

УДК 517.5

А. Б. Богатырёв

Об эффективном вычислении многочленов Чебышёва для нескольких отрезков

Рассматривается клеточное разбиение пространства многочленов $T_n(E, x)$, наименее уклоняющихся от нуля на системе E из нескольких отрезков действительной оси. Предложен эффективный метод вычисления многочленов T_n в каждой клетке, использующий автоморфные функции.

Библиография: 29 названий.

§ 1. Введение

Пусть E – совокупность нескольких отрезков действительной оси, самая левая и самая правая точки E суть -1 и $+1$ соответственно. Рассмотрим классическую задачу о нахождении многочлена наименьшего отклонения на E : *среди всех многочленов $P_n(x)$ степени n с вещественными коэффициентами вида*

$$P_n(x) = x^n + \dots \quad (1)$$

найти многочлен с минимально возможной нормой в $C(E)$

$$L_n = \inf_{P_n} \max_{x \in E} |P_n(x)|. \quad (2)$$

Решение задачи (1), (2), деленное на величину отклонения L_n , назовем *многочленом Чебышёва $T_n(E, x)$* множества E .

Задача о наименьшем отклонении восходит к Чебышёву, который решил ее для $E = [-1, 1]$. Для многих частных случаев $E = [-1, a] \cup [b, 1]$, $-1 < a < b < 1$, решение было получено Ахиезером [1], а по существу содержалось в работах Золотарёва [2], [3] (см. также [4]), который сам такую задачу не рассматривал. В этих работах даны конструктивные решения, использующие эллиптические функции. В случае, когда E – объединение многих отрезков, некоторые задачи наименьшего отклонения были решены Лебедевым [5]. В своей недавней работе [6] Пехерсторфер и Шифермайр разработали метод вычисления многочленов, наименее отклоняющихся от нуля на многих отрезках, который эффективен лишь при малых степенях n . Ахиезер предложил [7] в общем случае использовать автоморфные функции Шоттки для параметрического представления решений, однако этот подход (для

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00141).

экстремальных рациональных функций см. [8]) до сих пор не был доведен до численных результатов. Развитию этого направления и посвящена настоящая статья.

Сформулируем решаемую нами задачу – сразу оговоримся, что это не задача наименьшего отклонения (1), (2). Погрузим пространство всевозможных многочленов Чебышёва $\bigcup_E T_n(E, \cdot)$ степени n в отождествляемое с \mathbb{R}^{n+1} пространство многочленов степени не выше n . Используя введенные Ахиезером гребенчатые области [9], [10], можно показать, что пространство многочленов Чебышёва есть неограниченное замкнутое подмножество \mathbb{R}^{n+1} , диффеоморфное $(n-1)$ -мерному квадранту. Квадрант $[0, \infty)^{n-1}$ обладает естественным клеточным разбиением на квадранты меньших размерностей, лежащие во всевозможных плоскостях, натянутых на координатные оси. Соответствующее разбиение пространства многочленов Чебышёва имеет вид

$$\bigcup_E T_n(E, \cdot) = \bigcup_{g=0}^{n-1} \bigcup_{m_0, \dots, m_g} \mathbb{T}(m_0, m_1, \dots, m_g), \quad (3)$$

где натуральные числа m_0, m_1, \dots, m_g , в сумме равные степени n , фиксируют топологическое устройство графика многочлена T_n , а $\mathbb{T}(m_0, m_1, \dots, m_g)$ – гладко вложенная клетка размерности g . Тем самым, всякий многочлен Чебышёва обладает уникальным набором дискретных параметров $\{m_k\}_{k=0}^g$, задающих клетку \mathbb{T} , и непрерывных параметров $0 < \nu_k < \infty$, $k = 1, \dots, g$, – глобальных координат клетки. *Вычисление многочленов Чебышёва $T_n(\cdot, x)$ относительно этой параметризации и составляет предмет настоящей работы.*

К сожалению, отображение $E \rightarrow [g; \{m_k\}_{k=0}^g; \{\nu_k\}_{k=1}^g]$, которое помогло бы в решении задачи наименьшего отклонения (1), (2), неизвестно. Более того, оно является неустойчивым. Напротив, отображение $[g; \{m_k\}_{k=0}^g; \{\nu_k\}_{k=1}^g] \rightarrow \{E\}$, сопоставляющее фиксированному T_n все его множества E наименьшего отклонения (т.е. такие, что $T_n = T_n(E, \cdot)$), устроено просто – его описание дано в теореме 2.

