

УДК 517.545+517.518.826

А. Б. Богатырёв

Эффективный подход к задачам о наименьшем уклонении

В работе построена иерархия экстремальных многочленов, описываемых при помощи вещественных гиперэллиптических кривых рода $g \geq 0$. Такие многочлены зависят от g целочисленных параметров и g непрерывных параметров. Классические многочлены Чебышёва получаются при $g = 0$, многочлены Золотарёва – при $g = 1$.

Библиография: 17 названий.

§ 1. Постановка задачи

Начиная с П. Л. Чебышёва, многие авторы (см. ссылки в монографиях [1], [2]) рассматривали экстремальные задачи со связями на пространстве вещественных многочленов

$$\left\{ P_n(x) = \sum_{s=0}^n c_s x^s \right\} \cong \mathbb{R}^{n+1} \quad (1)$$

с равномерной нормой $\|P_n\|_E := \max_{x \in E} |P_n(x)|$, где E – компактное множество вещественной оси. Следующие два примера связаны с оптимизацией численных алгоритмов [3].

ЗАДАЧА А. Пусть E – совокупность нескольких вещественных отрезков. Минимизировать норму $\|P_n\|_E$ многочлена при заданных линейных связях на его коэффициенты c_0, c_1, \dots, c_n .

Корни унимодального (monic) многочлена наименьшего уклонения можно использовать как итерационные параметры при обращении симметричных матриц со спектром на E . Задача Е. И. Золотарёва [1] соответствует $E = [-1, 1]$ и нескольким заданным старшим коэффициентам многочлена.

ЗАДАЧА Б. Найти максимальный отрезок $E = [0, t]$, $t > 0$, для которого единичный шар $\{P_n : \|P_n\|_E \leq 1\}$ пространства (1) пересекается с плоскостью коразмерности r , образованной многочленами, приближающими в нуле $\exp(-x)$ с порядком $r - 1$.

Задача (В. И. Лебедева) возникает при построении устойчивых явных схем $(r - 1)$ -го порядка точности для интегрирования жестких (stiff) систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Численное решение этих и подобных экстремальных задач при практически интересных степенях $n \approx 1000$ известно своей трудностью. Существующие на сегодняшний день алгоритмы Ремеза [4], Лебедева [5], Пехерсторфера–Шифермайра [6]

Работа выполнена при поддержке Фонда содействия отечественной науке, стипендии ÖAD “Bewerber über aller Welt” и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-01-06299).

и методы выпуклого программирования [1], [7] требуют больших вычислительных затрат по следующим причинам: решение ищется итерациями в пространстве высокой (порядка n) размерности и норма многочлена – негладкая и трудновычисляемая функция его коэффициентов.

Суть предлагаемого ниже подхода к задачам о наименьшем уклонении заключается в том, что поиск решения происходит не во всем пространстве многочленов, а на некоторых его маломерных подмногообразиях. Критерии достижения минимума, например чебышёвский принцип альтернанса [1], говорят о типичности следующей ситуации. *Подавляющее большинство критических точек решения $T(x)$ – простые со значениями $\pm \|T(x)\|_E$ и лежат на множестве E .* Такие многочлены весьма специфичны и заполняют в пространстве (1) многообразия малой размерности. Вот геометрическая интерпретация. Решению экстремальной задачи соответствует касание (линейного) многообразия, описывающего в пространстве (1) ограничения задачи, и сферы, образованной многочленами одинаковой нормы. Сфера, порожденная равномерной нормой, не является гладкой – это поверхность выпуклого криволинейного многогранника. Маломерные грани шара являются его наиболее выступающими частями, и неудивительно, что касание различных поверхностей и этих граней осуществляется наиболее часто. В §2 показано, что многочлены, наиболее часто встречающиеся среди решений задач наименьшего уклонения, имеют описанный выше вид. Это наблюдение и лежит в основе следующего определения.

Вещественный многочлен $P(x)$ назовем (нормированным) g -экстремальным многочленом, если все его критические точки, за исключением g из них, простые со значениями ± 1 . Параметр g из этого определения (количество исключительных критических точек) подсчитывается по формуле

$$g = \sum_{x: P(x) \neq \pm 1} \text{ord } P'(x) + \sum_{x: P(x) = \pm 1} \left[\frac{1}{2} \text{ord } P'(x) \right], \quad (2)$$

где $\text{ord } P'(x)$ – порядок нуля производной многочлена P в точке $x \in \mathbb{C}$, $[\cdot]$ – целая часть числа. Многочлены с параметром экстремальности $g = 0$ и $g = 1$ были открыты полтора века назад и известны как многочлены Чебышёва и Золотарёва соответственно. Графики нескольких 2-экстремальных многочленов приведены на рис. 2. В приложении к задачам о наименьшем уклонении важны многочлены с небольшим g , их можно параметризовать и эффективно вычислять.

В настоящей работе исследуются общие g -экстремальные многочлены. Многочлены (а также рациональные и алгебраические функции) с небольшим числом критических значений – классический предмет математического исследования, находящийся на стыке непрерывного и дискретного. Одна традиция в этих исследованиях восходит к А. Гурвицу (1891) и связана с перечислением разветвленных накрытий над сферой, изучением стратов возникающего дискриминантного множества, отображения Ляшко–Лойенги и т. д. Этот подход интенсивно развивается в последнее время – см. комментарии и библиографию к задаче 1970-15 в “Задачах Арнольда” [8]. Другая традиция восходит к П. Л. Чебышёву (1853), а по существу, к Н. Абелю (1826) и связана с исследованием уравнения Пелля с полиномиальным коэффициентом, разложениями в цепные дроби и условиями вырождения гиперэллиптических интегралов, при которых они выражаются через логарифмы. Обзор

этих исследований можно найти в [9]; их характерной особенностью являются эффективные вычисления и связь с приложениями. Учитывая приведенную в начале работы мотивацию, мы избираем второй подход и хотим довести его до эффективных компьютерных расчетов [10], [11].

В §3 мы сопоставляем всякому многочлену $P(x)$ гиперэллиптическую кривую

$$M = \left\{ (x, w) \in \mathbb{C}^2 : w^2 = \prod_{s=1}^{2g+2} (x - e_s) \right\}$$

с ветвлением в нулях нечетного порядка многочлена $P^2(x) - 1$. Род сопоставленной g -экстремальному многочлену кривой M равен количеству g исключительных критических точек многочлена при их подсчете по формуле (2). Многочлен степени n по своей алгебраической кривой восстанавливается с точностью до знака по явной формуле

$$P_n(x) = \pm \cos \left(ni \int_{(e,0)}^{(x,w)} d\eta_M \right), \quad x \in \mathbb{C}, \quad (x, w) \in M,$$

где $d\eta_M$ – жестко привязанный к M абелев дифференциал 3-го рода с полюсами на бесконечности. Последняя формула обобщает классические представления для многочленов Чебышёва и Золотарёва, использующие косинусы и эллиптические функции соответственно. Как видим, экстремальные многочлены при малом g можно описать с помощью небольшого количества параметров – модулей ассоциированной кривой. К сожалению, эти параметры не свободны, а связаны некоторыми соотношениями.

Порождаемые многочленами степени n кривые M удовлетворяют изучаемым в §4 уравнениям Абеля

$$\int_{C_s^-} d\eta_M = 2\pi i \frac{m_s}{n}, \quad s = 0, 1, \dots, g,$$

в которых C_s^- – базис в решетке целочисленных нечетных 1-циклов на кривой M , m_s – некоторые целые числа. Удобно считать, что многочлен P отображается в точку $2g$ -мерного вещественного пространства \mathcal{H}_g , пространства модулей вещественных гиперэллиптических кривых рода g с отмеченной точкой на вещественном овале. Левые части уравнений Абеля – периоды связанного с кривой дифференциала $d\eta_M$ – естественно продолжаются на компоненты \mathcal{H}_g^k , $k = 0, \dots, g+1$, пространства модулей. Полученное отображение, правда, многозначно, но эта проблема снимается переходом к универсальной накрывающей $\widetilde{\mathcal{H}}_g^k$, на которой отображение периодов оказывается субмерсией (отображением максимального ранга). Многочленам степени n в пространстве модулей соответствуют гладкие g -мерные слои отображения периодов, проецирующиеся в решетку, задаваемую правой частью уравнений Абеля. При $n \rightarrow \infty$ эта решетка становится плотной в образе отображения, поэтому вблизи любой точки пространства модулей есть точки M , порождаемые многочленами (возможно, высокой степени).

Итак, сопоставляя многочленам кривые, можно построить иерархию, на g -й ступени которой стоят многочлены, связанные с кривыми рода g , зависящие от g целочисленных параметров m_1, \dots, m_g и от g непрерывных параметров – локальных координат на слое отображения периодов.

Как же решать конкретные задачи о наименьшем уклонении в рамках предлагаемого подхода? Формулу восстановления многочлена P_n по ассоциированной с ним кривой M можно сделать эффективной при помощи римановых тета-функций либо автоморфных функций Шоттки [10]. Поэтому экстремальные задачи можно решать выбором подходящей подстановки (=анзатца). *Сначала* необходимо “угадать” анзатц, т.е. провести исследование задачи и найти дискретные параметры g и m_0, m_1, \dots, m_g , соответствующие решению. Это связано с определением маломерной грани шара в пространстве многочленов (1), на которую попадает решение P_n . *Далее* нужно составить и численно решить систему из $2g$ трансцендентных уравнений для определения непрерывных параметров анзатца – модулей ассоциированной кривой M . Эта система включает уравнения Абеля, а также данные оптимизационной задачи: связи, границы множества E . Идейно и технически очерченный подход более сложен, чем упомянутые ранее. Выгода же его в том, что сложность вычисления решения P_n по явным аналитическим формулам не зависит от степени n многочлена, что ясно видно для классических формул Чебышёва и Золотарёва. Вместе с тем, объем вычислений быстро растет вместе с родом g , поэтому естественная область применения этого метода – большая степень n решения при малом числе связей на его коэффициенты и малом числе компонент множества E .

