Элементарная конструкция штребелевых дифференциалов

©2010 А.Б. Богатырёв *

Глобальное поведение траекторий регулярного квадратичного дифференциала на компактной римановой поверхности хаотично, за исключением одного случая. Когда критический граф слоения компактен, его дополнение является конечным набором цилиндров, расслоенных на гомотопные замкнутые траектории [7]. Подобные дифференциалы возникают при решении экстремальных задач геометрической теории функций [5], при разбиении декорированного пространства модулей кривых на клетки (перечисляемые ленточными графами) [6] и в ряде других задач. За такими дифференциалами закрепилось название дифференциалов Дженкинса-Штребеля ч по имени ученых, доказавших их существовование в 1950-1960 гг [1, 2, 3, 4]. Позже более простое доказательство представил Вольф [8]. Все упомянутые результаты являются чистыми теоремами существования и имеется очень немного явных конструкций таких дифференциалов. Некоторые однопараметрические семейства штребелевых дифференциалов явно описаны в [10, 11]. Конечно, дифференциалы Дженкинса-Штребеля не являются какой-то редкостью (они плотны в пространстве квадратичных дифференциалов), однако проверка замкнутости траекторий не столь проста.

В данном сообщении мы приведем явную многопараметрическую конструкцию штребелевых дифференциалов на вещественных алгебраических кривых. Квадрат всякого вещественного голоморфного дифференциала 1-го рода, подчиненного явным линейным ограничениям, оказывается штребелевым.

Пусть на компактной римановой поверхности X рода g действует антиконформная инволюция $\bar{J}$ (отражение). Компоненты множества неподвижных точек этой инволюции являются гладкими замкнутыми кривыми [9] и называются вещественными овалами. Отражение естественно действует на $2g$-мерном вещественном пространстве одномерных гомологий поверхности и расщепляет его в сумму подпространств, отвечающих собственным числам ± 1 оператора $\bar{J}$:

$$\mathbb{R}^{2g} \cong H_1(X,\mathbb{R}) = H_1^+(X,\mathbb{R}) \oplus H_1^-(X,\mathbb{R}), \qquad H_1^{\pm}(X,\mathbb{R}) := (I \pm \bar{J})H_1(X,\mathbb{R}). \tag{1}$$

Циклы $C = \bar{J}C$ пространства $H_1^+(X)$ будем называть *чётными*. Соответственно, циклы $C = -\bar{J}C$ пространства $H_1^-(X)$ назовем *нечётными*. Пространства чётных и нечётных

*Поддержано грантами РФФИ 10-01-00407, 09-01-12160 и программой ОМН РАН "Современные проблемы теоретической математики"

циклов содержат решётки целых циклов $H_1^\pm(X,\mathbb{Z}) := H_1^\pm(X,\mathbb{R}) \cap H_1(X,\mathbb{Z})$ полного ранга. Четными целыми циклами например являются ориентированные вещественные овалы кривой.

На пространстве $H_1(X,\mathbb{R})$ имеется невырожденная косая билинейная форма ч индекс пересечения циклов. Поскольку отражение $\bar{J}$ меняет ориентацию в каждой точке пересечения целых циклов, то

$$\bar{J}C_1 \circ \bar{J}C_2 = -C_1 \circ C_2, \qquad C_1, C_2 \in H_1(X,\mathbb{R}). \tag{2}$$

Отсюда несложно вывести, что подпространства чётных и нечётных циклов ч лагранжевы (т.е. ограничение на них формы пересечений ч нулевое), а их размерности совпадают и равны g.