Восходящая к Ахиезеру конструкция позволяет вложить каждую клетку $\mathbb{T}(m_0, \dots, m_g)$ размерности g в пространство модулей $\mathcal{H}(\mathbb{R}; g, 1)$ вдвое большей размерности. Пространство модулей \mathcal{H} образовано гиперэллиптическими кривыми M рода g с вещественными точками ветвления и одной отмеченной вещественной точкой, а вложенная клетка \mathbb{T} задается рассматриваемыми в п. 2.1 уравнениями Абеля

$$\int_{\tilde{B}_s} d\eta = 2\pi i \frac{m_s}{n}, \quad s = 0, 1, 2, \dots, g. \quad (4)$$

Для конструктивного вычисления многочленов Чебышёва достаточно найти представление (модель) римановых поверхностей M , составляющих пространство модулей, удобное для решения двух задач:

- А) эффективного разрешения связей (4);
- Б) эффективного вычисления многочлена $T_n(\cdot, x)$ по представляющей его кривой M .

Для решения второй из названных задач Ахиезер еще в 1928 году – в связи с другой задачей наименьшего отклонения – предлагал использовать униформизацию кривой M по Шоттки. Новизна излагаемого здесь подхода в том, чтобы решить и задачу А) в указанной модели.

Схема вычислений чебышевских многочленов такова: из произвольной точки пространства модулей осуществляем градиентный спуск на клетку $\mathbb{T} \subset \mathcal{H}(\mathbb{R}; g, 1)$, используя вариационные формулы для левой части уравнений Абеля в пространстве модулей. Многочлен Чебышёва $T_n \in \mathbb{T}$ вычисляется по явным формулам в терминах римановой поверхности $M \in \mathcal{H}(\mathbb{R}; g, 1)$, соответствующей многочлену при вложении $\mathbb{T} \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R}; g, 1)$.

Автор благодарен профессору В. И. Лебедеву и рецензенту этой статьи за замечания, позволившие улучшить изложение материала, и за обзор истории задач о наименьшем уклонении.

§ 2. Структура многочленов Чебышёва

Качественное устройство графика многочлена T_n (см. рис. 7) можно понять исходя из теоремы Чебышёва об альтернансе. Описание графика дает

ТЕОРЕМА 1. *Многочлен $P_n(x)$ степени n с положительным старшим коэффициентом является многочленом Чебышёва некоторого множества E тогда и только тогда, когда интервал $I := (-1, 1)$ содержит n непересекающихся подынтервалов I_1, \dots, I_n , из которых два примыкают к концам I , таких, что $P_n: I_s \rightarrow I$ – гомеоморфизм для всех $s = 1, \dots, n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1°) Пусть $T_n(E, x)$ – многочлен Чебышёва множества E и e_0, e_1, \dots, e_n – его точки альтернанса. Каждый из интервалов (e_{s-1}, e_s) , $s = 1, \dots, n$, содержит ровно одну точку полного прообраза $T_n^{-1}(y)$ для всякого $y \in I$. Положим $I_s := \{x \in (e_{s-1}, e_s) : T_n(x) \in I\}$ и рассмотрим произвольную компоненту связности $I_s^0 \subset I_s$. Значения многочлена T_n на концах интервала I_s^0 равны единице по абсолютной величине, но обязаны иметь разные знаки – в противном случае T_n принимает равные значения в различных точках $I_s^0 \subset (e_{s-1}, e_s)$. Отсюда вытекает, что $I_s^0 = I_s$, а сужение многочлена T_n на I_s – гомеоморфизм на I . Поскольку ± 1 – крайние точки E , то $-1 \in \partial I_1$, $1 \in \partial I_n$.

