)_* \quad \forall \bar{u}_1 \in R_{1,h} \qquad (I8.27)$$

снова рассмотрим произвольный макроэлемент Q_h. Тогда для любого его узла $\bar{x}$ построим ломаную, проходящую по узлам Q_h и соединяющую $\bar{x}$ с вершиной Q_h. Количество узлов $\{\bar{x}^{(i)}\}_{i=1}^{t}$ этой ломаной ограничено сверху постоянной $(n+1)K$, $\bar{x}^{(1)} = \bar{x}$, $\bar{x}^{(t)}$ - вершина Q_h. Очевидно, что

$$|u_1(\bar{x})|^2 = \left| \sum_{i=2}^{t} \left(u(\bar{x}^{(i)}) - u(\bar{x}^{(i-1)}) \right) \right|^2 \le$$

$$\le h^2 (n+1) K \sum_{i=2}^{t} \left| \frac{u(\bar{x}^{(i)}) - u(\bar{x}^{(i-1)})}{h} \right|^2,$$

так как $u_1(\bar{x}^{(t)}) = 0$. Учитывая свойства триангуляции $D_{h/k}$ и ее разбиения на макроэлементы, с помощью суммирования последнего неравенства по всем узлам Q_h, затем по всем Q_h, получим (I8.27) с постоянной α_1, не зависящей от h.

Так как

$$(B_1\bar{u}_1, \bar{u}_1) = (1+h^{-2})\,h^n \cdot (\bar{u}_1, \bar{u}_1)$$

для любого $\bar{u}_1 \in R_{1,h}$, то из неравенств (I8.26), (I8.27) и (I8.I4) следует справедливость неравенств (I8.I3) при $i = 1$ с постоянными $\alpha_2 = \beta_1^{-1}\tilde{c}_2^{-1}$, $\beta_2 = \alpha_1^{-1}\tilde{c}_1^{-1}$, не зависящими от h . Теорема доказана.

Легко показать, что матрицы B_0^+ и B_1^+ , псевдообратные к B_0 и B_1 , вычисляются по формулам

$$B_0^+ = \begin{bmatrix} E_0 & 0 \\ L & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{0,h}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_0 & L^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1^+ = (1+h^{-2})^{-1}\,h^{-n} \cdot \tilde{E} .$$

Определим

$$A_{1,h}^{-1} = B_0^+ + B_1^+ \tag{I8.28}$$

Тогда из теорем I5.2 и I8.I следует, что

$$0.5\alpha \cdot (A_h\bar{u}, \bar{u}) \le (A_{1,h}\bar{u}, \bar{u}) \le 2\gamma\beta \cdot (A_h\bar{u}, \bar{u}) \quad \forall\, \bar{u} \in R^{n_h},$$

т.е. матрицы A_h и $A_{1,h}$ эквивалентны по спектру. Следовательно, скорость сходимости метода альтернирования по подпространствам, который реализуется по формулам (I7.7), при подходящем выборе параметров $\tilde{\tau}_k$ не зависит от h .

Заметим, что для решения на каждом шаге итерационного процесса (I7.7) системы с матрицей $A_{1,h}$ можно использовать прямой метод (циклической редукции для операции $B_{0,h}^{-1}\bar{u}^{(0)}$) с общим объемом вычислений $O(h^{-n}\ln h^{-1})$, как и в случае восполнений на прямоугольных сетках.

Результаты §§ 17, 18 позволяют дополнить утверждения теорем 10.3 и 11.3.

<u>Дополнение 1</u>. Если в условиях теоремы 10.3 матрицу B из (10.4) заменить на матрицу $A_{1,h}$ из (17.5), (17.19) или (18.28), в зависимости от пространства восполнений, то объем вычислений для уменьшения начальной ошибки в ε^{-1} раз оценивается величиной $O(h^{-n}\ln h^{-1}\ln\varepsilon^{-1})$ для задач с естественными краевыми условиями и величиной $O(h^{-n-0.5}\ln h^{-1}\ln\varepsilon^{-1})$ – с главными краевыми условиями.

<u>Дополнение 2</u>. Если в условиях теоремы 11.3 матрицу B из (11.17) заменить на матрицу $A_{1,h}$ из (17.5), (17.19) или (18.28), в зависимости от пространства восполнений, а матрицу A_{33} из (11.22) определить по билинейной форме

$$a_{G_{2,h}}(u,v)=\int\limits_{\Omega_{2,h}}\left[(\nabla u(\bar{x}))\cdot\nabla v(\bar{x})+u(\bar{x})\cdot v(\bar{x})\right]d\bar{x},$$

то объем вычислений для уменьшения начальной ошибки в ε^{-1} раз оценивается величиной $O(h^{-n}|\ln h^{-1}|^2\ln\varepsilon^{-1})$.

Справедливость этих утверждений следует из того, что при построении метода фиктивных компонент мы определяем $a_D(u,v)=(A_{1,h}\bar{u},\bar{v})$, а решение систем с матрицей $A_{1,h}$ можно выполнять прямым методом за $O(h^{-n}\ln h^{-1})$ арифметических операций.

§ 19. Разделение области и метод альтернирования по подпространствам

В этом параграфе для решения системы вариационно-разностных уравнений (8.7), аппроксимирующих задачу (8.1) с естественным краевым условием, строится метод альтернирования по подпространствам, на каждом шаге которого решаются задачи в подобластях сеточной области Ω_h . Большая часть излагаемых здесь результатов была получена автором совместно с С.В.Непомнящих и опубликована в работах [96, 97] .

Итак, предположим, что задача (8.I) рассматривается в ограниченной области $\Omega \subset R^2$, которая представлена в виде

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{m} \bar{\Omega}_i , \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing , \quad i \neq j ,$$

где подобласти Ω_i имеют кусочно-гладкие границы класса C^2 . Будем считать, что Ω_h ее прямолинейная или криволинейная триангуляция:

$$\Omega_h = \bigcup_{i=1}^{m} \Omega_{i,h} , \tag{I9.I}$$

причем $\Omega_{i,h}$ - триангуляции подобластей Ω_i , аппроксимирующие их границы со вторым порядком по h , либо $\Omega_{i,h} = \Omega_i$. Такая триангуляция существует по теореме I.3 или замечанию 5.2.

Будем также предполагать, что все триангуляции $\Omega_{i,h}$ топологически эквивалентны прямоугольным триангуляциям $D_{i,h}$ прямоугольников D_i , $i = 1, \dots, m$.

Пусть $H = H_h(\Omega_h)$ - пространство лагранжевых восполнений $H(1, \Omega_h)$ из определения 5.I или 5.2, а N - его размерность. Введем

$$\begin{gathered} \gamma_h = \bigcup_{i=1}^{m} \partial \Omega_{i,h} , \\ n_i = \dim \overset{\circ}{H}(1, \Omega_{i,h}) , \quad i = \overline{1,m} , \\ n_{m+1} = N - n_1 - \dots - n_m . \end{gathered} \tag{I9.2}$$

Каждой функции $u(\bar{x}) \in H$ поставим в соответствие вектор $\bar{u} \in R^N$ ее значений в узлах триангуляции Ω_h. Причем, если $\bar{u}_i \in R^{n_i}$ - вектор значений функции $u(\bar{x})$ во внутренних узлах триангуляции $\Omega_{i,h}$, $i = 1,\dots,m$, а $\bar{u}_{m+1} \in R^{n_{m+1}}$ - вектор ее значений в узлах γ_h, то

$$\bar{u} = (\bar{u}_1^T, \dots, \bar{u}_m^T, \bar{u}_{m+1}^T)^T. \tag{I9.3}$$

Будем считать, что в H задан обычный базис $\{\varphi_i(\bar{x})\}_{i=1}^N$, т.е. каждой функции $\varphi_i(\bar{x})$ соответствует вектор $\bar{\varphi}_i$ из R^N с компонентами $\varphi_{ij} = \delta_{ij}$, где δ_{ij} - символ Кронекера. Таким образом, коэффициенты разложения $u(\bar{x}) \in H$ по этому базису образуют вектор $\bar{u}$ из (I9.3). Тогда матрица A_h системы (8.7) может быть представлена в виде

$$A_h = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 & A_{1\,m+1} \\ 0 & A_{22} & \dots & 0 & A_{2\,m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{m\,m} & A_{m\,m+1} \\ A^T_{1\,m+1} & A^T_{2\,m+1} & \dots & A^T_{m\,m+1} & A_{m+1\,m+1} \end{bmatrix} \tag{I9.4}$$

где A_{ii} - квадратные матрицы порядка n_i, $i = 1,\dots,m+1$.

Основное предположение. Пусть r_i - оператор сужения функций $u \in H$ на $\bar{\Omega}_{i,h}$, $i = \overline{1,m}$. Будем считать, что билинейная форма $a_{\Omega_h}(u,v)$ из (8.5) представлена в виде суммы симметричных билинейных форм:

$$a_{\Omega_h}(u,v) = \sum_{i=1}^{m} a_{\Omega_{i,h}}(r_i u, r_i v) \quad \forall\, u,v \in H,$$

$$\alpha_i \|u\|^2_{1,\Omega_{i,h}} \leq a_{\Omega_{i,h}}(u,u) \leq c \cdot \alpha_i \|u\|^2_{1,\Omega_{i,h}} \tag{I9.5}$$

$$\forall\, u \in r_i H; \quad i = \overline{1,m}.$$

Определим в H билинейные формы $b_i(u,v)$, $i=\overline{1,m}$, вида (I7.3). Для этого установим взаимно однозначное соответствие между узлами $\Omega_{i,h}$ и $D_{i,h}$, отвечающее непрерывному преобразованию $\Omega_{i,h}$ в $D_{i,h}$. Каждый узел $\bar{x}\in\Omega_{i,h}$ будем отождествлять с парой целых индексов (k,ℓ), а значение функции $u\in H$ в этом узле будем обозначать через $u_{k,\ell}$. Тогда

$$b_i(u,v)=\sum_{\bar{x}\in\Sigma(\bar{\Omega}_{i,h})} u(\bar{x})\cdot v(\bar{x})\cdot h^2+$$

$$+\sum_{\bar{x}\in\Sigma^1(\bar{\Omega}_{i,h})}(u_{k+1,\ell}-u_{k,\ell})\cdot(v_{k+1,\ell}-v_{k,\ell})+$$

$$+\sum_{\bar{x}\in\Sigma^2(\bar{\Omega}_{i,h})}(u_{k,\ell+1}-u_{k,\ell})\cdot(v_{k,\ell+1}-v_{k,\ell}),$$

где $\Sigma^1(\bar{\Omega}_{i,h})$ и $\Sigma^2(\bar{\Omega}_{i,h})$ такие максимальные подмножества множества $\Sigma(\bar{\Omega}_{i,h})$ всех узлов триангуляции $\bar{\Omega}_{i,h}$, что узел $(k+1,\ell)$ из $\bar{\Omega}_{i,h}$ и $(k,\ell+1)$ из $\bar{\Omega}_{i,h}$.

Введем билинейную форму

$$b(u,v)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\cdot b_i(u,v)\quad\forall\, u,v\in H \tag{I9.6}$$

с некоторыми положительными не зависящими от h постоянными α_i из (I9.5).

Билинейной форме из (I9.6) соответствует симметричная, положительно определенная матрица B_h:

$$B_h=(b_{ij})_{i,j=1}^{N},\quad b_{ij}=b(\varphi_j,\varphi_i),$$

$$B_h = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & \ldots & 0 & B_{1\,m+1} \\ 0 & B_{22} & \ldots & 0 & B_{2\,m+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & B_{mm} & B_{m\,m+1} \\ B^T_{1\,m+1} & B^T_{2\,m+1} & \ldots & B^T_{m\,m+1} & B_{m+1\,m+1} \end{bmatrix} \qquad (19.7)$$

где матрицы B_{ii} – квадратные порядка n_i, $i=\overline{1,m+1}$.

Из (19.5) и (17.4) следует, что

$$c_1 \cdot \alpha_i \cdot b_i(u,u) \le a_{\Omega_{i,h}}(u^i,u^i) \le c_2 \cdot \alpha_i \cdot b_i(u,u) \qquad (19.8)$$
$$u^i = r_i u, \quad i=1,\ldots,m,$$

для любого $u \in H$ с положительными не зависящими от h и α_i, $i=\overline{1,m}$, постоянными c_1 и c_2.

Просуммировав (19.8) по i от 1 до m, получим

$$c_1 \cdot b(u,u) \le a_{\Omega_h}(u,u) \le c_2 \cdot b(u,u) \;\; \forall u \in H\text{–}$$

или

$$c_1 \cdot (B_h \bar{u}, \bar{u}) \le (A_h \bar{u}, \bar{u}) \le c_2 \cdot (B_h \bar{u}, \bar{u}) \qquad (19.9)$$
$$\forall\, \bar{u} \in R^N,$$

т.е. скорость сходимости процесса

$$B_h(\bar{u}^{k+1} - \bar{u}^k) = -\tau_k (A_h \bar{u}^k - \bar{f}_h) \qquad (19.10)$$
$$\bar{u}^0 \in R^N, \; k=0,1,2,\ldots,$$

при подходящем выборе параметров τ_k не зависит от h и α_i, $i=\overline{1,m}$ из (19.5).

<u>Замечание 19.1</u>. B_{ii}, $i=\overline{1,m}$, из (19.7) имеют простой вид, они совпадают с точностью до множителя с матрицей стандартной

5-точечной разностной схемы, т.е. для решения систем с этими матрицами применим прямой метод с оценкой объема вычислений $O(h^{-2}\ln h^{-1})$. Заметим также, что для вычисления правой части в (I9.I0) достаточно произвести $O(h^{-2})$ арифметических операций.

Определим матрицу

$$\Lambda = B_{m+1\,m+1} - \sum_{i=1}^{m} B^{T}_{i\,m+1} B^{-1}_{ii} B_{i\,m+1}. \tag{I9.II}$$

Из симметричности и положительной определенности матрицы B_h следует, что матрица Λ обладает такими же свойствами.

Пусть задана симметричная, положительно определенная матрица $\hat{\Lambda}$ порядка n_{m+1} такая, что

$$\alpha\cdot(\tilde{\Lambda}\bar{u},\bar{u}) \le (\Lambda\bar{u},\bar{u}) \le \beta\cdot(\hat{\Lambda}\bar{u},\bar{u}) \quad \forall\,\bar{u}\in R^{n_{m+1}}. \tag{I9.I2}$$

Перепишем B_h в виде

$$B_h = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}, \qquad D_{22} = B_{m+1\,m+1},$$

и зададим матрицу

$$\tilde{B}_h = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & \tilde{\Lambda} + D_{21}D_{11}^{-1}D_{12} \end{bmatrix}. \tag{I9.I3}$$

Тогда из (I9.I2) следует, что

$$\begin{gathered} \tilde{\alpha}\cdot(\tilde{B}_h\bar{u},\bar{u}) \le (B_h\bar{u},\bar{u}) \le \hat{\beta}\cdot(\tilde{B}_h\bar{u},\bar{u}), \\ \tilde{\alpha} = \min\{1,\alpha\}, \qquad \hat{\beta} = \max\{1,\beta\}, \end{gathered} \tag{I9.I4}$$

для любого вектора $\bar{u}\in R^{N}$. Построение такой матрицы было предложено, например в [I44].

Действительно, рассмотрим задачу

$$\tilde{B}_h \bar{u} = \lambda B_h \bar{u},$$

если $\lambda \neq 1$, то оно удовлетворяет уравнению

$$\tilde{\Lambda} \bar{v} = \lambda \Lambda \bar{v}.$$

Следовательно, собственные значения $B_h^{-1} \tilde{B}_h$ удовлетворяют неравенствам:

$$\min\{1, \alpha\} \leq \lambda^{-1} \leq \max\{1, \beta\},$$

откуда следует (19.14).

Тогда вместо итерационного процесса (19.10) рассмотрим процесс

$$\tilde{B}_h (\bar{u}^{k+1} - \bar{u}^k) = -\tilde{\tau}_k (A_h \bar{u}^k - \bar{f}_h), \qquad \bar{u}^0 \in R^N, \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{19.15}$$

Из (19.9) и (19.14) следует, что

$$c_1 \cdot \tilde{\alpha} \cdot (\tilde{B}_h \bar{u}, \bar{u}) \leq (A_h \bar{u}, \bar{u}) \leq c_2 \cdot \tilde{\beta} \cdot (\tilde{B}_h \bar{u}, \bar{u}) \qquad \forall \bar{u} \in R^N. \tag{19.16}$$

Выберем в (19.15)

$$\tilde{\tau}_k = \frac{2}{c_1 \tilde{\alpha} + c_2 \tilde{\beta}}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{19.17}$$

тогда

$$(A_h \bar{\psi}^k, \bar{\psi}^k) \leq q^{2k} \cdot (A_h \bar{\psi}^0, \bar{\psi}^0),$$

где $\bar{\psi}^k = \bar{u}^k - \bar{u}_h$, $\bar{u}_h$ – решение системы (8.7), и

$$q = (c_2 \tilde{\beta} - c_1 \tilde{\alpha}) / (c_2 \tilde{\beta} + c_1 \tilde{\alpha}) < 1.$$

Замечание I9.2. На каждом шаге процесса (I9.I5) необходимо решать системы вида

$$\tilde{B}_h \bar{v} = \bar{\xi} .$$

Из (I9.I3) следует, что эта система может быть преобразована к следующему виду:

$$B_{ii} \bar{v}_i = \bar{\xi}_i - B_{i\,m+1} \bar{v}_{m+1} , \quad i = \overline{1,m} ,$$

$$\tilde{\Lambda} \; \bar{v}_{m+1} = \bar{\xi}_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} B^{T}_{i\,m+1} B^{-1}_{ii} \bar{\xi}_i .$$

Значим, для вычисления вектора $\bar{v}$ достаточно дважды решить системы с матрицами B_{ii}, $i=\overline{1,m}$ ($O(h^{-2} \ln h^{-1})$ арифметических операций), вычислить правые части системы ($O(h)$ операций) и выполнить умножение на матрицу $\tilde{\Lambda}^{-1}$ за $V(\tilde{\Lambda})$ действий. Таким образом, для уменьшения энергетической нормы начальной ошибки итерационного процесса (I9.I5) в ε^{-1} раз достаточно выполнить $\ln \varepsilon / \ln q$ итераций или $(O(h^{-2} \ln h^{-1}) + V(\tilde{\Lambda})) \ln \varepsilon^{-1} \cdot [\ln q^{-1}]^{-1}$ арифметических операций.

