

УДК 517.545+517.518.826

А. Б. Богатырёв

Представление пространств модулей кривых и вычисление экстремальных многочленов

Классические многочлены Чебышёва и Золотарёва – это две первые ступени в иерархии экстремальных многочленов (ЭМ), являющихся типичными решениями задач об условной минимизации равномерной нормы в пространстве многочленов. В общем случае такие многочлены связаны с вещественными гиперэллиптическими кривыми, род которых нумерует ступени иерархии. В работе рассматриваются представления пространств модулей этих кривых в приложении к вычислению экстремальных многочленов. Униформизуя кривые специальными группами Шоттки, мы получаем эффективно вычисляемые параметрические выражения для ЭМ в терминах линейных рядов Пуанкаре.

Библиография: 12 названий.

§ 1. Введение

Полтора века назад П. Л. Чебышёв и его школа стали рассматривать задачи об условной минимизации на пространстве вещественных многочленов $P(x)$ величины *уклонения* $\|P\|_E := \max_{x \in E} |P(x)|$, где E – компакт на вещественной оси. Типичные связи в такой задаче – это ограничение сверху степени $n = \deg P$ многочлена и фиксации значений его производных $P^{(m)}(x)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, в выбранных точках $x \in \mathbb{C}$.

Сегодня интерес к задачам наименьшего уклонения связан, например, с оптимизацией численных методов и обработкой сигналов. Итерационные методы условной минимизации уклонения (см. ссылки в [1]) становятся весьма трудоемкими при большой степени n решения. От этого недостатка свободен классический подход, при котором решение принято давать в виде явной формулы. Первые задачи о наименьшем уклонении были решены в терминах параметрических выражений (П. Л. Чебышёв, 1853, и Е. И. Золотарёв, 1868 [2]):

$$T_n(u) := \cos(nu), \quad x(u) := \cos(u), \quad u \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

$$Z_n(u) := \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{H(a+u)}{H(a-u)} \right]^n + \left[\frac{H(a-u)}{H(a+u)} \right]^n \right\}, \quad x(u) := \frac{\operatorname{sn}^2(u) + \operatorname{sn}^2(a)}{\operatorname{sn}^2(u) - \operatorname{sn}^2(a)}, \quad u \in \mathbb{C}, \quad (2)$$

где $H(\cdot)$ – эллиптическая тэта-функция в (устаревших) обозначениях Якоби, $\operatorname{sn}(\cdot)$ – эллиптический синус того же модуля $k \in (0, 1)$, $a := mK(k)/n$, $m = 1, 2, \dots, n-1$, – фазовый сдвиг, $K(k)$ – полный эллиптический интеграл модуля k .

Работа выполнена при поддержке Фонда содействия отечественной науке и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00651).

Выражения T_n, Z_n являются многочленами степени n от переменной x и удовлетворяют следующему определению. Вещественный многочлен назовем (*нормированным*) *экстремальным*, если все его критические точки, за исключением немногих g из них, простые со значениями ± 1 . Для многочленов Чебышёва T_n параметр $g = 0$, для многочленов Золотарёва Z_n $g = 1$. Теория общих экстремальных многочленов для $g = 0, 1, 2, \dots$ разработана в [1]. Приведем необходимые сведения о представлении таких многочленов.

Восходящее к Чебышёву построение сопоставляет вещественному многочлену $P_n(x)$ вещественную гиперэллиптическую кривую

$$M = M(\mathbf{e}) := \left\{ (x, w) \in \mathbb{C}^2 : w^2 = \prod_{s=1}^{2g+2} (x - e_s) \right\}, \quad \mathbf{e} := \{e_s\}_{s=1}^{2g+2}, \quad (3)$$

дивизор ветвления \mathbf{e} которой – это нули нечетного порядка многочлена $P_n^2(x) - 1$. Если многочлен $P_n(x)$ – нормированный экстремальный, то род g кривой M невелик и равен количеству исключительных критических точек многочлена при их правильном подсчете. Многочлен степени n по связанной с ним кривой (3) можно с точностью до знака восстановить по явной формуле, обобщающей (1), (2):

$$P_n(x) = \pm \cos \left(ni \int_{(\epsilon, 0)}^{(x, w)} d\eta_M \right), \quad x \in \mathbb{C}, \quad (x, w) \in M, \quad (4)$$

где $d\eta_M := \prod_{s=1}^g (x - c_s) \frac{dx}{w}$ – абелев дифференциал с чисто мнимыми периодами.

Кривая (3), сопоставляемая многочлену степени n , удовлетворяет системе уравнений Абеля

$$-i \int_{C_s^-} d\eta_M = 2\pi \frac{m_s}{n}, \quad s = 0, 1, \dots, g, \quad (5)$$

где $\{C_s^-\}_{s=0}^g$ – базис в решетке целочисленных 1-циклов кривой M , меняющих знак при ее антиконформной инволюции $\bar{J}(x, w) := (\bar{x}, \bar{w})$, а m_s – целые числа, область изменения которых определена в [3].

Настоящая работа преследует две цели:

- (А) *эффективно решать уравнения Абеля (5) в пространстве модулей кривых M ;*
- (Б) *эффективно вычислять по формуле (4) экстремальные многочлены и их производные разных порядков – для подчинения связям задачи о наименьшем уклонении.*

Эти цели для частного случая многочленов Чебышёва на нескольких отрезках были решены в [4] при помощи униформизации рассматриваемых кривых M группами Шоттки. Перенос этой же техники на общий случай наталкивается на более сложное топологическое устройство пространства модулей кривых (3). Компонента этого пространства гомеоморфна произведению клетки на конфигурационное пространство (полу)плоскости, а ее фундаментальная группа – это группа кос Артина. Поставленные нами задачи (А), (Б) предполагают организацию итерационных вычислительных процессов на пространствах модулей, для чего проводится их аналитическая униформизация.

§ 2. Представления пространства модулей

Вещественные гиперэллиптические кривые (3), порожденные многочленами, выделяются уравнениями Абеля (5), которые глобально заданы на универсальной накрывающей пространства модулей кривых. На предмет исследования полезно взглянуть с разных сторон, поэтому мы дадим четыре определения этого пространства и покажем их эквивалентность. Стандартно *универсальную накрывающую пространства модулей* определяют как множество дивизоров ветвления e данного типа вместе с историей их движения от выделенного дивизора e^0 . Считая дивизор движущимся в вязкой среде и увлекающим за собой частицы этой среды, приходим к *пространству Тайхмюллера* проколотого диска с отмеченными точками на границе – гибкому техническому средству, устанавливающему связь между различными точками зрения на предмет. *Деформационные пространства* специальных клейновых групп дают глобальные координаты в исследуемом пространстве и эффективное построение аналитических объектов. *Пространства лабиринтов* – наиболее наглядные из всех – позволяют вычислить [3] образ отображения периодов, задаваемого левыми частями уравнений Абеля.

2.1. Четыре определения. Фиксируем топологические инварианты вещественной кривой (3) – ее род $g = 0, 1, 2, \dots$ и число ковещественных овалов $k = 0, 1, \dots, g + 1$. Симметричным дивизором e типа (g, k) назовем неупорядоченный набор из различных точек e_1, \dots, e_{2g+2} , включающий $2k$ вещественных точек и $g - k + 1$ пар комплексно сопряженных точек. На подобных наборах свободно действует группа \mathfrak{A}_1^+ сохраняющих ориентацию аффинных движений вещественной оси: $e = \{e_s\}_{s=1}^{2g+2} \rightarrow Ae + B = \{Ae_s + B\}_{s=1}^{2g+2}$, $A > 0$, $B \in \mathbb{R}$. Орбиты этого действия назовем *пространством модулей \mathcal{H}_g^k* . Точки пространства модулей соответствуют конформным классам вещественных гиперэллиптических кривых (3) с данными инвариантами g, k и отмеченной точкой ∞_+ на ориентированном вещественном овале. Пространство \mathcal{H}_g^k обладает естественной структурой вещественного $2g$ -мерного многообразия. Для введения локальных координат в окрестности выделенного дивизора e^0 занумеруем точки набора $e^0 = \{e_s\}_{s=1}^{2g+2}$ и зафиксируем пару комплексно сопряженных либо пару вещественных точек e_{2g+1}, e_{2g+2} . За локальные координаты возьмем переменные величины $\operatorname{Re} e_s, \operatorname{Im} e_s$ для точек e_s из открытой верхней полуплоскости \mathbb{H} и $\operatorname{Re} e_s$ для вещественных точек e_s , $s = 1, 2, \dots, 2g$.

ЛЕММА 1 [1]. *Фундаментальная группа пространства модулей $\pi_1(\mathcal{H}_g^k)$ изоморфна группе $\operatorname{Vr}_{g-k+1}$ кос Артина с $g - k + 1$ нитями.*

Пространство классов гомотопически эквивалентных путей в \mathcal{H}_g^k , начинающихся в выделенной точке e^0 пространства модулей, называется *универсальной накрывающей $\widetilde{\mathcal{H}}_g^k(e^0)$* . Последняя обладает тремя описанными ниже представлениями.

2.1.1. Пространство Тайхмюллера. *Квазиконформные* гомеоморфизмы верхней полуплоскости \mathbb{H} с неподвижной бесконечностью образуют группу $QC(\mathbb{H})$ относительно композиции. Всякое отображение $f \in QC(\mathbb{H})$ отражением в действительной оси продолжается до квазиконформного гомеоморфизма \mathbb{C} . Движения f , стабилизирующие выделенный дивизор ветвления e^0 (допустимы перестановки точек), образуют подгруппу $QC(\mathbb{H}, e^0)$. Отображения f , связанные с id

неподвижной на бесконечности гомотопией проколотой сферы $\mathbb{C}\mathbb{P}_1 \setminus \mathbf{e}^0$, образуют нормальную подгруппу $QC^0(\mathbb{H}, \mathbf{e}^0) \subset QC(\mathbb{H}, \mathbf{e}^0)$. Эта подгруппа действует на $QC(\mathbb{H})$ умножениями справа, а аффинная группа \mathfrak{A}_1^+ действует умножениями слева. Такие действия перестановочны, и определен двусторонний фактор $\mathcal{T}_g^k(\mathbf{e}^0) := \mathfrak{A}_1^+ \setminus QC(\mathbb{H})/QC^0(\mathbb{H}, \mathbf{e}^0)$, называемый *пространством Тайхмюллера*¹. Расстоянием Тайхмюллера между классами $[f], [h] \in \mathcal{T}_g^k(\mathbf{e}^0)$ называется минимум по представителям $f_1 \in [f], h_1 \in [h]$ от логарифма искажения квазиконформного отображения $f_1 h_1^{-1}$.

Модулярная группа $\text{Mod}(\mathbf{e}^0) := QC(\mathbb{H}, \mathbf{e}^0)/QC^0(\mathbb{H}, \mathbf{e}^0)$ действует умножениями справа на пространстве Тайхмюллера, и порожденные ею автоморфизмы являются изометриями. Выбор выделенного дивизора \mathbf{e}^0 при определении пространства Тайхмюллера несущественен: движение $h \in QC(\mathbb{H})$ порождает изометрию $\mathcal{T}_g^k(\mathbf{e}^0)$ на $\mathcal{T}_g^k(h\mathbf{e}^0)$ по формуле $f \rightarrow fh^{-1}$. Очевидно, $QC(\mathbb{H}, h\mathbf{e}^0) = hQC(\mathbb{H}, \mathbf{e}^0)h^{-1}$ и $QC^0(\mathbb{H}, h\mathbf{e}^0) = hQC^0(\mathbb{H}, \mathbf{e}^0)h^{-1}$, поэтому модулярные группы $\text{Mod}(\mathbf{e}^0), \text{Mod}(h\mathbf{e}^0)$ изоморфны, а наша изометрия $\mathcal{T}_g^k(\mathbf{e}^0) \rightarrow \mathcal{T}_g^k(h\mathbf{e}^0)$ перестановочна с действием модулярных групп на каждом из пространств.

Сопоставляя движению $f \in QC(\mathbb{H})$ дивизор ветвления $\mathbf{e} := f(\mathbf{e}^0)$, получаем проекцию пространства Тайхмюллера на пространство модулей. Слои проекции совпадают с орбитами модулярной группы. Далее мы покажем, что указанная проекция является универсальным накрытием.