(2°) Пусть многочлен P_n взаимно однозначно отображает непересекающиеся интервалы I_1, \dots, I_n на I . Монотонность P_n на соседних интервалах I_{s-1}, I_s имеет противоположный характер. Подсчет числа точек альтернанса показывает, что $P_n = T_n(E, \cdot)$ для $E := \bigcup_{s=1}^n \bar{I}_s$.

СЛЕДСТВИЕ. *Многочлен $P_n(x)$ степени n с положительным старшим коэффициентом является многочленом Чебышёва (для некоторого множества E), если и только если*

$$\{\pm 1\} \subset P_n^{-1}(\{\pm 1\}) \subset [-1, 1]. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1°) Если P_n – многочлен Чебышёва, то $P_n^{-1}(\{\pm 1\}) = \bigcup_{s=1}^n \partial I_s$ и вложения (5) бесспорны.

(2°) Пусть точки $-1 = e_1^* \leq e_2^* \leq \dots \leq e_{2n}^* = 1$ составляют полный прообраз $P_n^{-1}(\{\pm 1\})$ и каждая точка встречается столько раз, какова ее кратность. Мы утверждаем, что последовательность $s^0(j) := P_n(e_j^*)$, $j = 1, \dots, 2n$, имеет следующий вид:

$$s^0 = \{(-1)^n, \dots, +1, +1, -1, -1, +1, +1, -1, -1, +1\}. \quad (6)$$

Рассмотрим производный ряд $s^1(j) := P_n(e_j^*)P_n(e_{j+1}^*)$, $j = 1, \dots, 2n-1$. Положительность или отрицательность $s^1(j)$ означает, что на (возможно вырождающемся в точку) отрезке $[e_j^*, e_{j+1}^*]$ есть корень производной или корень самого многочлена соответственно. Следовательно, последовательность s^1 содержит n отрицательных и $n-1$ положительных членов. Ряд s^1 не содержит фрагмента $-1, -1$: в противном случае s^0 содержит фрагмент $-1, +1, -1$ либо $+1, -1, +1$, что невозможно. Итак, $s^1(j) = (-1)^j$, и поскольку старший коэффициент P_n положителен, то $s^0(2n) = +1$ и общий член s^0 имеет вид (6).

На всяком интервале $I_s := (e_{2s-1}^*, e_{2s}^*)$, $s = 1, \dots, n$, многочлен P_n монотонен, а на концах интервала принимает значения ± 1 . По теореме 1 это многочлен Чебышёва.

Из доказательства теоремы 1 видно, что один и тот же многочлен Чебышёва $T_n(\cdot, x)$ является решением задачи наименьшего отклонения (1), (2) для многих замкнутых множеств E , содержащих более n точек. Все множества наименьшего отклонения E перечисляет

ТЕОРЕМА 2. Пусть T_n – многочлен Чебышёва для некоторой совокупности отрезков, $T_n^{-1}(I) =: \bigcup_{s=1}^n I_s$. Тогда $T_n = T_n(E, \cdot)$, если и только если $E \subset \bigcup_{s=1}^n \bar{I}_s$ и E пересекается с каждой из $n+1$ компонент множества $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{s=1}^n I_s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через \bar{I}_s^* (возможно вырождающийся в точку) отрезок между I_s и I_{s+1} . Монотонность T_n на соседних интервалах I_s различна, поэтому на концах всякого \bar{I}_s^* многочлен Чебышёва принимает одинаковые значения, равные единице по абсолютной величине. Для точек альтернанса e_s имеем следующие возможности:

$$e_0 = -1, \quad e_s \in \partial \bar{I}_s^*, \quad s = 1, \dots, n-1, \quad e_n = 1. \quad (7)$$

(1°) Пусть E – множество наименьшего отклонения многочлена $T_n = T_n(E, \cdot)$. Значения многочлена на E по модулю не превосходят единицы, значит, $E \subset \bigcup_{s=1}^n \bar{I}_s$. Пересечения E с каждой компонентой дополнения к $\bigcup_{s=1}^n I_s$ непусты, поскольку все точки альтернанса (7) лежат в E .