Пространство $\Omega^1(X) \cong \mathbb{C}^g$ голоморфных дифференциалов на кривой содержит подпространство т.н. вещественных дифференциалов $\Omega^1_\mathbb{R}(X) \cong \mathbb{R}^g$, которые при отраженнии переходят в комплексно сопряженные $\bar{J}^*\eta = \overline{\eta}$, $\eta \in \Omega^1_\mathbb{R}(X)$. Интегралы от вещественных дифференциалов по четным (соотв. нечетным) циклам являются являются вещественными (соотв. чисто мнимыми) числами:

$$\int_C \xi = \int_{\pm\bar{J}C} \xi = \pm \int_C \bar{J}^*\xi = \pm \int_C \bar{\xi} = \pm \overline{\int_C \xi}.$$

Пример. Пусть кривая X задана уравнением $P(x,y) = 0$ с вещественным многочленом P. Она допускает отражение $\bar{J}(x,y) := (\bar{x},\bar{y})$, а вещественные дифференциалы имеют вид $\frac{Q(x,y)}{P_y(x,y)}dx$ с подходящим вещественым многочленом Q.

Л е м м а 1 *Простанство $(H_1^-(X,\mathbb{R}))^* \cong \mathbb{R}^g$ вещественных линейных функционалов над нечетными циклами канонически изоморфно следующим двум пространствам:*
(i) $H_1^+(X,\mathbb{R})$; *(ii) $\Omega^1_\mathbb{R}(X)$*

(i). В этом случае функционал задается формой пересечений. Из невырожденности этой формы следует, что четный цикл обнуляющий все нечетные сам является нулем.
(ii). В этом случае функционал задается формулой

$$\langle \eta | C^- \rangle := i \int_{C^-} \eta, \qquad C^- \in H_1^-(X)$$

Если вещественный дифференциал обнуляет все нечетные циклы, то все его периоды являются вещественными. Такой дифференциал равен нулю.

Замечания: 1) Дя нормировки абелевых дифференциалов обычно используют половину канонического базиса в гомологиях: A-циклы или B-циклы. Из утверждения (ii) леммы можно вывести, что на поверхности, допускающей отражение, в качестве нормировочных можно брать четные или нечетные циклы. Обобщая это наблюдение, покажем, что для нормировки дифференциалов можно использовать любое лагранжево подпространство размерности g в гомологиях, т.е. на кривой существует единственный голоморфный дифференциал с заданными периодами на базисе в таком подпространстве.
Выберем базис $C_1, C_2, \ldots, C_{2g}$ в пространстве вещественных гомологий кривой X так, чтобы его первые g элементов лежали в лагранжевом подпространстве. Мы не предполагаем,

что базис является каноническим или целым. Справедливо билинейное соотношение Римана

$$0 \le ||\eta||^2 = i\int_X \eta \wedge \overline{\eta} = -i\sum_{s,j=1}^{2g} F_{sj}\int_{C_s}\eta\overline{\int_{C_j}\eta}, \tag{3}$$

где матрица F_{sj} обратна матрице пересечений $C_s \circ C_j$. Если $\int_{C_j}\eta = 0$ при $j = 1, \ldots, g$, то в сумме в правой части остаются члены с $s, j > g$. Но в этом случае $F_{sj} = 0$. Действительно, матрица пересечений имеет блочную 2×2 структуру с нулевым блоком размера $g \times g$ в позиции (1,1). Обратная матрица имеет нулевой блок того же размера в позиции (2,2). Как видим, только нулевой голоморфный дифференциал имеет нулевые периоды вдоль всех циклов нашего лагранжва подпространства.
2) Сопоставляя оба утверждения леммы, мы видим, что имеется взаимно-однозначное соответствие между четными циклами C^+ и вещественными дифференциалами η на кривой по правилу

$$i\int_C \eta = C^+ \circ C, \qquad \forall C \in H_1^-(X,\mathbb{R}).$$

Для четных циклов C это равенство уже не выполняется, поэтому речь идет не о двойственности Пуанкаре.
3) Пусть на кривой X имеется k вещественных овалов. Их линейная оболочка в пространстве гомологий имеет размерность k, если кривая с выброшенными овалами не распадается на компоненты. В противном случае эта размерность на единицу меньше. Мы покажем, что соответствующее подпространство вещественных дифференциалов порождает штребелевы слоения.