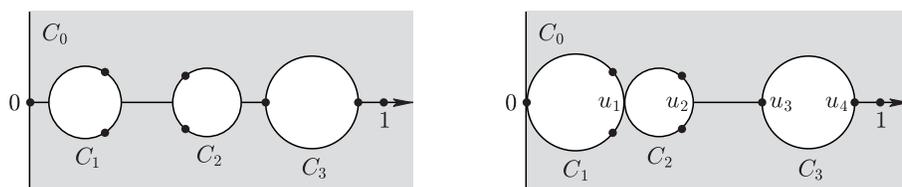
2.1.2. Деформационное пространство группы. Разобьем множество индексов $\{0, 1, \dots, g\}$ на два подмножества: $(g-k+1)$ -элементное i и его k -элементное дополнение i' . *Деформационное пространство* $\mathcal{G}_g^k(i)$ образуют упорядоченные наборы $\{G_s\}_{s=0}^g$ дробно-линейных вращений второго порядка с вещественными неподвижными точками $c_s \pm r_s$ при $s \in i'$ либо с комплексно-сопряженными $c_s \pm ir_s$ при $s \in i$:

$$G_0 u := \begin{cases} -u, & 0 \in i', \\ -\frac{1}{u}, & 0 \in i, \end{cases} \quad G_s u := \begin{cases} c_s + \frac{r_s^2}{u - c_s}, & s \in i', \\ c_s - \frac{r_s^2}{u - c_s}, & s \in i, \end{cases} \quad s = 1, 2, \dots, g. \quad (6)$$

Вещественные параметры c_s, r_s (модули) подобраны так, чтобы выполнялось следующее геометрическое условие. *На g занумерованных по возрастанию непересекающихся отрезках интервала $(0, u_\infty)$ можно как на диаметрах построить окружности C_1, C_2, \dots, C_g , проходящие через неподвижные точки соответствующих движений G_1, G_2, \dots, G_g (см. рис. 1а)). Выделенная точка $u_\infty := +\infty$, если $0 \in i$, и $u_\infty := 1$ при $0 \in i'$.*

При выполнении названного условия ось ординат C_0 и окружности C_1, C_2, \dots, C_g ограничивают фундаментальную область \mathcal{R} клейновой группы \mathfrak{G} , порожденной вращениями G_0, G_1, \dots, G_g . По теореме Клейна о комбинировании [6] группа \mathfrak{G} является свободным произведением $g+1$ групп второго порядка. Гиперболические движения $\{S_l := G_l G_0\}_{l=1}^g$ порождают группу Шоттки \mathfrak{S} , $|\mathfrak{S} : \mathfrak{G}| = 2$. Обе группы обладают общей областью разрывности \mathcal{D} и предельным множеством,

¹Это удобная для наших целей модификация стандартного определения [5] пространства Тайхмюллера диска с $g-k+1$ проколами и $2k+1$ отмеченными точками на границе.

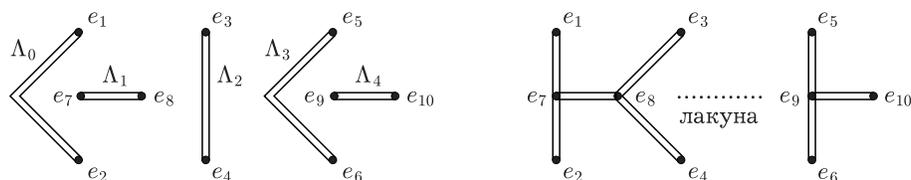


а) Окружности C_1, C_2, \dots, C_g при $i = \{1, 2\}$ б) Предельное положение окружностей

Рис. 1

лежащим на вещественной оси. Линейная мера предельного множества равна нулю, так как группа \mathfrak{S} удовлетворяет следующему критерию Шоттки [7]. *Фундаментальную область $\mathcal{R}(\mathfrak{S})$ (=внешность $2g$ кругов $G_0C_g, \dots, G_0C_1; C_1, \dots, C_g$) можно разбить на трехсвязные области (=штаны), проведя дополнительные окружности.* Для наших целей этот факт принципиален, поскольку линейные тэта-ряды Пуанкаре будут сходиться абсолютно и равномерно на компактах в области разрывности группы \mathfrak{S} .

Многообразие орбит группы \mathfrak{G} есть сфера Римана с естественным отражением $\bar{J}u := \bar{u}$. Факторногообразие \mathcal{D}/\mathfrak{S} является компактной алгебраической кривой M_c рода g с гиперэллиптической инволюцией $Ju := G_0u$ и антиконформной инволюцией \bar{J} . Голломорфная проекция $x(u): \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}P_1 \cong \mathcal{D}/\mathfrak{S}$ с полюсом в отмеченной точке u_∞ , уважающая комплексное сопряжение и сохраняющая ориентацию вещественной оси вблизи $u = u_\infty$, определена однозначно с точностью до движений из \mathcal{A}_1^+ . Такое разветвленное накрытие $x(u)$ мы назовем *согласованным* с группой \mathfrak{S} . Сопоставив клейновой группе точки ветвления $x(u)$ (=проекция на сферу неподвижных точек вращений $\{G_s\}_{s=0}^g$), мы зададим отображение из деформационного пространства \mathcal{G}_g^k в пространство модулей \mathcal{H}_g^k . Далее мы покажем, что это – универсальное накрытие, а модулярная группа действует на деформационном пространстве, сохраняя (с точностью до сопряжения) клейнову группу \mathfrak{S} , но меняя систему ее образующих.



а) Лабиринт (e, Λ) при $g = 4, k = 2, i = \{0, 2, 3\}$ б) Перестройка лабиринта

Рис. 2

2.1.3. Пространство лабиринтов. *Лабиринтом (e, Λ) типа (g, k, i) назовем симметричный дивизор e типа (g, k) , дополненный системой непересекающихся разрезов $\Lambda := (\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_g)$, попарно соединяющих точки дивизора e . Первая группа разрезов – это проекции k ковещественных овалов кривой $M(e)$, т.е. компоненты множества $\{x \in \mathbb{R} : w^2(x) < 0\}$. Вторая группа – набор простых гладких дуг, соединяющих комплексно-сопряженные точки e и инвариантных при отражении в \mathbb{R} . Пересечения с действительной осью упорядочивают разрезы, которые мы занумеруем от 0 до g слева направо (см. рис. 2а)). Индексы разрезов*

второй группы образуют множество i .

Два лабиринта (e, Λ) и (e', Λ') считаем эквивалентными, если найдется движение из \mathfrak{A}_1^+ , переводящее e в e' , а пути Λ – в пути, которые можно непрерывно продеформировать в пути Λ' , при этом деформируемые пути и набор точек e' в любой момент времени образуют лабиринт. Всевозможные лабиринты типа (g, k, i) по модулю этого отношения эквивалентности назовем *пространством лабиринтов* $\mathcal{L}_g^k(i)$. Стирание разрезов лабиринта дает естественную проекцию $\mathcal{L}_g^k(i) \rightarrow \mathcal{H}_g^k$.

Смысл введения лабиринта в том, что разрезы вдоль него превращают проколотую полуплоскость $\mathbb{H} \setminus e$ в односвязное множество. С одной стороны, это фиксирует образующие свободной группы $\pi_1(\mathbb{H} \setminus e)$, с другой стороны – позволяет проследить за динамикой проколов.

2.2. Вспомогательные результаты. Доказательство эквивалентности четырех введенных пространств $\widetilde{\mathcal{H}}_g^k(e^0)$, $\mathcal{T}_g^k(e^0)$, $\mathcal{G}_g^k(i)$, $\mathcal{L}_g^k(i)$ опирается на их свойства, которые мы установим в этом пункте.

2.2.1. Топология деформационного пространства. Модули $c_s, r_s > 0$, $s = 1, \dots, g$, образуют глобальную систему координат в деформационном пространстве $\mathcal{G}_g^k(i)$ и позволяют отождествить последнее с областью в \mathbb{R}^{2g} .

ЛЕММА 2. *Пространство $\mathcal{G}_g^k(i)$ – это клетка, описываемая системой неравенств:*

$$r_s > 0, \quad s = 1, 2, \dots, g, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} c_s + r_s < G_{s+1}(c_s + r_s) < G_{s+2}G_{s+1}(c_s + r_s) < G_{s+3}G_{s+2}G_{s+1}(c_s + r_s) \\ < \dots < G_{s'-1}G_{s'-2} \dots G_{s+2}G_{s+1}(c_s + r_s) < c_{s'} - r_{s'}, \end{aligned} \quad (8)$$

в последней цепочке неравенств индексы s, s' подходят под одно из четырех описаний:

- 1) $s < s'$ – подряд идущие индексы множества $i' \setminus \{0\}$;
- 2) $s = 0$, s' – наименьший индекс в $i' \setminus \{0\}$, при этом полагаем $c_0 + r_0 := 0$;
- 3) s – наибольший индекс в $i' \setminus \{0\}$, $s' = g + 1$,
при этом полагаем $c_{s'} - r_{s'} := u_\infty$;
- 4) $s = 0$, $s' = g + 1$ при пустом множестве $i' \setminus \{0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вращение G_s , $s \in i'$, имеет вещественные неподвижные точки, и соответствующая окружность C_s определена однозначно. Напротив, вещественный диаметр окружности C_s , $s \in i$, можно двигать. Сдвинем все такие диаметры в крайнее левое положение (см. рис. 1b)). Система неравенств (8) описывает упорядочение концов полученных диаметров на интервале $(0, u_\infty)$. Возникшая конфигурация диаметров однозначно восстанавливается по их концам, пробегающим клетку $\{0 < u_1 < u_2 < \dots < u_\alpha < u_\infty\}$ размерности $\alpha := 2\#\{i' \setminus \{0\}\} + \#\{i \setminus \{0\}\}$, и множеству индексов i . Задав азимуты из центра s -го сдвинутого диаметра на лежащую в верхней полуплоскости неподвижную точку вращения G_s , $s \in i \setminus \{0\}$, получим точку клетки $(0, \pi)^\beta$, $\beta := \#\{i \setminus \{0\}\}$. Построенное отображение пространства $\mathcal{G}_g^k(i)$ на клетку размерности $\alpha + \beta = 2g$ взаимно однозначно и непрерывно.

2.2.2. Группа разветвленного накрытия $x(u)$. Всякий лабиринт (\mathbf{e}, Λ) задает представление χ_Λ из фундаментальной группы проколотой сферы $\pi_1(\mathbb{C}\mathbb{P}_1 \setminus \mathbf{e}, \infty)$ в абстрактную группу \mathfrak{G} – свободное произведение $g + 1$ групп второго порядка с образующими G_0, G_1, \dots, G_g . Петле ρ , трансверсально пересекающей подряд разрезы $\Lambda_{s_1}, \Lambda_{s_2}, \dots, \Lambda_{s_l}$, сопоставлен элемент этой группы

$$\chi_\Lambda[\rho] := G_{s_1} G_{s_2} \cdots G_{s_l}.$$

Точка $\{G_s\}_{s=0}^g$ деформационного пространства порождает лабиринт (\mathbf{e}, Λ) по правилу: $\mathbf{e} := \{x(\text{fix } G_s)\}_{s=0}^g$ – проекции неподвижных точек образующих; $\Lambda := (xC_0, xC_1, \dots, xC_g)$ – проекция границы фундаментальной области. При $0 \in \mathbf{i}$ нужно сдвинуть C_0 с полюса $x(u)$, заменив ее на окружность $C_\varepsilon := \{u : |\varepsilon u + 1|^2 = \varepsilon^2 + 1\}$ с малым $\varepsilon > 0$. Ядро соответствующего представления χ_Λ будет группой разветвленного над \mathbf{e} накрытия $x(u)$, связанного с этим элементом деформационного пространства. Оказывается, группа накрытия полностью определяется дивизором ветвления \mathbf{e} .

ЛЕММА 3. *Ядро представления $\chi_\Lambda: \pi_1(\mathbb{C}\mathbb{P}_1 \setminus \mathbf{e}, \infty) \rightarrow \mathfrak{G}$ не зависит от лабиринта Λ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $\ker \chi_\Lambda$ совпадает с нормальной подгруппой в $\pi_1(\mathbb{C}\mathbb{P}_1 \setminus \mathbf{e}, \infty)$, порожденной всевозможными элементами двух видов:

- (а) лассо, дважды огибающие проколы, и
- (б) петли λ с зеркальной симметрией $[\lambda\bar{\lambda}] = 1$, не пересекающие разрезов Λ_i , $i \in \mathbf{i}'$.

Описанная подгруппа не зависит от выбора лабиринта (любой лабиринт включает проекции ковещественных овалов кривой $M(\mathbf{e})$) и, очевидно, содержится в ядре χ_Λ . Установим обратное включение, если на кривой есть хоть один ковещественный овал. Случай $k = 0$ потребует очевидного изменения рассуждений.

Клеточное разбиение сферы Римана с $2g + 2$ вершинами \mathbf{e} , $2g + 1$ ориентированным ребром R и одной 2-клеткой дает нам систему свободных образующих в группе $\pi_1(\mathbb{C}\mathbb{P}_1 \setminus \mathbf{e})$: *всякому ребру R сопоставим класс петли ρ , пересекающей только это ребро только один раз слева направо.* Такое клеточное разбиение можно построить из лабиринта (\mathbf{e}, Λ) . Отрезки Λ_i , $i \in \mathbf{i}'$, дадут нам k ребер R , *лакуны* между ними (=проекция конечных вещественных овалов) дадут еще $k - 1$ ребер. Недостающие $2(g - k + 1)$ ребер получают перестройкой оставшихся дуг лабиринта Λ_i , $i \in \mathbf{i}$, вблизи вещественных овалов кривой M так, чтобы они проходили через проколы на действительной оси (см. рис. 2b)).