§ 2. Задачи о наименьшем уклонении

Среди решений задач наименьшего уклонения чаще других встречаются многочлены, после нормировки становящиеся экстремальными в смысле данного ранее определения. Причину этого объясняет выпуклый анализ [1], [7]. Исследуем задачу А из введения.

Пусть решение задачи А ищется в пространстве (1) на заданной аффинной плоскости L_{n+1-r} коразмерности r . Такую $(n+1-r)$ -плоскость можно описывать как сдвинутый аннулятор r -мерного подпространства L_r^* сопряженного пространства. Всякому ненулевому многочлену $T(x)$ пространства (1) сопоставим определяемый ниже многогранный выпуклый конус в этом же сопряженном пространстве. Экстремальными точками многочлена $T(x)$ относительно E назовем множество $\text{ext}_E(T) := \{x \in E : T(x) = \pm \|T\|_E\}$, с каждой точкой x которого свяжем функционал x^* над пространством многочленов: $\langle x^* | P \rangle := P(x) \cdot \text{sign } T(x)$. *Коническая оболочка* этих функционалов

$$\text{cone}\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*\} := \left\{ \sum_{s=1}^m \alpha_s x_s^* : \alpha_s \geq 0, \sum_{s=1}^m \alpha_s > 0 \right\}, \quad m = \# \text{ext}_E(T), \quad (3)$$

не содержит нуля, так как $\langle \sum_{s=1}^m \alpha_s x_s^* | T \rangle = \sum_{s=1}^m \alpha_s \|T\|_E > 0$, и сопоставляется многочлену T . *Двойственным конусом* назовем конус многочленов, положительных на каждом функционале из (3) (отметим, что стандартное определение требует лишь неотрицательности).

ТЕОРЕМА 1. *Многочлен $T \in L_{n+1-r}$ доставляет минимум в задаче А о наименьшем уклонении тогда и только тогда, когда направляющая плоскость L_r^* пересекает ассоциированный с многочленом конус (3).*

ЗАМЕЧАНИЕ. Конус в формулировке теоремы, порожденный всеми экстремальными точками многочлена T , можно по принципу Каратеодори заменить на конус, порожденный не более чем $n + 2 - r$ экстремальными точками. С этим уточнением теорема 1 является интерпретацией критерия экстремальности из [1].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Многочлен $T \in L_{n+1-r}$ не является решением задачи А, если и только если норма многочленов уменьшается в некотором выпущенном из T направлении, касательном к плоскости L_{n+1-r} . Такое направление задается многочленом $P(x)$, обнуляющим все функционалы подпространства L_r^* и имеющим в экстремальных точках T тот же знак, что и T . Тем самым, равносильны два утверждения: T – решение задачи А и аннулятор L_r^* не пересекает конуса, двойственного к (3). Дуализация второго утверждения дает критерий теоремы.

1. Пусть пересечение подпространства L_r^* с конусом (3) непусто и содержит функционал p^* . Пересечение двойственных объектов $(L_r^*)^\perp \cap \{\text{двойственный конус}\} \ni P(x)$ приводит к противоречию: $0 = \langle p^* | P \rangle > 0$.

2. Пусть подпространство L_r^* не пересекает конуса (3); напомним, что последний не содержит своей вершины. По индукции мы расширим L_r^* до гиперплоскости, не пересекающей конус. Эта гиперплоскость является аннулятором многочлена, лежащего и в двойственном конусе, и в аннуляторе L_r^* . На каждом шаге, если $r < n$, проведем двумерное подпространство L_2^* , линейно независимое с L_r^* . Его пересечение с выпуклым конусом $L_r^* + \text{cone}\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*\}$ есть двумерный выпуклый конус с углом раствора меньшим π , ибо он не содержит нуля. Значит, L_2^* содержит одномерное подпространство L_1^* , не пересекающее $L_r^* + \text{cone}\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*\}$. Полагая $L_{r+1}^* := L_1^* + L_r^*$, мы совершаем шаг индукции.

Задачи А о наименьшем уклонении при фиксированном множестве E вещественной оси различаются положением плоскости L_{n+1-r} , а значит, перечисляются точками вещественного проективного грассманиана $\text{Gr}(n+2, n+2-r)$ размерности $r(n+2-r)$. Как видим, возможных задач намного больше, чем решений, поэтому естественно подсчитать частоту появления каждого многочлена из (1) среди решений задач о наименьшем уклонении. Аффинные плоскости L_{n+1-r} , проходящие через заданную точку пространства, нумеруются направляющими подпространствами $L_r^* \in \text{Gr}(n+1, r)$.

ТЕОРЕМА 2. *Фиксированный многочлен T является решением задач А, которым в грассманиане $\text{Gr}(n+1, r)$ отвечает лежащее на цикле Шуберта коразмерности $\max(n+2-r - \#\text{ext}_E(T), 0)$ замкнутое множество с непустой внутреннейностью.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пересекающие конус (3) подпространства L_r^* образуют замкнутое множество в грассманиане $\text{Gr}(n+1, r)$, так как присоединение вершины делает конус замкнутым. Все это множество лежит на некотором цикле Шуберта.

Пусть линейная оболочка конуса (3) содержится в фильтрации пространства, сопряженного к (1):

$$0 \subset \mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \dots \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Если подпространство L_r^* пересекает конус, то справедливо первое неравенство в системе (а остальные – из соображений размерности):

$$\dim(L_r^* \cap \mathbb{R}^{\min(m, n+1)}) \geq 1, \quad \dim(L_r^* \cap \mathbb{R}^{n+s+1-r}) \geq s, \quad s = 1, 2, \dots, r,$$

означающей, что L_r^* принадлежит циклу Шуберта, диаграмма Юнга которого – это прямоугольник размеров $(n+1-r) \times r$ с вырезанной из правого нижнего угла горизонтальной строкой длины $\max(n+2-r-m, 0)$. Укажем теперь область на этом цикле Шуберта, все элементы которой пересекают конус (3).

В ходе доказательства теоремы 1 мы установили существование проходящей через вершину конуса (3) опорной гиперплоскости, не пересекающей его самого. Рассмотрим любое подпространство L_l^* размерности $l := \min(m, n+2-r) - 1$ в пересечении этой опорной гиперплоскости и линейной оболочки конуса. Для фиксированной точки p^* из относительной внутренности конуса найдется окрестность нуля $\theta \subset L_l^*$ такая, что $p^* + \theta$ лежит в конусе. Рассмотрим множество пар (y^*, L_{r-1}^*) , где $y^* \in \theta$, а подпространство L_{r-1}^* содержится в опорной гиперплоскости и $\dim(L_{r-1}^* \cap L_l^*) = 0$. Подобные подпространства L_{r-1}^* замечают в грассманиане $\text{Gr}(n, r-1)$ открытое множество, по крайней мере содержащее клетку Шуберта максимальной размерности $(r-1) \cdot (n+1-r)$. Всякая пара (y^*, L_{r-1}^*) задает пересекающее конус r -подпространство, натянутое на L_{r-1}^* и вектор $p^* + y^*$. По построению разные пары задают разные r -подпространства. Тем самым, мы определили вложение в множество r -подпространств, пересекающих конус (3), области пространства той же размерности $(r-1) \cdot (n+1-r) + l = r(n+1-r) - \max(n+2-r-m, 0)$, что и клетка Шуберта из предыдущего абзаца.

Из наших рассуждений, конечно, не вытекает то, что малым шевелением условий произвольной задачи мы можем добиться близкого к ожидаемому значению $n+2-r$ числа экстремальных точек решения T (которое может быть и неединственным). Многочлены $s \# \text{ext}_E(T) < n+2-r$ хотя и решают меньшее число задач, но зато их самих намного больше. Грубый подсчет размерностей показывает, что эти два эффекта компенсируют друг друга в первом приближении: многочлены $s \# \text{ext}_E(T) = m$ лежат в (1) на многообразиях коразмерности $m-1$ и каждый из них решает множество задач размерности $(r-1) \cdot (n+1-r) + m-1$, что вместе как раз дает размерность грассманиана $\text{Gr}(n+2, n+2-r)$, нумерующего задачи о наименьшем уклонении.