Перейдем к построению матрицы $\tilde{\Lambda}$ и оценке постоянных α, β из (I9.I2), причем нашей целью будет построение такой матрицы $\tilde{\Lambda}$, чтобы для умножения вектора на $\tilde{\Lambda}^{-1}$ требовалось не более $O(h^{-2} \ln h^{-1})$ арифметических действий, а α и β не зависили от α_i из (I9.5) и слабо зависили от h.

Сначала построим специальную триангуляцию ω_h в окрестности γ_h из (I9.2). Не уменьшая общности, можно считать, что все узлы γ_h лежат на объединении границ областей Ω_i, $i=1,m$. Пусть $\delta_0 > 0$ таково, что в приграничной полосе $\omega^{(i)}_{\delta_0}$ из (I.7) подобласти Ω_i, $i=\overline{1,m}$, задана приграничная система координат

$$\bar{x} = \bar{y} + n \cdot \bar{N}^{(i)}(\bar{y}), \quad \bar{y} \in \partial\Omega_i, \quad n \in (0, \delta_0),$$

в соответствии с леммой I.I, где $\bar{N}^{(i)}(\bar{y})$ - единичный вектор внутренней псевдонормали. Тогда для некоторого фиксированного $\delta \in (0, \delta_0)$ определим множество узлов

$$\Sigma(\omega_{i,h}) = \{ \bar{x} = \bar{y} + jh\bar{N}(\bar{y}) : \; j = 0, 1, \dots, r; \; \forall \bar{y} \in \Sigma(\partial\Omega_{i,h}) \},$$

где $\delta \le rh \le \delta_0$, а ломаная, соединяющая последовательность узлов при $j = r$ лежала в $\omega^{(i)}_{\delta_0}$.

На построенных узлах строим триангуляцию $\omega_{i,h}$ в соответствии с рис. I9.I.

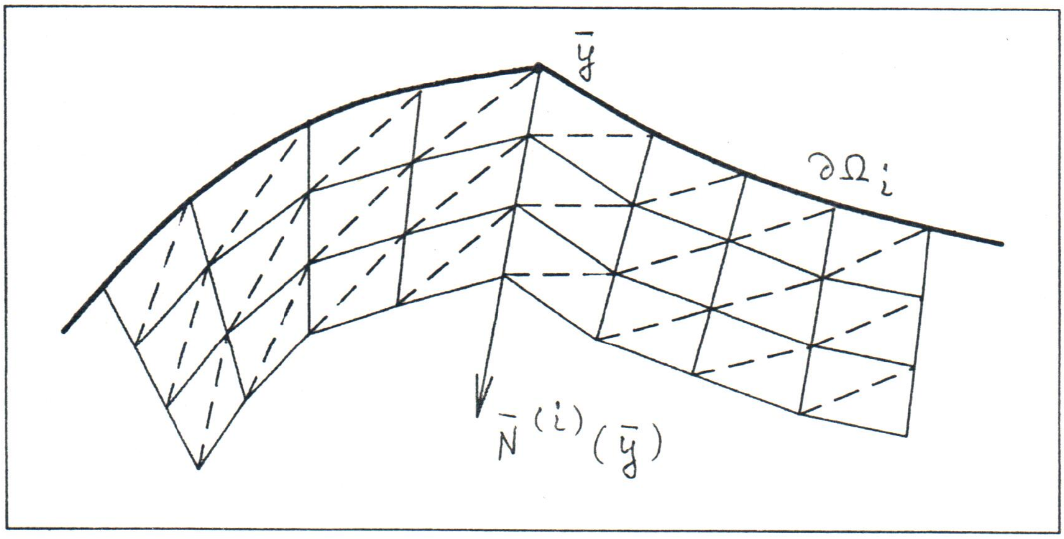

Рис. I9.I. Построение триангуляции $\omega_{i,h}$ в $\omega^{(i)}_{\delta_0}$

Тогда

$$\omega_h = \bigcup_{i=1}^{m} \omega_{i,h}. \tag{I9.I8}$$

Рассмотрим пространство лагранжевых восполнений

$$H_\delta = \{ u \in H(1,\omega_h) : u(\bar{x}) = 0 \quad \forall \bar{x} \in \partial\omega_h \setminus \partial\Omega_h \} \tag{19.19}$$

со скалярным произведением

$$d(u,v) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot d_i(u,v), \tag{19.20}$$

где билинейные формы $d_i(u,v)$ определяются аналогично определению билинейных форм $b_i(u,v)$ из (19.6), т.е., если $\{\bar{y}_k\}_{k=1}^{t_i}$ – упорядоченная последовательность узлов $\partial\Omega_{i,h}$, то

$$\Sigma(\omega_{i,h}) = \{ \bar{x}_{k,j} = \bar{y}_k + jh\bar{N}^{(i)}(\bar{y}_k), \quad j = 0,\dots,r; \; k = 1,\dots,t_i \}.$$

Тогда, полагая $\bar{x}_{0,j} = \bar{x}_{t_i,j}$, определим

$$d_i(u,v) = \sum_{k=1}^{t_i} \sum_{j=0}^{r} u(\bar{x}_{k,j}) \cdot v(\bar{x}_{k,j}) h^2 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{t_i} \sum_{j=0}^{r} \big(u(\bar{x}_{k,j}) - u(\bar{x}_{k-1,j})\big) \cdot \big(v(\bar{x}_{k,j}) - v(\bar{x}_{k-1,j})\big) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{t_i} \sum_{j=1}^{r} \big(u(\bar{x}_{k,j}) - u(\bar{x}_{k,j-1})\big) \cdot \big(v(\bar{x}_{k,j}) - v(\bar{x}_{k,j-1})\big).$$

Определим подпространства и скалярные произведения в $R^{n_{m+1}}$:

$$\begin{aligned} H^0 &= \{ u \in H : u(\bar{x}) = 0 \quad \forall \bar{x} \in \gamma_h \}, \\ H^1 &= \{ u \in H : b(u,v) = 0 \quad \forall v \in H^0 \}, \\ H^0_\delta &= \{ u \in H_\delta : u(\bar{x}) = 0 \quad \forall \bar{x} \in \gamma_h \}, \\ H^1_\delta &= \{ u \in H_\delta : d(u,v) = 0 \quad \forall v \in H^0_\delta \}; \end{aligned} \tag{19.21}$$

$$b_\gamma(\bar g,\bar f)=b(p\bar g,p\bar f),\quad d_\gamma(\bar g,\bar f)=d(p_\delta\bar g,p_\delta\bar f),\qquad \forall\,\bar g,\bar f\in R^{n_{m+1}}. \tag{19.22}$$

Здесь линейные операторы p и p_δ определяют по вектору $\bar g\in R^{n_{m+1}}$ функции $p\bar g\in H^1$ и $p_\delta\bar g\in H^1_\delta$, значения которых на γ_h совпадают и образуют вектор $\bar g$.

Л е м м а 19.1. Существуют положительные не зависящие от h и α_i, $i=\overline{1,m}$, из (19.5) постоянные c_1 и c_2 такие, что

$$c_1\cdot d_\gamma(\bar g,\bar g)\le b_\gamma(\bar g,\bar g)\le c_2\cdot d_\gamma(\bar g,\bar g)\quad\forall\,\bar g\in R^{n_{m+1}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $r_{i,\delta}$ оператор сужения на $\omega_{i,h}$ функций из H_δ. Тогда существует не зависящая от h постоянная c такая, что

$$\begin{aligned}
&\forall\, u\in r_i H\quad \exists\, v\in r_{i,\delta}H_\delta:\\
&\qquad v(\bar x)=u(\bar x)\quad\forall\,\bar x\in\partial\Omega_{i,h},\\
&\qquad d_i(v,v)\le c\cdot b_i(u,u);\\
&\forall\, v\in r_{i,\delta}H_\delta\quad \exists\, u\in r_i H:\\
&\qquad u(\bar x)=v(\bar x)\quad\forall\,\bar x\in\partial\Omega_{i,h},\\
&\qquad b_i(u,u)\le c\cdot d_i(v,v);\\
&\qquad i=1,\dots,m.
\end{aligned}\tag{19.23}$$

Доказательство этого утверждения практически совпадает с доказательством теоремы 5.2, и мы его опустим.

Пусть $\bar g\in R^{n_{m+1}}$, $u=p\bar g$, $\eta=p_\delta\bar g$, $v\in r_{i,\delta}H_\delta$ – любое решение задачи (19.23). Тогда

$$\alpha_i\cdot d_i(\eta,\eta)\le\alpha_i\cdot d_i(v,v)\le\alpha_i\cdot c\cdot b_i(u,u).$$

Так как $v = r_{i,\delta} u$ – решение задачи (19.23), то

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot d_i(\eta,\eta) \leq c \sum_{i=1}^{m} \alpha_i b_i(u,u)$$

т.е. $C_1 = C^{-1}$. Аналогично устанавливается, что $C_2 = C$. Лемма доказана.

Замечание 19.3. Из определения (19.11) матрицы Λ следует, что

$$(\Lambda \bar{g}, \bar{f}) = b_\gamma(\bar{g}, \bar{f}) \quad \forall\, \bar{g}, \bar{f} \in R^{n_{m+1}}.$$

Значит, если определить матрицу Λ_γ:

$$(\Lambda_\gamma \bar{g}, \bar{f}) = d_\gamma(\bar{g}, \bar{f}) \quad \forall\, \bar{g}, \bar{f} \in R^{n_{m+1}}, \quad (19.24)$$

то матрицы Λ и Λ_γ эквивалентны по спектру с постоянными C_1 и C_2 из леммы 19.1.

Назовем узел $\bar{y} \in \gamma_h$ точкой ветвления γ_h, если он принадлежит, по крайней мере, трем областям из совокупности

$$\bar{\Omega}_{1,h},\ \bar{\Omega}_{2,h},\ \ldots,\ \bar{\Omega}_{m,h},\ R^2 \setminus \Omega_h.$$

Множество всех точек ветвления γ_h обозначим через V. Замкнутой ветвью γ_h будем называть ее часть, гомеоморфную окружности и не содержащую точек ветвления. Незамкнутой ветвью γ_h будем называть ее часть, гомеоморфную отрезку и содержащую ровно две точки ветвления, являющиеся концами этой части. Тогда нетрудно показать, что γ_h единственным образом представима в виде объединения своих ветвей:

$$\gamma_h = \bigcup_{i=1}^{t} \gamma_h^{(i)}, \quad (19.25)$$

где t зависит только от m из (19.1).

Разложим $R^{n_{m+1}}$ в сумму подпространств:

$$R^{n_{m+1}} = \sum_{i=1}^{t} R_i + \sum_{\bar{y}\in V} R_{\bar{y}} , \tag{19.26}$$

где R_i состоит из векторов $\bar{g}$ таких, что функция $u = p_\delta \bar{g}$ равна нулю на $\gamma_h \setminus \gamma_h^{(i)}$, $i=\overline{1,m}$, а $R_{\bar{y}}$ состоит из векторов $\bar{g}$ таких, что $u = p_\delta \bar{g}$ равна нулю во всех узлах γ_h , кроме $\bar{y}$. Очевидно, что это разложение ортогонально относительно канонического скалярного произведения.

Определим подмножества ω_ℓ , $\ell = \ell_1(i), \ell_2(i)$; $i=\overline{1,t}$, триангуляции ω_h , если $\gamma_h^{(i)}$ из (19.25) разделяет две триангуляции $\Omega_{\ell_1(i),h}$ и $\Omega_{\ell_2(i),h}$; $\ell_1(i) = \ell_2(i)$, если $\gamma_h^{(i)} \subset \partial\Omega_h$. Тогда положим

$$\omega_{\ell_1} = \omega_{\ell_1,h} , \quad \omega_{\ell_2} = \omega_{\ell_2,h} ,$$

если $\gamma_h^{(i)}$ - замкнутая ветвь. Если $\gamma_h^{(i)}$ - незамкнутая ветвь, $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$ - ее концы, то через ω_ℓ обозначим ту максимальную часть $\omega_{\ell,h}$, которая ограничена псевдонормалями $\bar{N}^{(\ell)}(\bar{y}_1)$, $\bar{N}^{(\ell)}(\bar{y}_2)$ и ветвью $\gamma_h^{(i)}$. Тогда введем подмножества

$$\begin{gathered} \omega(i) = \omega_{\ell_1(i)} \cup \omega_{\ell_2(i)} , \quad i = \overline{1,t} , \\ \omega(\bar{y}) = \bigcup_{i\in I(\bar{y})} \omega(i) \quad \forall \bar{y} \in V , \end{gathered} \tag{19.27}$$

где $I(\bar{y})$ - множество всех номеров i областей $\bar{\Omega}_{i,h}$, содержащих $\bar{y}$.

Определим в H_δ следующие подпространства:

$$\begin{gathered} H_\delta(i) = \{u \in H_\delta : \ u(\bar{x}) = 0 \quad \forall \bar{x} \in \omega_h \setminus \omega(i)\}, \\ i = 1, \dots, t ; \end{gathered} \tag{19.28}$$

$$H_\delta(\bar{y}) = \{ u \in H_\delta : \ u(\bar{x}) = 0 \quad \forall \bar{x} \in \omega_h \setminus \omega(\bar{y}), \quad \forall \bar{x} \in \Sigma(\gamma_h) \setminus \bar{y} \} \quad \forall \bar{y} \in V. \tag{19.28}$$

Легко показать, что H_δ представимо в виде суммы

$$H_\delta = \sum_{i=1}^{t} H_\delta(i) + \sum_{\bar{y} \in V} H_\delta(\bar{y}) + \overset{\circ}{H}_\delta . \tag{19.29}$$

Из работы [13, лемма 2] следует, что существует функция $\xi_i(\bar{x}) \in \overset{\circ}{H}(1, \omega(i))$, значения которой во всех внутренних узлах $\gamma_h^{(i)}$ равны 1 и

$$\| \xi_i \|^2_{1,\omega(i)} \leq c \cdot \ln h^{-1} ,$$

если $\gamma_h^{(i)}$ – незамкнутая ветвь из (19.25), $1 \leq i \leq t$. Если $\gamma_h^{(i)}$ – замкнутая ветвь, что определим

$$\xi_i(\bar{x}) = 1 \quad \forall \bar{x} \in \omega(i)$$

Доопределим функции $\xi_i(\bar{x})$ нулем вне $\omega(i)$, $i = \overline{1, t}$. Тогда легко показать, что

$$\xi_i(\bar{x}) \in H_\delta(i),$$

$$d_\ell(\xi_i, \xi_i) \leq \begin{cases} \tilde{c} \cdot \ln h^{-1}, & \ell = \ell_1(i), \ell_2(i), \\ 0, & \ell \neq \ell_1(i), \ \ell \neq \ell_2(i), \end{cases} \tag{19.30}$$

$$\ell = 1, \dots, m; \quad i = 1, \dots, t,$$

и $\tilde{c}$ не зависит от h и α_ℓ из (19.5).