Представление χ_Λ на связанных с ребрами R образующих равно

$$\chi_\Lambda[\rho] = \begin{cases} G_s, & R - (\text{перестроенный}) \text{ разрез } \Lambda_s, \\ 1, & R - \text{лакуна.} \end{cases}$$

Поскольку группа \mathfrak{G} – свободное произведение групп ранга 2, то ядро χ_Λ – это нормальная подгруппа, порожденная всевозможными элементами $[\gamma]$, $[\rho]^2$, $[\rho\bar{\rho}]$, где $[\gamma]$ соответствуют $k - 1$ лакунам, а $[\rho]$ – остальным $2g - k + 2$ ребрам R . Перебором можно убедиться, что все эти порождающие $\ker \chi_\Lambda$ элементы лежат в описанной выше подгруппе.

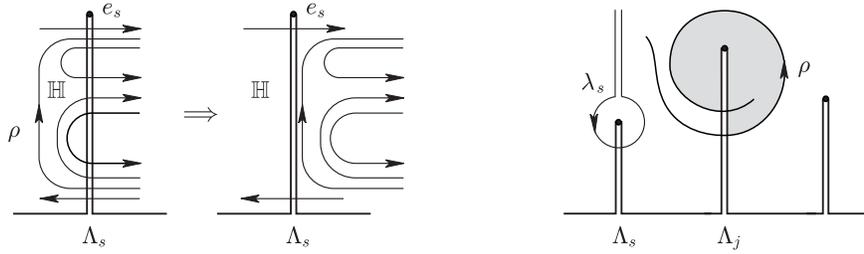
В фундаментальную группу проколотой сферы естественно вкладывается группа проколотой верхней полуплоскости $\pi_1(\mathbb{H} \setminus \mathbf{e}, \infty)$. Как и в лемме 3, разрезы лабиринта дают систему свободных образующих, кодирующих элементы этой группы. А именно петля ρ верхней полуплоскости, трансверсально пересекающая подряд разрезы $\Lambda_{s_1}, \Lambda_{s_2}, \dots, \Lambda_{s_l}$, имеет разложение по образующим λ_s , $s \in i$, каждая из которых пересекает лишь разрез Λ_s слева направо:

$$[\rho] = [\lambda_{s_1}]^{\varepsilon_1} [\lambda_{s_2}]^{\varepsilon_2} \dots [\lambda_{s_l}]^{\varepsilon_l}, \quad (9)$$

где $\varepsilon_j = \pm 1$ в зависимости от ориентации локального пересечения ρ с разрезом Λ_{s_j} .

ЛЕММА 4. Пусть $\rho \subset \mathbb{H} \setminus \mathbf{e}$ – петля без самопересечений с началом на ∞ . В несократимом разложении $[\rho]$ по образующим (9) нет идущих подряд одинаковых букв.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого факта из дискретной математики основано на идее непрерывности. Наше утверждение зависит только от гомотопического класса петли ρ , поэтому, не теряя в общности, будем считать, что ρ пересекает разрезы Λ_s трансверсально и в конечном числе точек. Применяя конечное число преобразований рис. 3а), мы заменим петлю ρ на гомотопную несамопересекающуюся и с несократимым разложением (9). Если в последнем разложении символ $[\lambda_j]$ встречается подряд, то с точностью до ориентации мы имеем ситуацию рис. 3б). Точка, пробегающая петлю ρ , должна вернуться на бесконечность, но не может покинуть заштрихованную область, ограниченную самой петлей и участком разреза Λ_j : иначе петля будет самопересекаться либо ее разложение будет сократимо.



а) Устранение сокращений

б) Бесконечная спираль ρ и образующая λ_s

Рис. 3

2.2.3. Действие модулярной группы на группе \mathfrak{G} . Естественное действие $f \in QC(\mathbb{H}, \mathbf{e})$ на фундаментальной группе проколотой сферы $\mathbb{C}\mathbb{P}_1 \setminus \mathbf{e}$ порождает действие модулярной группы $\text{Mod}(\mathbf{e}) := QC(\mathbb{H}, \mathbf{e})/QC^0(\mathbb{H}, \mathbf{e})$ на группе $\pi_1(\mathbb{C}\mathbb{P}_1 \setminus \mathbf{e}, \infty)/\ker \chi_\Lambda \cong \mathfrak{G}$. В самом деле, действие f на фундаментальной группе зависит только от гомотопического класса f , а использованная в доказательстве леммы 3 характеристика $\ker \chi_\Lambda$ говорит о ее инвариантности при этом действии. Например, для гладкого представителя f гомотопического класса $f \cdot \ker \chi_\Lambda = \ker \chi_{f\Lambda} = \ker \chi_\Lambda$. Следующая теорема утверждает, что представление из модулярной группы в группу автоморфизмов \mathfrak{G} является точным.

ТЕОРЕМА 1. *Действие $f \in QC(\mathbb{H}, \mathbf{e})$ на группе \mathfrak{G} тождественное, если и только если $f \in QC^0(\mathbb{H}, \mathbf{e})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f тождественно действует на группе \mathfrak{G} , покажем, что f тождественно действует и на фундаментальной группе $\pi_1(\mathbb{C}\mathbb{P}_1 \setminus \mathbf{e}, \infty)$. Фундаментальная группа проколотой сферы порождена классами петель трех типов. Это петли проколотых верхней и нижней полуплоскостей, а также петли проколотой достаточно узкой окрестности вещественной оси. На последних f действует тождественно, а действие f на петлях первых двух типов согласованно ввиду зеркальной симметрии $f(\bar{x}) = \bar{f}(x)$. Исследуем поэтому действие f на фундаментальной группе $\pi_1(\mathbb{H} \setminus \mathbf{e}, \infty)$.

Любая порожденная лабиринтом образующая $[\lambda_s]$ фундаментальной группы проколотой полуплоскости содержит петлю λ_s без самопересечений, образ $f\lambda_s$ которой также будет простой петлей. Представление χ_Λ переводит образующую $[\lambda_s]$ в элемент G_s , $s \in i$. Вспомним, что группа \mathfrak{G} свободно порождена группами ранга 2, поэтому из леммы 4 следует, что $\chi_\Lambda[f\lambda_s] = G_s$ лишь в двух случаях: $[f\lambda_s] = [\lambda_s]$ и $[f\lambda_s] = [\lambda_s]^{-1}$. Второй случай не реализуется, поскольку f сохраняет ориентацию.

Установив тождественность действия f на фундаментальной группе проколотой сферы Римана, применим конструкцию Альфорса [5], [8]. Пусть $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}_1 \setminus \mathbf{e}$ — универсальное накрытие. Поднятие отображения f на накрывающую от любого прообраза бесконечности $\tilde{f}: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ коммутирует со скольжениями в силу тривиального действия f на фундаментальной группе базы. Пусть точка $\tilde{f}_t(u)$ делит неевклидов отрезок $[\tilde{f}(u), u]$ плоскости Лобачевского в отношении $t: (1-t)$, $t \in [0, 1]$. Опуская отображение $\tilde{f}_t(u)$ в базу, мы получаем связанную на бесконечности гомотопию $\mathbb{C}\mathbb{P}_1 \setminus \mathbf{e}$, соединяющую f с тождественным отображением.

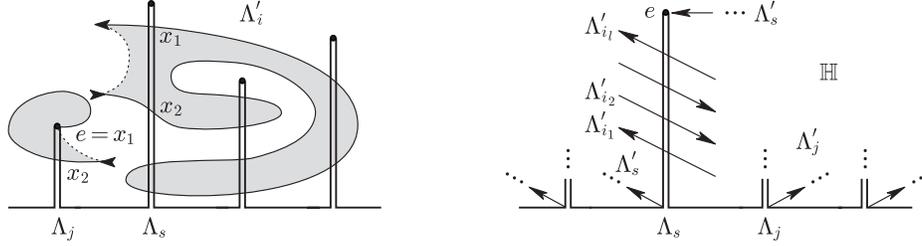
2.2.4. Эквивалентность лабиринтов.

ТЕОРЕМА 2. *Два лабиринта (\mathbf{e}, Λ) , (\mathbf{e}, Λ') эквивалентны, если и только если совпадают порождаемые ими представления $\chi_\Lambda, \chi_{\Lambda'}: \pi_1(\mathbb{C}\mathbb{P}_1 \setminus \mathbf{e}, \infty) \rightarrow \mathfrak{G}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При непрерывной деформации лабиринта Λ представление χ_Λ в дискретную группу \mathfrak{G} измениться не может, поэтому представление одинаково на эквивалентных лабиринтах. Обратное, при условии $\chi_\Lambda = \chi_{\Lambda'}$ мы явно представим деформацию $\Lambda' \rightarrow \Lambda$. Ввиду зеркальной симметрии эта деформация однозначно определяется движением лабиринта в верхней полуплоскости.

Сделаем предварительно следующее наблюдение: *связанные с лабиринтами Λ' и Λ системы свободных образующих (= алфавиты) $[\lambda'_i]$, $i \in i(\Lambda')$, $[\lambda_s]$, $s \in i(\Lambda)$, фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{H} \setminus \mathbf{e}, \infty)$ совпадают.* Действительно, возьмем простую петлю, представляющую класс $[\lambda'_i]$. В ее несократимом разложении $[\lambda'_i] = [\lambda_{s_1}]^{\varepsilon_1} [\lambda_{s_2}]^{\varepsilon_2} \cdots [\lambda_{s_l}]^{\varepsilon_l}$ по образующим другой системы согласно лемме 4 нет повторяющихся букв. Соответственно, будет несократимым слово $G_{s_1} G_{s_2} \cdots G_{s_l} := \chi_\Lambda([\lambda'_i]) = \chi_{\Lambda'}([\lambda'_i]) := G_i$. Такое равенство в группе \mathfrak{G} возможно, если $[\lambda'_i] = [\lambda_i]^{\pm 1}$. Классы $[\lambda'_i]$, $[\lambda_i]$ сопряжены в фундаментальной группе проколотой полуплоскости, поскольку отвечающие им петли обходят против часовой стрелки один и тот же прокол. В свободно порожденной группе элементы $[\lambda_i]$, $[\lambda_i]^{-1}$ не могут быть сопряжены, поэтому $[\lambda'_i] = [\lambda_i]$. В частности, отсюда следует, что оба лабиринта одного типа: $i(\Lambda) = i(\Lambda')$. После очевидной деформации Λ' будем считать, что на действительной оси оба лабиринта совпадают,

а в верхней полуплоскости они пересекаются трансверсально в конечном числе точек.



а) Деформация лабиринта Λ' б) Разложение петли $\rho := \partial(\mathbb{H} \setminus \Lambda_s)$ по образующим

Рис. 4

Пусть $\Lambda_s \cap \Lambda'_i$ содержит пару точек верхней полуплоскости x_1, x_2 с противоположной ориентацией пересечения, причем сегмент дуги Λ_s между этими точками не пересекает лабиринта Λ' . Вырезаемые точками x_1, x_2 сегменты Λ_s и Λ'_i ограничивают в \mathbb{H} клетку, которая не пересекает лабиринта Λ' , в частности не содержит проколов. Эту клетку можно стянуть – соответствующая деформация показана фоном на рис. 4а). Мы рассматриваем также предельный случай, когда одна из точек x_1, x_2 является концом Λ_s . Каждая из описанных деформаций Λ' уменьшает количество пересечений с лабиринтом Λ . Следовательно, за конечное число шагов мы приходим к эквивалентному (также обозначенному Λ') лабиринту, пересечения которого с Λ не имеют описанного выше вида. Покажем, что в этом случае пересечение обоих лабиринтов в верхней полуплоскости состоит только из точек e . Это будет означать что $\Lambda_i, \Lambda'_i, i \in i$, ограничивают в \mathbb{H} клетку, не содержащую точек каждого лабиринта. Стягивая эти клетки, мы получим деформацию $\Lambda' \rightarrow \Lambda$.

Предположим, что $\Lambda_s \setminus e$ пересекает в верхней полуплоскости подряд дуги $\Lambda'_{i_1}, \Lambda'_{i_2}, \dots, \Lambda'_{i_l}$, как на рис. 4б). Разложим проходящую по границе $\mathbb{H} \setminus \Lambda_s$ петлю ρ по двум системам образующих, связанных с лабиринтами Λ, Λ' . Приравнивая эти выражения и учитывая совпадение алфавитов $[\lambda'_i] = [\lambda_i], i \in i$, получаем коммутационное соотношение в свободно порожденной группе $\pi_1(\mathbb{H} \setminus e)$:

$$[\lambda_s] \cdot [\lambda_{i_1}]^{\varepsilon_1} [\lambda_{i_2}]^{\varepsilon_2} \dots [\lambda_{i_l}]^{\varepsilon_l} = [\lambda_{i_1}]^{\varepsilon_l} [\lambda_{i_2}]^{\varepsilon_1} \dots [\lambda_{i_l}]^{\varepsilon_1} \cdot [\lambda_s], \quad (10)$$

$\varepsilon_j = \pm 1$ в зависимости от ориентации пересечения Λ_s с Λ'_{i_j} . Слово, стоящее справа в (10), несократимо – иначе была бы возможна описанная в предыдущем абзаце деформация лабиринта Λ' . Следовательно, это слово состоит из одной буквы $[\lambda_s]$, а лабиринт Λ' не пересекает дугу $\Lambda_s \cap \mathbb{H}$ в ее внутренних точках.