(2°) Если замкнутое множество E лежит в объединении замыканий интервалов I_s и при этом пересекается с каждой компонентой дополнения к объединению тех же интервалов, то можно выбрать (вообще говоря, не единственным образом) точки альтернанса $e_s \in E$ согласно (7). По теореме об альтернансе $T_n = T_n(E, \cdot)$.

Для параметризации совокупности всевозможных $T_n(\cdot, x)$ нужно использовать величины, жестко привязанные к многочлену. Так, со всяким многочленом Чебышёва $T_n(E, x)$ связывают [9], [11], [12] его *опорное множество* (другие названия: *n-правильное множество*, *максимальное множество наименьшего отклонения*), а также *упорядоченное разбиение степени на натуральные слагаемые*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Опорным множеством* E^+ многочлена Чебышёва T_n назовем множество

$$E^+ := \bigcup_{s=1}^n \bar{I}_s = T_n^{-1}(\bar{I}), \quad (8)$$

компоненты связности $E_0^+, E_1^+, \dots, E_g^+$ которого занумеруем слева направо. *Упорядоченное разбиение степени* многочлена n образуют числа m_k , равные количеству подынтервалов I_s в компоненте E_k^+ :

$$m_0 + m_1 + \dots + m_g = n. \quad (9)$$

Ниже приведена теорема 3, которая дает необходимые и достаточные условия для того, чтобы множество

$$E^+ =: [-1, 1] \setminus \bigcup_{k=1}^g (a_k, b_k), \quad (10)$$

$$(b_0 :=) -1 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_g < b_g < 1 (= a_{g+1}), \quad (11)$$

было опорным множеством для многочлена Чебышёва с разбиением степени (9). Следуя работе Ахиезера [13], всякому множеству E^+ вида (10), (11) сопоставим гиперэллиптическую риманову поверхность рода g

$$M(E^+) := \left\{ w^2 = (x^2 - 1) \prod_{k=1}^g (x - a_k)(x - b_k) \right\}, \quad (12)$$

на которой введем два канонических базиса гомологий: $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_g; \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_g$ и $\tilde{\mathbf{B}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{B}}_g; \tilde{\mathbf{A}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{A}}_g$. Классы гомологий, представители которых не указаны на рис. 1, определим формулами:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_s &= \mathbf{A}_1 + \dots + \mathbf{A}_s, \\ \mathbf{B}_s &= \tilde{\mathbf{B}}_0 + \dots + \tilde{\mathbf{B}}_{s-1}, \end{aligned} \quad s = 1, \dots, g. \quad (13)$$

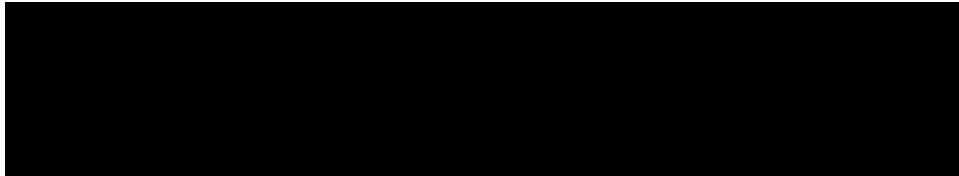


РИС. 1. Циклы $\mathbf{A}_s, \tilde{\mathbf{B}}_s$ и пути \mathbf{C}_s на римановой поверхности $M(E^+)$, $g = 2$

На римановой поверхности $M(E^+)$ существует единственный \mathbf{A} -нормированный абелев дифференциал 3-го рода $d\eta$ [14], полюсы которого расположены в бесконечно удаленных точках M и вычет $d\eta$ в полюсе ∞_+ на верхнем листе равен -1 (соответственно вычет в полюсе ∞_- на нижнем листе равен $+1$). Этот дифференциал обязан быть вещественным и иметь строго один нуль на каждом интервале (a_k, b_k) , так что справедливо представление

$$d\eta(E^+) = \frac{dx}{w} \prod_{k=1}^g (x - c_k), \quad c_k \in (a_k, b_k). \quad (14)$$