Аналогично показывается существование функций $\xi_{\bar{y}}(\bar{x}) \in H_\delta(\bar{y})$ таких, что

$$\xi_{\bar{y}}(\bar{y}) = 1,$$
$$d_\ell(\xi_{\bar{y}}, \xi_{\bar{y}}) \le \tilde{c}_1 \cdot \ln h^{-1} \quad \forall \bar{y} \in V, \tag{19.31}$$
$$\ell = 1, \dots, m.$$

И наконец, определим функцию

$$\zeta(\bar{x}) = 1 - \sum_{i=1}^{t} \xi_i(\bar{x}) - \sum_{\bar{y} \in V} \xi_{\bar{y}}(\bar{x}).$$

Очевидно, что

$$\zeta(\bar{x}) \in H(1, \omega_h),$$
$$\zeta(\bar{x}) = 0 \quad \forall \bar{x} \in \gamma_h,$$
$$d_\ell(\zeta, \zeta) \le \tilde{c}_2 \cdot \ln h^{-1}, \tag{19.32}$$
$$\ell = 1, \dots, m.$$

Произведение двух сеточных функций определим как восполнение дискретной функции, значения которой равны обычному произведению этих функций в узлах триангуляции ω_h . Тогда любая функция $u(\bar{x}) \in H_\delta$ представима в виде суммы функций из подпространств (19.29):

$$u(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{t} [\xi_i(\bar{x}) \cdot u(\bar{x})] + \sum_{\bar{y} \in V} [\xi_{\bar{y}}(\bar{x}) \cdot u(\bar{x})] + [\zeta(\bar{x}) \cdot u(\bar{x})]. \tag{19.33}$$

А из (19.30) - (19.32) и неравенства (2.2.8) из [108] следует, что

$$\alpha_\ell \cdot d_\ell([\xi_i u],[\xi_i u]) \le \alpha_\ell \cdot \hat{c}_1 |\ln h|^2 \cdot d_\ell(u,u),$$
$$\alpha_\ell \cdot d_\ell([\xi_{\bar y} u],[\xi_{\bar y} u]) \le \alpha_\ell \cdot \hat{c}_1 |\ln h|^2 \cdot d_\ell(u,u),$$
$$\alpha_\ell \cdot d_\ell([\zeta u],[\zeta u]) \le \alpha_\ell \cdot \hat{c}_1 |\ln h|^2 \cdot d_\ell(u,u)$$
$$\ell = 1,\dots,m;$$
$$i = 1,\dots,t; \quad \forall \bar y \in V.$$

Суммируя эти неравенства по всем ℓ , получим

$$\begin{gathered} d([\xi_i u],[\xi_i u]) \le \hat{c}_1 |\ln h|^2 \cdot d(u,u), \quad i=\overline{1,t}, \\ d([\xi_{\bar y} u],[\xi_{\bar y} u]) \le \hat{c}_1 |\ln h|^2 \cdot d(u,u) \quad \forall \bar y \in V, \\ d([\zeta u],[\zeta u]) \le \hat{c}_1 |\ln h|^2 \cdot d(u,u) \end{gathered} \tag{19.34}$$

с постоянной $\hat{c}_1$, не зависящей от h и α_ℓ , $\ell=\overline{1,m}$, из (19.5).

Пусть $N_\delta = \dim H_\delta$. Каждой функции $u(\bar x) \in H_\delta$ поставим в соответствие вектор $\bar u \in R^{N_\delta}$ ее значений в узлах $(\omega_h \setminus \partial\omega_h) \cup \partial\Omega_h$. Будем считать, что

$$\bar u = (\bar u_\delta^T, \bar u_{m+1}^T)^T,$$

где $\bar u_{m+1} \in R^{n_{m+1}}$ – вектор значений функции $u(\bar x)$ в узлах γ_h (занумерованных при описании матрицы A_h в начале параграфа).

Определим симметричные матрицы $\tilde D, \tilde D_i, \tilde D_{\bar y}$ и $\tilde D_0$ порядка N_δ такие, что

$$\begin{gathered} (\tilde D \bar u, \bar v) = d(u,v) \quad \forall u,v \in H_\delta, \\ (\tilde D_i \bar u, \bar v) = d(u,v) \quad \forall u,v \in H_\delta(i), \\ i=1,\dots,t; \end{gathered} \tag{19.35}$$

$$(\tilde{D}_{\bar{y}}\,\bar{u},\bar{v}) = d(u,v) \quad \forall\, u,v \in H_\delta(\bar{y}),$$
$$\forall\, \bar{y} \in V; \tag{19.35}$$
$$(\tilde{D}_0\,\bar{u},\bar{v}) = d(u,v) \quad \forall\, u,v \in H^0_\delta .$$

Очевидно, что матрица D определяется единственным образом, а остальные нет. Наложим на эти матрицы дополнительные условия :

$$\tilde{D}_i\,\bar{u} = 0 \qquad \forall\, u \in H^{\perp}_\delta(i)\ ; \quad i = \overline{1,t}\ ;$$
$$\tilde{D}_{\bar{y}}\,\bar{u} = 0 \qquad \forall\, u \in H^{\perp}_\delta(\bar{y})\ ; \ \forall\, \bar{y} \in V\ ; \tag{19.36}$$
$$\tilde{D}_0\,\bar{u} = 0 \qquad \forall\, u \in (H^0_\delta)^{\perp},$$

где знак $\perp$ означает ортогональное дополнение подпространства относительно скалярного произведения $d(u,v)$. Тогда легко видеть, что условия (I9.35), (I9.36) определяют все матрицы единственным образом.

Пусть

$$\tilde{D}^{-1} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{R} = \sum_{i=1}^{t} \tilde{D}_i^{+} + \sum_{\bar{y}\in V} \tilde{D}_{\bar{y}}^{+} + \tilde{D}_0^{+} = \begin{bmatrix} \tilde{R}_{11} & \tilde{R}_{12} \\ \tilde{R}_{21} & \tilde{\Lambda}^{-1} \end{bmatrix}. \tag{19.37}$$

Тогда из теоремы I5.2, примененной к разложению (I9.29) с условием (I9.33), (I9.34), и скалярным произведением $d(u,v)$ в подпространствах из (I9.29) (т.е. $\alpha=\beta=1$ в (I5.6)), следует

$$|\hat{c}_1 M \ln^2 h|^{-1}\cdot(\tilde{R}\bar{u},\bar{u}) \le (\tilde{D}^{-1}\bar{u},\bar{u}) \le$$
$$\le M\cdot(\tilde{R}\bar{u},\bar{u}) \qquad \forall\, \bar{u} \in R^{N_\delta}, \tag{19.38}$$

где $\hat{c}_1$ из (I9.34), M – общее количество подпространств разложения (I9.29). Заметим, что эти постоянные положительны и не зависят от h и α_i, $i=\overline{1,m}$, из (I9.5). Из (I9.37) и (I9.38) следует, что $\tilde{\Lambda}$ – неособенная матрица и

$$M^{-1}\cdot(\tilde{\Lambda}\bar{u},\bar{u}) \le (L_{22}^{-1}\bar{u},\bar{u}) \le \le \hat{c}_1 M \ln^2 h\cdot(\tilde{\Lambda}\bar{u},\bar{u}) \quad \forall\, \bar{u}\in R^{n_{m+1}}. \qquad (I9.39)$$

Далее, легко показать, что

$$b_\gamma(\bar{g},\bar{f}) = (\Lambda\bar{g},\bar{f}),$$

$$d_\gamma(\bar{g},\bar{f}) = (L_{22}^{-1}\bar{g},\bar{f}) \quad \forall\, \bar{g},\bar{f}\in R^{n_{m+1}},$$

где билинейные формы b_γ и d_γ из (I9.22), матрица Λ из (I9.II), L_{22} из (I9.37).

Т е о р е м а I9.I. Для матриц Λ из (I9.II) и $\tilde{\Lambda}$ из (I9.37) неравенства (I9.2) справедливы для любых $\bar{u}\in R^{n_{m+1}}$ с $\alpha = c_1 M^{-1}$, $\beta = c_2\hat{c}_1 M\ln^2 h$, где положительные постоянные c_1, c_2 из леммы I9.I, $\hat{c}_1$ из (I9.34), M – общее количество подпространств из (I9.29) – не зависят от h и α_i, $i=\overline{1,m}$, из (I9.5).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяя последовательно лемму I9.I и неравенство (I9.39), получим

$$(\Lambda\bar{u},\bar{u}) \le c_2\cdot(L_{22}^{-1}\bar{u},\bar{u}) \le c_2\cdot\hat{c}_1 M\ln^2 h\cdot(\tilde{\Lambda}\bar{u},\bar{u}),$$

$$(\Lambda\bar{u},\bar{u}) \ge c_1(L_{22}^{-1}\bar{u},\bar{u}) \ge c_1 M^{-1}\cdot(\tilde{\Lambda}\bar{u},\bar{u}),$$

для любого $\bar{u}\in R^{n_{m+1}}$. Что и требовалось доказать.

Теперь перейдем к выводу формул реализации операции умножения вектора $\bar{f}\in R^{n_{m+1}}$ на матрицу $\tilde{\Lambda}^{-1}$ из (I9.37):

$$\bar{g} = \tilde{\Lambda}^{-1}\bar{f},$$

$$\begin{pmatrix} R_{12}\bar{f} \\ \bar{g} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{t} \tilde{D}_i^+ \bar{u} + \sum_{\bar{y}\in V} \tilde{D}_{\bar{y}}^+ \bar{u} + \tilde{D}_0^+ \bar{u}, \tag{I9.40}$$

где $\bar{u} = (0, f^T)^T$.

Сначала рассмотрим $D_0^+ \bar{u}$. Из определения H_δ^0 (см. (I9.2I)) следует, что любой функции $u(\bar{x}) \in H_\delta^0$ соответствует вектор $\bar{u} = (\bar{u}_\delta^T, 0)^T$. Тогда из (I9.35), (I9.36) следует, что

$$\tilde{D}_0 = \begin{bmatrix} \tilde{D}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{D} = \begin{bmatrix} \tilde{D}_{11} & \tilde{D}_{12} \\ \tilde{D}_{21} & \tilde{D}_{22} \end{bmatrix}.$$

Следовательно, слагаемое $\tilde{D}_0^+ \bar{u} = 0$.

Далее, рассмотрим $\tilde{D}_i^+ \bar{u}$, предполагая, что $\gamma_h^{(i)}$ – замкнутая ветвь γ_h, разделяющая области $\Omega_{\ell_1,h}$ и $\Omega_{\ell_2,h}$, $\ell_1 = \ell_1(i)$, $\ell_2 = \ell_2(i)$ (см. рис. I9.2).

Перенумеруем узлы ω_h. Сначала перечислим узлы, не лежащие внутри $\omega(i)$, затем внутренние узлы ω_{ℓ_1}, внутренние узлы ω_{ℓ_2} и, наконец, узлы $\gamma_h^{(i)}$. В соответствии с этой нумерацией построим матрицу перестановок P_i. Тогда матрицы $\tilde{D}$ и $\tilde{D}_i$ будут иметь следующий блочный вид:

$$P_i \tilde{D} P_i^T = \begin{bmatrix} D_{11}^i & D_{12}^i & D_{13}^i & D_{14}^i \\ D_{21}^i & D_{22}^i & D_{23}^i & D_{24}^i \\ D_{31}^i & D_{32}^i & D_{33}^i & D_{34}^i \\ D_{41}^i & D_{42}^i & D_{43}^i & D_{44}^i \end{bmatrix},$$

$$P_i \tilde{D}_i P_i^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{22}^i & D_{23}^i & D_{24}^i \\ 0 & D_{32}^i & D_{33}^i & D_{34}^i \\ 0 & D_{42}^i & D_{43}^i & D_{44}^i \end{bmatrix}, \qquad \text{(I9.4I)}$$

причем $D_{23}^i = (D_{32}^i)^T = 0$.

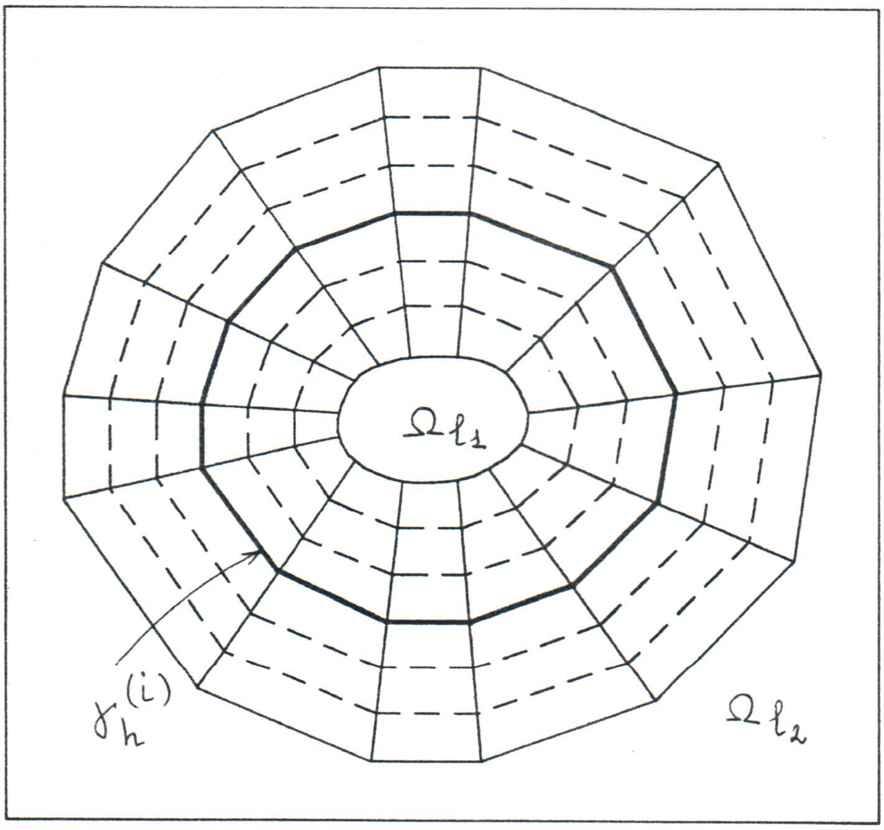

Рис. I9.2. Пример $\omega(i)$ для замкнутой ветви $\gamma_h^{(i)}$.

Выпишем явный вид блоков из (I9.4I). Для этого будем считать, что на $\gamma_h^{(i)}$ t_i узлов и они последовательно занумерованы. Аналогично пронумеруем все узлы на сеточных линиях, гомеоморфных $\gamma_h^{(i)}$, которые будем считать упорядоченными последовательно от $\gamma_h^{(i)}$ в ω_{ℓ_1} и ω_{ℓ_2}. Таких линий по $r-1$ штук внутри ω_{ℓ_1} и ω_{ℓ_2}. Тогда

$$\alpha_{\ell_1}^{-1}\cdot D_{22}^{i} = \alpha_{\ell_2}^{-1}\cdot D_{33}^{i} = D_c^{i} \equiv A_c^{i}\otimes E_{r-1} + E^{i}\otimes A_{r-1} + h^2\cdot E^{i}\otimes E_{r-1},$$

$$\alpha_{\ell_1}^{-1}\cdot D_{24}^{i} = \alpha_{\ell_2}^{-1} D_{34}^{i} = \tilde{E}^{i} \equiv -[\Theta^{i}\; E^{i}]^{T}, \qquad (I9.42)$$

$$D_{44}^{i} = (\alpha_{\ell_1}+\alpha_{\ell_2})\cdot(A_c^{i} + (1+h^2)\cdot E^{i}),$$

где E^{i}, E_{r-1} – диагональные матрицы порядка t_i и $r-1$, Θ^{i} – нулевая прямоугольная $t_i\times((r-1)\cdot t_i)$ матрица,

$$A_c^{i} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & -1 \\ -1 & 2 & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & 2 & -1 \\ -1 & & & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad (I9.43)$$

$$A_{r-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

– матрицы порядка t_i и $r-1$, $\otimes$ – знак тензорного произведения матриц [27].

Тогда, если $\bar{g}^{i}$ и $\bar{f}^{i}$ – векторы, составленные из компонент векторов $\bar{g}$ и $\bar{f}$ из (I9.40), номера которых соответствуют узлам $\gamma_h^{(i)}$, то легко показать, что $\bar{g}^{i}$ является частью решения системы

$$\begin{bmatrix} D_c^i & \tilde{E}^i \\ (E^i)^T & A_c^i + (1+h^2)E^i \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{u}^i \\ \bar{g}^i \end{pmatrix} = (\alpha_{\ell_1} + \alpha_{\ell_2})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{f}^i \end{pmatrix} \qquad (19.44)$$

и может быть определен за $O(h^{-1} \ln h^{-1})$ арифметических операций [62].

Пусть $\gamma_h^{(i)}$ – незамкнутая ветвь γ_h, разделяющая области $\Omega_{\ell_1,h}$ и $\Omega_{\ell_2,h}$ и содержащая t_i внутренних узлов (см. рис. 19.3).