2.2.5. Квазиконформная деформация. Идея квазиконформной деформации группы принадлежит Альфорсу и Берсу [8], [9], мы лишь приспособим ее для своих целей. Итак, отметим элемент $\{G_s^0\}_{s=0}^g$ деформационного пространства $\mathcal{G}_g^k(i)$, порождающий клейнову группу \mathfrak{G}^0 , а также согласованную с группой проекцию $x^0(u): \mathcal{D}(\mathfrak{G}^0) \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}_1$.

Построение. Пусть $f(x)$ – квазиконформное движение плоскости комплексной переменной x . Поднимем его дифференциал Бельтрами

$$\mu(x) \frac{\overline{dx}}{dx} := \frac{f_{\overline{x}} \overline{dx}}{f_x dx}$$

на область разрывности $\mathcal{D}(\mathfrak{G}^0)$ при помощи согласованного с группой накрытия. Новый дифференциал

$$\tilde{\mu}(u) \frac{\overline{du}}{du} := \mu(x^0(u)) \frac{\overline{dx^0(u)}}{dx^0(u)}$$

продолжим нулем на имеющее нулевую меру предельное множество группы \mathfrak{G}^0 . Рассмотрим квазиконформный гомеоморфизм $\tilde{f}(u)$ римановой сферы, удовлетворяющий уравнению Бельтрами

$$\frac{\partial}{\partial \bar{u}} \tilde{f}(u) = \tilde{\mu}(u) \cdot \frac{\partial}{\partial u} \tilde{f}(u) \quad (11)$$

и фиксирующий три точки: две неподвижные точки образующей G_0 и отмеченную точку u_∞ . Дифференциал Бельтрами $\tilde{\mu}(u) \frac{\overline{du}}{du}$ по построению \mathfrak{G}^0 -инвариантен, поэтому теорема единственности для квазиконформных гомеоморфизмов говорит нам, что гомеоморфизмы $f(u)$ и $\tilde{f}(Gu)$ различаются на конформное движение сферы Римана:

$$G^f \circ \tilde{f} = \tilde{f} \circ G, \quad G \in \mathfrak{G}^0, \quad G^f \in \text{PSL}_2(\mathbb{C}). \quad (12)$$

Порожденная такими движениями группа $\mathfrak{G}^f := \tilde{f} \mathfrak{G}^0 \tilde{f}^{-1}$ изоморфна \mathfrak{G}^0 , разрывно действует на области $\mathcal{D}(\mathfrak{G}^f) := \tilde{f} \mathcal{D}(\mathfrak{G}^0)$ и называется *квазиконформной деформацией* группы \mathfrak{G}^0 , порожденной элементом $f \in QC(\mathbb{H})$. Выделенная система образующих $\{G_s^0\}_{s=0}^g$ группы \mathfrak{G}^0 переходит в выделенную систему образующих $\{G_s^f := \tilde{f} G_s^0 \tilde{f}^{-1}\}_{s=0}^g$.

Сформулируем два технических утверждения, подчеркивающие естественность конструкции квазиконформной деформации. Их справедливость легко следует из единственности нормированного квазиконформного отображения с данным коэффициентом Бельтрами [8].

ЛЕММА 5. 1) Если $f \in QC(\mathbb{H})$ деформирует группу \mathfrak{G}^0 в группу \mathfrak{G}^f , то выделенная голоморфная проекция $x^f(u) : \mathcal{D}(\mathfrak{G}^f) \rightarrow \mathbb{CP}_1$ с нормировкой $x^f(u) := f \circ x^0(u)$, $u \in \{\text{fix } G_0, u_\infty\}$, коммутативно замыкает диаграмму а):

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{D}(\mathfrak{G}^0) & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathcal{D}(\mathfrak{G}^f) & & \mathcal{D}(\mathfrak{G}^0) & \xrightarrow{\tilde{h}} & \mathcal{D}(\mathfrak{G}^h) & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathcal{D}(\mathfrak{G}^{fh}) \\ \text{а) } \downarrow x^0 & & \downarrow x^f & , & \text{б) } \downarrow x^0 & & \downarrow x^h & & \downarrow x^{fh} \\ \mathbb{CP}_1 & \xrightarrow{f} & \mathbb{CP}_1 & & \mathbb{CP}_1 & \xrightarrow{h} & \mathbb{CP}_1 & \xrightarrow{f} & \mathbb{CP}_1 \end{array} \quad (13)$$

2) Деформирование группы \mathfrak{G}^0 композицией fh двух отображений можно разложить на два шага: сначала при помощи h деформировать группу \mathfrak{G}^0 в группу \mathfrak{G}^h (левый квадрат б)) и использовать последнюю в качестве отмеченной группы для второй деформации при помощи f (правый квадрат б)). Деформирующий гомеоморфизм композиции fh тогда равен $\tilde{f}\tilde{h}$, а искомая деформация группы $\mathfrak{G}^{fh} = \tilde{f}\mathfrak{G}^h\tilde{f}^{-1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Последнее утверждение можно истолковать так. Квазиконформные отображения действуют слева на парах из системы образующих клейновой группы и голоморфной проекции на сферу: $f \cdot (\{G_s^0\}_{s=0}^g, x^0) := (\{G_s^f\}_{s=0}^g, x^f)$. Указанное действие ассоциативно: $(fh) \cdot (\{G_s^0\}_{s=0}^g, x^0) = f \cdot (\{G_s^h\}_{s=0}^g, x^h) =: f \cdot (h \cdot (\{G_s^0\}_{s=0}^g, x^0))$.

2.3. Эквивалентность представлений. Эквивалентность четырех определений универсальной накрывающей пространства модулей означает существование (согласованных) непрерывных биекций между введенными топологическими пространствами $\widetilde{\mathcal{H}}_g^k$, \mathcal{T}_g^k , \mathcal{G}_g^k , \mathcal{L}_g^k . В трех следующих пунктах этого раздела мы последовательно установим гомеоморфность: пространства Тайхмюллера и деформационного пространства специальной клейновой группы; пространства Тайхмюллера и универсальной накрывающей пространства модулей; пространства лабиринтов и деформационного пространства группы. Приведем описание не охваченных здесь соответствий на интуитивном уровне.

$\mathcal{T}_g^k \leftrightarrow \mathcal{L}_g^k$. Гладкий представитель f класса Тайхмюллера переводит выделенный лабиринт (e^0, Λ^0) в лабиринт $(fe^0, f\Lambda^0)$ того же типа. Два лабиринта одного типа всегда можно перевести друг в друга подходящим отображением f , единственным с точностью до изотопии проколотой плоскости.

$\widetilde{\mathcal{H}}_g^k(e^0) \leftrightarrow \mathcal{L}_g^k$. Универсальная накрывающая пространства модулей – это совокупность дивизоров ветвления e вместе с историей их движения от отмеченного дивизора e^0 . Эту историю мы можем восстановить, считая разрезы лабиринта следами точек дивизора при его движении. Обратно: всякий путь в пространстве модулей можно деформировать так, чтобы точки движущегося на комплексной плоскости дивизора e не пересекали своих следов. Получившийся рисунок на плоскости можно дополнить до лабиринта.

2.3.1. Изоморфность \mathcal{T}_g^k и \mathcal{G}_g^k . Фиксируем элемент $\{G_s^0\}_{s=0}^g$ деформационного пространства $\mathcal{G}_g^k(i)$ и согласованное с ним накрытие $x^0(u)$. Для теории пространств Тайхмюллера [9], [5] типична

ТЕОРЕМА 3. *Квазиконформная деформация осуществляет гомеоморфизм $\mathcal{G}_g^k(i)$ и пространства Тайхмюллера $\mathcal{T}_g^k(e^0)$, где $e^0 := \{x^0(\text{fix } G_s^0)\}_{s=0}^g$ – точки ветвления накрытия $x^0(u)$.*

Доказательство теоремы 3 естественно разбивается на несколько шагов.

ЛЕММА 6. *Квазиконформная деформация $\{G_s^f\}_{s=0}^g$ отмеченного элемента при $f \in QC(\mathbb{H})$ лежит в том же пространстве $\mathcal{G}_g^k(i)$. Порождаемое f накрытие $x^f(u)$ согласовано с деформированной группой \mathfrak{G}^f .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Симметрией при отражении в вещественной оси обладают: коэффициент Бельтрами $\mu(x) = \overline{\mu(\bar{x})}$ функции f , регулярное накрытие $x^0(u) = \overline{x^0(\bar{u})}$ и нормировочное множество: $(\pm i, \infty)$ при $0 \in i$ либо $(0, 1, \infty)$ при $0 \in i'$. Теорема о единственности нормированного квазиконформного гомеоморфизма гарантирует, что $\tilde{f}(u) \in QC(\mathbb{H})$. Поэтому новые образующие $G_s^f := \tilde{f}G_s^0\tilde{f}^{-1}$, $s = 0, 1, \dots, g$, оказываются вещественными. Деформация образующей G_0 всегда тривиальна, поскольку \tilde{f} фиксирует ее неподвижные точки. Покажем, что деформация G_s^f остальных вращений удовлетворяет геометрическому условию п. 2.1.2. Движение \tilde{f} неподвижно в крайних точках интервала $(0, u_\infty)$. Действительно, если $0 \in i$, то $\tilde{f}(0) = \tilde{f}G_0(\infty) = G_0^f\tilde{f}(\infty) = 0$. Следовательно, \tilde{f} переносит вещественные диаметры окружностей C_1, C_2, \dots, C_g на непересекающиеся отрезки интервала $(0, u_\infty)$, на которых как на диаметрах построим новые окружности $C_1^f, C_2^f, \dots, C_g^f$. Образующая G_s^f , $s = 1, \dots, g$, отображает окружность C_s^f на себя с изменением ориентации, а значит, на C_s^f есть пара неподвижных точек G_s^f .

Последние вещественны, если индекс $s \in i'$, и комплексно сопряжены, если $s \in i$. Итак, новые вращения G_s^f , $s = 0, \dots, g$, удовлетворяют названному геометрическому условию и определяют элемент того же деформационного пространства $\mathcal{G}_g^k(i)$.

Порожденное деформацией f разветвленное накрытие $x^f(u)$ согласно нормировке имеет полюс при $u = u_\infty$. Оно имеет вещественную симметрию и сохраняет ориентацию вещественной оси вблизи полюса $u = u_\infty$, поскольку этими свойствами обладают три других отображения коммутативной диаграммы (13)а).

ЛЕММА 7. *Два отображения из $QC(\mathbb{H})$ одинаково деформируют отмеченный элемент, если и только если они лежат в одном классе пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}_g^k(\mathbf{e}^0)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Рассмотрим эту лемму сначала в частном случае, когда одно из квазиконформных отображений – единичное.

1а) Если $f \in \mathfrak{A}_1^+ \cdot QC^0(\mathbb{H}, \mathbf{e}^0)$, то f не деформирует образующие группы \mathfrak{G}^0 . Оказывается, деформацию отмеченной группы отображением $f \in QC(\mathbb{H}, \mathbf{e}^0)$ можно найти в явном виде. С точностью до нормировки она совпадает с действием модулярной группы и, в частности, тривиальна для $f \in QC^0(\mathbb{H}, \mathbf{e}^0)$. Действие аффинной группы на f слева не изменяет коэффициент Бельтрами отображения, а потому не оказывает никакого влияния на деформацию \check{f} .

Прокалывая область разрывности \mathcal{D} отмеченной группы в неподвижных точках эллиптических преобразований, мы получаем пространство $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$, на котором группа скольжений \mathfrak{G}^0 действует свободно. Поднимем отображение $f \in QC(\mathbb{H}, \mathbf{e}^0)$ до автоморфизма накрывающего пространства $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$ от выделенной точки u_∞ :

$$\begin{array}{ccc} \overset{\circ}{\mathcal{D}} & \xrightarrow{\check{f}} & \overset{\circ}{\mathcal{D}} \\ \downarrow x^0 & & \downarrow x^0 \\ \mathbb{CP}_1 \setminus \mathbf{e}^0 & \xrightarrow{f} & \mathbb{CP}_1 \setminus \mathbf{e}^0 \end{array} \quad (14)$$

Полученное отображение \check{f} можно по непрерывности доопределить как в проколах области разрывности, так и на предельном множестве отмеченной группы, используя условие эквивариантности $\check{f}G = (f \cdot G)\check{f}$, $G, (f \cdot G) \in \mathfrak{G}^0$. Действие $G \rightarrow f \cdot G$ на группе скольжений \mathfrak{G}^0 порождено действием f на фундаментальной группе проколотовой плоскости $\mathbb{CP}_1 \setminus \mathbf{e}^0$, см. п. 2.2.3. Гомеоморфизм $\check{f}: \mathbb{CP}_1 \rightarrow \mathbb{CP}_1$ – квазиконформный, а его коэффициент Бельтрами равен $\tilde{\mu}$. Следовательно, \check{f} лишь нормировкой отличается от \tilde{f} из (13)а). Вычисляя \check{f} в неподвижных точках G_0 , получаем

$$\tilde{f} = \alpha \check{f}, \quad G_s^f := \tilde{f} G_s^0 \tilde{f}^{-1} = \alpha (f \cdot G_s^0) \alpha^{-1}, \quad \alpha \in \mathfrak{A}_1^+, \quad (15)$$

где аффинное движение $\alpha = \text{id}$ при $0 \in i'$, а при $0 \in i$ определяется условием $\alpha \check{f}(\pm i) := \pm i$.