Какие же задачи о наименьшем уклонении заведомо имеют решением экстремальные многочлены? Всякая лежащая внутри E экстремальная точка многочлена T является критической, а значение $\pm \|T\|_E$ в ней имеет четную кратность. Поэтому нас интересуют задачи, решения которых имеют много экстремальных точек при условии, что число граничных точек E невелико. Так, число экстремальных точек решения не менее $n+2-r$, если подпространство многочленов, удовлетворяющих однородным связям задачи, является *чебышёвским*. Это означает, что ненулевой многочлен из $(L_r^*)^\perp$ имеет не более $\dim(L_r^*)^\perp - 1 = n-r$ нулей на E . Основной поставщик чебышёвских подпространств – это используемые в алгебраической геометрии *пространства дивизоров*. Пусть дивизор D на сфере Римана (т.е. конечная формальная сумма точек с целыми кратностями) симметричен при отражении в вещественной оси и $D + n \cdot \infty \geq 0$. Пространством такого дивизора назовем подпространство всех многочленов из (1), кратность нуля (полюс имеет отрицательную кратность) которых в любой точке сферы Римана не менее кратности этой точки в дивизоре:

$$\mathcal{L}(-D) := \{P \in \mathbb{R}[x] : (P) \geq D\}, \quad \text{codim } \mathcal{L}(-D) = \min(\deg D + n, n+1). \quad (4)$$

Если носитель дивизора D не пересекается с множеством E , то пространство дивизора будет чебышёвским на E . Связи в соответствующей задаче наименьшего

уклонения – это фиксация значений решения T в конечных точках D (и нескольких первых производных, если кратность точки в дивизоре больше 1), а также фиксация нескольких старших коэффициентов T , если коэффициент перед бесконечностью в дивизоре больше чем $-n$.

ТЕОРЕМА 3 [2]. 1) Если подпространство $(L_r^*)^\perp$ является чебышёвским на множестве E , то решение задачи А о наименьшем уклонении имеет по крайней мере $n + 2 - r$ экстремальных точек на E .

2) Если то же подпространство является чебышёвским на выпуклой оболочке E , то решение единственно и характеризуется тем, что имеет $(n + 2 - r)$ -альтернанс на E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Если $T(x)$ – решение задачи о наименьшем уклонении, то по теореме 1 для некоторых экстремальных точек x_s этого многочлена и *положительных* весов α_s выполнены равенства

$$\sum_{s=1}^m \alpha_s \cdot \text{sign } T(x_s) \cdot P(x_s) = 0 \quad \forall P \in (L_r^*)^\perp. \quad (5)$$

Пусть число экстремальных точек $m < n + 2 - r$. Размерность подпространства $(L_r^*)^\perp$ равна $n + 1 - r$, поэтому найдется многочлен $P(x) \in (L_r^*)^\perp$, обращающийся в нуль в $n - r$ точках x_1, x_2, \dots, x_{m-1} и еще в произвольных $n + 1 - r - m$ точках $E \setminus \text{ext}_E(T)$. По свойству чебышёвского пространства $(L_r^*)^\perp$ $P(x_m) \neq 0$, поэтому в равенстве (5) $\alpha_m = 0$. Противоречие.

2) Пусть знаки решения $T(x)$ одинаковы в соседних точках x_s, x_{s+1} . Выберем многочлен $P(x) \in (L_r^*)^\perp$, обращающийся в нуль в оставшихся $n - r$ экстремальных точках (см. замечание к теореме 1). Равенство (5) примет вид $\alpha_s P(x_s) + \alpha_{s+1} P(x_{s+1}) = 0$. Это означает существование еще одного корня $P(x)$ на отрезке $[x_s, x_{s+1}]$ и противоречит свойству чебышёвского на $\text{conv } E$ пространства $(L_r^*)^\perp$. Итак, всякое решение T имеет $(n + 2 - r)$ -альтернанс на E . Обратно, всякий многочлен $T(x) \in L_{n+1-r}$, имеющий на E $(n + 2 - r)$ -альтернанс, будет единственным решением. Если другой многочлен уклоняется на E не более, чем $T(x)$, то их разность лежит в $(L_r^*)^\perp$ и имеет по крайней мере $n + 1 - r$ корней на $\text{conv } E$, следовательно, разность тривиальна.

Задача В.И. Лебедева формально не является задачей о наименьшем уклонении, но ее решение является одновременно решением некоторой задачи А, поэтому выпуклый анализ позволяет определить вид решения задачи Б.

ТЕОРЕМА 4. При $r > 1$ решение задачи Б существует, единственно и имеет $(n + 2 - r)$ -альтернанс на $E \setminus \{0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При возрастании t единичный по норме $C[0, t]$ шар в пространстве (1) испытывает (линейное, но неоднородное по осям) сжатие, и в пределе при $t \rightarrow \infty$ в нем остаются только постоянные многочлены, которые при $r > 1$ не удовлетворяют связям:

$$P_n(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \dots + \frac{(-x)^{r-1}}{(r-1)!} + x^r P_{n-r}(x), \quad \deg P_{n-r}(x) \leq n - r. \quad (6)$$

Следовательно, существуют максимальный отрезок $E := [0, t^0]$ и многочлен $T(x)$, удовлетворяющий связям и имеющий на E уклонение 1. Покажем, что $T(x)$ одновременно является и решением задачи А со связями (6) на отрезке $E' = [\varepsilon, t^0]$,

где положительное ε меньше любого из трех чисел: 1 , $t^0/2$, $1/\max |P''(x)|$, максимум берется на компактном множестве $\{(P, x) : x \in [0, t^0/2], \|P\|_{[t^0/2, t^0]} \leq 1, \deg P \leq n\}$. Пусть найдется многочлен $P(x)$ с уклонением на E' меньшим чем 1 и поведением (6). В силу локального убывания $P(x)$ вблизи нуля и малости ε $\|P\|_E \leq 1$. Поскольку значение $P(x)$ в крайней точке $x = t^0$ по модулю меньше 1 , отрезок E можно расширить с сохранением нормы многочлена $P(x)$, что противоречит максимальности E .

Однородные связи (6) задаются дивизором D с носителем в нуле и бесконечности, а потому не пересекающим E' . По теореме 3, п. 2) решение $T(x)$ единственное и обладает $(n + 2 - r)$ -альтернансом на E' .

§ 3. Чебышёвское представление многочленов

П. Л. Чебышёв и его ученики Е. И. Золотарёв, братья В. А. и А. А. Марковы, А. Н. Коркин, К. А. Поссе сводили экстремальные задачи для многочленов к уравнению Пелля, геометрической интерпретацией которого является следующее

Построение. Всякому многочлену $P(x)$ сопоставим двулистную риманову поверхность

$$M = M(\mathbf{e}) = \left\{ (x, w) \in \mathbb{C}^2 : w^2 = \prod_{s=1}^{2g+2} (x - e_s) \right\} \quad (7)$$

с ветвлением в точках $\mathbf{e} := \{e_s\}_{s=1}^{2g+2}$, в которых многочлен принимает значения ± 1 с нечетной кратностью (т.е. в общем случае простые значения).

Обсуждение. Мотивация данной конструкции [10], [12] чисто топологическая. Пусть в диаграмме

$$\begin{array}{ccc} (x, w) \in M(\mathbf{e}) & \xrightarrow{\tilde{P}} & \mathbb{C}\mathbb{P}_1 \ni u \\ \chi \downarrow & & \downarrow \sigma \\ x \in \mathbb{C}\mathbb{P}_1 & \xrightarrow{P} & \mathbb{C}\mathbb{P}_1 \end{array} \quad (8)$$

$\chi(x, w) := x$ – двулистное накрытие, ветвящееся над точками \mathbf{e} ; $\sigma(u) := \frac{1}{2}(u + \frac{1}{u})$ – двулистное накрытие, ветвящееся над ± 1 (функция Жуковского). Всякое отображение \tilde{P} накрывающих пространств, удовлетворяющее условию эквивариантности $\tilde{P}(x, -w) = 1/\tilde{P}(x, w)$, опускается до отображения P в базах, которое имеет нечетный индекс ветвления в точках $\mathbf{e} \subset P^{-1}(\pm 1)$ и четный – в остальных прообразах $P^{-1}(\pm 1) \setminus \mathbf{e}$. Обратное также верно: всякое отображение P , ветвящееся с четным порядком над ± 1 , за исключением точек \mathbf{e} , поднимается до эквивариантного отображения накрывающих в диаграмме (8). Так мы получаем описание экстремальных многочленов P при помощи небольшого числа параметров – модулей кривой M . Почти все критические точки многочлена P , порожденного эквивариантным отображением накрывающих, автоматически будут простыми со значениями ± 1 .

ЛЕММА 1. *Род сопоставляемой многочлену $P(x)$ кривой равен величине g из (2).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Многочлен P степени n имеет $n - 1$ критических точек в \mathbb{C} :

$$n - 1 = \sum_x \text{ord } P'(x) = g + \sum_{x:P(x)=\pm 1} \left[\frac{1}{2} (\text{ord } P'(x) + 1) \right].$$

Теперь подсчитаем $\deg \mathbf{e}$ – число корней нечетной кратности многочлена $P^2(x) - 1$:

$$2n = \sum_{x:P(x)=\pm 1} (\text{ord } P'(x) + 1) = \deg \mathbf{e} + \sum_{x:P(x)=\pm 1} 2 \left[\frac{1}{2} (\text{ord } P'(x) + 1) \right],$$

откуда $\deg \mathbf{e} = 2g(M) + 2$, т.е. род гиперэллиптической кривой $M(\mathbf{e})$ равен g .

ПРИМЕР. Пусть E – это отрезок, а r связей экстремальной задачи А задают чебышёвское подпространство $(L_r^*)^\perp$. Тогда нормированному решению $P_n(x) := T_n(x) / \|T_n\|_E$ соответствует кривая M рода $g \leq r - 1$. Действительно, полный прообраз $P_n^{-1}(\pm 1)$ состоит из $2n$ точек с учетом кратности. Внутри E имеется по меньшей мере $n - r$ точек прообраза с четной кратностью. В $2g + 2$ точках ветвления кривой M значение P_n имеет нечетную кратность, поэтому $2n \geq 2(n - r) + 2g + 2$.