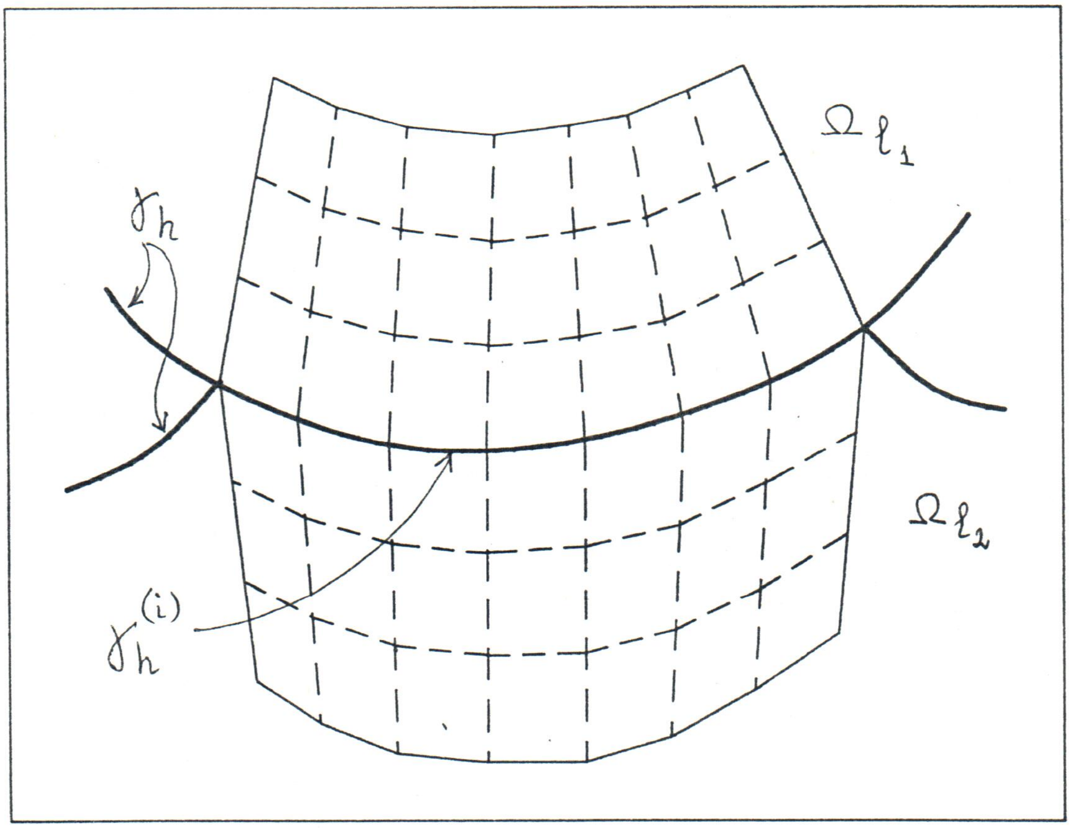

Рис. 19.3. Пример $\omega(i)$ для незамкнутой ветви $\gamma_h^{(i)}$

Проведя рассуждения, аналогичные случаю замкнутой ветви, получим следующий результат. Матрица $\tilde{D}_i$ имеет вид (19.41), блоки которого определяются по формулам (19.42), в которых матрицу A_c^i следует заменить на матрицу $A^i = A_{t_i}$ из (19.43) (трехдиагональную порядка t_i).

Тогда, если $\bar{g}^i$ и $\bar{f}^i$ - векторы, составленные из компонент векторов $\bar{g}$ и $\bar{f}$ из (19.40), номера которых соответствуют внутренним узлам $\gamma_h^{(i)}$, то легко показать, что $\bar{g}^i$ является частью решения системы

$$\begin{bmatrix} D^i & \tilde{E}^i \\ (E^i)^T & A^i+(1+h^2)E^i \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{u}^i \\ \bar{g}^i \end{pmatrix} = (\alpha_{\ell_1}+\alpha_{\ell_2})^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{f}^i \end{pmatrix}, \qquad (19.45)$$

где
$$D^i = A^i \otimes E_{k-1} + E^i \otimes A_{k-1} + \\ + h^2 \cdot E^i \otimes E_{k-1},$$

$$A^i = A_{t_i}.$$

Следовательно, с помощью алгоритмов работы [62] $\bar{g}^i$ определяется за $O(h^{-1} \ln h^{-1})$ арифметических операций.

И наконец, рассмотрим $\tilde{D}_{\bar{y}}^{+} \bar{u}$.

Пусть $I(\bar{y})$ - множество номеров подобластей $\bar{\Omega}_{i,h}$, содержащих узел $\bar{y}$, $J(\bar{y})$ - множество номеров ветвей γ_h , одним из концов которых является узел $\bar{y}$:

$$I(\bar{y}) = \{ i_1, \dots, i_p \}, \quad p = p(\bar{y}),$$
$$J(\bar{y}) = \{ j_1, \dots, j_p \}.$$

Тогда пример $\omega(\bar{y})$ из (19.27) изображен на рис. 19.4 для случая $p(\bar{y}) = 3$.

Перенумеруем узлы ω_h . Сначала перечислим все узлы, не лежащие внутри ω_{i_j}, $j = 1, \dots, p$, и не равные $\bar{y}$, затем - внутренние узлы $\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots \omega_{i_p}$ и $\bar{y}$.

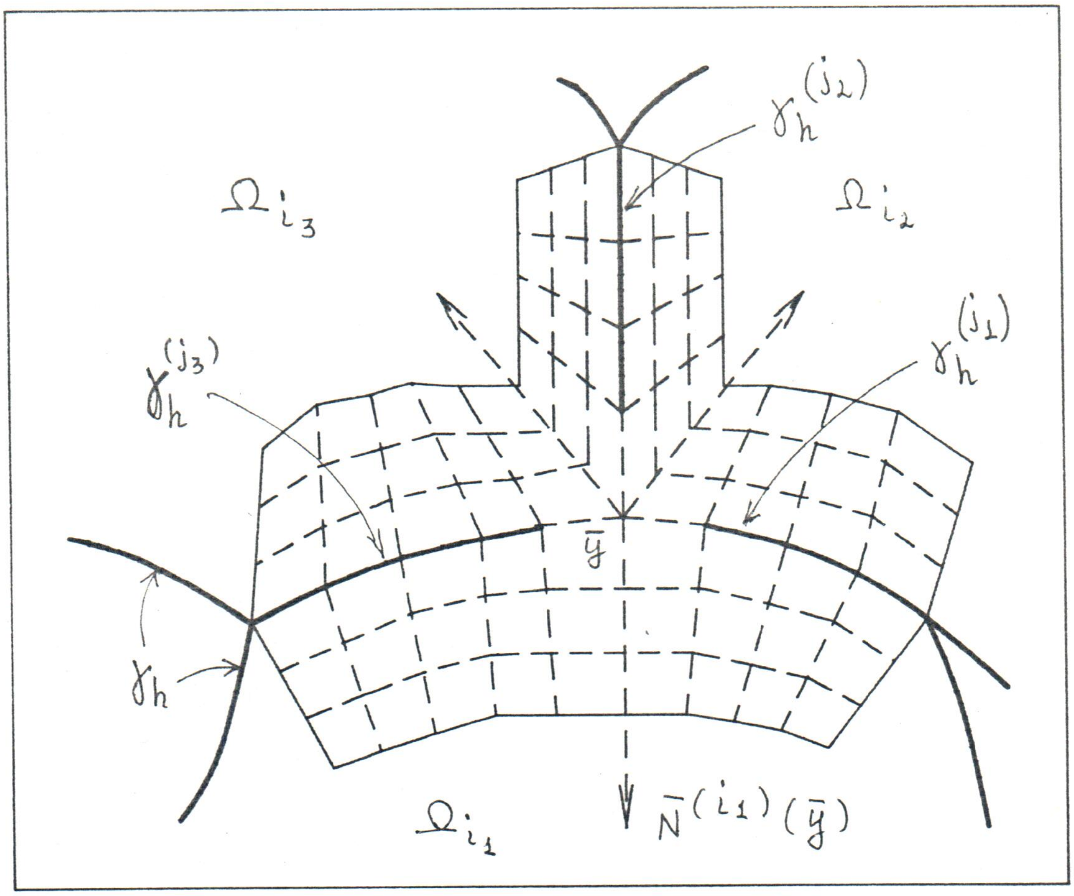

Рис. I9.4. Пример $\omega(\bar{y})$ для $\bar{y} \in V$.

В соответствии с этой нумерацией построим матрицу перестановок $P_{\bar{y}}$. Тогда матрица $\tilde{D}$ будет иметь следующий блочный вид:

$$P_{\bar{y}} \tilde{D} P_{\bar{y}}^T = \begin{bmatrix} D_{\bar{y}}^0 & C_{\bar{y}}^{i_1} & C_{\bar{y}}^{i_2} & \dots & C_{\bar{y}}^{i_p} & F_{\bar{y}}^0 \\ (C_{\bar{y}}^{i_1})^T & D_{\bar{y}}^{i_1} & 0 & \dots & 0 & F_{\bar{y}}^{i_1} \\ (C_{\bar{y}}^{i_2})^T & 0 & D_{\bar{y}}^{i_2} & \dots & 0 & F_{\bar{y}}^{i_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (C_{\bar{y}}^{i_p})^T & 0 & 0 & \dots & D_{\bar{y}}^{i_p} & F_{\bar{y}}^{i_p} \\ (F_{\bar{y}}^0)^T & (F_{\bar{y}}^{i_1})^T & (F_{\bar{y}}^{i_2})^T & \dots & (F_{\bar{y}}^{i_p})^T & D_{\bar{y}} \end{bmatrix}, \qquad (I9.46)$$

где

$$D_{\bar y} = \sum_{j=1}^{p} \alpha_{i_j} \cdot (3+h^2) \quad , \quad i_j \in I(\bar y),$$

$$\alpha_{i_j}^{-1} \cdot D_{\bar y}^{i_j} = A_{\bar y}^{(i_j)} \otimes E_{r-1} + E_{\bar y}^{(i_j)} \otimes A_{r-1} + \tag{I9.47}$$
$$+ h^2 \cdot E_{\bar y}^{(i_j)} \otimes E_{r-1} ,$$

$$j = 1, \ldots, p ;$$

$$\alpha_{i_j}^{-1} F_{\bar y}^{i_j} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T$$

- вектор порядка $n(\bar y, i_j)$, равного количеству узлов на участке γ_h , ограничивающем ω_{i_j} , без учета его концов, $i_j \in I(\bar y)$. Здесь $E_{\bar y}^{(i_j)}$ - единичная матрица порядка $n(\bar y, i_j)$, а $A_{\bar y}^{(i_j)}$ - трехдиагональная матрица порядка $n(\bar y, i_j)$ такого же вида, что и матрица A_{r-1} из (I9.43).

Нетрудно показать, что матрица $P_{\bar y} \tilde D_{\bar y} P_{\bar y}^T$ получается из (I9.46) заменой блоков первой строки и первого столбца на нулевые матрицы. Кроме того, так как

$$P_{\bar y} \bar u = (X^T, 0, \ldots, 0, f(\bar y))^T$$

- блочное представление, соответствующее (I9.46), а $f(\bar y)$ - компонента вектора $\bar f$, то $\tilde D_{\bar y}^{+} = (0, \ldots, 0, g(\bar y))^T$. Следовательно,

$$g(\bar y) = C(\bar y) \cdot f(\bar y) , \tag{I9.48}$$

где постоянная $C(\bar y)$ вычисляется по формуле

$$C(\bar y) = \Big(\sum_{j=1}^{p} \big[\alpha_{i_j} (3+h^2) - (F_{\bar y}^{i_j})^T (D_{\bar y}^{i_j})^{-1} F_{\bar y}^{i_j} \big] \Big)^{-1} . \tag{I9.49}$$

Заметим, что вычисление этих постоянных $\forall \bar{y} \in V$ можно выполнить с применением алгоритмов частичного решения систем $D^{ij}_{\bar{y}}\, \bar{u}^{ij}_{\bar{y}} = F^{ij}_{\bar{y}}$ [62] за $O(h^{-1} \ln h^{-1})$ арифметических действий.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Т е о р е м а I9.2. Операцию умножения любого вектора $\bar{f} \in R^{n_{m+1}}$ на матрицу $\tilde{\Lambda}^{-1}$ можно выполнить за $C \cdot h^{-1} \cdot \ln h^{-1}$ арифметических действий, где постоянная C не зависит от h и α_i, $i=\overline{1,m}$, из (I9.5).

Из теорем I9.I, I9.2 и замечания I9.2 вытекает справедливость следующего утверждения.

Т е о р е м а I9.3. Для уменьшения начальной ошибки итерационного процесса (I9.I5) с параметрами τ_k из (I9.I7) в ε^{-1} раз достаточно выполнить

$$\left(C_1 h^{-2} \ln h^{-1} + C h^{-1} \ln h^{-1}\right) \cdot C_2 \cdot \ln^2 h^{-1} \cdot \ln \varepsilon^{-1}$$

арифметических действий. Постоянные C, C_1 и C_2 не зависят от h и α_i, $i=\overline{1,m}$ из (I9.5).

Если процесс (I9.I5) реализовывать по формулам метода сопряженных градиентов, то оценка числа действий будет

$$\left(C_1 h^{-2} \ln h^{-1} + C h^{-1} \ln h^{-1}\right) \cdot C_3 \ln h^{-1} \ln \varepsilon^{-1},$$

где C_3 не зависит от h и α_i, $i=\overline{1,m}$ из (I9.5).

Замечание I9.4. В случае, когда постоянные α_i, $i=\overline{1,m}$, из (I9.5) незначительно отличаются друг от друга, можно построить [97] матрицу $\tilde{\Lambda}$ порядка n_{m+1} такую, что неравенства (I9.I2) будут выполняться с постоянными α и β, не зависящими от h, но зависящими от α_i. А для реализации операции умножения любого вектора $\bar{f}$ потребуется не более $\tilde{C} h^{-1} \ln h^{-1}$ арифметических операций с постоянной $\tilde{C}$, не зависящей от h и α_i, $i=\overline{1,m}$, из (I9.5). Ниже кратко описывается способ построения такой матрицы и приводятся формулы реализации умножения вектора на эту матрицу.

Прежде всего отметим, что искомая матрица (будем обозначать ее через $\bar{\Lambda}$) строится также как и матрица $\tilde{\Lambda}$ из (I9.37) на основе разложения (I9.29). Но подпространства $H_\delta(\bar{y})$ из (I9.28), носитель функций из которых лежит в $\omega(\bar{y})$ из (I9.27), изменяются. Сначала уменьшим $\omega(\bar{y})$ (см. рис. I9.5), взяв на каждой ветви $\gamma_h^{(j_i)}$ и сеточных линиях, им гомеоморфных, одинаковое число узлов $n(\bar{y})+1$ равное минимуму из количеств узлов по всем ветвям с номерами $j_i \in J(\bar{y})$. Полученную область будем снова обозначать через $\omega(\bar{y})$.

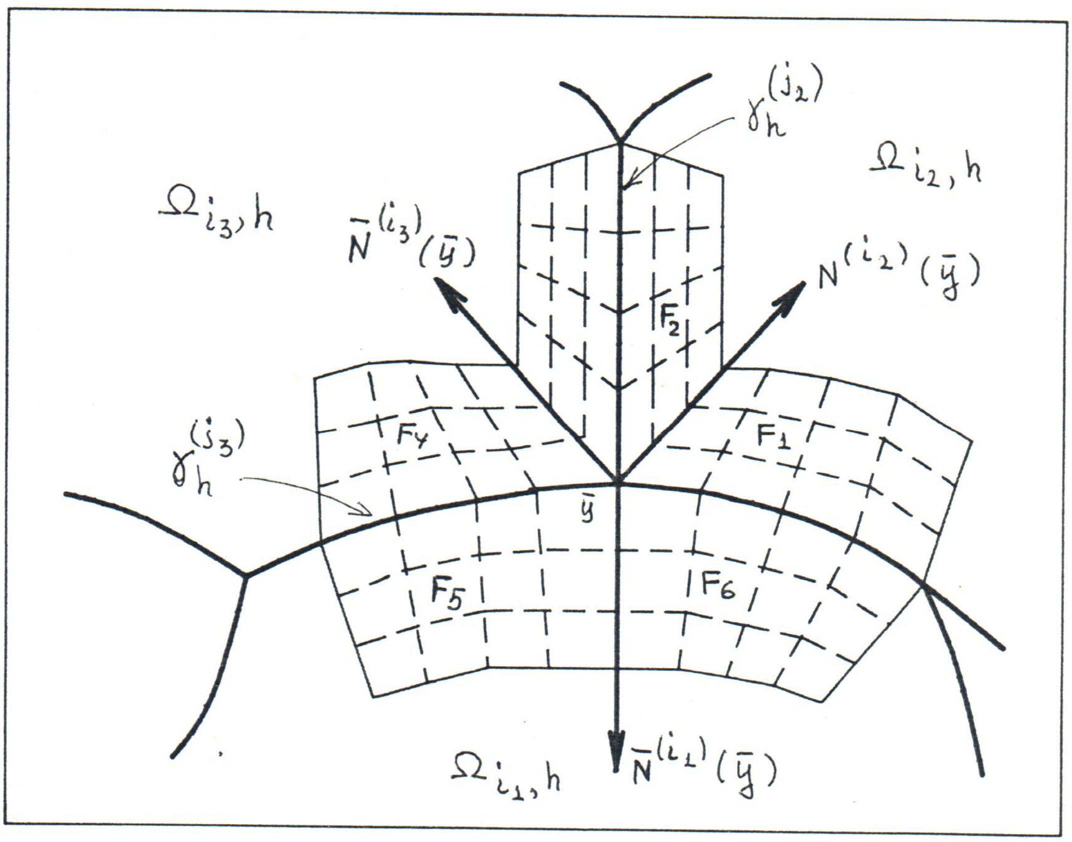

Рис. I9.5. Пример $\omega(\bar{y})$ для $\bar{y} \in V$.