ТЕОРЕМА 3 (уравнения Абеля) [9], [11], [12], [15]. *Для того чтобы множество E^+ вида (10), (11) было опорным множеством многочлена Чебышёва с разбиением степени (9), необходимо и достаточно выполнения условий*

$$\int_{\tilde{\mathbf{B}}_s} d\eta = 2\pi i \frac{m_s}{n}, \quad s = 0, 1, 2, \dots, g. \quad (15)$$

Многочлен Чебышёва однозначно восстанавливается по своему опорному множеству E^+ , удовлетворяющему условиям (15):

$$T_n(E^+, x) = \cos\left(in \int_{(1,0)}^{(x,w)} d\eta\right), \quad x \in \mathbb{C}, \quad (16)$$

где интегрирование производится по любому пути на $M(E^+)$, соединяющему точку $(1, 0)$ с (x, w) , и результат не зависит от двузначности в выборе w .

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Соотношения (15) содержат лишь g независимых уравнений, так как контур $\tilde{\mathbf{B}}_0 + \dots + \tilde{\mathbf{B}}_g$ стягивается к полюсу дифференциала $d\eta$.

2) Билинейные соотношения Римана позволяют переписать уравнения (15) в эквивалентном виде:

$$\sum_{k=1}^g m_k \int_{\tilde{\mathbf{A}}_k} d\zeta + n \int_{\infty_-}^{\infty_+} d\zeta = 0, \quad (17)$$

где $d\zeta$ – произвольный дифференциал 1-го рода на $M(E^+)$, а интегрирование от ∞_- к ∞_+ производится вдоль пути \mathbf{C}_0 , см. рис. 1. Условия (17) по форме являются уравнениями Абеля, определяющими дивизор некоторой мероморфной функции на $M(E^+)$.

3) В приложении к задаче наименьшего отклонения условия (15) для $g = 1$ содержатся у Золотарёва (см. [4]), для $g = 2$ и $m_1 = m_2 = 1$ – в форме соотношения (86) для функций Шоттки – они впервые появились у Ахиезера в [7]. В препринте Крейна, Левина и Нудельмана [16] возникают уравнения, весьма напоминающие соотношения (15), в связи с задачей представления многочленов, положительных на системе отрезков. Используемые здесь уравнения (15), по-видимому, впервые встречаются в работах Пехерсторфера [11], [15].

4) Ахизеру ([10], см. также [9]) принадлежит чрезвычайно наглядная интерпретация представления (16). Для произвольного множества E^+ вида (10) интеграл Кристоффеля–Шварца

$$ni \int_{-1}^x d\eta(E^+), \quad \text{Im } x > 0,$$

конформно отображает верхнюю полуплоскость (вложенную в верхний лист $M(E^+)$) на гребенчатую область вида

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Im } z, 0 < \text{Re } z < n\pi\} \setminus \bigcup_{s=1}^g [\tilde{\mu}_s, \tilde{\mu}_s + i\tilde{\nu}_s], \quad (18)$$

в которой основания $0 < \tilde{\mu}_1 < \tilde{\mu}_2 < \dots < \tilde{\mu}_g < n\pi$ вертикальных разрезов и их длины $0 < \tilde{\nu}_k < \infty$, $k = 1, \dots, g$, задаются формулами

$$\tilde{\mu}_k := ni \int_{-1}^{a_k} d\eta, \quad \tilde{\nu}_k := ni \int_{a_k}^{c_k} d\eta, \quad k = 1, \dots, g.$$

Многочленам Чебышёва соответствуют гребенки с $\tilde{\mu}_k$, нацело делящимися на π . Верно и обратное: всякой гребенке (18) с кратными π основаниями разрезов $\tilde{\mu}_k$ соответствует многочлен Чебышёва $T_n(\cdot, x) = (-1)^n \cos \theta(x)$, где $\theta(x)$ – конформное отображение верхней полуплоскости на гребенку, нормированное условием $\{-1, 1, \infty\} \rightarrow \{0, n\pi, \infty\}$. Тем самым, установлено взаимно однозначное соответствие между многочленами Чебышёва и гребенчатыми областями, у которых в каждой точке $k\pi$ есть “зубец” длины $\tilde{\nu}_k$, $k = 1, \dots, n-1$. Теперь мы допускаем разрезы нулевой длины, так что нумерация $\tilde{\nu}_k$, вообще говоря, иная, чем в (18).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Числа $0 \leq \tilde{\nu}_k < \infty$, $k = 1, \dots, n-1$, назовем *координатами Ахизера* многочлена Чебышёва T_n . Совокупность всех многочленов Чебышёва с фиксированным разбиением степени (9) обозначим через $\mathbb{T}(m_0, m_1, \dots, m_g)$.