3.1. Вещественные гиперэллиптические кривые. Напомним ряд понятий из геометрии вещественных гиперэллиптических кривых [13]. Компактная комплексная кривая M_c рода g называется *гиперэллиптической*, если она допускает *конформную инволюцию* J с $2g + 2$ неподвижными точками. При $g > 1$ такая инволюция единственна (если она есть), при $g = 0, 1$ инволюций J бесконечно много. Кривая M_c называется *вещественной*, если она допускает *антиконформную инволюцию* \bar{J} (отражение). Независимо от рода, антиконформных инволюций может быть несколько, поэтому следует рассматривать пару (M_c, \bar{J}) . Посмотрим, как связаны эти понятия. Если кривая M_c допускает гиперэллиптическую J и антиконформную \bar{J} инволюции, то при $g > 1$ они коммутируют ($\bar{J}J\bar{J}$ – другая гиперэллиптическая инволюция). При $g = 0, 1$ это, вообще говоря, не так, и мы потребуем, чтобы $\bar{J}J = J\bar{J}$. Перестановочность инволюций означает, что \bar{J} действует на $\mathbb{C}P_1 = M_c/J$. Антиконформная инволюция сферы Римана меняет местами внешность и внутренность своей *изометрической окружности*. Точки самой изометрической окружности либо неподвижны (как у $\bar{J}x = 1/\bar{x}$), либо переходят в противоположные точки (как у $\bar{J}x = -1/\bar{x}$). Таким образом, вещественные гиперэллиптические кривые распадаются на два класса: те, у которых фактор $M_c/\langle J, \bar{J} \rangle$ ориентируем (=диск), и те, у которых он неориентируем (=проективная плоскость). Далее мы рассматриваем только первый класс – *вещественно ориентируемые* гиперэллиптические кривые.

Поднимем окружность, неподвижную при действии \bar{J} , со сферы на кривую M_c . Мы получим на кривой *вещественные овалы*, неподвижные при действии \bar{J} на M_c , и *ковещественные овалы*, неподвижные при действии $\bar{J}J$. Если на указанную неподвижную окружность сферы проецируются $2k$, $k = 0, 1, \dots, g + 1$, точек ветвления (неподвижные точки инволюции J) кривой, то при $k > 0$ на M_c будет ровно k вещественных и k ковещественных овалов, проекции которых на неподвижную окружность перемежаются. Случай $k = 0$ выпадает из общей картины: при четном g будет только один овал, вещественный или ковещественный; при нечетном g будет два одноименных овала.

Вещественно ориентируемые гиперэллиптические кривые имеют удобную алгебраическую модель (7), в которой все *точки ветвления* e_s различны и образуют симметричный относительно вещественной оси *дивизор ветвления* $e := \{e_s\}_{s=1}^{2g+2}$. На рис. 1 жирными линиями обозначена *система разрезов* Λ на $\mathbb{C} \setminus e$, во внешности которых функция $w(x)$ допускает однозначную ветвь. Кривую $M(e)$ можно представить себе как два листа $\mathbb{C} \setminus \Lambda$, склеенные крест накрест по разрезам. Компактификация M_c кривой (7) получается добавлением пары точек ∞_{\pm} на бесконечности каждого листа. В этой модели гиперэллиптическая и антиконформная инволюции имеют вид $J(x, w) := (x, -w)$, $\bar{J}(x, w) := (\bar{x}, \bar{w})$. При таком выборе \bar{J} проколы ∞_{\pm} лежат на вещественном овале и топологический инвариант k вещественной кривой M можно определить как число ее ковещественных овалов.

3.1.1. Пространство гомологий и решетка L_M . Кривая M получается из компактной двумя проколами на бесконечности, поэтому к привычным $2g$ независимым 1-циклам следует добавить цикл, огибающий (любой) прокол. На $(2g + 1)$ -мерном вещественном *пространстве гомологий* $H_1(M, \mathbb{R})$ естественно действует антиконформная инволюция \bar{J} , расщепляя его в сумму собственных подпространств $H_1^{\pm}(M, \mathbb{R})$, отвечающих собственным числам ± 1 . *Четные* 1-циклы C удовлетворяют равенству $\bar{J}C = C$ и образуют g -мерное подпространство $H_1^+(M)$. При $k > 0$ за первые $k - 1$ циклов базиса $C_1^+, C_2^+, \dots, C_g^+$ в этом пространстве можно взять конечные вещественные овалы, как на рис. 1а) (прерывистая линия означает, что контур проходит по нижнему листу). *Нечетные* 1-циклы C , определяемые условием $\bar{J}C = -C$, дают $(g + 1)$ -мерное подпространство $H_1^-(M)$. Циклы $C_0^-, C_1^-, C_2^-, \dots, C_g^-$ рис. 1б), первые k из которых – это ковещественные овалы, образуют базис в $H_1^-(M)$. Сумма $C_{\infty} := C_0^- + C_1^- + C_2^- + \dots + C_g^-$ гомологична циклу, окружающему прокол кривой на бесконечности, и порождает выделенное одномерное подпространство $H_1^{\infty}(M)$ в $H_1^-(M)$. Сужение *формы пересечений* на подпространства $H_1^{\pm}(M)$ тривиально: инволюция \bar{J} меняет ориентацию, откуда $\bar{J}C \circ \bar{J}C' = -C \circ C'$, $C, C' \in H_1(M, \mathbb{R})$. Лишь следующие элементы матрицы пересечений во введенном базисе не равны нулю:

$$\begin{aligned} C_s^+ \circ C_s^- &= 1, & s &= 1, \dots, k - 1, \\ C_s^+ \circ C_s^- &= 2, & s &= k, \dots, g, \\ C_s^+ \circ C_0^- &= -C_s^+ \circ C_s^-, & s &= 1, \dots, g. \end{aligned} \quad (9)$$

Используя форму пересечения, можно показать, что рассмотренные нами наборы циклов образуют базисы не только в евклидовых пространствах $H_1^{\pm}(M, \mathbb{R})$, но и в *решетках* $H_1^{\pm}(M, \mathbb{Z}) := H_1^{\pm}(M, \mathbb{R}) \cap H_1(M, \mathbb{Z})$. Для исследования чебышёвской конструкции важна подрешетка L_M решетки нечетных циклов, порожденная элементами $2C_0^-, 2C_1^-, \dots, 2C_{k-1}^-; C_k^-, C_{k+1}^-, \dots, C_g^-$. При $k = 0$ решетки L_M и $H_1^-(M, \mathbb{Z})$ совпадают, а при $k > 0$ решетку L_M “бескоординатно” описывает

ЛЕММА 2. *Если $k > 0$, то следующие две решетки совпадают с L_M :*

- 1) *проекция решетки $2H_1(M, \mathbb{Z})$ на подпространство $H_1^-(M, \mathbb{R})$ вдоль $H_1^+(M, \mathbb{R})$;*
- 2) *циклы $H_1^-(M, \mathbb{Z})$, имеющие четный индекс пересечения с каждой компонентой вещественных овалов M (проколы на бесконечности разрывают один из вещественных овалов).*

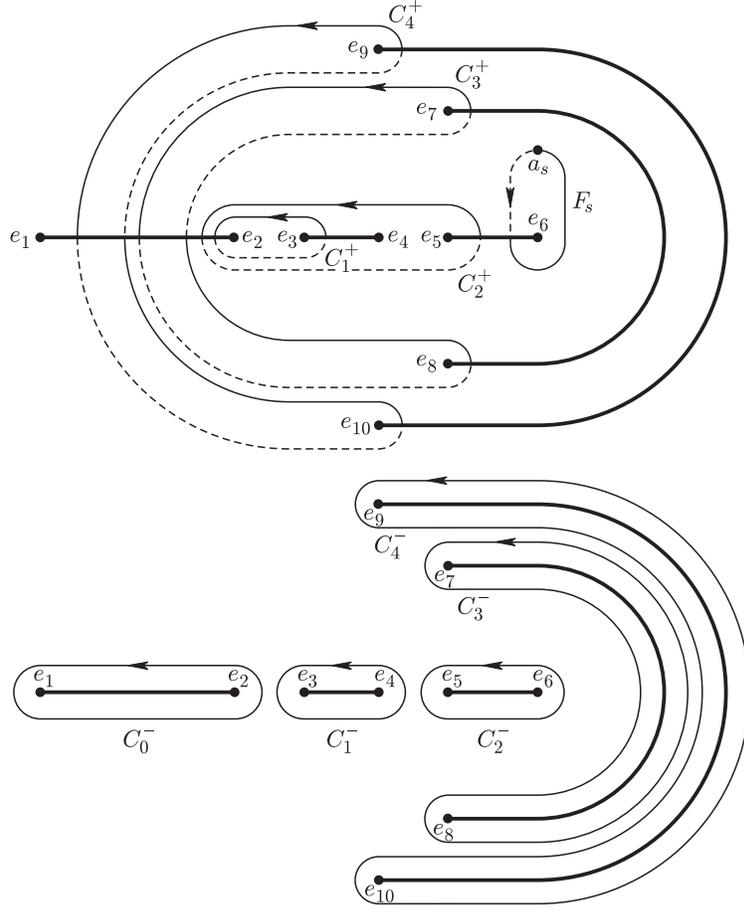


Рис. 1. Система разрезов Λ плоскости и базис в решетке а) $H_1^+(M, \mathbb{Z})$, б) $H_1^-(M, \mathbb{Z})$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проекция пространства $H_1(M, \mathbb{R})$ на H_1^- вдоль H_1^+ имеет вид $C \rightarrow \frac{1}{2}(C - \bar{J}C)$. Утверждения проверяются на образующих решеток.