Тогда определим $\forall \bar{y} \in V$

$$H_\delta(\bar{y}) = \{u \in H_\delta : \ u(\bar{x}) = 0 \quad \forall \bar{x} \in \omega_h \setminus \omega(\bar{y})\} . \tag{19.48}$$

Практически очевидно, что любая функция $u(\bar{x}) \in H_\delta$ представима в виде суммы

$$u(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{t} u_i(\bar{x}) + \sum_{\bar{y} \in V} u_{\bar{y}}(\bar{x}) , \tag{19.49}$$

$$u_i(\bar{x}) \in H_\delta(i) , \qquad i = \overline{1,t} ,$$

$$u_{\bar{y}}(\bar{x}) \in H_\delta(\bar{y}) \qquad \forall \bar{y} \in V ,$$

и выполняются неравенства

$$d(u_i, u_i) \le \hat{c}_1 \cdot d(u,u) , \quad i = \overline{1,t} ,$$

$$d(u_{\bar{y}}, u_{\bar{y}}) \le \hat{c}_1 \cdot d(u,u) \qquad \forall \bar{y} \in V$$

с постоянной $\hat{c}_1$, которая не зависит от h и α_i, $i=\overline{1,m}$, из (19.5).

Следующее отличие от способа построения матрицы $\tilde{\Lambda}$ из (19.37) заключается в том, что $H_\delta(\bar{y})$ из (19.48) разлагается в сумму своих подпространств

$$H_\delta(\bar{y}) = H_\delta(1,\bar{y}) + \ldots + H_\delta(2p(\bar{y}),\bar{y}) , \tag{19.50}$$

где $p = p(\bar{y})$ – количество ветвей γ_h, выходящих из $\bar{y}$, а подпространства $H_\delta(k,\bar{y})$ определяются ниже в (19.54).

Определим в $\omega(\bar{y})$ подобласти F_i, $i=\overline{1,2p}$, ограниченные ветвями и нормалями, выходящими из узла $\bar{y}$, и занумерованные как это показано на рис. 19.5. В каждой подобласти F_i введем естественную индексацию узлов (k,l), $k=\overline{0,n(\bar{y})}$, $l=\overline{0,r}$ (см. рис. 19.6).

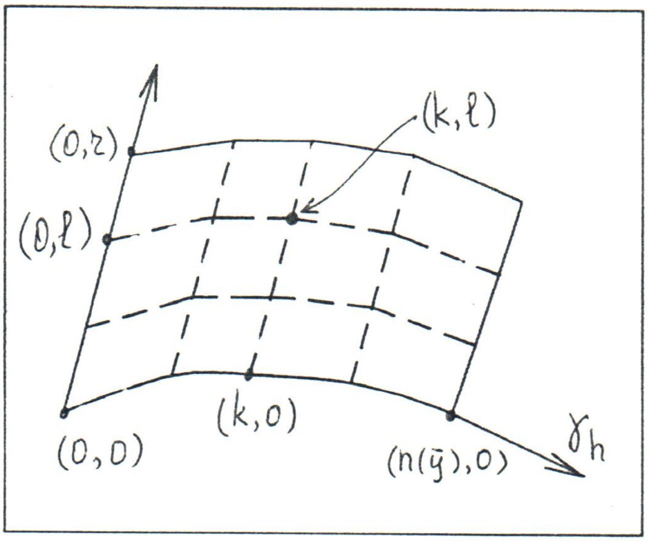

Рис. I9.6. Индексация узлов подобласти F.

Очевидно, что сужение на F_i любой функции из $H_\delta(\bar{y})$ определяется совокупностью своих значений в узлах с индексами (k,l) при $k = 0,\dots, n(\bar{y})-1$; $l = 0,\dots, r-1$.

Определим оператор

$$\Pi_{jk}, \quad j,k = 1,2,\dots,2p, \tag{I9.5I}$$

ставящий в соответствие сужению на F_j функции $u(\bar{x}) \in H_\delta(\bar{y})$ функцию $v = \Pi_{jk} u$, определенную на F_k, значения которой в узлах F_k равны значениям функции $u(\bar{x})$ в соответствующих узлах F_j.

С помощью этих операторов определим для любой функции $u(\bar{x}) \in H_\delta(\bar{y})$ функции $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots u^{(2p)}$ из $H_\delta(\bar{y})$:

$$u^{(1)}(\bar{x}) = \Pi_{1k} u(\bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in F_k, \tag{I9.52}$$

$$k = 1,\dots,2p;$$

$$u^{(2k)}(\bar{x}) = \sum_{l=1}^{k} (\Pi_{2l,2k} u - \Pi_{2l-1,2k} u) \quad \forall \bar{x} \in F_{2k},$$

$$u^{(2k)}(\bar{x}) = \begin{cases} \Pi_{2k,2k+1}\, u^{(2k)}(\bar{x}) \\ \qquad \forall\, \bar{x} \in F_{2k+1},\ k<p; \\ 0, \quad \forall\, \bar{x} \in F_i, \\ \qquad i = 1,\dots,2k-1, 2k+2,\dots,2p; \end{cases} \tag{I9.52}$$

$k = 1,\dots,p;$

$$u^{(2k+1)}(\bar{x}) = \begin{cases} \sum\limits_{\ell=1}^{k} \left(\Pi_{2\ell+1,2k+1} u - \Pi_{2\ell,2k+1} u \right) \\ \qquad \forall\, \bar{x} \in F_{2k+1}, \\ \Pi_{2k+1,2k+2}\, u^{(2k+1)}(\bar{x}) \\ \qquad \forall\, \bar{x} \in F_{2k+2}, \\ 0, \quad \forall\, \bar{x} \in F_i,\ i = 1,\dots,2k, \\ \qquad 2k+3,\dots,2p; \end{cases} \tag{I9.53}$$

$k = 1,\dots,p-1.$

Тогда подпространства $H_\delta(k,\bar{y})$ из (I9.50) определяются следующим образом:

$$H_\delta(k,\bar{y}) = \operatorname{Im} Q_k(\bar{y}), \quad k = \overline{1,2p}, \tag{I9.54}$$

где Q_k – линейные операторы вида

$$u^{(k)} = Q_k u, \quad k = 1,\dots,2p,$$

$u^k(\bar{x})$ определяется по формулам (I9.52) – (I9.53).

Нетрудно проверить, что

$$u(\bar{x}) = \sum_{k=1}^{2p} Q_k(\bar{y}) \cdot u(\bar{x}) \equiv \sum_{k=1}^{2p} u^{(k)}(\bar{x}) \quad \forall\, \bar{x} \in \omega_h, \tag{I9.55}$$

для любой $u \in H_\delta(\bar{y})$.

Замечание 19.5. Подпространство $H_\delta(1,\bar{y})$ характерно тем, что для любой $u \in H_\delta(1,\bar{y})$ векторы ее значений в узлах ветвей совпадают. Подпространство $H_\delta(2k,\bar{y})$ характерно тем, что носитель любой функции из него лежит в $F_{2k} \cup F_{2k+1}$, т.е. оно вложено в одно из подпространств $H_\delta(i)$ из (19.28). Подпространство $H_\delta(2k+1,\bar{y})$ характерно тем, что любая его функция равна нулю на ветвях γ_h, т.е. оно вложено в $\overset{\circ}{H}_\delta$.

Теперь оценим нормы функций из разложения (19.55). Нетрудно проверить справедливость равенств

$$d_{\bar{y}}(\Pi_{jk}u, \Pi_{jk}u) = d_{\bar{y}}(\Pi_{jj}u, \Pi_{jj}u) \qquad u \in H_\delta(\bar{y}), \quad j,k = 1,\dots,2p, \tag{19.56}$$

где

$$d_{\bar{y}}(u,u) = \sum_{\ell=0}^{r}\Big(\frac{1}{2}u_{0,\ell}^2 + \sum_{k=1}^{n(\bar{y})} u_{k,\ell}^2\Big)h^2 + \sum_{\ell=0}^{r}\sum_{k=1}^{n(\bar{y})} |u_{k,\ell} - u_{k-1,\ell}|^2 + \sum_{\ell=1}^{r}\Big(\frac{1}{2}|u_{0,\ell} - u_{0,\ell-1}|^2 + \sum_{k=1}^{n(\bar{y})} |u_{k,\ell} - u_{k,\ell-1}|^2\Big). \tag{19.56'}$$

Здесь через $u_{k,\ell}$ обозначены значения функции $u(\bar{x})$ в узлах F_j с индексами (k,ℓ).

Кроме того, легко проверить, что

$$d_{\bar{y}}(\Pi_{2j-1,2j-1}u, \Pi_{2j-1,2j-1}u) + d_{\bar{y}}(\Pi_{2j,2j}u, \Pi_{2j,2j}u) = d_{i_j}(u,u), \qquad j = 1,\dots,p, \tag{19.57}$$

если положить $i_{2p} = i_1$ (см. рис. I9.5).

Тогда для $u^{(1)}$ получим следующее неравенство:

$$d(u^{(1)}, u^{(1)}) = 2\sum_{j=1}^{p} \alpha_{i_j} \cdot d_{\bar{y}}(\Pi_{11}u, \Pi_{11}u) \leq$$

$$\leq \left[2\alpha_{i_1}^{-1} \sum_{j=1}^{p} \alpha_{i_j}\right] \cdot d(u,u). \tag{I9.58}$$

Для функций $u^{(2k)}$ получим неравенства:

$$d(u^{(2k)}, u^{(2k)}) = \alpha_{i_k} \cdot d_{\bar{y}}(\Pi_{2k,2k}u^{(2k)}, \Pi_{2k,2k}u^{(2k)}) +$$

$$+\alpha_{i_{k+1}} \cdot d_{\bar{y}}(\Pi_{2k+1,2k+1}u^{(2k)}, \Pi_{2k+1,2k+1}u^{(2k)}) =$$

$$=(\alpha_{i_k}+\alpha_{i_{k+1}}) \cdot d_{\bar{y}}\Big(\sum_{\ell=1}^{k}(\Pi_{2\ell,2k}u - \Pi_{2\ell-1,2k}u),$$

$$\sum_{\ell=1}^{k}(\Pi_{2\ell,2k}u - \Pi_{2\ell-1,2k}u)\Big) \leq$$

$$\leq(\alpha_{i_k}+\alpha_{i_{k+1}})k \cdot \sum_{\ell=1}^{k} d_{\bar{y}}(\Pi_{2\ell,2k}u - \Pi_{2\ell-1,2k}u,$$

$$\Pi_{2\ell,2k}u - \Pi_{2\ell-1,2k}u) =$$

$$=(\alpha_{i_k}+\alpha_{i_{k+1}})k \cdot \sum_{\ell=1}^{k} d_{\bar{y}}(\Pi_{2\ell,2\ell}u - \Pi_{2\ell-1,2\ell-1}u,$$

$$\Pi_{2\ell,2\ell}u - \Pi_{2\ell-1,2\ell-1}u) \leq$$

$$\leq 2k(\alpha_{i_k}+\alpha_{i_{k+1}}) \sum_{\ell=1}^{k} d_{i_\ell}(u,u) =$$

$$= 2k(\alpha_{i_k}+\alpha_{i_{k+1}}) \sum_{\ell=1}^{k} \alpha_{i_\ell}^{-1}\cdot \alpha_{i_\ell}\cdot d_{i_\ell}(u,u) \leq$$

$$\leq 2k(\alpha_{i_k}+\alpha_{i_{k+1}})\cdot \sum_{\ell=1}^{k} \alpha_{i_\ell}^{-1} \cdot \sum_{\ell=1}^{k} \alpha_{i_\ell}\cdot d_{i_\ell}(u,u).$$

Следовательно,

$$d(u^{(2k)},u^{(2k)}) \leq \left[2k(\alpha_{i_k}+\alpha_{i_{k+1}})\sum_{\ell=1}^{k}\alpha_{i_\ell}^{-1}\right]\cdot d(u,u), \quad (19.59)$$

$$k=1,\dots,p-1.$$

При $k=p$ аналогичным образом можно получить неравенство

$$d(u^{(2p)},u^{(2p)}) \leq \left[2p\alpha_{i_p}\sum_{\ell=1}^{p}\alpha_{i_\ell}^{-1}\right]\cdot d(u,u). \qquad (19.60)$$

Для функций $u^{(2k+1)}$ из (19.53), проведя аналогичные выкладки, получим

$$d(u^{(2k+1)},u^{(2k+1)}) \leq \left[4k\alpha_{i_{k+1}}\sum_{\ell=1}^{k+1}\alpha_{i_\ell}^{-1}\right]\cdot d(u,u). \qquad (19.61)$$

Замечание 19.6. Если постоянные α_i из (19.5) и представление (19.1) таковы, что в окрестности любой $\bar{y}\in\bar{V}$

$$\alpha_{i_1} \geq \alpha_{i_2} \geq \dots \geq \alpha_{i_p}, \quad p=p(\bar{y}), \quad i_j\in \bar{I}(\bar{y}),$$

то постоянные неравенств (19.58) - (19.61) не зависят не только от h, но и от α_i из (19.5).

Таким образом, суммируя вышеизложенное, приходим к выводу о справедливости следующей теоремы.

Т е о р е м а I9.4. Пространство H_δ можно представить в виде суммы подпространств

$$H_\delta = \sum_{i=1}^{t} H_\delta(i) + \sum_{\bar{y}\in V} H_\delta(1,\bar{y}) + H_\delta^{\circ} \ ,$$

где $H_\delta(i)$ из (I9.28), $H_\delta(1,\bar{y})$ из (I9.54), H_δ° из (I9.2I), и выполняется следующее условие:

$$\forall\, u \in H_\delta \quad \exists\, u_i \in H_\delta(i)\ , \quad i=\overline{1,t}\ ;$$

$$\exists\, u_{\bar{y}} \in H_\delta(1,\bar{y}) \quad \forall\, \bar{y}\in V\ ; \quad \exists\, u_0 \in H_\delta^{\circ}$$

такие, что

$$u = \sum_{i=1}^{t} u_i + \sum_{\bar{y}\in V} u_{\bar{y}} + u_0\ ,$$

$$d(u_i,u_i) \le c\cdot\bar{\alpha}\cdot d(u,u)\ , \quad i=\overline{1,t}\ ,$$

$$d(u_{\bar{y}},u_{\bar{y}}) \le c\cdot\bar{\alpha}\cdot d(u,u) \quad \forall\, \bar{y}\in V\ ,$$

$$d(u_0,u_0) \le c\cdot\bar{\alpha}\cdot d(u,u)\ ,$$

где постоянная c не зависит от h и α_i из (I9.5), а $\bar{\alpha}$ не зависит от h, но зависит от α_i из (I9.5):

$$\bar{\alpha} = \max\Big\{ \max\Big\{ \alpha_{i_1}^{-1}\cdot\sum_{j=1}^{p(\bar{y})} \alpha_{i_j}\ ;$$

$$\max_{1\le k<p}\Big[(\alpha_{i_k}+\alpha_{i_{k+1}})\sum_{\ell=1}^{k} \alpha_{i_\ell}^{-1}\Big]\ ;$$

$$\max_{1\le k\le p}\left[\alpha_{i_k}\sum_{l=1}^{k}\alpha_{i_l}^{-1}\right]\Big\}\Big\}.$$

Справедливость утверждений теоремы следует из замечания I9.5, условия (I9.49), разложения (I9.55) и оценок (I9.58) - (I9.6I).

Обозначим через $\tilde d_{\bar y}(u,u)$ правую часть (I9.56'), в которой множители $\frac{1}{2}$ заменены на единицу. Тогда

$$d_{\bar y}(u,u)\le \tilde d_{\bar y}(u,u)\le 2\cdot d_{\bar y}(u,u).$$

Отсюда следует, что для любой функции $u\in H_\delta(1,\bar y)$

$$d(u,u)\le\sum_{j=1}^{p}\alpha_{i_j}\cdot\tilde d_{\bar y}(\Pi_{11}u,\Pi_{11}u)\le 2\cdot d(u,u).$$

Тогда в подпространствах $H_\delta(1,\bar y)$ введем скалярные произведения

$$(u,v)_{\bar y}=\sum_{j=1}^{p}\alpha_{i_j}\cdot\tilde d_{\bar y}(\Pi_{11}u,\Pi_{11}v). \tag{I9.62}$$

Заменим в (I9.35) матрицы $\tilde D_{\bar y}$ на симметричные матрицы $\bar D_{\bar y}$:

$$\begin{aligned}&(\bar D_{\bar y}\bar u,\bar v)=(u,v)_{\bar y}\qquad\forall\, u,v\in H_\delta(1,\bar y),\\ &\bar D_{\bar y}\bar u=0\qquad\forall\, u\in H^{1}_{\delta}(1,\bar y),\quad\forall\,\bar y\in V.\end{aligned} \tag{I9.62'}$$

Пусть

$$\bar R=\sum_{i=1}^{t}\tilde D_i^{+}+\sum_{\bar y\in\bar V}\bar D_{\bar y}^{+}+\tilde D_0^{+}=\begin{bmatrix}\bar R_{11} & \bar R_{12}\\ \bar R_{21} & \bar\Lambda^{-1}\end{bmatrix}, \tag{I9.63}$$

где порядок матрицы $\bar{\Lambda}$ равен n_{m+1} (см. (I9.37)).

Тогда из теорем I5.2 и I9.4 следует, что

$$(2c\bar{\alpha}M)^{-1}\cdot(\bar{R}\bar{u},\bar{u})\leq(\tilde{D}^{-1}\bar{u},\bar{u})\leq M\cdot(\bar{R}\bar{u},\bar{u}) \quad \forall\,\bar{u}\in R^{n_\delta}. \tag{I9.64}$$

Эти неравенства аналогичны неравенствам (I9.38). Тогда будет справедлив аналог теоремы I9.I.