1б) Если f не деформирует образующих \mathfrak{G}^0 , то $f \in \mathfrak{A}_1^+ \cdot QC^0(\mathbb{H}, \mathbf{e}^0)$. Пусть в деформационной диаграмме (13)а) $\mathfrak{G}^f = \mathfrak{G}^0$, тогда $x^f = \alpha x^0$ для некоторого $\alpha \in \mathfrak{A}_1^+$. Домножив f слева на аффинное движение, будем считать, что $f \in QC(\mathbb{H}, \mathbf{e}^0)$ и $x^f = x^0$. В этом случае деформация образующих отмеченной группы определяется по формуле (15) при $\alpha = \text{id}$. По теореме 1 из равенств $f \cdot G_s^0 = G_s^0$ следует, что $f \in QC^0(\mathbb{H}, \mathbf{e}^0)$.

2) Общий случай леммы свеем к рассмотренному в п. 1) частному случаю. Объединим в одну деформационные диаграммы отображений $f_1, f_2 \in QC(\mathbb{H})$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{D}(\mathfrak{G}^{f_1}) & \xleftarrow{\tilde{f}_1} & \mathcal{D}(\mathfrak{G}^0) & \xrightarrow{\tilde{f}_2} & \mathcal{D}(\mathfrak{G}^{f_2}) \\ \downarrow x^{f_1} & & \downarrow x^0 & & \downarrow x^{f_2} \\ \mathbb{C}\mathbb{P}_1 & \xleftarrow{f_1} & \mathbb{C}\mathbb{P}_1 & \xrightarrow{f_2} & \mathbb{C}\mathbb{P}_1 \end{array} \quad (16)$$

По лемме 5 о составной деформации одинаковая деформация образующих отмеченной группы \mathfrak{G}^0 равносильна тому, что отображение $f_2 f_1^{-1}$ не деформирует образующие группы \mathfrak{G}^{f_1} . Согласно доказанному частному случаю это происходит, если и только если $f_2 f_1^{-1} \in \mathfrak{A}_1^+ \cdot QC^0(\mathbb{H}, f_1 e^0)$, что равносильно утверждению леммы в общем случае: $f_2 \in \mathfrak{A}_1^+ \cdot f_1 \cdot QC^0(\mathbb{H}, e^0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Корректность и инъективность отображения $\mathcal{T}_g^k(e^0) \rightarrow \mathcal{G}_g^k(i)$ была установлена в леммах 6, 7; остановимся на его сюръективности. Можно подобрать квазиконформное отображение $\tilde{f}(u)$ стандартной фундаментальной области \mathcal{R} отмеченного элемента из $\mathcal{G}_g^k(i)$ на фундаментальную область произвольно заданного элемента того же пространства, которое:

- (а) перестановочно с отражением $\bar{J}u := \bar{u}$;
- (б) сохраняет граничные отождествления и
- (в) неподвижно в трех точках $\text{fix } G_0, u_\infty$.

Такое отображение строится явно, но его подробное описание занимает много места. Продолжая f с помощью условия эквивариантности (12) на всю сферу Римана, мы порождаем отображение f в базах диаграммы (13)а). В силу единственности нормированного квазиконформного отображения f деформирует отмеченный элемент в заданный.

Непрерывность биекции $\mathcal{T}_g^k \leftrightarrow \mathcal{G}_g^k$ относительно метрики Тайхмюллера в \mathcal{T}_g^k и топологии клетки \mathcal{G}_g^k вытекает из конструкции прямого и обратного отображений, см. также формулу (17) для инфинитезимальных квазиконформных преобразований.

2.3.2. Изоморфность \mathcal{T}_g^k и \mathcal{H}_g^k . Отождествим многообразие орбит модулярной группы с пространством модулей:

ЛЕММА 8. *Пространства $\mathcal{T}_g^k(e^0)/\text{Mod}(e^0)$ и \mathcal{H}_g^k гомеоморфны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сопоставим отображению $f \in QC(\mathbb{H})$ симметричный дивизор $f e^0$. Этим мы зададим инъекцию из множества орбит действующей на пространстве Тайхмюллера модулярной группы в пространство модулей. Покажем, что это отображение

- 1) непрерывно в естественной топологии и
- 2) непрерывно обратимо на всем пространстве модулей.

Так мы установим гомеоморфизм двух пространств.

1) Систему локальных координат пространства модулей вблизи его выделенной точки e^0 образуют независимые вещественные и мнимые части переменных точек дивизора $\{e_1, \dots, e_{2g}, -1, 1\} =: e \approx e^0$ типа (g, k) — мы фиксировали пару точек ± 1

в дивизоре, предполагая, что $k > 0$. На пространстве орбит модулярной группы $\mathfrak{A}_1^+ \setminus QC(\mathbb{H})/QC(\mathbb{H}, \mathbf{e}^0)$ есть метрика Тайхмюллера

$$\rho([f], [h]) := \inf_{[f], [h]} \log \frac{1 + \|\mu(x)\|_\infty}{1 - \|\mu(x)\|_\infty},$$

где нижняя грань ищется по представителям $f_1 \in [f], h_1 \in [h]$ классов, $\mu(x)$ – коэффициент Бельтрами отображения $f_1 h_1^{-1}$, норма $\|\mu(x)\|_\infty$ – это существенный максимум $\mu(x)$ на плоскости. Проверим, что вложение $\mathcal{T}_g^k(\mathbf{e}^0)/\text{Mod}(\mathbf{e}^0) \rightarrow \mathcal{H}_g^k$ непрерывно вблизи [id], общий случай получается отсюда заменой отмеченного дивизора \mathbf{e}^0 . Известна формула для “главной части” фиксирующей точки $\pm 1, \infty$ квазиконформного отображения $f(x)$ с (малым) коэффициентом Бельтрами $\mu(x)$ [5], [6], [8], [9]:

$$f(e) - e = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \mu(x) \frac{e^2 - 1}{x^2 - 1} \frac{dx \wedge d\bar{x}}{x - e} + O(\|\mu\|_\infty^2) \quad (17)$$

с равномерной на компактах плоскости оценкой остаточного члена. Из (17) видно, что классы $[f]$, близкие к [id] по метрике Тайхмюллера, слабо искажают дивизор \mathbf{e}^0 .

2) Пусть $\sigma(x)$ – бесконечно гладкая срезающая функция с носителем, малым по сравнению с расстоянием между точками дивизора \mathbf{e}^0 , равная единице в комплексной окрестности $x = 0$ и инвариантная при сопряжении: $\sigma(\bar{x}) = \sigma(x)$. В малой окрестности выделенной точки \mathbf{e}^0 пространства модулей определим локальное сечение проекции $QC(\mathbb{H}) \rightarrow \mathcal{H}_g^k$:

$$f(\mathbf{e}, x) := x + \sum_{s=1}^{2g} (e_s - e_s^0) \sigma(x - e_s^0), \quad x \in \mathbb{C}. \quad (18)$$

Отображение (18) локально обращает наше вложение $\mathcal{T}_g^k(\mathbf{e}^0)/\text{Mod}(\mathbf{e}^0) \rightarrow \mathcal{H}_g^k$ и является непрерывным. Подобные сечения можно построить вблизи любой точки пространства модулей. Взяв их суперпозицию, можно определить непрерывное обратное отображение $\mathcal{H}_g^k \rightarrow \mathcal{T}_g^k(\mathbf{e}^0)/\text{Mod}(\mathbf{e}^0)$ в окрестности любой наперед заданной точки.

ТЕОРЕМА 4. i) *Пространства $\mathcal{T}_g^k(\mathbf{e}^0)$ и $\widetilde{\mathcal{H}}_g^k(\mathbf{e}^0)$ гомеоморфны.*
 ii) *Группы $\text{Mod}(\mathbf{e}^0)$, Br_{g-k+1} изоморфны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы только что установили, что пространство модулей \mathcal{H}_g^k – это фактор $\mathcal{T}_g^k(\mathbf{e}^0)$ по действию модулярной группы. Покажем, что $\text{Mod}(\mathbf{e}^0)$ действует на пространстве Тайхмюллера 1) свободно и 2) разрывно, а потому проекция $\mathcal{T}_g^k(\mathbf{e}^0) \rightarrow \mathcal{H}_g^k$ является накрытием. Это накрытие будет универсальным, поскольку пространство $\mathcal{T}_g^k(\cdot) \cong \mathcal{G}_g^k(\cdot)$ является клеткой по лемме 2. Соответственно, группа скользящих $\text{Mod}(\mathbf{e}^0)$ накрытия изоморфна фундаментальной группе пространства модулей, которая по лемме 1 изоморфна группе кос Br_{g-k+1} .

1) Пусть для представителя $h \in QC(\mathbb{H}, \mathbf{e}^0)$ модулярной группы найдем такое движение $f \in QC(\mathbb{H})$, что $fh \in \alpha f QC^0(\mathbb{H}, \mathbf{e}^0)$ с некоторым $\alpha \in \mathfrak{A}_1^+$. Тогда $\alpha f \mathbf{e}^0 = f \mathbf{e}^0$ и, раз \mathfrak{A}_1^+ свободно действует на множестве дивизоров, $\alpha = \text{id}$, откуда $h \in QC^0(\mathbb{H}, \mathbf{e}^0)$. Тем самым, h представляет единичный элемент модулярной группы.

2) Преобразования модулярной группы – это изометрии пространства Тайхмюллера, поэтому разрывность действия $\text{Mod}(\mathbf{e}^0)$ следует из дискретности ее орбит. Мы помним из п. 2.1.1, что всякую орбиту модулярной группы заменой выделенного дивизора \mathbf{e}^0 можно изометрично перевести в орбиту, проходящую через выделенную точку $[\text{id}]$ пространства Тайхмюллера. Итак, пусть последовательность $h_n \in QC(\mathbb{H}, \mathbf{e}^0)$ такова, что деформации образующих отмеченной группы сколь угодно малы: $G_s^{h_n} \rightarrow G_s^0, s = 0, \dots, g$.

2а) Если $0 \in i'$, то деформация образующих, вычисленная в (15), имеет вид $G_s^{h_n} = h_n \cdot G_s^0$. Выберем в области разрывности отмеченной группы точку u с тривиальной изотропной группой (например, $u = u_\infty$). Сходимость $G_s^{h_n} u \rightarrow G_s^0 u$ влечет $h_n \cdot G_s^0 = G_s^0$ начиная с некоторого n . По теореме 1 тривиальное действие h_n на группе означает, что h_n представляет единичный элемент модулярной группы.

2б) Если $0 \in i$, то деформация образующих имеет вид $G_s^{h_n} = \alpha_n (h_n \cdot G_s^0) \alpha_n^{-1}$, $\alpha_n \in \mathfrak{A}_1^+$. В отмеченной группе есть элемент, инвариантный при действии всех h_n . Он порожден классом петли $[\mathbb{R} + i0]$ из фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{C}\mathbb{P}_1 \setminus \{\mathbf{e}^0, \infty\})$ и равен $G^* = \prod_{s \in i} G_s^0$, произведение упорядочено по возрастанию индексов. Из сходимости $\alpha_n G^* \alpha_n^{-1} \rightarrow G^*$ можно вывести, что $\alpha_n \rightarrow \text{id}$. Далее – как в п. 2а) доказательства.

Отождествление пространства Тайхмюллера с универсальной накрывающей пространства модулей и с деформационным пространством специальной клейновой группы порождает две системы локальных координат в \mathcal{F}_g^k . Во-первых, это глобальные координаты $(c_s, r_s)_{s=1}^g$ в \mathcal{G}_g^k , пробегающие клетку. Во-вторых, – координаты в \mathcal{H}_g^k , связанные с точками ветвления. Связь между двумя системами координат дает

ТЕОРЕМА 5. *Отображение $\widetilde{\mathcal{H}}_g^k(\mathbf{e}^0) \rightarrow \mathcal{G}_g^k(i)$ вещественно аналитично в локальных координатах. Матрица Якоби этого отображения невырождена, а ее элементы эффективно вычисляются с помощью квадратичных рядов Пуанкаре.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для записи нашего отображения в локальных координатах нужно деформировать образующие отмеченной группы при помощи локального сечения (18) проекции из леммы 8. Достаточно исследовать отображение вблизи выделенного дивизора \mathbf{e}^0 и, если это необходимо, сменить выделенный дивизор вместе с отмеченной группой при помощи леммы 5 (п. 2)) о составной деформации. Для разнообразия будем считать, что $0 \in i$, т.е. выделенный дивизор \mathbf{e}^0 содержит комплексно-сопряженные точки, скажем $\pm i$. За локальные координаты в окрестности отмеченной точки пространства модулей \mathcal{H}_g^k примем (независимые) вещественные и мнимые части комплексных точек e_1, e_2, \dots, e_{2g} , образующих вместе с $\{\pm i\}$ простой дивизор ветвления $\mathbf{e} \approx \mathbf{e}^0$. Неподвижные точки деформированных с помощью $f(\mathbf{e}, x)$ образующих отмеченной группы задают отображение $\{e_s\}_{s=1}^{2g} \rightarrow \{c_s, r_s\}_{s=1}^g$ в малой комплексной окрестности точки $\{e_s^0\}_{s=1}^{2g}$:

$$\left. \begin{array}{l} c_s(\mathbf{e}) \pm r_s(\mathbf{e}), \quad s \in i', \\ c_s(\mathbf{e}) \pm ir_s(\mathbf{e}), \quad s \in i, \end{array} \right\} := \text{fix } G_s^f = \tilde{f}(\mathbf{e}, \text{fix } G_s^0), \quad s = 1, \dots, g. \quad (19)$$

Симметричным дивизорам \mathbf{e} в $2g$ -мерной комплексной окрестности соответствуют вещественная $2g$ -плоскость и вещественные модули $c_s, r_s > 0$. Мы утверждаем,

что: 1) комплексное отображение $\{e_s\}_{s=1}^{2g} \rightarrow \{c_s, r_s\}_{s=1}^g$ голоморфно, 2) его матрица Якоби явно вычисляется и 3) невырождена.