3.1.2. Пространство дифференциалов на кривой. Абелевы дифференциалы $d\xi$ на M с единственными возможными особенностями – простыми полюсами на бесконечности ∞_{\pm} образуют комплексное линейное пространство размерности $g + 1$. Билинейные соотношения Римана [14] с учетом информации о форме пересечений базиса гомологий гарантируют, что в этом пространстве существует единственный мероморфный дифференциал с данным вычетом на бесконечности и данными g периодами вдоль циклов из базиса $H_1^+(M)$ (либо из базиса $H_1^-(M)/H_1^{\infty}(M)$). Антиконформная инволюция \bar{J} кривой действует и на пространстве дифференциалов: $d\xi \rightarrow \bar{J}d\bar{\xi}$. Неподвижные точки этого действия принято называть [13] пространством вещественных дифференциалов. Рассматриваемые вещественные дифференциалы в модели (7) имеют представление $d\xi = w^{-1}P_g(x)dx$ с вещественным многочленом $P_g(x)$ степени не более g ; на циклах из $H_1^+(M)$ они принимают вещественные значения, а на циклах из $H_1^-(M)$ – чисто мнимые значения. *От-*

бражение периодов $\Pi(d\xi)$

$$\langle \Pi(d\xi) \mid C^+ + C^- \rangle := \int_{C^+} d\xi - i \int_{C^-} d\xi, \quad C^\pm \in H_1^\pm(M, \mathbb{R}), \quad (10)$$

сопоставляет всякому вещественному дифференциалу $d\xi$ элемент вещественных когомологий $H^1(M, \mathbb{R})$ кривой M .

В рассматриваемом пространстве существует единственный дифференциал $d\eta = d\eta_M$ с вычетом -1 на бесконечности ∞_+ верхнего листа M и нулевыми периодами вдоль всех четных 1-циклов. Проверим, что этот дифференциал вещественный: мероморфный дифференциал $\bar{J}d\eta_M$ имеет вычеты ∓ 1 в точках ∞_\pm и нулевые периоды вдоль четных циклов. В силу единственности нормированного таким образом дифференциала $\bar{J}d\eta_M = d\eta_M$. Ассоциированный с кривой дифференциал $d\eta_M$ можно также охарактеризовать тем, что все его периоды на M чисто мнимые.

3.2. Многочлены и кривые. Образ чебышёвского отображения многочленов на кривые и его обращение описывает

ТЕОРЕМА 5. *Описанная в начале §3 конструкция взаимно однозначно сопоставляет вещественные многочлены $P_n(x)$ степени n , взятые с точностью до знака, и вещественно ориентируемые гиперэллиптические кривые M , для которых отображение периодов ассоциированного с кривой дифференциала $d\eta_M$ дает $4\pi n^{-1}\mathbb{Z}$ -значный функционал на решетке L_M . Восстановить многочлен по сопоставленной ему кривой M можно по формуле*

$$P_n(x) = P_n(e_s) \cos\left(ni \int_{(e_s, 0)}^{(x, w)} d\eta_M\right), \quad (11)$$

где результат вычисления не зависит от пути интегрирования на M , от двузначности в выборе $w(x)$ и от точки ветвления e_s , $s = 1, \dots, 2g + 2$, выбранной в качестве начальной точки интегрирования.

ЗАМЕЧАНИЕ. При $k > 0$, а именно этот случай важен в применении к экстремальным многочленам, эквивалентное и более понятное условие, описывающее построенные по многочленам степени n кривые M , таково: $\Pi(d\eta_M) \in 2\pi n^{-1}H^1(M, \mathbb{Z})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) *Соответствие $P_n \rightarrow M$.* Если кривая M вида (7) соответствует многочлену $P_n(x)$, то существует вещественный многочлен $P_{n-g-1}(x)$, для которого $P_n^2(x) - 1 = w^2 P_{n-g-1}^2(x)$. Рассмотрим на кривой M_c мероморфную функцию Н. И. Ахиезера $\tilde{P}(x, w) := P_n(x) + w P_{n-g-1}(x)$, удовлетворяющую условию эквивариантности относительно преобразований скольжения накрытий χ, σ диаграммы (8): $\tilde{P}(x, -w) = P_n(x) - w P_{n-g-1}(x) = 1/\tilde{P}(x, w)$. Мероморфный дифференциал

$$d\eta := \frac{1}{n} \frac{d\tilde{P}}{\tilde{P}}$$

совпадает с дифференциалом $d\eta_M$, ассоциированным с кривой. Действительно, единственные особенности $d\eta$ — это простые полюсы на бесконечности с вычетами ± 1 . Все периоды $d\eta$ чисто мнимые, так как на замкнутых контурах $C \subset M$ имеем

$$\int_C d\eta = n^{-1} \log \tilde{P}(x, w)|_C \in \frac{2\pi i}{n} \mathbb{Z}.$$

Мы утверждаем, что функционал $\Pi(d\eta_M)$ на решетке L_M принимает значения из $4\pi\mathbb{Z}/n$. Подсчитаем индекс пересечения образа $\tilde{P}(C)$ любого контура C этой решетки с положительной полуосью. Шевелением контура в своем классе гомологий добьемся трансверсальности всех его пересечений с множеством $\{\tilde{P}(x, w) > 0\} = \{P_n(x) \geq 1\}$. Последнее множество \bar{J} -инвариантно, поэтому вне вещественных овалов число его пересечений с циклом $C = -\bar{J}C$ четно. На всякой компоненте вещественных овалов $P_n^2 \geq 1$ и индекс пересечения цикла с этой компонентой также четный. Этим рассуждением показано, что приращение $\log \tilde{P}$ при обходе его аргументом цикла C решетки L_M есть четное число $2\pi i$.

Формула обращения (11) следует из равенств

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{2}(\tilde{P}(x, w) + \tilde{P}(x, -w)) = \cos(i \log \tilde{P}(x, w)) \\ &= \cos\left(i \log \tilde{P}(e_s, 0) + ni \int_{(e_s, 0)}^{(x, w)} d\eta_M\right) = P_n(e_s) \cos\left(ni \int_{(e_s, 0)}^{(x, w)} d\eta_M\right). \end{aligned}$$

2) *Соответствие $M \rightarrow P_n$.* Если для кривой M выполнено условие теоремы, то функционал $\Pi(d\eta_M)$ на целочисленных циклах будет $2\pi\mathbb{Z}/n$ -значным. Действительно, если $C \in H_1(M, \mathbb{Z})$, то цикл $C - \bar{J}C$ лежит в решетке L_M , поэтому $\langle \Pi(d\eta_M) | C \rangle = \frac{1}{2} \langle \Pi(d\eta_M) | C - \bar{J}C \rangle \in 2\pi\mathbb{Z}/n$.

Теперь правая часть формулы (11) при $P_n(e_s) = \pm 1$ корректно определяет на M_c мероморфную функцию, четную при инволюции и с полюсами степени n на бесконечности. Это многочлен степени n от x , и он вещественный, поскольку

$$\begin{aligned} P_n(\bar{x}) &= P_n(e_s) \cos ni \left(\int_{(e_s, 0)}^{(\bar{e}_s, 0)} d\eta_M + \int_{(\bar{e}_s, 0)}^{(\bar{x}, \bar{w})} d\eta_M \right) \\ &\stackrel{(*)}{=} P_n(e_s) \cos ni \int_{(e_s, 0)}^{(x, w)} d\eta_M = \overline{P_n(x)}, \end{aligned}$$

при переходе (*) мы воспользовались тем, что $\int_{(e_s, 0)}^{(\bar{e}_s, 0)} d\eta_M \in 2\pi i\mathbb{Z}/n$, и вещественностью дифференциала $d\eta_M$. Нетрудно проверить, что $P_n(x)$ принимает значения ± 1 нечетной кратности в точках ветвления кривой M и только в них.

§ 4. Уравнения Абеля

Исследуем природу множества кривых M , представляющих многочлены степени n при чебышёвском соответствии. Точки ветвления таких кривых фиксированного рода g связаны согласно теореме 5 соотношениями

$$\int_{C_s^-} d\eta_M = 2\pi i \frac{m_s}{n}, \quad m_s \in \begin{cases} \mathbb{Z}, & s = 0, 1, \dots, k-1, \\ 2\mathbb{Z}, & s = k, \dots, g, \end{cases} \quad (12)$$

где $\{C_s^-\}_{s=0}^g$ – выбранный ранее базис в решетке $H_1^-(M, \mathbb{Z})$. Билинейные соотношения Римана с учетом того, что периоды $d\eta_M$ по циклам из $H_1^+(M)$ нулевые,

приводят систему уравнений (12) к классическому критерию Абеля о существовании на M мероморфной функции¹ с дивизором $n \cdot (\infty_+ - \infty_-)$. Среди уравнений Абеля (12) только g независимых, ибо цикл $\sum_{s=0}^g C_s^-$ стягивается к полюсу $d\eta_M$ с известным вычетом. Левые части уравнений Абеля являются локально однозначными аналитическими функциями точек ветвления кривой, но глобально они неоднозначны: поменяйте местами пару точек ветвления из верхней полуплоскости и вы придете к другому базису в решетке нечетных циклов. Эта неоднозначность описывается косами, действующими на универсальной накрывающей пространства в кривых. Введем необходимые понятия.