Т е о р е м а I9.5. Имеют место неравенства

$$\alpha\cdot(\bar{\Lambda}\bar{u},\bar{u})\leq(\Lambda\bar{u},\bar{u})\leq\beta\cdot(\bar{\Lambda}\bar{u},\bar{u}) \quad \forall\,\bar{u}\in R^{n_{m+1}},$$

где Λ из (I9.II), $\bar{\Lambda}$ из (I9.63); постоянные: $\alpha=c_1\cdot M^{-1}$, $\beta=2\cdot c_2\cdot c M\bar{\alpha}$; c_1 и c_2 из леммы I9.I, c из теоремы I9.4, M – общее количество подпространств разложения H_δ , – не зависят от h и α_i из (I9.5), постоянная $\bar{\alpha}$ не зависит от h , ее зависимость от α_i из (I9.5) явно указана в теореме I9.4.

Замечание I9.7. Следовательно, скорость сходимости итерационного процесса (I9.I5), если в представлении (I9.I3) матрицы $\tilde{B}_h$ матрицу $\tilde{\Lambda}$ заменить на матрицу $\bar{\Lambda}$ из (I9.63), не будет зависеть от h , а при выполнении условий замечания I9.6 не будет зависеть и от α_i из (I9.5), $i=\overline{1,m}$.

Теперь укажем формулы реализации операции умножения вектора $\bar{f}\in R^{n_{m+1}}$ на матрицу $\bar{\Lambda}^{-1}$ из (I9.37):

$$\bar{g}=\bar{\Lambda}^{-1}\bar{f}, \quad \bar{u}=(0,\bar{f}^T)^T,$$

$$\begin{pmatrix}\bar{R}_{12}\bar{f}\\ \bar{g}\end{pmatrix}=\sum_{i=0}^{t}\tilde{D}_i^{+}\bar{u}+\sum_{\bar{y}\in V}\bar{D}_{\bar{y}}^{+}\bar{u}. \tag{I9.65}$$

Ранее уже были рассмотрены задачи вычисления необходимых частей слагаемых $\tilde{D}_i^+ \bar{u}$. При $i=0$ вычислять ничего не нужно, а при $i>0$ решаются задачи вида (I9.44) или (I9.45), с оценкой числа действий $O(h^{-1}\ln h^{-1})$.

Значит, осталось указать реализационные формулы для $\bar{D}_{\bar{y}}^+ \bar{u}$.

Перенумеруем узлы ω_h. Сначала перечислим все узлы, не лежащие внутри $\omega(\bar{y})$, затем оставшиеся узлы, но не лежащие на γ_h, затем $\bar{y}$ и узлы на ветви $\gamma_h^{(j_1)}$, ветви $\gamma_h^{(j_2)}$, ..., ветви $\gamma_h^{(j_p)}$, и пусть $P_{\bar{y}}$ – соответствующая матрица перестановок. Тогда, если в векторе $\bar{f}$ также выполнить перестановку компонент, поскольку нумерация узлов γ_h изменилась с помощью матрицы $\bar{P}_{\bar{y}}$, то

$$\bar{P}_{\bar{y}}\bar{f} = (X^T, f(\bar{y}), \bar{f}^T(\gamma_h^{(j_1)}), \dots, \bar{f}^T(\gamma_h^{(j_p)}))^T,$$

где $f(\bar{y})$ – компонента вектора $\bar{f}$, соответствующая узлу $\bar{y}$, $\bar{f}(\gamma_h^{(j_i)})$ – подвектор $\bar{f}$, соответствующий внутренним $n(\bar{y})-1$ узлам $\gamma_h^{(j_i)}$. Тогда нужная нам часть $\bar{g}_{\bar{y}}$ вектора $\bar{D}_{\bar{y}}^+ \bar{u}$ будет иметь вид

$$\bar{P}_{\bar{y}}\bar{g} = (0, g_{\bar{y}}(\bar{y}), \bar{q}^T, \dots, \bar{q}^T)^T.$$

Определим матрицы $D_H = D_H^T$:

$$(D_H \bar{u}, \bar{v}) = \tilde{d}_{\bar{y}}(u,v) \qquad \forall\ u, v \qquad (I9.66)$$

определенных на F_1, а $\bar{u}$ и $\bar{v}$ – векторы их значений, порядка $r \cdot n$; $T_{\bar{y}}$:

$$T_{\bar y}^{T} = \left[\begin{array}{cccc} E_L & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E_L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{r-1} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & E_{r-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & E_{n-1} \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}E\\ \vdots\\ E\end{array}}\right\} 2p \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}E\\ \vdots\\ E\end{array}}\right\} p \\ \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}E\\ \vdots\\ E\end{array}}\right\} p \end{array},$$

$L=(n-1)(r-1)$.

Тогда можно показать (см. работу автора [97]) с помощью довольно громоздких выкладок, что

$$(X^T, g_{\bar y}(\bar y), \bar q^T, \dots, \bar q^T)^T =$$

$$= \Big(\sum_{j=1}^{p} \alpha_{i_j}\Big)^{-1} T_{\bar y}^{T} D_H^{-1} T_{\bar y} \bar u . \tag{19.67}$$

Для решения системы с матрицей D_H применимы алгоритмы частичного решения [62] с $O(h^{-1}\ln h^{-1})$ операций.

Таким образом, из теоремы 19.5 и замечаний 19.2, 19.7 следует

Т е о р е м а 19.6. Для уменьшения начальной ошибки итерационного процесса (19.15), если в представлении (19.13) матрицы $\widetilde B_h$ матрицу $\widetilde\Lambda$ заменить на матрицу $\bar\Lambda$ из (19.63), в ε^{-1} достаточно выполнить

$$(C_1 h^{-2}\ln h^{-1} + C h^{-1}\ln h^{-1})\, C_2 \ln \varepsilon^{-1}$$

арифметических действий, где постоянные C_1 и C не зависят от h и α_i, $i=\overline{1,m}$, из (I9.5), а постоянная C_1 не зависит от h, а при выполнении условий замечания I9.6 не зависит и от α_i, $i=\overline{1,m}$, из (I9.5).

В заключение отметим, что полученные в этом параграфе результаты могут быть обобщены на случай вариационно-разностных схем, аппроксимирующих задачу со смешанными краевыми условиями в пространствах лагранжевых восполнений при $k>1$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Агошков В.И. Операторы Пуанкаре–Стеклова и методы разделения области в конечномерных пространствах. – М., 1987. – 35с. – (Препринт / ОВМ АН СССР; 138).
2. Азархин А.М. О решении уравнения $\mathrm{div}(\lambda \, \mathrm{grad}\, u(x)) = f(x)$ для сложной области и с разнообразными условиями на границе при помощи алгоритмов типа Шварца // Пространственные конструкции в Красноярском крае. – Красноярск, 1977. – С.102-112.
3. Айрян Э.А., Жидков Е.П., Хоромский Б.Н., Юлдашев О.И. Метод альтернирования для одного класса эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами в бесконечной области. – Дубна, 1982. – 11с. – (Сообщ. / Объед. ин-т ядер. исслед. ; Р 11-82-871).
4. Александров П.С. Комбинаторная топология. – М.-Л.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1947. – 660с.
5. Алексидзе М.А. О целесообразности применения альтернирующего метода Шварца на электронных цифровых машинах // Докл. АН СССР. – 1958. – Т.120, №2. – С.231-234.
6. Андреев В.Б. Устойчивость разностных схем для эллиптических уравнений по граничным условиям Дирихле // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. – 1972. – Т.12, №3. – С.598-611.
7. Андреев В.Б. Эквивалентная нормировка сеточных функций из $W_2^{1/2}(\gamma)$ // Исследования по теории разностных схем для эл-

липтических и параболических уравнений. - М.: МГУ, 1973. - С.6-39.

8. Андреев В.Б. Устойчивость разностных схем для эллиптических уравнений четвертого порядка по граничным условиям первого рода // Вычислительные методы и программирование. - М.: МГУ, 1977. - Вып. XXVII. - С.116-165.

9. Астраханцев Г.П. Итерационные методы решения вариационно-разностных схем для двумерных эллиптических уравнений второго порядка: Дис... канд. физ.-мат. наук: 01.01.07. - Л., 1972.

10. Астраханцев Г.П. Об одном способе приближенного решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. - 1977. - Т.17, №4. - С.980-998.

11. Астраханцев Г.П. О численном решении задачи Дирихле в произвольной области // Разностные и вариационно-разностные методы. - Новосибирск, 1977. - С.63-72.

12. Астраханцев Г.П. Метод фиктивных областей для эллиптического уравнения второго порядка с естественными краевыми условиями // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. - 1978. - Т.18, №1. - С.118-125.

13. Астраханцев Г.П. О численном решении смешанных краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка в произвольной области // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. - 1985. - Т.25, №2. - С.200-209.

14. Астраханцев Г.П. О численном решении задачи Дирихле с помощью разностного аналога потенциала двойного слоя. - М., 1985. - 18с. (Препринт / ОВМ АН СССР; 102).

15. Бахвалов Н.С. Об одном способе приближенного решения уравнения Лапласа // Докл. АН СССР. - 1957. - Т.114, №3. - С.455-458.

I6. Бахвалов Н.С., Орехов М.Ю. О быстрых способах решения уравнения Пуассона // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. - I982. - Т.22, №6. - С.I386-I392.

I7. Белинский П.П., Годунов С.К., Иванов Ю.Б., Яненко И.К. Применение одного класса квазиконформных отображений для построения разностных сеток в областях с криволинейными границами // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. - I975. - Т.I5, №6. - С.I499-I5II.

I8. Бугров А.Н. Обоснования метода фиктивных областей для некоторых задач математической физики: Дис... канд. физ.-мат. наук: 0I.0I.07. - Новосибирск, I978. - I49с.

I9. Бугров А.Н. О двух подходах в методе фиктивных компонент // Вариационно-разностные методы в математической физике. - Новосибирск, I98I. - С.27-34.

20. Бюл , Буш В. Обзор методов формирования сетки конечных элементов // Тр. Амер. о-ва инж.-механиков. Сер. В. - I973.- Т.95, №I. - С.254-26I.

2I. Василенко В.А. Приближенное решение задачи продолжения функций методом конечных элементов // Вариационно-разностные методы в математической физике. - Новосибирск, I978. - С.I42-I48.

22. Васин В.В., Сидоров А.Ф. О некоторых методах приближенного решения дифференциальных и интегральных уравнений // Изв. высш. учебных заведений. Математика. - I983. - Т.254, №7. - С.I3-27.

23. Вишик В.И., Люстерник Л.А. Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений с большими или быстро меняющимися коэффициентами и граничными условиями // Успехи мат. наук. - I960. - Т.XУ, вып. 4(94). - С.29-95.

24. Волков Е.А. Об асимптотически быстром приближенном методе

получения на сеточных отрезках решения разностного уравнения Лапласа // Докл. АН СССР. - 1984. - Т.279, №2. - С.285-289.

25. Волков Е.А. Экспоненциально сходящийся метод для решения задач Неймана на многосвязных многоугольниках // Тр. Мат. ин-та АН СССР. - М., 1985. - Т.172. - С.86-106.

26. Волков Е.А. О методах решения разностных уравнений для кусочно-однородной среды и с правой частью заданной вдоль кривой // Докл. АН СССР. - 1985. - Т.283, №2. - С.274-277.

27. Гантмахер Ф.Г. Теория матриц. - М.: Наука, 1967. - 575с.

28. Гловински Р., Пиронно О. О применении "квазипрямого метода и итерационных методов к решению задачи Дирихле для бигармонического оператора при смешанной аппроксимации конечными элементами // Вычислительные методы в математической физике, геофизике и оптимальном управлении. - Новосибирск, 1978. - С.34-57.

29. Годунов С.К., Прокопов Г.П. О расчетах конформных отображений и построении разностных сеток // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. - 1967. - Т.7, №5. - С.1031-1059.

30. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы . Введение в теорию. - М.: Наука, 1977. - 439с.

31. Дмитриенко М.Е., Оганесян Л.А. Вариант метода Шварца для прилегающих сеточных областей // Вычисления с разреженными матрицами. - Новосибирск, 1981. - С.36-44.

32. Дрыя М. Алгоритм с матрицей емкости для вариационно-разностной задачи Дирихле // Вариационно-разностные методы в математической физике. - Новосибирск, 1981. - С.63-73.

33. Дрыя М. Метод разделения области решения вариационно-разностных схем для эллиптических задач // Вариационно-разностные методы в математической физике : Сб. докл. Всесоюз.

конф., М., май 1983г. - М., 1984. - Ч.I. - С.46-57.

34. Дьяконов Е.Г. Об одном способе решения уравнения Пуассона // Докл. АН СССР. - 1962. - Т.143, №1. - С.21-24.
35. Дьяконов Е.Г. О построении итерационных методов на основе использования операторов, эквивалентных по спектру // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. - 1966. - Т.6, №1. - С.12-34.
36. Дьяконов Е.Г. Разностные методы решения краевых задач. - М.: Изд-во МГУ, 1971. - Вып. I. - 240с.
37. Дьяконов Е.Г. Некоторые классы операторов, эквивалентных по спектру и их применение // Вариационно-разностные методы в математической физике. - Новосибирск, 1976. - С.49-61.
38. Дьяконов Е.Г. Некоторые топологические и геометрические задачи, возникающие при триангуляции области в проекционно-разностных методах // Мат. заметки. - 1977. - Т.21, вып.3.- С.427-442.
39. Дьяконов Е.Г. О некоторых прямых и итерационных методах, основанных на окаймлении матриц // Численные методы в математической физике. - Новосибирск, 1979. - С.45-68.
40. Ильин В.П. Разностные методы решения эллиптических уравнений. - Новосибирск: НГУ, 1970. - 264с.
41. Капорин И.Е. О задаче решения разностного уравнения Пуассона в неполно-разреженной постановке // Разностные методы математической физики: Теория численных методов. - М.,1981. - С.13-22.
42. Капорин И.Е., Николаев Е.С. Метод фиктивных неизвестных для решения уравнений эллиптического типа в областях сложной формы // Докл. АН СССР. - 1980. Т.251, №3. - С.544-548.
43. Капорин И.Е., Николаев Е.С. Метод фиктивных неизвестных для решения разностных эллиптических краевых задач в нерегулярных областях // Дифференц. уравнения. - 1980. - Т.16, №7.-

С.I2II-I225.

44. Капорин И.Е., Николаев Е.С. Развитие метода фиктивных неизвестных - сопряженных направлений // Дифференц. уравнения. - I98I. - Т.I7, №7. - С.I270-I279.

45. Капорин И.Е., Николаев Е.С. Метод фиктивных неизвестных для симметричных положительно определенных систем // Численные методы линейной алгебры. - М., I982. - С.33-42.

46. Карчевский М.М. Об одном классе итерационных методов решения первой краевой задачи для разностного бигармонического уравнения // Вычисления с разреженными матрицами. - Новосибирск, I98I. - С.73-89.

47. Карчевский М.М., Ляшко А.Д. Разностные схемы для нелинейных задач математической физики. - Казань: Изд-во Казанского ун-та, I976. - I55с.

48. Кацнельсон В.Э., Меньшиков В.В. Об одном аналоге альтернирующего метода Шварца // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. - Харьков: ХГУ, I973. - Вып. I7. - С.206-2I5.

49. Кобельков Г.М. О решении эллиптических уравнений с сильно меняющимися коэффициентами. - М., I987. - 26с. - (Препринт / ОВМ АН СССР; I45).

50. Коновалов А.Н. Метод фиктивных областей в задачах фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости с учетом капилярных сил // Численные методы механики сплошной среды. - I972. - Т.3, №5. - С.52-68.

5I. Коновалов А.Н., Конюх Г.В., Цуриков Н.В. О принципах построения итерационных процессов в методе фиктивных областей // Вариационные методы в задачах численного анализа. - Новосибирск, I986. - С.58-79.

52. Корнеев В.Г. Схемы метода конечных элементов высоких по-

рядков точности. - Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. - 206с.

53. Корнеев В.Г. Сеточные операторы, энергетически эквивалентные порождаемым кусочно-эрмитовыми распространениями // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. - 1979. - Т.19, №2. - С.402 - 416.

54. Кузнецов С.Б. Численное решение нелинейных уравнений магнитостатики методом конечных элементов: Дис... канд. физ.-мат. наук: 01.01.07. - Новосибирск, 1986. - 177с.

55. Кузнецов С.Б., Руденко Э.Н. Метод итерирования по подобластям для квазимногочленных уравнений эллиптического типа. - Новосибирск, 1983. - 10с. - (Препринт / ВЦ СО АН СССР; 100).

56. Кузнецов Ю.А. Блочно-релаксационные методы в подпространстве, их оптимизация и применение // Вариационно-разностные методы в математической физике. - Новосибирск, 1978.- С.178-212.

57. Кузнецов Ю.А. Блочно-релаксационные методы в подпространстве для двумерных эллиптических уравнений // Численные методы в математической физике. - Новосибирск, 1979. - С.20-44.

58. Кузнецов Ю.А. Блочно-релаксационный метод в подпространстве решения двумерных и трехмерных уравнений диффузии в многозонных областях // Методы решения систем вариационно-разностных уравнений. - Новосибирск, 1979. - С.24-59.

59. Кузнецов Ю.А. Метод сопряженных градиентов, его обобщения и применения // Вычисл. процессы и системы. - М., 1983, №1. - С.267-301.