1) Коэффициент Бельтрами $\mu(\mathbf{e}, x)$ функции (18) голоморфно зависит в пространстве $L_\infty(\mathbb{C})$ от компонент \mathbf{e} . Такой же будет зависимость от \mathbf{e} и коэффициента

$$\tilde{\mu}(\mathbf{e}, u) := \mu(\mathbf{e}, x^0(u)) \frac{\overline{dx^0(u)}}{dx^0(u)},$$

заданного уже на области разрывности $\mathcal{D}(\mathfrak{G}^0)$. По известной теореме [8] зависимость квазиконформного отображения $\tilde{f}(\mathbf{e}, \cdot)$ от параметров \mathbf{e} будет аналитической. В частности, голоморфны все функции $v(\mathbf{e}) := \tilde{f}(\mathbf{e}, v)$, $v \in \{\text{fix } G_s^0\}_{s=1}^g$, линейными комбинациями которых являются $c_s(\mathbf{e})$, $r_s(\mathbf{e})$.

2) Дифференциалы функций $v(\mathbf{e})$ можно вычислить с помощью формулы инфинитезимальной деформации [8], [5], в которой $\stackrel{\circ}{=}$ означает равенство с точностью до членов порядка $O(\sum_{s=1}^{2g} |e_s - e_s^0|^2)$:

$$\begin{aligned} 2\pi i(v(\mathbf{e}) - v(\mathbf{e}^0)) &\stackrel{\circ}{=} \int_{\mathbb{C}} \tilde{\mu}(\mathbf{e}, u) \frac{v^2 + 1}{u^2 + 1} \frac{du \wedge \overline{du}}{u - v} \\ &= \int_{\mathcal{R}} \tilde{\mu}(\mathbf{e}, u) \left[\sum_{G \in \mathfrak{G}^0} \frac{(dG(u)/du)^2}{(Gu)^2 + 1} \frac{v^2 + 1}{Gu - v} \right] du \wedge \overline{du} \\ &= (v^2 + 1) \int_{\mathbb{C}} \mu(\mathbf{e}, x) \frac{P_{2g-1}^v(x)}{w^2(x)} dx \wedge \overline{dx}. \end{aligned} \quad (20)$$

В предпоследнем интеграле квадратичный ряд Пуанкаре определяет на сфере Римана $x^0(\mathcal{R})$ мероморфный квадратичный дифференциал $w^{-2} P_{2g-1}^v(x) (dx)^2$, параметрически зависящий от точки $v \in \{\text{fix } G_s^0\}_{s=1}^g$. Особенности его – это простые полюсы, которые могут располагаться в точках дивизора \mathbf{e}^0 и на бесконечности. Такие квадратичные дифференциалы (конечной площади [5]) образуют комплексное векторное пространство размерности $2g$ с базисом

$$\Omega_s(x) (dx)^2 := \frac{(dx)^2}{(x^2 + 1)(x - e_s^0)}, \quad s = 1, \dots, 2g. \quad (21)$$

Разложим наш квадратичный дифференциал $w^{-2} P_{2g-1}^v(x) (dx)^2$ по базису (21) с коэффициентами $a_s^v := P_{2g-1}^v(e_s^0) \prod_{j=1, j \neq s}^{2g} (e_s^0 - e_j^0)^{-1}$ и продолжим равенство (20):

$$\begin{aligned} &(v^2 + 1) \int_{\mathbb{C}} \mu(\mathbf{e}, x) \sum_{s=1}^{2g} a_s^v \Omega_s(x) dx \wedge \overline{dx} \\ &\stackrel{\circ}{=} (v^2 + 1) \int_{\mathbb{C}} \sum_{s=1}^{2g} a_s^v \Omega_s(x) \sum_{j=1}^{2g} (e_j - e_j^0) \sigma_{\overline{x}}(x - e_j^0) dx \wedge \overline{dx} \\ &= (v^2 + 1) \sum_{j=1}^{2g} (e_j - e_j^0) \int_{\text{supp } \sigma_{\overline{x}}(x - e_j^0)} d \left(- \sum_{s=1}^{2g} a_s^v \Omega_s(x) \sigma(x - e_j^0) dx \right) \\ &= 2\pi i \sum_{s=1}^{2g} a_s^v \frac{v^2 + 1}{(e_s^0)^2 + 1} (e_s - e_s^0). \end{aligned}$$

Из полученных выражений восстанавливаются дифференциалы функций $c_s(\mathbf{e})$, $r_s(\mathbf{e})$.

3) Пусть дифференциал отображения $\{e_s\}_{s=1}^{2g} \rightarrow \{c_s, r_s\}_{s=1}^g$ вырожден в точке \mathbf{e}^0 , тогда найдется ненулевой касательный вектор $\xi := \sum_{j=1}^{2g} \varepsilon_j \partial / \partial e_j$, для которого при $\mathbf{e} = \mathbf{e}^0$

$$\xi c_s(\mathbf{e}) = \xi r_s(\mathbf{e}) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, g.$$

Продифференцируем в направлении ξ условие эквивариантности отображения $\tilde{f}(\mathbf{e}, \cdot)$:

$$G^f \circ \tilde{f}(\mathbf{e}, u) = \tilde{f}(\mathbf{e}, u) \circ G, \quad G \in \mathfrak{G}^0, \quad G^f \in \mathfrak{G}^f.$$

Мы получим, что в рассматриваемой точке \mathbf{e}^0 скорость деформации $\tilde{f}(\mathbf{e}, u)$ определяет \mathfrak{G}^0 -инвариантный обратный дифференциал $\xi \tilde{f}(\mathbf{e}^0, u)(du)^{-1}$. Покажем, что любой коэффициент ε_s вектора ξ равен нулю, для чего поднимем элемент базиса (21) на $\mathcal{D}(\mathfrak{G}^0)$: $\Omega_s(x^0(u))(dx^0(u))^2 =: \tilde{\Omega}_s(u)(du)^2$. Произведение квадратичного и обратного дифференциалов будет гладким \mathfrak{G}^0 -инвариантным дифференциалом $\tilde{\Omega}_s(u) \cdot \xi \tilde{f}(\mathbf{e}^0, u) du$ на $\mathcal{D}(\mathfrak{G}^0)$, следовательно,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial \mathcal{R}(\mathfrak{G}^0)} \tilde{\Omega}_s(u) \cdot \xi \tilde{f}(\mathbf{e}^0, u) du = \int_{\mathcal{R}(\mathfrak{G}^0)} d(\tilde{\Omega}_s \cdot \xi \tilde{f} du) \\ &= - \int_{\mathcal{R}(\mathfrak{G}^0)} \tilde{\Omega}_s \cdot (\xi \tilde{f})_{\bar{u}} du \wedge \bar{du} \\ &\text{(дифференцирование } \tilde{f} \text{ по параметрам } e_s \text{ и по аргументу } \bar{u} \text{ можно переставить)} \\ &= - \int_{\mathcal{R}(\mathfrak{G}^0)} \tilde{\Omega}_s(u) \sum_{j=1}^{2g} \varepsilon_j \sigma_{\bar{x}}(x(u) - e_j^0) \frac{\dot{x}(u)}{\dot{x}(u)} du \wedge \bar{du} \\ &= - \int_{\mathbb{C}} \Omega_s(x) \sum_{j=1}^{2g} \varepsilon_j \sigma_{\bar{x}}(x - e_j^0) dx \wedge \bar{dx} \\ &= \sum_{j=1}^{2g} \varepsilon_j \int_{\text{supp } \sigma_{\bar{x}}(x - e_j^0)} d(\Omega_s(x) \sigma(x - e_j^0) dx) \\ &= -2\pi i \sum_{j=1}^{2g} \varepsilon_j \operatorname{Res}_{x=e_j^0} \Omega_s(x) = -2\pi i \frac{\varepsilon_s}{(e_s^0)^2 + 1}. \end{aligned}$$

Поскольку величина e_s^0 конечна, то $\varepsilon_s = 0$.

2.3.3. Изоморфность \mathcal{L}_g^k и \mathcal{G}_g^k . При нахождении группы разветвленного накрытия $x(u)$ в п. 2.2.2 мы уже сопоставляли элементу деформационного пространства специальный лабиринт – проекцию границы определяемой этим элементом фундаментальной области. На обращении этого соответствия основывается

ТЕОРЕМА 6. *Пространства $\mathcal{L}_g^k(i)$ и $\mathcal{G}_g^k(i)$ гомеоморфны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим 1-1 соответствие между пространствами.

1) *Отображение $\mathcal{G}_g^k(i) \rightarrow \mathcal{L}_g^k(i)$.* Со всяким элементом деформационного пространства $\mathcal{G}_g^k(i)$ связана система окружностей C_0, C_1, \dots, C_g , ограничивающих фундаментальную область \mathcal{R} порождаемой этим элементом клейновой группы.

Полюс u_∞ согласованного с группой накрытия $x(u)$ лежит внутри \mathcal{R} , если $0 \in i'$. При $0 \in i$ этого же можно добиться, если заменить “бесконечно большую” окружность C_0 на “очень большую” $C_\varepsilon := \{u \in \mathbb{C} : |\varepsilon u + 1|^2 = \varepsilon^2 + 1\}$ с малым $\varepsilon > 0$. Граница фундаментальной области при проекции $x(u)$ образует лабиринт Λ типа (g, k, i) , класс которого неизменен при допустимых шевелениях окружностей C_i , $i \in i$.

2) *Отображение* $\mathcal{L}_g^k(i) \rightarrow \mathcal{G}_g^k(i)$. Для определенности будем считать, что $0 \in i'$ – этот случай содержит меньше технических деталей. Всякому дивизору e типа (g, k) соответствует орбита модулярной группы, действующей в $\mathcal{G}_g^k(i)$. Все точки этой орбиты обладают единым согласованным накрытием $x(u) : (\mathcal{D}, u_\infty) \rightarrow (\mathbb{C}\mathbb{P}_1 \setminus e, \infty)$. Группа этого накрытия по лемме 3 совпадает с ядром каждого представления χ_Λ из фундаментальной группы $\mathbb{C}\mathbb{P}_1 \setminus e$ в абстрактную группу $\mathfrak{G} := \langle G_s, s \in i \cup i' : G_s^2 = 1 \rangle$. Фиксация лабиринта (e, Λ) позволяет поэтому реализовать элементы \mathfrak{G} как скольжения накрытия $x(u)$, т.е. как дробно-линейные преобразования из $\text{PGL}_2(\mathbb{R})$. Например, $G_0(u) = -u$ (=единственное вращение порядка 2 с неподвижными точками $0, \infty$). Покажем, что реализация остальных образующих G_1, G_2, \dots, G_g удовлетворяет геометрическому условию п. 2.1.2.

Фундаментальная группа римановой сферы, разрезанной вдоль лабиринта Λ , лежит в ядре χ_Λ по определению этого представления. Следовательно, на $\mathbb{C}\mathbb{P}_1 \setminus \Lambda$ корректно определено обратное к $x(u)$ отображение $u(x)$ с нормировкой $u(\infty) = u_\infty$ и наследующее зеркальную симметрию $\bar{u}(x) = u(\bar{x})$. При этом отображении разрезы лабиринта раздуваются до гладко вложенных окружностей, симметрично нанизанных на вещественную ось в том же порядке, что и разрезы $\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_g$. Поэтому выполнены неравенства

$$0 = \mathbb{R} \cap (u\Lambda_0) < \mathbb{R} \cap (u\Lambda_1) < \dots < \mathbb{R} \cap (u\Lambda_g) < u_\infty. \quad (22)$$

Каждое множество $\mathbb{R} \cap (u\Lambda_i)$, $i = 1, \dots, g$, состоит из двух точек, которые под действием $G_i(u)$ переходят друг в друга при $i \in i$ либо остаются неподвижными при $i \in i'$. Проведенная через точки $\mathbb{R} \cap (u\Lambda_i)$ окружность C_i с центром на \mathbb{R} содержит неподвижные точки вращения $G_i(u)$ и в силу неравенств (22) не пересекается с другими такими окружностями. Как видим, набор образующих G_0, G_1, \dots, G_g определяет элемент деформационного пространства $\mathcal{G}_g^k(i)$.