4.1. Пространства модулей кривых. Фиксируем топологические инварианты вещественно ориентируемой гиперэллиптической кривой: род $g \geq 0$ и число ковещественных овалов $0 \leq k \leq g + 1$. Пусть \mathbf{e} – неупорядоченный набор из различных точек e_1, \dots, e_{2g+2} , включающий $2k$ вещественных точек и $g - k + 1$ пар комплексно сопряженных точек. На подобных наборах свободно действует группа \mathfrak{A}_1^+ сохраняющих ориентацию аффинных движений вещественной оси: $\mathbf{e} = \{e_s\}_{s=1}^{2g+2} \rightarrow A\mathbf{e} + B = \{Ae_s + B\}_{s=1}^{2g+2}$, $A > 0$, $B \in \mathbb{R}$. Орбиты этого действия назовем пространством \mathcal{H}_g^k . Сопоставляя всякому симметричному простому дивизору \mathbf{e} гиперэллиптическую кривую (7), мы приходим к эквивалентному определению \mathcal{H}_g^k как *пространства модулей (=конформных классов) вещественно ориентируемых гиперэллиптических кривых рода g с k ковещественными овалами и с отличной от точек ветвления отмеченной точкой ∞_+ на ориентированном вещественном овале*.

Пространство \mathcal{H}_g^k является $2g$ -мерным вещественным многообразием. Для введения координат локально занумеруем точки набора \mathbf{e} и зафиксируем пару комплексно сопряженных либо пару вещественных точек e_{2g+1}, e_{2g+2} . В качестве локальных координат в \mathcal{H}_g^k возьмем переменные величины $\operatorname{Re} e_s$ для вещественных точек e_s и $\operatorname{Re} e_s, \operatorname{Im} e_s$ для точек e_s из верхней полуплоскости \mathbb{H} , $1 \leq s \leq 2g$.

ЛЕММА 3. *Фундаментальная группа пространства модулей $\pi_1(\mathcal{H}_g^k)$ изоморфна группе кос плоскости с $g - k + 1$ нитями $\operatorname{Br}_{g-k+1}(\mathbb{H})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Элементами \mathcal{H}_g^k являются орбиты аффинной группы \mathfrak{A}_1^+ . При $k > 0$ в каждой орбите содержится единственный дивизор \mathbf{e} , у которого крайние точки множества $\mathbb{R} \cap \mathbf{e}$ – это ± 1 . При $k < g + 1$ в орбите есть единственный дивизор \mathbf{e} , для которого центр тяжести множества $\mathbb{H} \cap \mathbf{e}$ – это i . Тем самым, пространство модулей \mathcal{H}_g^k всегда можно вложить в пространство симметричных дивизоров \mathbf{e} с теми же инвариантами g, k . Это пространство дивизоров стягивается к \mathcal{H}_g^k , поэтому их фундаментальные группы совпадают. Симметричный дивизор вполне определяется своей частью, лежащей в \mathbb{H} ($g - k + 1$ точек) и в \mathbb{R} ($2k$ точек), поэтому пространство таких дивизоров – это произведение факторизованного по перестановкам координат пространства $\mathbb{H}^{g-k+1} \setminus \{\text{диагонали}\}$ на клетку размерности $2k$. Фундаментальная группа такого пространства [15] и есть группа кос $\operatorname{Br}_{g-k+1}(\mathbb{H})$.

Универсальная накрывающая $\widetilde{\mathcal{H}}_g^k$ пространства модулей (=множество гомотопических классов путей в \mathcal{H}_g^k , начинающихся в отмеченной точке $M_0 = M(\mathbf{e}^0)$) топологически является клеткой размерности $2g$.

¹Функции Ахиезера \tilde{R} диаграммы (8).

4.2. Расслоения. Над пространством модулей \mathcal{H}_g^k рассмотрим два векторных расслоения: *гомологическое* $H_1\mathcal{H}_g^k$ и вещественных мероморфных дифференциалов $\Omega^1\mathcal{H}_g^k$. Слоем вещественного расслоения $H_1\mathcal{H}_g^k$ над точкой $M \in \mathcal{H}_g^k$ является $(2g+1)$ -мерное пространство гомологий $H_1(M, \mathbb{R})$ кривой M . Локальная тривиализация гомологического расслоения описана, например, в [16]. Гомологическое расслоение естественно расщепляется в сумму подрасслоений $H_1^+\mathcal{H}_g^k$ и $H_1^-\mathcal{H}_g^k$, слои которых — отвечающие значениям ± 1 собственные подпространства оператора антиконформной инволюции \bar{J} , действующего на гомологиях.

Известно, что рассматриваемое расслоение обладает естественной плоской связностью Гаусса–Манина [16], позволяющей переносить гомологии в соседние слои. Действие этой связности на циклы из $H_1(M, \mathbb{Z})$ можно представить себе так. На двулистной модели кривой M нарисуем представляющий цикл замкнутый контур, не проходящий через точки ветвления. Оставляя контур на месте и шевеля точки ветвления, мы переносим цикл на соседние кривые M . Параллельный перенос циклов, задаваемый связностью Гаусса–Манина, согласован с отмеченным выше расщеплением гомологического расслоения на подрасслоения $H_1^\pm\mathcal{H}_g^k$ и сохраняет все рассмотренные решетки целочисленных гомологий.

Плоская связность позволяет определить *действие группы кос* Vg_{g-k+1} на пространстве когомологий $H^1(M_0, \mathbb{R})$ отмеченной кривой. А именно действие $\beta \in \pi_1(\mathcal{H}_g^k, M_0)$ на функционале $C_* \in (H_1(M_0))^*$ определим формулой $\langle \beta \cdot C_* \mid C \rangle := \langle C_* \mid \text{параллельный перенос } C \text{ вдоль петли класса } \beta \rangle$, $C \in H_1(M_0)$. Матричное описание действия кос на функционалы $(H_1^-(M_0))^*$ совпадает с представлением Бурау [15].

4.2.1. Глобальное отображение периодов. Слой второго векторного расслоения $\Omega^1\mathcal{H}_g^k$ над кривой M — $(g+1)$ -мерное пространство *вещественных* мероморфных дифференциалов $d\xi$ на M , возможные особенности которых — это простые полюсы в отмеченных точках ∞_\pm . Отображение периодов (10) позволяет перемножать локальные сечения расслоений $\Omega^1\mathcal{H}_g^k$ и $H_1\mathcal{H}_g^k$. Переход к универсальной накрывающей даст нам глобальное отображение периодов, описываемое ниже.

Универсальное накрытие $\widetilde{\mathcal{H}}_g^k \rightarrow \mathcal{H}_g^k$ обычным образом [17] порождает расслоения $H_1\widetilde{\mathcal{H}}_g^k$, $H_1^\pm\widetilde{\mathcal{H}}_g^k$, $\Omega^1\widetilde{\mathcal{H}}_g^k$ из уже рассмотренных. Связность Гаусса–Манина позволяет отождествить слои гомологического расслоения $H_1\widetilde{\mathcal{H}}_g^k$ над универсальной накрывающей со слоем в отмеченной точке $\widetilde{M}_0 \in \widetilde{\mathcal{H}}_g^k$. Скобка из (10) теперь определяет *глобальное отображение периодов* $\Pi: \Omega^1\widetilde{\mathcal{H}}_g^k \rightarrow H^1(M_0, \mathbb{R})$. Суперпозиция Π с сужением функционала на подпространство $H_1^\bullet(M_0, \mathbb{R}) \subset H_1(M_0, \mathbb{R})$, где индекс \bullet принимает значения $+$, $-$, ∞ , определяет *частичное* отображение периодов $\Pi_\bullet: \Omega^1\widetilde{\mathcal{H}}_g^k \rightarrow (H_1^\bullet(M_0, \mathbb{R}))^*$. Слои отображений периодов изучаются в следующем пункте.

Самое простое отображение периодов Π_∞ определяет вычет дифференциала на бесконечности. Его типичный слой $\mathcal{N} := \{d\xi : \langle \Pi(d\xi) \mid C_\infty \rangle = 2\pi\}$ — гладкая $3g$ -мерная клетка, образованная дифференциалами с вычетами ± 1 в отмеченных точках ∞_\mp кривой $\widetilde{M} \in \widetilde{\mathcal{H}}_g^k$. Клетка \mathcal{N} разлагается на гладкие подмногообразия (страты), заполненные дифференциалами с фиксированными кратностями нулей

вида

$$d\xi = \prod_{s=1}^{2g+2} (x - e_s)^{\varepsilon_s} \prod_{j=1}^l (x - a_j)^{\alpha_j} \frac{dx}{w}, \quad \varepsilon_s \geq 0, \quad \alpha_j \geq 1, \quad \sum_{s=1}^{2g+2} \varepsilon_s + \sum_{j=1}^l \alpha_j = g, \quad (13)$$

где все нули $a_j \neq e_s$ дифференциала различны и образуют симметричное относительно вещественной оси множество. В качестве локальных переменных на таком $(2g+l)$ -мерном страте можно взять величины $\operatorname{Re} e_s, \operatorname{Re} a_j$ для вещественных точек e_s, a_j и $\operatorname{Re} e_s, \operatorname{Re} a_j, \operatorname{Im} e_s, \operatorname{Im} a_j$ для e_s, a_j из верхней полуплоскости, $s = 1, \dots, 2g$, $j = 1, \dots, l \leq g$.