60. Кузнецов Ю.А. Итерационные методы в подпространствах. - М.: ОВМ АН СССР, 1984. - 133с.

61. Кузнецов Ю.А. Мацокин А.М. Об оптимизации метода фиктивных

компонент // Вычислительные методы линейной алгебры. - Новосибирск, 1977. - С.79-86.

62. Кузнецов Ю.А., Мацокин А.М. О частичном решении систем линейных алгебраических уравнений // Вычислительные методы линейной алгебры. - Новосибирск, 1978. - С.62-89.

63. Кузнецов Ю.А., Мацокин А.М., Шайдуров В.В. Быстрые итерационные методы решения систем сеточных уравнений // Актуальные проблемы вычислительной математики и математического моделирования. - Новосибирск: Наука, 1985. - С.207-228.

64. Кузнецов Ю.А. Труфанов О.В. Итерационные методы, использующие декомпозицию области для решения волнового уравнения Гельмгольца // Вычислительные методы линейной алгебры: Тр. Всесоюз. конф. М., авг. 1982г. - М., 1983. - С.151-174.

65. Кузнецов Ю.А. Труфанов О.Д. Методы разбиения области для решения волнового уравнения Гельмгольца. - М., 1986. - 38с. - (Препринт / ОВМ АН СССР; 125).

66. Кузнецов Ю.А., Финогенов С.А. Метод фиктивных компонент для решения трехмерных эллиптических уравнений // Архитектура ЭВМ и численные методы. - М.: ОВМ АН СССР, 1984. - С.73-94.

67. Кузнецов Ю.А., Финогенов С.А. Двуступенчатый метод фиктивных компонент для дву- и трехмерных задач электростатики // Численные методы и математическое моделирование. - М.: ОВМ АН СССР, 1987. - С.31-60.

68. Лазаров Р.Д., Мокин Ю.И. О вычислении логарифмического потенциала // Докл. АН СССР. - 1983. - Т.272, №1. - С.27-30.

69. Лебедев В.И. Разностные аналоги ортогональных разложений основных дифференциальных операторов и некоторых краевых задач математической физики. I // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. - 1964. - Т.4, №3. - С.449-465.

70. Лебедев В.И. О построении операции P в KP -методе // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. - 1969. - Т.9, №4. - С.762 - 774.

71. Лебедев В.И. Метод композиции. - М.: ОВМ АН СССР, 1986. - 191с.

72. Лебедев В.И., Агошков В.И. Обобщенный алгоритм Шварца с переменными параметрами. - М., 1981. - 40с. - (Препринт / ОВМ АН СССР, ВИНИТИ; 19).

73. Лебедев В.И., Агошков В.И. Операторы Пуанкаре-Стеклова и их приложения в анализе - М.: ОВМ АН СССР, 1983. - 184с.

74. Лебедев В.И., Агошков В.И. Вариационные алгоритмы метода разделения области. - М., 1983. - 24с. - (Препринт / ОВМ АН СССР; 54).

75. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. - М.: Наука, 1977. - 455с.

76. Марчук Г.И., Кузнецов Ю.А. Некоторые вопросы итерационных методов // Вычислительные методы линейной алгебры. - Новосибирск, 1972. - С.4-20.

77. Марчук Г.И., Кузнецов Ю.А. Итерационные методы и квадратичные функционалы - Новосибирск: Наука, 1972. - 205с.

78. Марчук Г.И., Лебедев В.И. Численные методы в теории переноса нейтронов. - М.: Атомиздат, 1971. - 496с.

79. Марчук Г.И., Шайдуров В.В. Повышение точности решений разностных схем. - М.: Наука, 1979. - 318с.

80. Матеева Э. И., Пальцев Б.В. О разделении областей при решении краевых задач для уравнения Пуассона в областях сложной формы // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. - 1973. - Т.13, №6. - С.1441-1452.

81. Мацокин А.М. К развитию метода фиктивных компонент // Вычислительные методы линейной алгебры. - Новосибирск, 1973.- С.48-56.

82. Мацокин А.М. Автоматизация триангуляции областей с гладкой границей при решении уравнений эллиптического типа. - Новосибирск, I975. - IIс. - (Препринт / ВЦ СО АН СССР; I5).

83. Мацокин А.М. О построении и методах решения систем вариационно-разностных уравнений: Дис... канд. физ.-мат. наук: 0I.0I.07. - Новосибирск, I975. - II7с.

84. Мацокин А.М. Вриационно-разностный метод решения эллиптических уравнений в круге // Численные методы механики сплошной среды. - I976. - Т.7, №7. - С.54-62.

85. Мацокин А.М. Вариационно-разностный метод решения эллиптических уравнений в трехмерных областях // Вариационно-разностные методы в математической физике. - Новосибирск, I976. - С.I24-I29.

86. Мацокин А.М. Об одном методе решения систем сеточных уравнений // Методы решения систем вариационно-разностных уравнений. - Новосибирск, I979. - С.I36-I38.

87. Мацокин А.М. Метод фиктивных компонент и модифицированный разностный аналог метода Шварца // Вычислительные методы линейной алгебры. - Новосибирск, I980. - С.66-77.

88. Мацокин А.М. Методы фиктивных компонент и альтернирования по подобластям // Вычислительные алгоритмы в задачах математ. физики. - Новосибирск, I985. - С.76-98.

89. Мацокин А.М. Связь метода окаймления с методом фиктивных компонент и методом альтернирования по подпространствам // Дифференциальные уравнения с частными производными. - Новосибирск: Наука, I986. - С.I38-I42.

90. Мацокин А.М. Продолжение сеточных функций с сохранением нормы // Вариационные методы в задачах численного анализа.- Новосибирск, I986. - С.III-I32.

91. Мацокин А.М. Критерий сходимости метода Шварца в гильбертовом пространстве // Вычислительные процессы и системы. Вып. 6. - М.: Наука, 1988.

92. Мацокин А.М. Применение метода фиктивных компонент решения простейшей разностной схемы для эллиптического уравнения четвертого порядка // Вариационно-разностные методы в задачах численного анализа. - Новосибирск, 1987. - С.129-136.

93. Мацокин А.М. Решение сеточных уравнений на нерегулярных сетках - Новосибирск, 1987. - 16с. - (Препринт / ВЦ СО АН СССР; 738).

94. Мацокин А.М., Непомнящих С.В. О сходимости метода альтернирования Шварца по подобластям без налегания // Методы аппроксимации и интерполяции. - Новосибирск, 1981. - С.85-97.

95. Мацокин А.М., Непомнящих С.В. Применение окаймления при решении систем сеточных уравнений // Вычислительные алгоритмы в задачах математической физики. - Новосибирск, 1983. - С. 99-109.

96. Мацокин А.М., Непомнящих С.В. Метод альтернирования Шварца в подпространствах // Изв. Высш. учебных заведений. Математика. - 1985, №10. - С.61-66.

97. Мацокин А.М., Непомнящих С.В. Нормы в пространстве следов сеточных функций. - Новосибирск, 1987. - 33с. - (Препринт / ВЦ СО АН СССР; 737).

98. Мацокин А.М., Скрипко И.Н. Метод фиктивных компонент и смешанные краевые условия // Вычислительные алгоритмы в задачах математической физики. - Новосибирск, 1983. - С.110-119.

99. Михлин С.Г. Об алгоритме Шварца // Докл. АН СССР. - 1951. - Т.77, №4. - С.569-571.

100. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике - М.: Наука, 1970. - С.512.

101. Мокин Ю.И. Прямой метод решения задачи Неймана для уравнения Пуассона // Дифференц. уравнения. - 1984. - Т.20, №7. - С.1247-1253.

102. Мокин Ю.И. Численные методы для интегральных уравнений теории потенциала // Дифференц. уравнения. - 1987. - Т.23, №7. - С.1250-1262.

103. Непомнящих С.В. О применении метода окаймления к смешанной краевой задаче для эллиптических уравнений и о сеточных нормах в $W_2^{1/2}(S)$. - Новосибирск, 1984. - 24с. - (Препринт / ВЦ СО АН СССР; 106).

104. Непомнящих С.В. Декомпозиция области и метод Шварца в подпространстве для приближенного решения эллиптических краевых задач: Дис... канд. физ.-мат. наук : 01.01.07. - Новосибирск, 1986. - 162с.

105. Обэн Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач. - М.: Мир, 1977. - 383с.

106. Оганесян Л.А., Ривкинд В.Я., Руховец Л.А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Часть I // Дифференциальные уравнения и их применение. - Вильнюс, 1973. - Вып.5. - С.1-385.

107. Оганесян Л.А., Ривкинд В.Я., Руховец Л.А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Часть II // Дифференциальные уравнения и их применение. - Вильнюс, 1974. - Вып.8. - С.1-322.

108. Оганесян Л.А., Руховец Л.А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. - Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1979. - 335с.

109. Осмоловский В.Г., Ривкинд В.Л. О методе разделения облас-

тей для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. - 1981. - Т.21, №1. - С.35-39.

110. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. - М.: Наука, 1969. - 176с.

111. Положий Г.Н. Численное решение двумерных и трехмерных задач математической физики и функции дискретного аргумента. - Киев: Киевский университет, 1962. - 161с.

112. Ривкинд В.Я. Приближенный метод решения задачи Дирихле и об оценках скорости сходимости решений разностных уравнений к решениям эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами // Вестн. Ленингр. ун-та. - 1964. - №13. - С.37-52.

113. Рисс Ф., Сёкефальви-Надь. Лекции по функциональному анализу. - М.: Мир, 1979. - 587с.

114. Романова С.Е. Приближенные методы решения разностных уравнений Лапласа и Пуассона на многоугольниках асимптотически за два сложения на точку: Дис... канд. физ.-мат. наук: 01.01.07. - М., 1983. - 166с.

115. Руховец Л.А. Замечание к методу фиктивных областей // Дифференц. уравнения. - 1967. - Т.Ш, №4. - С.698-701.

116. Руховец Л.А. Метод фиктивных областей для решения ВРС для эллиптических уравнений четвертого порядка с естественными краевыми условиями // Вариационно-разностные методы в математической физике - Новосибирск, 1978. - С.45-53.

117. Рябенький В.С., Белянков А.Я. Разностные потенциалы и проекторы // Докл. АН СССР. - 1980. - Т.254, №5. - С.1080-1084.

118. Рябенький В.С. Метод разностных потенциалов для некоторых задач механики сплошных сред. - М.: Наука, 1987. - 320с.

I19. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1977. - 656с.

I20. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. - М.: Наука, 1978. - 59Iс.

I2I. Самарский А.А., Капорин И.Е., Кучеров А.Б., Николаев Е.С. Некоторые современные методы решения сеточных уравнений // Изв. высш. учебных заведений. Математика. - 1983. - №7. - С.3-I2.

I22. Сандер С.А. Модификация алгоритма Шварца для решения сеточных краевых задач в областях, составленных из прямоугольников и прямоугольных параллелепипедов. - Новосибирск, 198I. - 2Iс. - (Препринт / ВЦ СО АН СССР; 83).

I23. Саульев В.К. О решении некоторых краевых задач на быстродействующих вычислительных машинах методом фиктивных областей // Сиб. мат. ж. - 1963. - Т.IУ, №4. - С.9I2-925.

I24. Скороходов А.Л., Агошков В.И., Лебедев В.И. Об оптимальных итерационных алгоритмах решения задачи Неймана для эллиптического уравнения // Численное моделирование физических процессов окружающей среды. - М., 1984. - С.I35-I47.

I25. Смелов В.В. Принцип итерирования по подобластям в задачах с уравнением переноса // Методы решения систем вариационно-разностных уравнений. - Новосибирск, 1979. - С.I39-I58.

I26. Смелов В.В. Обоснование итерационного процесса по подобластям для задач теории переноса в нечетном P_{2N+1} приближении. - Новосибирск, 1980. - 27с. - (Препринт ВЦ СО АН СССР; 7I).

I27. Смелов В.В. Метод сферических гармоник в теории переноса: Дис... докт физ.-мат. наук: 0I.0I.07 - Новосибирск, 198I. - 248с.

I28. Соболев С.Л. Алгоритм Шварца в теории упругости // Докл. АН СССР. - I936. - Т.4(XШ), №6. - С.235-238.

I29. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. - М.: Мир, I977. - 349с.

I30. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. - М.: Мир, I980. - 5I2с.

I3I. Ткачев Ю.А. Алгоритм автоматического построения треугольных сеток для двумерных областей с кусочно-гладкой границей. - Новосибирск, I986. - I2с. - (Рукопись деп. в ВИНИТИ, №8335-В. Деп. от 05.I2.86г.).

I32. Ткачев Ю.А. Алгоритм автоматического построения триангуляции трехмерных областей с гладкой границей // Машинная графика и ее приложения. - Новосибирск, I987. - С.57-69.

I33. Труфанов О.Д. Методы фиктивных компонент и разбиения области для решения волнового уравнения Гельмгольца: Дис... канд. физ.-мат. наук: 0I.0I.07. - М., I987. - I09с.

I34. Федоренко Р.П. О скорости сходимости одного итерационного процесса // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. - I964. - Т.4, №3. - С.559-564.

I35. Федоренко Р.П. Итерационные методы решения разностных эллиптических уравнений // Успехи мат. наук. - I973. - Т.XXУШ, вып.2. - С.I2I-I8I.

I36. Цвик Л.Б. Обобщение алгоритма Шварца на случай областей, сопряженных без налегания // Докл. АН СССР. - I975. - Т.224, №2. - С.309-3I2.

I37. Шаманский В.Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ - Киев: Изд-во АН УССР, I963. - Ч.I. - I96с.

I38. Шварц Л. Анализ. - М.: Мир, I972. - 528с.

I39. Ющук Л.И. Автоматическая триангуляция плоских областей сложной логической структуры при решении краевых задач методом конечных элементов // Вычислительная и прикладная математика. - Киев, I987. - №6I. - С.74-83.

140. Axelsson O., Gustafsson I. Preconditioning and two-level multigrid methods of arbitrary degree of approximation // Math. Comput. - 1983. - Vol.40, N 161. - P. 219-242.

141. Banegas A. Fast Poisson solvers for problems with sparsity. // Math. Comput. - 1978. - Vol. 32, N 142. - P. 441-446.

142. Bjorstad P.E., Widlund O.B. Iterative methods for the solution of elliptic problems on regions partitioned into substructures. - N.Y., 1984. - 46p. - (Techn. Rep. / Comput. Sci. Dep., N.Y. Univers.; 136).

143. Bjorstad P.E., Widlund O.B. Iterative methods for the solution of elliptic problems on regions partitioned into substructures // SIAM J. Numer. Anal. - 1986. - Vol. 23, N 6. - P. 1097-1120.

144. Bramble J.H., Pasciak J.E., Schatz A.H. An iterative method for elliptic problems on regions partitioned into substructures // Math. Comput. - 1986. - Vol. 46, N 174. - P. 361-369.

145. Bramble J.H., Pasciak J.E., Schatz A.H. The construction of preconditioners for elliptic problems by substructuring. I // Math. Comput. - 1986, - Vol. 47, N 175. - P. 103-134.

146. Buzbee B., Golub G., Nielson C. On direct methods for solving Poisson's equations // SIAM J. Numer. Anal. - 1970. - Vol. 7, N 4. - P. 627-656.

147. Buzbee B.L., Dorr F.W., George J.A., Golub G.H. The direct solution of the discrete Poisson equation on irregular regions // SIAM J. Numer. Anal. - 1971. - Vol. 8, N 4. - P. 722-736.

148. Cooley J.W., Lewis P.A., Welch P.D. The fast Fourier transform algorithm and its applications // IBM Res. Pap. - 1967. - Feb., RC - 1743.

149. Dihn Q.V., Glovinski R., Periaux J. Solving elliptic problems by domain decomposition methods with applications // Elliptic problems solver II. - 1984: Acad. Press, 1984. P. 395-426.

150. Dryja M. A finite element - capacitance matrix method for the elliptic problem // SIAM J. Numer. Anal. - 1983. - Vol. 20, N 4. - P. 671-680.

151. Dryja M. A finite element - capacitance method for elliptic problems on regions partitioned into substructires // Numer. Math. - 1984. - Vol. 44. - P. 153-168.

152. Dryja M., Proskurowski W. Capacitance matrix method using strips with alternating Neumann and Dirichlet boundary conditions // Appl. Numer. Math. - 1985. - Vol. 1. - P. 285-298.

153. Dryja M., Proskurowski W., Widlund O. Method of domain decomposition with cross points for elliptic finite element problems // Optimal Algorithms. - Sofia, 1986. - P. 97-111.

154. O'Leary D.P., Widlund O. Capacitance matrix method for the Helmholtz equation on general three dimensional regions // Math. Comput. - 1979. - Vol. 33. - P. 849-879.

155. Marchuk G.I., Kuznetsov Yu.A., Matsokin A.M. Fictitions domain and domain decomposition methods // Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling. - 1986. - Vol. 1, N 1. - P. 3-35.

156. Matsokin A.M. Method of fictitions components and the alternating-subdomains method // Vistas in Applied Mathematics. Numer. Anal., Atmospheric Sciences. Immunology. - N.Y., 1986. - P. 127-144.

157. Proskurowski W. Numerical solution of Helmholtz's equation by implicit capacitance matrix methods // ACM Trans. on Math. Software. - 1979. - Vol. 5, N 1. - P. 36-49.