Отображения пп. 1) и 2) доказательства взаимно обратны. Лабиринт $\{\Lambda_s\}_{s=0}^g$ и полученный из него при помощи суперпозиции $\mathcal{L}_g^k(i) \rightarrow \mathcal{G}_g^k(i) \rightarrow \mathcal{L}_g^k(i)$ лабиринт $\{xC_s\}_{s=0}^g$ по построению имеют одно и то же представление χ_Λ . Значит, по теореме 2 они лежат в одном классе пространства лабиринтов. Построенная нами биекция $\mathcal{L}_g^k(i) \leftrightarrow \mathcal{G}_g^k(i)$ непрерывна в силу теоремы 5, так как локальные координаты пространства лабиринтов заимствованы из пространства модулей \mathcal{H}_g^k .

§ 3. Вычисления в пространстве модулей

Эффективное вычисление экстремальных многочленов предполагает, прежде всего, решение уравнений Абеля (5), заданных на универсальной накрывающей пространства модулей. Эти уравнения подробно исследованы в [1], мы приведем только краткий обзор.

На всякой кривой $M(e)$ пространства модулей существует единственный дифференциал третьего рода $d\eta_M$ с чисто мнимыми периодами и простыми полюсами на бесконечности, $\text{Res } d\eta_M|_{\infty_\pm} = \mp 1$. Этот дифференциал вещественный:

$\overline{J}d\eta_M = \overline{d\eta_M}$, поэтому интегралы $d\eta_M$ по четным циклам $C^+ := \overline{J}C^+$ на кривой M равны нулю. Интегралы $d\eta_M$ по нечетным циклам $C^- := -\overline{J}C^-$ локально задают отображение периодов на \mathcal{H}_g^k . Как правило, пространство модулей неоднозначно и отображение периодов не продолжается до глобального, поскольку нетривиальный обход в \mathcal{H}_g^k приводит к замене базиса в решетке нечетных гомологий $H_1^-(M, \mathbb{Z}) := \{C \in H_1(M, \mathbb{Z}) : C = -\overline{J}C\}$. Эта проблема снимается переходом к универсальной накрывающей пространства модулей. В ее лабиринтной модели $\mathcal{L}_g^k(i)$ всякий элемент (\mathbf{e}, Λ) обладает выделенным базисом в решетке $H_1^-(M, \mathbb{Z})$. А именно цикл C_s^- — это обход против часовой стрелки по берегу разреза Λ_s на верхнем листе $M(\mathbf{e})$. Левые части равенств

$$-i \int_{C_s^-} d\eta_M = 2\pi \frac{m_s}{n}, \quad s = 0, 1, \dots, g, \quad m_s \in \begin{cases} \mathbb{Z}, & s \in i', \\ 2\mathbb{Z}, & s \in i, \end{cases} \quad (23)$$

задают *отображение периодов* $\Pi: \mathcal{L}_g^k(i) \rightarrow \mathbb{R}^{g+1}$, образ которого лежит на гиперплоскости: интеграл от $d\eta_M$ по циклу $C_0^- + C_1^- + \dots + C_g^-$ всегда равен $2\pi i$. Отображение периодов является субмерсией в \mathbb{R}^g [1], и образ его известен [3].

Точки M пространства модулей, порожденные вещественными многочленами степени n , заполняют вещественно аналитические многообразия размерности g — прообраз при отображении периодов решетки, задаваемой правой частью уравнений (23). Эти уравнения равносильны существованию на кривой M вещественной мероморфной функции (Ахиезера) с дивизором $n(\infty_- - \infty_+)$:

$$\tilde{P}_n(x, w) := \exp\left(n \int_{(\mathbf{e}, 0)}^{(x, w)} d\eta_M\right). \quad (24)$$

Композиция последней с функцией Жуковского будет (экстремальным) многочленом:

$$P_n(x) = \frac{1}{2} \left(\tilde{P}_n(x, w) + \frac{1}{\tilde{P}_n(x, w)} \right). \quad (25)$$

Для эффективного решения уравнений Абеля (23) и последующего восстановления многочлена по формулам (24), (25) мы униформизуем кривые $M \in \mathcal{H}_g^k$ группами Шоттки \mathfrak{S} , порожденными элементами деформационного пространства $\mathcal{G}_g^k(i)$ с подходящим множеством i . Известно [10], [4], [11], что линейные тэта-ряды Пуанкаре таких групп сходятся абсолютно и равномерно на компактах в области разрывности \mathcal{D} . Суммируя эти ряды, мы получим абелевы дифференциалы на кривых, и в частности $d\eta_M$. При отождествлении пространства лабиринтов $\mathcal{L}_g^k(i)$ с деформационным пространством $\mathcal{G}_g^k(i)$ специальных клейновых групп связанные с лабиринтом циклы $C_1^-, C_2^-, \dots, C_g^-$ перейдут в окружности C_1, C_2, \dots, C_g , ограничивающие фундаментальную область группы, а полюсы ∞_+, ∞_- дифференциала $d\eta_M$ — в точки u_∞ и $G_0 u_\infty$ соответственно. Напомним, что $u_\infty = 1$ при $0 \in i'$ и $u_\infty = \infty$ при $0 \in i$.

Уравнения Абеля (23) и представление Чебышёва (24), (25) можно переписать в терминах глобальных координат $(c_s, r_s)_{s=1}^g$ пространства $\mathcal{G}_g^k(i)$. После этого перед нами встает задача о *навигации* в пространстве модулей. Из произвольной

точки $\mathcal{G}_g^k(i)$ нужно спуститься на гладкое многообразие, высекаемое уравнениями Абеля, u , двигаясь вдоль него, найти кривую M , отвечающую многочлену $P_n(x)$ с заданными связями. Вариационные формулы п. 3.2 позволяют локально решать задачу навигации.

3.1. Теория функций в модели Шоттки. Абелев дифференциал 3-го рода $d\eta_{zy}$ с полюсами в точках z, y фундаментальной области $\mathcal{R}(\mathfrak{S})$ получается усреднением по группе \mathfrak{S} дифференциала на сфере [11]:

$$d\eta_{zy}(u) := \sum_{S \in \mathfrak{S}} \left\{ \frac{1}{Su - z} - \frac{1}{Su - y} \right\} dS(u) = \sum_{S \in \mathfrak{S}} \left\{ \frac{1}{u - Sz} - \frac{1}{u - Sy} \right\} du, \quad (26)$$

почленное равенство двух сумм вытекает из инфинитезимальной формы тождества двойного отношения. Дифференцируя (26) по положению полюса z , мы получаем абелевы дифференциалы второго рода:

$$d\omega_{mz}(u) := D_z^m d\eta_{zy}(u) = m! \sum_{S \in \mathfrak{S}} (Su - z)^{-m-1} dS(u), \quad m = 1, 2, \dots \quad (27)$$

Голоморфный дифференциал можно получить, помещая полюсы z, y в одну орбиту группы \mathfrak{S} и выделяя в (26) телескопическую сумму:

$$\begin{aligned} d\zeta_j(u) &:= d\eta_{S_j y y} = \sum_{S \in \mathfrak{S} \setminus \langle S_j \rangle} \{ (u - S\alpha_j)^{-1} - (u - S\beta_j)^{-1} \} du \\ &= \sum_{S \in \langle S_j \rangle \setminus \mathfrak{S}} \{ (Su - \alpha_j)^{-1} - (Su - \beta_j)^{-1} \} dS(u), \quad j = 1, \dots, g, \end{aligned} \quad (28)$$

суммирование ведется по представителям смежных классов подгруппы $\langle S_j \rangle \subset \mathfrak{S}$, порожденной элементом S_j ; α_j и β_j – притягивающая и отталкивающая неподвижные точки S_j . Почленно интегрируя ряды (26), (27) по окружностям $\{C_s\}_{s=1}^g$, определим нормировку рассмотренных дифференциалов:

$$\int_{C_s} d\eta_{zy} = 0, \quad \int_{C_s} d\omega_{mz} = 0, \quad \int_{C_s} d\zeta_j = 2\pi i \delta_{sj}, \quad z, y \in \mathcal{R}(\mathfrak{S}), \quad s, j = 1, \dots, g. \quad (29)$$

Называемые функциями Шоттки [7], [11] экспоненты интегралов от рядов (26), (28) эффективно вычисляются:

$$(u, v; z, y) := \exp \int_v^u d\eta_{zy} = \prod_{S \in \mathfrak{S}} \frac{u - Sz}{u - Sy} : \frac{v - Sz}{v - Sy}, \quad (30)$$

$$E_j(u) := \exp \int_\infty^u d\zeta_j = \prod_{S \in \mathfrak{S} \setminus \langle S_j \rangle} \frac{u - S\alpha_j}{u - S\beta_j}, \quad j = 1, \dots, g, \quad (31)$$

и под действием группы \mathfrak{S} преобразуются известным образом:

$$(S_j u, v; z, y) = (u, v; z, y) \frac{E_j(z)}{E_j(y)}, \quad (32)$$

$$E_s(S_j u) = E_s(u) E_{sj}; \quad (33)$$

E_{lj} – экспонента от периода голоморфного дифференциала – имеет представление

$$E_{lj} = E_{jl} = \prod_{S \in \langle S_l \rangle | \mathfrak{S} | \langle S_j \rangle} \frac{S\alpha_j - \alpha_l}{S\alpha_j - \beta_l} : \frac{S\beta_j - \alpha_l}{S\beta_j - \beta_l}, \quad l, j = 1, \dots, g, \quad (34)$$

здесь произведение берется по двусторонним классам смежности группы \mathfrak{S} и при $j = l$ сомножитель $0/\infty$, соответствующий $S = 1$, заменяется на коэффициент растяжения $\lambda_l := \dot{S}_l(\alpha_l)$.

Неулеву мероморфную функцию на многообразии орбит группы \mathfrak{S} можно выразить через функции Шоттки.

ЛЕММА 9. Пусть автоморфная функция $F(u)$ имеет дивизор

$$\sum_{s=1}^{\deg F} (z_s - y_s)$$

в фундаментальной области группы \mathfrak{S} , тогда справедливо представление

$$F(u) = \text{const} \prod_{s=1}^{\deg F} (u, *; z_s, y_s) \prod_{s=1}^g E_s^{m_s}(u), \quad (35)$$

где $m_s \in \mathbb{Z}$ – приращение $(2\pi i)^{-1} \log F(u)$ по циклу C_s . Производные автоморфной функции $F(u)$ по ее аргументу рекурсивно вычисляются с помощью формулы:

$$D_u^{m+1} F(u) = \sum_{l=0}^m \binom{l}{m} \cdot (D_u^{m-l} F(u)) \cdot D_u^l \left(\sum_{s=1}^{\deg F} \dot{\eta}_{z_s y_s}(u) + \sum_{s=1}^g m_s \dot{\zeta}_s(u) \right). \quad (36)$$

Ряды для производных D_u^l от $\dot{\eta}_{zy}(u) := \frac{d\eta_{zy}(u)}{du}$, $\dot{\zeta}_s(u) := \frac{d\zeta_s(u)}{du}$ сходятся абсолютно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Ограничения, налагаемые теоремой Абеля на дивизор F , – это в точности условия автоморфности правой части (35).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложим дифференциал dF/F на дифференциалы третьего рода и голоморфные:

$$\frac{dF}{F} = \sum_{s=1}^{\deg F} d\eta_{z_s y_s} + \sum_{s=1}^g m_s d\zeta_s.$$

Интегрируя до u и потенцируя, приходим к (35). Многократно дифференцируя сложную функцию

$$F(u) = \exp \left(\int_*^u \frac{dF}{F} \right)$$

по формуле бинома Ньютона, получаем (36). Эффективно вычисляемые выражения для производных от дифференциалов в последней формуле выводятся из соотношений Римана:

$$\dot{\eta}_{zy}(u) = D_u \int_y^z d\eta_{uw} = \int_y^z d\omega_{1u}, \quad \dot{\zeta}_j(u) = \int_w^{S_j w} d\omega_{1u} \quad \forall w \in \mathcal{D}(\mathfrak{S}).$$

Дифференцируя под знаком интеграла нужное число раз по параметру и почленно интегрируя, получаем абсолютно сходящиеся в $\mathcal{D}(\mathfrak{S})$ ряды:

$$D_u^l \dot{\eta}_{zy}(u) = l! \sum_{S \in \mathfrak{S}} \{(Sy - u)^{-l-1} - (Sz - u)^{-l-1}\}, \quad (37)$$

$$D_u^l \dot{\zeta}_j(u) = l! \sum_{S \in \mathfrak{S} \setminus \{S_j\}} \{(S\beta_j - u)^{-l-1} - (S\alpha_j - u)^{-l-1}\}. \quad (38)$$

3.2. Вариации абелевых интегралов. Абелевы интегралы в заданных пределах и их периоды являются функциями точки деформационного пространства $\mathcal{G}_g^k(\mathfrak{i})$. Например, выражения

$$\int_v^w d\eta_{zy}, \quad \int_v^w d\omega_{mz}, \quad \int_{S_j w}^w d\omega_{mz}, \quad \int_v^w d\zeta_s, \quad \int_{S_j w}^w d\zeta_s, \quad s, j = 1, 2, \dots, g, \quad (39)$$