4.3. Свойства отображения периодов. Запишем уравнения слоев глобального отображения периодов. Фиксируем целочисленные 1-циклы $C_1^+, C_2^+, \dots, C_g^+$ и $C_1^-, \dots, C_g^-, C_\infty$, образующие базис в подпространствах гомологий $H_1^+(M_0)$ и $H_1^-(M_0)$ соответственно, причем C_∞ – цикл, огибающий прокол ∞_+ против часовой стрелки. Спаривание этих циклов с дифференциалами по формуле (10) даст нам $2g+1$ вещественных аналитических функций $\gamma_1^+, \gamma_2^+, \dots, \gamma_g^+$ и $\gamma_1^-, \dots, \gamma_g^-$, $\gamma_\infty = -2\pi \operatorname{Res} d\xi|_{\infty_+}$ на расслоении $\Omega^1 \widetilde{\mathcal{H}}_g^k$. Пространство \mathcal{N} дифференциалов с вычетами ± 1 задано уравнением $\gamma_\infty = 2\pi$, а слои частичных отображений периодов Π_\bullet , суженных на \mathcal{N} , – дополнительными уравнениями $\gamma_s^\bullet(d\xi) = \operatorname{const}_s^\bullet$, $s = 1, \dots, g$, $\bullet = +, -$. Ввиду теоремы 5 нас будут интересовать многообразия, вдоль которых функции γ_s^+ равны нулю, а γ_s^- принимают фиксированные значения из $2\pi\mathbb{Q}$. Справедлива

ТЕОРЕМА 6. 1) *Слои отображений $\Pi_\pm: \mathcal{N} \rightarrow (H_1^\pm(M_0, \mathbb{R}))^*$ – это гладко вложенные $2g$ -мерные клетки, без вырождения проецирующиеся на базу расслоения $\Omega^1 \widetilde{\mathcal{H}}_g^k$.*

2) *Слои Π_\pm трансверсальны стратам (13) пространства \mathcal{N} и слоям Π_\mp .*

3) *“Рациональные” слои Π , т.е. такие, что $\Pi(d\xi) \in 2\pi H^1(M_0, \mathbb{Q})$, плотны в \mathcal{N} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что функции $\gamma_1^+, \dots, \gamma_g^+$ и $\gamma_1^-, \dots, \gamma_g^-$, выделяющие слои отображения периодов, на каждом страте (13) можно дополнить до системы локальных координат страта. Раз так, то дифференциалы функций образуют $2g$ -мерное подпространство в касательном пространстве к каждому $(2g+l)$ -мерному страту. Тем более они линейно независимы в объемлющем пространстве \mathcal{N} . Отсюда будет вытекать гладкость слоев отображения периодов, свойства трансверсальности 2) и плотность “рациональных” слоев 3).

Локально определим на каждом страте (13) еще l вещественно аналитических функций φ_s , $s = 1, \dots, l$. Выберем на кривой M путь F_s , соединяющий пару нулей $(a_s, \pm w(a_s))$ дифференциала $d\xi$, проецирующихся в одну точку на плоскости переменного x . В малой окрестности на страте этот путь можно считать непрерывно зависящим от $d\xi$ – концы пути F_s “плавают” вместе с нулями дифференциала (см. рис. 1а)). Выбор F_s гомотопически неединственен, но два пути различаются на цикл кривой M : если нуль a_s лежит на проекции вещественного овала M , то $F_s - \bar{J}F_s \in H_1^-(M, \mathbb{Z})$; если a_s лежит на проекции ковещественного овала, то $F_s + \bar{J}F_s \in H_1^+(M, \mathbb{Z})$; для пары комплексно сопряженных нулей $a_s, a_{\bar{s}}$ имеем $\bar{J}F_s - F_{\bar{s}} \in H_1(M, \mathbb{Z})$.

Фиксация путей F_s позволяет ввести локально на страте l комплекснозначных функций $f_s := \int_{F_s} d\xi$, вещественные и мнимые части которых дают нам недостающие координаты. А именно для всякого нуля a_s с вещественного овала M положим $\varphi_s := \operatorname{Re} f_s$; для a_s с ковещественного овала M положим $\varphi_s := \operatorname{Im} f_s$; наконец, для пары комплексно сопряженных нулей $a_s, a_{\bar{s}}$ положим $\varphi_s := \operatorname{Re} f_s, \varphi_{\bar{s}} := \operatorname{Im} f_{\bar{s}}$.

ЛЕММА 4. *Функции $\gamma_s^\pm, s = 1, \dots, g; \varphi_j, j = 1, \dots, l$, образуют локальную вещественно аналитическую систему координат на страте (13).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положения точек ветвления e_1, \dots, e_{2g} кривой M и нулей a_1, \dots, a_l дифференциала $d\xi$ являются комплекснозначными функциями локальных координат страта. Дифференциалы новых координат имеют выражения:

$$\begin{aligned} d\gamma_s^+ &= -\left(\sum_{j=1}^{2g} \left[\left(\varepsilon_j - \frac{1}{2} \right) \int_{C_s^+} \frac{d\xi}{x - e_j} \right] de_j + \sum_{j=1}^l \left[\alpha_j \int_{C_s^+} \frac{d\xi}{x - a_j} \right] da_j \right), \\ & \quad s = 1, \dots, g, \\ d\gamma_s^- &= i \left(\sum_{j=1}^{2g} \left[\left(\varepsilon_j - \frac{1}{2} \right) \int_{C_s^-} \frac{d\xi}{x - e_j} \right] de_j + \sum_{j=1}^l \left[\alpha_j \int_{C_s^-} \frac{d\xi}{x - a_j} \right] da_j \right), \\ & \quad s = 1, \dots, g, \\ d\varphi_s &= - \begin{bmatrix} \operatorname{Re} \\ \text{либо} \\ \operatorname{Im} \end{bmatrix} \left(\sum_{j=1}^{2g} \left[\left(\varepsilon_j - \frac{1}{2} \right) \int_{F_s} \frac{d\xi}{x - e_j} \right] de_j + \sum_{j=1}^l \left[\alpha_j \int_{F_s} \frac{d\xi}{x - a_j} \right] da_j \right), \\ & \quad s = 1, \dots, l. \end{aligned}$$

Если они линейно зависимы, то на M есть ненулевой *вещественный* дифференциал

$$d\omega = \left(\sum_{j=1}^{2g} \frac{E_j}{x - e_j} + \sum_{j=1}^l \frac{A_j}{x - a_j} \right) d\xi,$$

E_j, A_j – постоянные, для которого равны нулю все интегралы по циклам C_s^\pm , а также вещественные либо мнимые (в соответствии с определением φ_s) части интегралов по путям F_s . Вещественная симметрия $\int_{F_s} d\omega = \overline{\int_{\bar{J}F_s} d\omega}$ и приведенные ранее соотношения между $\bar{J}F_s$ и F_s влекут $\int_{F_s} d\omega = 0, s = 1, \dots, l$.

Полюсы $d\omega$ могут находиться лишь в точках ветвления кривой M , причем вычеты в этих полюсах нулевые, ибо $d\omega$ нечетен при гиперэллиптической инволюции. Поскольку и циклические, и полярные периоды $d\omega$ равны нулю, то абелев интеграл $\omega(x, w) := \int_{(e_{2g+2}, 0)}^{(x, w)} d\omega$ – однозначная функция на кривой M . Интеграл ω также

нечетен при инволюции кривой, поэтому отмеченные выше равенства $\int_{F_s} d\omega = 0$ означают, что ω имеет нули в точках M , накрывающих $a_s, s = 1, \dots, l$. Четная функция $w\omega$ имеет единственную особенность – полюс на бесконечности и потому является многочленом по переменной x . Степень многочлена $w\omega$ не превосходит

$g + 1$, при этом он имеет $g + 2$ нулей с учетом кратности: e_j кратности ε_j при $j = 1, \dots, 2g$ и кратности $1 + \varepsilon_j$ при $j = 2g + 1, 2g + 2$, а также a_j кратности α_j , $j = 1, \dots, l$. Следовательно, $d\omega = 0$ и дифференциалы вещественно аналитических функций γ_s^\pm , $s = 1, \dots, g$; φ_j , $j = 1, \dots, l$, линейно независимы на страте (13).

Для завершения доказательства теоремы 6 разберемся с проекцией слоев частичных отображений периодов на базу. На заданной кривой M существует единственный вещественный дифференциал $d\xi$ с вычетом -1 в ∞_+ и заданными вещественными периодами $\gamma_1^+, \dots, \gamma_g^+$ (либо с заданными мнимыми периодами $i\gamma_1^-, \dots, i\gamma_g^-$). Это дает биекцию слоев Π_\pm на базу $\widetilde{\mathcal{H}}_g^k$, являющуюся клеткой. Невырожденность (=максимальность ранга) сужения проекции $\mathcal{N} \rightarrow \widetilde{\mathcal{H}}_g^k$ на слой Π_\pm следует из инфинитезимальной формы этого же рассуждения. Действительно, вертикальный касательный к \mathcal{N} вектор в точке $d\xi$ отождествляется с голоморфным вещественным дифференциалом $d\omega$ на кривой M , несущей $d\xi$. Если тот же вектор касателен к слою отображения периодов, то все интегралы $d\omega$ вдоль циклов C_s^+ (соответственно C_s^-), $s = 1, \dots, g$, равны нулю. Следовательно, $d\omega$, а за ним и вертикальный касательный вектор к слою Π_\pm тривиальны.