Т е о р е м а 1 *Пусть интеграл вещественного голоморфного дифференциала η по нечетному циклу C^- равен нулю, если индекс пересечения C^- с любым вещественным овалом равен нулю. Тогда слоение $\eta^2 > 0$ – штребелево.*

Доказательство. Разрежем нашу поверхность по вещественным овалам. На возникшей поверхности с краем корректно определена следующая функция:

$$H(x) := Im \int_*^x \eta, \qquad x \in X \setminus \{\text{вещественные овалы}\}.$$

Действительно, если замкнутый путь C не пересекает вещественные овалы, то

$$2Im\int_C \eta = Im\int_{C-\bar{J}C}\eta = 0$$

по условию теоремы, так как $(C - \bar{J}C) \circ C^+ = 2C \circ C^+ = 0$ для всякого вещественного овала C^+.

Эта глобально определенная функция локально постоянна на краях разрезанной поверхности, а ее линии уровня являются листами слоения $\eta^2 > 0$ – см. рис. 1.

Пример. Рассмотрим гиперэллиптическую кривую, у которой все точки ветвления вещественны, за исключением быть может двух, которые в таком случае комплексно сопряжены. Ее вещественные овалы порождают все пространство четных циклов, поэтому

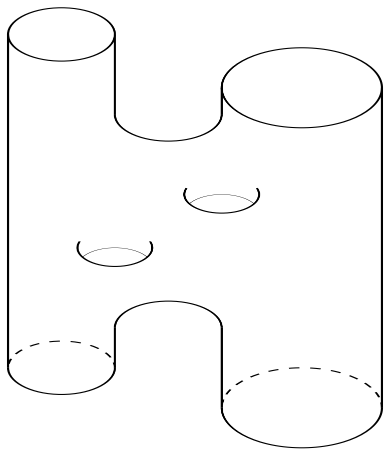

Рис. 1: Функция $H(x)$ как функция высоты на разрезанной поверхности.

его аннулятор тривиален. В силу теоремы, квадрат любого голоморфного вещественного дифференциала на такой кривой ч штребелев. Для общих вещественных гиперэллиптических кривых базисы в решетках четных и нечетных целых циклов рассмотрены в [12] и позволяют явно описать аннулятор всех вещественных овалов в пространстве нечетных циклов.

Список литературы

[1] Jenkins J.A. On the existence of certain general extremal metrics// Ann. of Math. 66 (1957), 440-453.

[2] Jenkins J.A. On the existence of certain general extremal metrics II// Tohoku Math.J 45:2 (1993), 249-257.

[3] Strebel, K., Über quadratishe Di«erentiale mit geschlossenen Trajektorien und extremale quasiconforme Abbildungen// Festband zum 70 Geburtstag von rolf Nevanlinna, Springer (1966), 105-127.

[4] Strebel, K., Bemerkungen über quadratishe Di«erentiale mit geschlossenen Trajektorien// Ann. Acad. Sci Fenn. A.I., 405 (1967), 1ч12.

[5] Кузьмина, Г. В. Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы ч Тр. МИАН СССР, 139 (1980), 3ч241

[6] Концевич, М. Л. Теория пересечений на пространстве модулей кривых//Функц. анализ и его прил., 25:2 (1991), 50ч57

[7] Strebel, K., Quadratic di«erentials, Springer , 1984.

[8] Wolf M., On the existence of Jenkins-Strebel di«erentials using harmonic maps from surfaces to graphs// Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math., 20 (1995), 269 ч 278

[9] Натанзон С.М., Модули римановых поверхностей, вещественных кривых и их суператналогов ч М., Изд-во МЦНМО, 2001

[10] Н.Я.Амбург, Пример регулярного штребелева дифференциала// УМН, 57:5 (2002), 145-146

[11] И.В.Артамкин, Ю.А.Левицкая, Г.Б.Шабат, Примеры семейств штребелевых дифференциалов на гиперэллиптических кривых// Функ. Анализ Прил., (2009) , 73-75.

[12] Богатырев, А.Б., Чебышевская конструкция для рациональных функций// Математический Сборник, 201:11, 2010.