при фиксированных точках z, y, v, w из фундаментальной области некоторой группы Шоттки \mathfrak{S} зависят от модулей $\{c_s, r_s\}_{s=1}^g$. Малое возмущение модулей $\{\delta c_s, \delta r_s\}_{s=1}^g$ приводит к малым возмущениям матриц $\widehat{G}_s \in \text{PGL}_2(\mathbb{R})$, соответствующих образующим группы \mathfrak{S} :

$$\widehat{G}_s := \begin{vmatrix} c_s & \pm r_s^2 - c_s^2 \\ 1 & -c_s \end{vmatrix}, \quad \delta \widehat{G}_s := \begin{vmatrix} 1 & -2c_s \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \delta c_s \pm \begin{vmatrix} 0 & 2r_s \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \delta r_s + o, \quad s = 1, \dots, g, \quad (40)$$

знак \pm зависит от того, в какое из множеств $\mathfrak{i}, \mathfrak{i}'$ попадает индекс s ;

$$o := o\left(\sum_{s=1}^g |\delta c_s| + |\delta r_s|\right).$$

ТЕОРЕМА 7. *Вариации функций (39) описываются формулами:*

$$\delta \int_v^w d\eta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{s=1}^g \int_{C_s} \dot{\eta}(u) \dot{\eta}_{vw}(u) \text{tr}[\mathcal{M}(u) \cdot \delta \widehat{G}_s \cdot \widehat{G}_s^{-1}] du + o, \quad (41)$$

$$\delta \int_{S_j w}^w d\eta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{s=1}^g \int_{C_s} \dot{\eta}(u) \dot{\zeta}_j(u) \text{tr}[\mathcal{M}(u) \cdot \delta \widehat{G}_s \cdot \widehat{G}_s^{-1}] du + o, \quad (42)$$

все объекты в правой части равенств относятся к невозмущенной группе, $d\eta(u) := \dot{\eta}(u) du$ – любой из дифференциалов $d\eta_{zy}, d\zeta_s, d\omega_{mz}$, $\mathcal{M}(u) := (u, 1)^t \cdot (-1, u) \in \text{sl}_2(\mathbb{C})$ – матрица Хейхала, $o := o(\sum_{s=1}^g |\delta c_s| + |\delta r_s|)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО для частного случая $\mathfrak{i} = \emptyset$ приведено в [4], но оно буквально переносится на случай общих групп Шоттки.

ЗАМЕЧАНИЕ. Использование квадратурных формул для вычисления правых частей в (41) и (42) неэффективно, так как требует суммирования рядов Пуанкаре в большом числе точек. Прием, позволяющий вычислять эти интегралы, суммируя ряды только в $2g - 1$ точке, описан в [4].

3.3. Параметрическое вычисление многочленов. Для иллюстрации леммы 9 найдем эффективно вычисляемое параметрическое представление экстремальных многочленов в предположении, что выполнены уравнения Абеля.

Окружности C_1, C_2, \dots, C_g образуют половину канонического базиса в 1-циклах на компактной кривой $M_c := \mathcal{D}(\mathfrak{S})/\mathfrak{S}$. Следовательно [12], абелевы дифференциалы на кривой можно нормировать, задавая их периоды вдоль указанных окружностей. В частности, ассоциированный с кривой M дифференциал $d\eta_M$ с предписанными уравнениями Абеля (23) периодами имеет представление

$$d\eta := d\eta_{zy} + \sum_{s=1}^g \frac{m_s}{n} d\zeta_s, \quad z := G_0 u_\infty, \quad y := u_\infty. \quad (43)$$

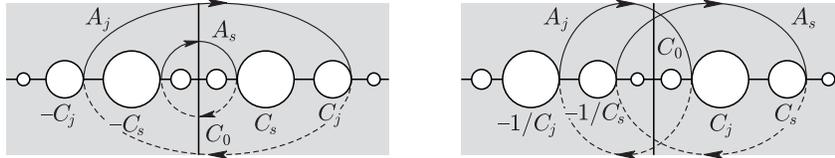
Теперь нетрудно получить выражение для функции Ахизера $\tilde{P}_n(u)$, из которой экстремальный многочлен P_n восстанавливается по формуле (25). Аналогично находится независимая переменная $x(u)$, определяемая, вообще говоря, с точностью до аффинных движений. Результаты вычислений сведены в таблицу 1, учитывающую вид образующей $G_0(u)$.

ТАБЛИЦА 1

	$0 \in i'$	$0 \in i$
Нормировка $x(u)$	$u = (0, 1, \infty) \rightarrow x = (0, \infty, -1)$	$u = (\pm i, \infty) \rightarrow x = (\pm i, \infty)$
$x(u) =$	$-(u, \infty; 0, 1)(u, \infty; 0, -1)$	$i \frac{x_1 + 1}{x_1 - 1}, x_1(u) := (u, \infty; -i, i)^2$
$\tilde{P}_n(u) =$	$(u, \infty; -1, 1)^n \prod_{j=1}^g E_j^{m_j}(u)$	$(u, i; 0, \infty)^n \prod_{j=1}^g \left(\frac{E_j(u)}{E_j(i)} \right)^{m_j}$

По формуле (36) можно вычислить струи функций $\tilde{P}_n(u)$, $x(u)$, а значит, и производные $D_x^m P_n(x)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, экстремального многочлена. Через значения производных в разных точках выражаются связи оптимизационной задачи, например два старших коэффициента многочлена равны $P_n(x)x^{-n}$, $(nP_n(x) - x\dot{P}_n(x))x^{1-n}$ при $u = u_\infty$.

3.4. Уравнения Абеля в пространстве $\mathcal{G}_g^k(i)$. Разумеется, мероморфная функция с дивизором $n(\infty_- - \infty_+)$ существует не на каждой кривой M . Условия автоморфности функции $\tilde{P}_n(u)$ из таблицы 1 эквивалентны уравнениям Абеля (23).

Рис. 5. Вычисление $A_* - \bar{J}A_*$, $s \in i'$, $j \in i$: а) при $0 \in i'$; б) при $0 \in i$

ЛЕММА 10. *Уравнения Абеля (23) эквивалентны g вещественным соотношениям:*

$0 \in i'$	$0 \in i$
$E_s^{2n}(1) = E_{1s}^{m_1} E_{2s}^{m_2} \cdots E_{gs}^{m_g}, s = 1, \dots, g$	$E_s^n(0) E_{1s}^{m_1} E_{2s}^{m_2} \cdots E_{gs}^{m_g} = 1, s = 1, \dots, g$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Переформулируем уравнения Абеля: *нормированный при помощи условий (23) дифференциал (43) должен иметь чисто мнимые периоды на кривой.* Это условие выполнено для циклов C_1, C_2, \dots, C_g в силу нормировки (29) голоморфных дифференциалов. Пусть $A_j, j = 1, \dots, g$, — дуга в $\mathcal{R}(\mathfrak{S}) \cap \mathbb{H}$, соединяющая вещественную точку $u \in G_0 C_j$ с точкой $S_j u \in C_j$. С помощью формулы пересечений можно проверить, что $2g$ циклов $C_1, \dots, C_g; A_1, \dots, A_g$ образуют базис в решетке целых 1-циклов на компактной кривой $M_c := \mathcal{D}(\mathfrak{S})/\mathfrak{S}$. Из рис. 5 мы видим, что

$$A_j - \bar{J}A_j = \chi(i, 0) \cdot C_0^- + \chi(i, j) \cdot C_j^- \pmod{2H_1^-(M, \mathbb{Z})}, \quad (44)$$

где $\chi(i, \cdot)$ — принимающая значения 0, 1 характеристическая функция множества i . Учитывая вещественность дифференциала $d\eta$, условия (29) нормировки дифференциалов, четность индекса m_j при $j \in i$ и сравнение (44), получаем: $\text{Im} \int_{A_j} n d\eta \in 2\pi i\mathbb{Z}$. Следовательно, периоды $d\eta$ будут чисто мнимыми, если и только если $\exp\left(\int_{A_j} n d\eta\right) = 1, j = 1, \dots, g$. Правила преобразования для функций Шоттки (32), (33) переводят последние g соотношений в утверждение теоремы.

3.5. Схема алгоритма. Опишем протокол решения задач наименьшего уклонения в рамках нашего подхода.

1) По данным задачи найти соответствующие решению $P_n(x)$ топологические инварианты g, k и целые индексы m_0, m_1, \dots, m_g . Эта задача связана с определением маломерной грани на сфере $\{Q_n(x) : \|Q_n\|_E = \text{const}\}$ в пространстве многочленов, на которой лежит решение $P_n(x)$. Автор не располагает алгоритмом по реализации этого пункта протокола. Целые индексы m_0, m_1, \dots, m_g можно угадать; иногда известны их асимптотические значения при $n \rightarrow \infty$, как в задаче о наименьшем уклонении монического многочлена на нескольких отрезках вещественной оси.

2) Фиксировать разбиение индексов $\{0, 1, \dots, g\} = i \cup i'$. Тем самым мы реализуем универсальную накрывающую $\widetilde{\mathcal{H}}_g^k$ в виде области евклидова пространства, явно заданной системой неравенств (7), (8).

3) Произвести спуск из произвольной точки пространства модулей на высеканное уравнениями Абеля из леммы 10 гладкое g -мерное многообразие \mathbb{T} в области $\mathcal{G}_g^k(i)$. Локально навигация в пространстве модулей осуществляется при помощи вариационных формул (41), (42), позволяющих реализовать метод Ньютона или другие методы спуска.

4) Используя формулы (36) для производных автоморфных функций и вариационные формулы для абелевых интегралов, найти на многообразии \mathbb{T} точку M , многочлен которой удовлетворяет связям задачи о наименьшем уклонении.

5) Восстановить решение $P_n(x)$ по ассоциированной с ним кривой M с помощью параметрических формул из таблицы 1.

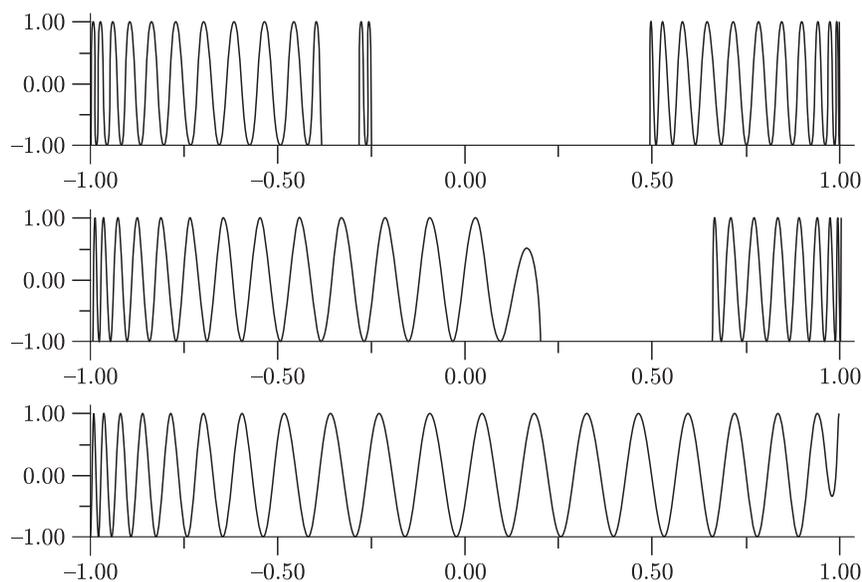


Рис. 6. Экстремальные многочлены $P_{50}(x)$ для $g = 2, k = 3, 2, 1$

Графики нескольких экстремальных многочленов, вычисленных при помощи компьютерной программы, реализующей пп. 3)–5) протокола, представлены на рис. 6.

Список литературы

1. Богатырёв А. Б. Эффективный подход к задачам о наименьшем уклонении // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 12. С. 21–40.
2. Золотарёв Е. И. Приложения эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее и наиболее уклоняющихся от нуля // Полное собрание сочинений. Т. 2. М.: АН СССР, 1934.
3. Богатырёв А. Б. Экстремальные многочлены на языке графов // Матем. сб. (в печати).
4. Богатырёв А. Б. Об эффективном вычислении многочленов Чебышёва для многих отрезков // Матем. сб. 1999. Т. 190. № 11. С. 15–50.
5. Gardiner F. P. Teichmüller theory and quadratic differentials. New York: John Wiley & Sons, 1987.
6. Крушкаль С. Л., Апанасов Б. Н., Гусевский Н. А. Клейновы группы и униформизация в примерах и задачах. Новосибирск: Наука, 1981.
7. Schottky F. Über eine specielle Function welche bei einer bestimmten linearen Transformation ungeändert bleibt // J. Reine Angew. Math. 1887. V. 101. P. 227–272.
8. Ahlfors L. V. Lectures on quasiconformal mappings. Princeton: Van Nostrand, 1966.
9. Альфорс Л., Берс Л. Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения. М: ИЛ, 1961.
10. Бобенко А. И. Униформизация Шоттки и конечнозонное интегрирование // Докл. АН СССР. 1987. Т. 295. С. 268–272; Belokolos E. D., Bobenko A. I., Enol'skiĭ V. Z., Its A. R., Matveev V. B. Algebro-geometric approach to nonlinear integrable equations. Berlin: Springer-Verlag, 1994.
11. Burnside W. On a class of automorphic functions // Proc. London Math. Soc. 1892. V. 23. P. 49–88.
12. Farkas H., Kra I. Riemann surfaces. New York: Springer-Verlag, 1992.