4.4. Отображение периодов на пространстве модулей. Для исследования уравнений Абеля (12) отождествим лежащее в $\Omega^1 \widetilde{\mathcal{H}}_g^k$ многообразие ассоциируемых с кривыми M дифференциалов $d\eta_M$ с базой этого расслоения. Из теоремы 6, п. 1) мы знаем, что многообразие $\mathcal{N} \cap (\Pi_+)^{-1}(0)$ без вырождения проецируется на $\widetilde{\mathcal{H}}_g^k$. Теперь частичное отображение периодов Π_- задано прямо на универсальной накрывающей пространства модулей. На последней, как и на когомологиях $H^1(M_0)$, действуют косы из $g - k + 1$ нитей (см. п. 4.2).

ЛЕММА 5. *Отображение периодов $\Pi_- : \widetilde{\mathcal{H}}_g^k \rightarrow (H_1^-(M_0, \mathbb{R}))^*$ перестановочно с действием кос из Vr_{g-k+1} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если элемент C гомологического расслоения $H_1^- \mathcal{H}_g^k$ проецируется в начальную точку пути τ на базе \mathcal{H}_g^k , то C можно параллельно перенести вдоль пути по естественной плоской связности. Результат переноса обозначим через $C \cdot \tau$, такое действие путей на циклы ассоциативно, $C \cdot (\tau_1 \tau_2) = (C \cdot \tau_1) \cdot \tau_2$, и зависит только от гомотопического класса пути. Точки универсальной накрывающей $\widetilde{\mathcal{H}}_g^k$ — это гомотопические классы путей $\tau \subset \mathcal{H}_g^k$, начинающихся в отмеченной точке M_0 . Группа кос $\text{Vr}_{g-k+1} \cong \pi_1(\mathcal{H}_g^k, M_0) \ni [\beta]$ действует на них скольжениями $[\tau] \rightarrow [\beta\tau]$. Заключение леммы следует из цепочки равенств:

$$\langle \Pi_-([\beta] \cdot [\tau]) \mid C \rangle := -i \int_{C \cdot (\beta\tau)} d\eta_M = -i \int_{(C \cdot \beta) \cdot \tau} d\eta_M =: \langle [\beta] \cdot \Pi_-([\tau]) \mid C \rangle.$$

Прообраз функционала $C_* \in (H_1^-(M_0, \mathbb{R}))^*$ на универсальной накрывающей $\widetilde{\mathcal{H}}_g^k$ будем называть многообразием $\mathbb{T}(C_*)$. Например, уравнения Абеля (12) локально определяют такое многообразие для функционала C_* , заданного на базисе решетки нечетных 1-циклов кривой M равенствами: $\langle C_* \mid C_s^- \rangle = 2\pi m_s/n$, $s = 0, 1, \dots, g$. Перечислим свойства этих многообразий, уже известные нам из теорем 5, 6 и леммы 5.

- ТЕОРЕМА 7. 1) \mathbb{T} – гладкое g -мерное многообразие в $\widetilde{\mathcal{H}}_g^k$.
 2) Два многообразия \mathbb{T} либо не пересекаются, либо совпадают.
 3) $\mathbb{T}(\beta \cdot C_*) = \beta \cdot \mathbb{T}(C_*)$, $C_* \in \Pi_-(\widetilde{\mathcal{H}}_g^k)$, $\beta \in \text{Br}_{g-k+1}$.
 4) Точки универсальной накрывающей $\widetilde{\mathcal{H}}_g^k$, порожденные многочленами степени n , заполняют многообразия \mathbb{T} , отвечающие функционалам обратной решетки $4\pi n^{-1}(L_{M_0})^*$.
 5) Отвечающие всевозможным многочленам “рациональные” многообразия $\mathbb{T}(C_*)$, $C_* \in 2\pi(H_1^-(M_0, \mathbb{Q}))^*$, плотны в $\widetilde{\mathcal{H}}_g^k$.

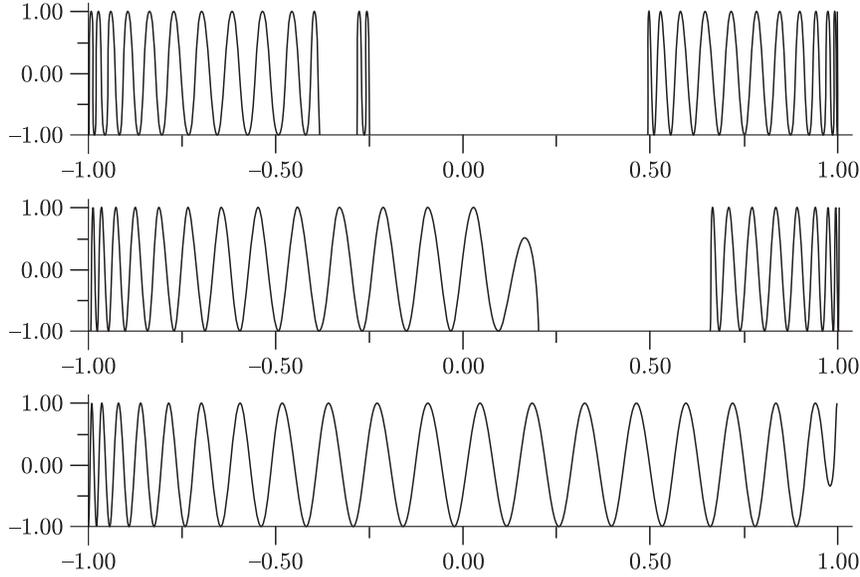


Рис. 2. Экстремальные многочлены $P_{50}(x)$ для $g = 2, k = 3, 2, 1$

При дальнейшем исследовании отображения периодов на пространстве модулей возникают следующие вопросы.

1. Найти образ $\widetilde{\mathcal{H}}_g^k$ при частичном отображении периодов Π_- . В работе [12] показано, что образ универсальной накрывающей при $k = g + 1$ является внутренностью g -симплекса, при $k = g$ – это объединение k открытых g -симплексов и при $k < g$ – счетное объединение открытых g -симплексов, перечисляемых косами.

2. Определить топологию \mathbb{T} -многообразия. В работе [10] показано, что это всегда клетка, если $k = g + 1$. Техника работы [12] дает клеточное разбиение \mathbb{T} -многообразия, сводя к комбинаторике вопрос о его топологии. Однако определение топологии из отношений соседства клеток разбиения становится весьма трудоемким уже при небольших g . Прделанные автором вычисления для $g = 1, 2, 3$ и всех $k = 0, \dots, g + 1$ показали, что и в этих случаях \mathbb{T} – всегда клетка вне зависимости от функционала из образа Π_- . По-видимому, справедлива

ГИПОТЕЗА. \mathbb{T} -многообразия всегда является клеткой.

3. Склеивается ли \mathbb{T} -многообразие при проекции на пространство модулей \mathcal{H}_g^k ? Другими словами, есть ли у действия группы кос на функционалах $(H_1^-(M_0, \mathbb{R}))^*$

неподвижные точки в образе отображения периодов? В [12] приведен пример слоя этого отображения, который инвариантен при действии некоторой косы. По-видимому, топология \mathbb{T} -многообразия при проекции на пространство модулей $\widetilde{\mathcal{H}}_g^k$ может меняться.

4. Научиться эффективно решать уравнения Абеля (12), т.е. определять местоположение фиксированного \mathbb{T} -многообразия в пространстве $\widetilde{\mathcal{H}}_g^k$. Последнее можно реализовать как область евклидова пространства, точки которой задают образующие группы Шоттки специального вида. Подобным вычислениям посвящена статья [11]. Графики трех 2-экстремальных многочленов степени $n = 50$, полученных в ходе компьютерных расчетов, приведены на рис. 2.

Список литературы

1. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. М.: МГУ, 1976.
2. *Бернштейн С. Н.* Экстремальные свойства многочленов. М.: ОНТИ, 1937.
3. *Lebedev V. I.* Extremal polynomials with restrictions and optimal algorithms // Alekseev A. S., Bakhvalov N. S. Advanced mathematics: computation and applications. Novosibirsk: NCC Publishers, 1995. P. 491–502.
4. *Ремез Я. И.* Общие вычислительные методы чебышёвского приближения. Киев: Изд-во АН УССР, 1957.
5. *Lebedev V. I.* A new method for determining the roots of polynomials of least deviation on a segment with weight and subject to additional conditions. I // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1993. V. 8. №3. P. 195–222; II // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1993. V. 8. №5. P. 397–426.
6. *Peherstorfer F., Schiefermayr K.* Description of extremal polynomials on several intervals and their computation. I, II // Acta Math. Hungar. 1999. V. 83. P. 71–102, 103–128.
7. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
8. *Севрюк М. Б. (ред.)* Задачи Арнольда. М.: Фазис, 2000.
9. *Содин М. Л., Юдицкий П. М.* Функции, наименее уклоняющиеся от нуля на замкнутых подмножествах действительной оси // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4. №2. С. 1–61.
10. *Богатырёв А. Б.* Об эффективном вычислении многочленов Чебышёва для нескольких отрезков // Матем. сб. 1999. Т. 190. №11. С. 15–50.
11. *Богатырёв А. Б.* Представление пространств модулей кривых и вычисление экстремальных многочленов (в печати).
12. *Богатырёв А. Б.* Экстремальные многочлены на языке графов (в печати).
13. *Натанзон С. М.* Модули вещественных алгебраических кривых и их супераналогов // УМН. 1999. Т. 54. №6. С. 3–60.
14. *Gunning R. C.* Lectures on Riemann surfaces. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1966.
15. *Birman J. S.* Braids, links, and mapping class groups. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1974.
16. *Васильев В. А.* Ветвящиеся интегралы. М.: МЦНМО, 2000.
17. *Гриффитс Ф., Харрис Дж.* Принципы алгебраической геометрии. М.: Мир, 1982.