158. Proskurowski W., Widlund O. On the numerical solution of Helmholtz equation by the capacitance matrix method // Math. Comput. - 1976. - Vol 30. - P. 433-468.

159. Proskurowski W., Widlund O. A finite element-capacitance matrix method for the Neumann problem for Laplace's equation // SIAM J. Sci. Stat. Comput. - 1980. - Vol. 1. - P. 410-425.

160. Saltzer Ch. An abridged block method for the solution of the Dirichlet problem for the Laplace difference equation // J. Math. and Phys. - 1953. - Vol. 32, N 1. - P. 63-67.

161. Widlund O. Capacitance matrix method for Helmholtz's equation on general bounded regions // Lect. Notes Math. - 1978, N 631. - P. 209-219.

162. Widlund O. An Extension Theorem for Finite Element Space with three applications. - N.Y., 1986. - 13p. - (Techn. Rep. / N.Y. Univ. Depart. Comput. Sci.; 233).

163. Widlund O. Iterative substucturing methods: Algorithms and theory for elliptic problems in the plane. - N.Y., 1987. - 18p. - (Techn. Rep. / N.Y. Univ. Depart. Comput. Sci.; 287).

164. Кучеренко В.В. Численное решение эллиптических задач методом проекций на последовательности сеток //Докл. АН СССР. - 1986. - Т.287, №4. - С.781-785.

Приложение

§ 1. Численные эксперименты по методу фиктивных компонент

Целью описываемых ниже экспериментов является подтверждение основных результатов третьей главы диссертации о сходимости метода фиктивных компонент на примере решения систем вариационно-разностных уравнений, аппроксимирующих модельные задачи

$$-\Delta u(x,y) = f(x,y) \quad (x,y)\in\Omega, \qquad \text{(П1.1)}$$

$$u(x,y) = 0 \quad (x,y)\in\partial\Omega, \qquad \text{(П1.2)}$$

или

$$u(x,y) = 0 \quad (x,y)\in\Gamma_0,$$
$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial n} = 0 \quad (x,y)\in\Gamma_1. \qquad \text{(П1.3)}$$

Здесь Ω - L -образная область:

$$\Omega = \{(x,y):\ 0<x,y<1\}\setminus\{(x,y):\ 0<x,y\le 0.5\},$$

$$\Gamma_1 = \{(x,y):\ x=0.5,\quad 0<y<0.5\},$$

$$\Gamma_0 = \partial\Omega\setminus\Gamma_1.$$

Предполагается, что в Ω построена квадратная сетка с шагом $h=1/(n+1)$, где n - нечетное целое число, а каждая ячейка триангулирована, в результате чего имеем сеточную триангулированную область Ω_h, которую естественным образом можно расширить до триангуляции D_h единичного квадрата

$$D = \{(x,y):\ 0<x,y<1\}.$$

Используя кусочно-линейные восполнения на Ω_h, построим методом конечных элементов систему вариационно-разностных уравнений

$$A_h u_h = f_h \,, \qquad \text{(ПI.4)}$$

аппроксимирующую задачу (ПI.I) - (ПI.2). Обозначим через B_h матрицу аналогичной системы, но для задачи (ПI.I) - (ПI.2) в области D :

$$B_h = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}, \qquad B_{11} = A_h \,.$$

Тогда метод фиктивных компонент с симметричным расширением (ПI.4) имеет вид:

$$B_h (U_h^{k+1} - U_h^k) = -\tau_k \left(\begin{bmatrix} A_h & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U_h^k - \begin{bmatrix} f_h \\ 0 \end{bmatrix} \right), \qquad \text{(ПI.5)}$$

а с несимметричным расширением имеет вид:

$$B_h (U_h^{k+1} - U_h^k) = -\tau_k \left(\begin{bmatrix} A_h & B_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} U_h^k - \begin{bmatrix} f_h \\ 0 \end{bmatrix} \right), \qquad \text{(ПI.6)}$$

где A_{22} - матрица задачи (ПI.I), (ПI.3) в $D \setminus \bar{\Omega}$ при $\Gamma_0 = \partial\Omega \cap \partial(D \setminus \bar{\Omega})$. Из теоремы IС.3 следует, что сходимость процесса (ПI.5) зависит от h , а из теоремы II.2 следует, что сходимость процесса (ПI.6) не зависит от h , если $\tau_0 = 1$, а остальные параметры выбираются по формулам метода сопряженных градиентов. В таблице I приведено число итераций этих процессов, потребовавшихся для уменьшения энергетической нормы начальной ошибки в 10^5 раз при различных h . В качестве точного решения задачи (ПI.4) было взято

$$u_h(x,y) = (\sin \pi x \cdot \sin \pi y + \sin n\pi x \cdot \sin n\pi y) \times e^{x+y}.$$

Таблица I

Метод \ $n+1$	8	I6	32	64	I28
(ПI.5)	5	5	6	7	9
(ПI.6)	4	5	6	6	6

Приведенные данные подтверждают результаты теорем I0.3 и II.2.

Теперь предположим, что система (ПI.4) аппроксимирует задачу (ПI.I), (ПI.3) со смешанными краевыми условиями. Тогда для ее решения можно использовать либо итерационный процесс (ПI.5), сходимость которого зависит от h , либо двухступенчатый процесс (II.27), скорость которого в соответствии с теоремой II.3 не зависит от h , но число внутренних итераций $k = O(\ln h)$. При построении итерационного процесса (II.27) область D представлялась в виде

$$\bar{D} = \bar{\Omega} \cup \bar{G}_1 \cup \bar{G}_2 ,$$

$$G_1 = \{(x,y): \quad 0 < y < x < 0.5\},$$

$$G_2 = D \setminus \{\bar{\Omega} \cup \bar{G}_1\}$$

В таблице 2 приводится количество итераций процессов (ПI.5) и (II.27), потребовавшихся для уменьшения энергетической нормы начальной ошибки в 10^5 раз. В скобках указано число внутренних итераций процесса (II.27), причем это число выбиралось по основе оценок § II (вторая строка таблицы) и вдвое меньшим (третья строка таблицы).

Таблица 2

Метод \ $n+1$	8	I6	32	64	I28
(ПI.5)	7	7	9	II	I3
(II.27)	5 (6)	5 (7)	5 (8)	5 (8)	5 (9)
(II.27)	5 (3)	6 (4)	6 (4)	7 (4)	7 (5)

Приведенные подтверждают результаты теорем I0.3 и II.3, но общее число внутренних итераций процесса (II.27) превышает число итераций процесса (ПI.5). Т.е. для рассмотренной модельной задачи и значений параметра h процесс (ПI.5) оказался эффективнее процесса (II.27). Заметим, что при малых значениях h количество итераций процесса (ПI.5) для уменьшения ошибки в ε^{-1} раз имеет порядок $O(\sqrt{h}\,\ln\varepsilon)$, а процесса (II.27) – $O(\ln h.\ln\varepsilon)$, т.е. для достаточно больших n второй процесс будет эффективнее первого.

§ 2. Численные эксперименты по методам альтернирования по подпространствам

Предположим, что система (I8.I)

$$A_h u_h = f_h \tag{П2.I}$$

аппроксимирует задачу

$$\begin{aligned} -\Delta u(x,y) &= f(x,y) \quad (x,y)\in D, \\ u(x,y) &= 0 \quad (x,y)\in \partial D, \end{aligned} \tag{П2.2}$$

где D – единичный квадрат, в пространстве кусочно-линейных восполнений на регулярной триангуляции D_h , состоящей из прямоугольных треугольников с катетами $h = 1/(n+1)$. Следуя методике, изложенной в § I8, разобъем D_h на макроэлементы с вершинами из D_{2h} и построим матрицу $A_{1,h}$ из (I8.28), где $B_{0,h} = 3 \cdot A_{2 \cdot h}$. Тогда основным результатом § I8 является независимость от h скорости сходимости метода альтернирования по подпространствам (I7.7):

$$A_{1,h}(u_h^{k+1} - u_h^k) = -\tau_k (A_h u_h^k - f_h) \qquad (\text{П2.3})$$

при подходящем выборе параметров τ_k .

Так как матрицы $A_{1,h}$ и A_h симметричны и положительно определены этот факт можно экспериментально подтвердить, вычислив минимальное λ_{min} и максимальное λ_{max} собственные значения матрицы $A_{1,h}^{-1} A_h$ и их отношение $cond = \lambda_{max} / \lambda_{min}$. Последняя величина должна ограничиваться сверху независящей от h постоянной. В таблице 3 приведены для конкретных значений h эти характеристики, для получения которых был использован степенной метод.

Таблица 3

h^{-1}	λ_{min}	λ_{max}	cond
II	I.27	6.62	5.20
2I	I.2I	6.77	5.60
3I	I.I9	6.78	5.68
4I	I.I9	6.80	5.73
5I	I.I8	6.8I	5.75
6I	I.I8	6.8I	5.76

Представленные в таблице 3 данные подтверждают справедливость результатов § I8.

В заключение опишем более сложный эксперимент, подтверждающий справедливлсть результатов последнего параграфа диссертации. В области

$$\Omega = \{ (x,y): \quad -1 < x, y < 1 \}$$

рассматривалась краевая задача

$$\begin{aligned} -\rho(x,y) \cdot \Delta u(x,y) &= f(x,y) \quad (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) &= 0 \quad (x,y) \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{П2.4}$$

где функция $\rho(x,y)$ постоянна в каждой подобласти из разбиения Ω координатными осями: $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2 \cup \bar{\Omega}_3 \cup \bar{\Omega}_4$. Условимся считать, что значение функции $\rho(x,y) = \rho_i$ в подобласти Ω_i , $i = 1, \dots, 4$, а сами подобласти занумерованы в порядке вращения вокруг начала координат против часовой стрелки.

Аппроксимируя задачу (П2.4) методом конечных элементов в пространстве кусочно-линейных восполнений на регулярной триангуляции Ω_h с шагом $h = 1/(n+1)$, получим систему пятиточечных уравнений

$$A_h u_h = f_h \tag{П2.5}$$

с матрицей вида (I9.4). Полагая матрицу B_h из (I9.7) равной A_h , рассмотрим два варианта метода альтернирования по подпространствам (I9.I5):

$$\tilde{B}_h (u_h^{k+1} - u_h^k) = -\tau_k (A_h u_h^k - f_h) \tag{П2.6}$$

с матрицей $\tilde{B}_h$ из (I9.I3), в которой подматрица $\tilde{\Lambda}$ определяется по формуле (I9.37), и

$$\bar{B}_h(u_h^{k+1}-u_h^k)=-\tau_k(A_h u_h^k - f_h) \qquad (\text{П2.7})$$

с матрицей $\bar{B}_h = \tilde{B}_h$, в которой $\hat{\Lambda}=\bar{\Lambda}$ из (I9.63).

Из теоремы I9.I следует, что $\mathrm{cond}(\tilde{B}_h^{-1}A_h)$ (соотношение максимального к минимальному собственному числу) является величиной порядка $O(\ln^2 h)$ и не зависит от коэффициента $p(x,y)$ задачи (П2.4).

Из теоремы I9.5 следует, что $\mathrm{cond}(\bar{B}_h^{-1}A_h)$ не зависит от h и коэффициентов p_1, p_2, p_3, p_4, если последние образуют монотонную последовательность.

В таблицах 4 и 5 приведены эти характеристики для различных значений $h = 1/(n+1)$ и трех вариантов функции $p(x,y)$:

$p(x,y) = p_{I} \equiv 1$;

$p(x,y) = p_{II}$: $p_1 = 1,\ p_2 = 10,\ p_3 = 10^2,\ p_4 = 10^3$;

$p(x,y) = p_{III}$: $p_1 = p_3 = 1,\ \ p_2 = p_4 = 10^2$.

Собственные значения были вычислены с помощью QR алгоритма.

Таблица 4

$n+1$	$5.87\cdot\ln(n+1)$	$\mathrm{cond}(\tilde{B}_h^{-1}A_h)$	$2.12\cdot\ln(n+1)$
4	8.I4	7.59	4.07
8	I2.2I	II.58	9.I6
I6	I6.28	I6.28	I6.28
32	20.35	2I.66	25.44
64	24.42	27.68	36.63

Границы спектра матрицы $\tilde{B}_h^{-1} A_h$ совпали для всех трех вариантов коэффициентов $p(x,y)$. Для большей наглядности в таблице 4 приведены значения функций $c_1 \ln h^{-1}$ и $c_2 \ln^2 h^{-1}$. В целом данные таблицы 4 подтверждают справедливость теоремы I9.I.

Таблица 5

$n+1$	$cond\ (\bar{B}_h^{-1} A_h)$			$cond$
	p_I	p_{II}	p_{III}	
4	3.94	3.94	4.38	I.92
8	3.77	3.77	5.54	2.69
I6	3.67	3.67	6.89	3.59
32	3.60	3.65	8.43	4.62
64	3.55	3.73	I0.I4	5.76

Анализ поведения $cond(\bar{B}_h^{-1} A_h)$ в зависимости от $h = 1/(n+1)$ подтверждает независимость этой характеристики от h и коэффициента $p(x,y) = p_I$ и $p(x,y) = p_{II}$, что соответствует утверждению теоремы I9.5. Однако поведение этой характеристики при $p_1 = p_3$, $p_2 = p_4$ явно зависит от h, что может привести к выводу о несправедливости теоремы I9.5. Детальный анализ этой части эксперимента показал, что поведение $cond\ (\bar{B}_h^{-1} A_h)$ при $p_1 = p_3 = 1$, $p_2 = p_4 = 100$ совпадает с поведением отношения $cond$ максимально (не равного I00) и минимального (не равного I) собственных значений матрицы $\Delta_h^{-1} A_h$, где Δ_h совпадает с матрицей A_h при $p(x,y) \equiv 1$. В последнем столбце таблицы 5 приведены значения этой характеристики, $cond$ почти линейно растет, но так как $cond \le cond\ (\Delta_h^{-1} A_h) \le 100$

для любого h , данные таблицы 5 свидетельствуют только о том, что в этом случае реальные значения $cond(\bar{B}_h^{-1} A_h)$ при $h < 64$ меньше оценки из теоремы I9.5. Таким образом данные таблицы 5 подтверждают справедливость утверждений теоремы I9.5.

И наконец, в таблицах 6-8 приведены количество итераций и затраченное время процессора (в секундах) для уменьшения энергетической нормы начальной ошибки в 10^4 раз методами верхней релаксации, (П2.6) и (П2.7), реализованных по формулам обобщенных методов наискорейшего спуска и сопряженных градиентов. Начальная ошибка выбиралась по формуле

$$\psi^0(x,y) = (1.5 \sin \pi x \cdot \sin 3\pi y + 0.1 \sin 5\pi x \cdot \sin 7\pi y)\, e^{x+1.57y}$$

Аналогичные результаты были получены и для других начальных приближений. Результаты проведенных экспериментов показывают, что методы альтернирования по подпространствам эффективнее метода верхней релаксации только при достаточно больших n .

Все эксперименты были проведены на ЭВМ БАРРОУЗ-6700, большую помощь при этом оказали автору к.ф.-м.н. С.В.Непомнящих и м.н.с. Ю.А.Ткачев.

Таблица 6

P_I / $n+1$	Метод верхней релаксации		Метод наискорейшего спуска				Метод сопряженных градиентов			
			(П2.6)		П(2.7)		(П2.6)		П(2.7)	
	К-во итер.	время	к-во итер.	время	к-во итер.	время	к-во итер.	время	к-во итер.	время
4	I5	0.7	I9	4.I	II	2.5	5	I.2	7	I.8
8	3I	4.7	25	2I	II	9.7	6	5.4	8	7.8
I6	63	37	38	I44	II	43	7	28	7	29
32	I27	295	5I	862	II	I85	7	I22	8	I46
64	255	2365	58	4200	II	793	8	6I4	8	640

Таблица 7

$P_{\overline{II}}$ / $n+1$	Метод верхней релаксации		Метод наискорейшего спуска				Метод сопряженных градиентов			
			(П2.6)		П(2.7)		(П2.6)		(П2.7)	
	к-во итер.	время	к-во итер.	время	к-во итер.	время	к-во итер.	время	к-во итер.	время
4	I6	0.7	22	4.8	II	2.5	5	I.2	7	I.8
8	32	4.9	32	27.6	I3	II.0	6	5.4	7	6.8
I6	63	37	38	I44	II	4I	7	28	7	29
32	I25	290	57	960	I2	I97	7	I22	8	I46
64	249	23I0	72	5300	II	775	8	6I4	8	640

Таблица 8

$p_{\overline{III}}$	Метод верхней релаксации		Метод наискорейшего спуска				Метод сопряженных градиентов			
			(П2.6)		(П2.7)		(П2.6)		(П2.7)	
$p+1$	к-во итер.	время	к-во итер.	время	к-во итер.	время	к-во итер.	время	к-во итер.	время
4	I4	0.6	I9	4.I	I2	2.7	6	I.4	7	I.8
8	29	4.4	30	26	I4	I2.0	8	7.2	9	8.7
I6	57	33	40	I56	I7	57	8	3I.8	9	37
32	II3	262	53	897	I9	320	I0	I75	I0	I82
64	225	2093	60	4500	22	I586	II	840	II	877