Введение координат Ахизера позволяет отождествить пространство многочленов Чебышёва $\bigcup_E T_n(E, \cdot)$ с квадрантом $[0, \infty)^{n-1}$. Множества $\mathbb{T}(m_0, m_1, \dots, m_g)$ образуют естественное клеточное разбиение квадранта на квадранты меньших размерностей: многочленам из $\mathbb{T}(m_0, \dots, m_g)$ соответствуют наборы координат Ахизера вида

$$(0, \dots, 0, \tilde{\nu}_{\tilde{m}_1}, 0, \dots, 0, \tilde{\nu}_{\tilde{m}_2}, 0, \dots, 0, \tilde{\nu}_{\tilde{m}_g}, 0, \dots, 0), \quad (19)$$

$$\tilde{m}_k := m_0 + m_1 + \dots + m_{k-1}.$$

Внутренность квадранта $[0, \infty)^{n-1}$ – это клетка $\mathbb{T}(1, 1, \dots, 1)$, содержащая многочлены Чебышёва “общего положения”. Всякий многочлен $P_n(x)$ с простыми и вещественными корнями можно перенести во внутренность $(n-1)$ -мерного квадранта при помощи линейной замены аргумента x и изменения масштаба P_n . Большой интерес представляют многочлены, лежащие в клетках малой размерности. Так, единственная вершина $\mathbb{T}(n)$ клеточного разбиения соответствует классическому

многочлену Чебышёва, ребра $\mathbb{T}(1, n-1), \mathbb{T}(2, n-2), \dots, \mathbb{T}(n-1, 1)$ соответствуют многочленам Золотарёва первого типа (классификацию многочленов Золотарёва см. в [4]); графики многочленов из двумерных граней $\mathbb{T}(11, 15, 4), \mathbb{T}(10, 17, 3), \mathbb{T}(13, 2, 15), \dots$ приведены на рис. 7.

Погрузим всевозможные многочлены Чебышёва $T_n(E, \cdot)$ в пространство многочленов степени не выше n , которое отождествим с \mathbb{R}^{n+1} , зафиксировав базис из многочленов. На вопрос: какую часть \mathbb{R}^{n+1} составляет пространство многочленов Чебышёва $\bigcup_E T_n(E, \cdot)$, отвечает

ТЕОРЕМА 4. *Пространство многочленов Чебышёва есть множество*

- (1°) *замкнутое,*
- (2°) *неограниченное,*
- (3°) *лежащее в плоскости коразмерности 2,*
- (4°) *вещественно-аналитически диффеоморфное $(n-1)$ -мерному квадртанту.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1°) Из критерия (5) следует, что предел последовательности чебышевских многочленов непременно будет многочленом Чебышёва.

(3°) Поскольку $T_n(\cdot, \pm 1) = (\pm 1)^n$, то все многочлены Чебышёва лежат в плоскости L_{n-1} размерности $n-1$:

$$L_{n-1} := \left\{ P_n(x) = x^n + (x^2 - 1) \sum_{j=0}^{n-2} r_j x^j \right\}. \quad (20)$$

(4°) В плоскости L_{n-1} рассмотрим содержащее все многочлены Чебышёва открытое множество Ω , образованное многочленами P_n строго n -й степени, у которых корни производной различны и принадлежат интервалу I :

$$-1 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < 1, \quad \dot{P}_n(x_s) = 0. \quad (21)$$

Отображение $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$, действующее по правилу

$$\Phi(P_n) = \{y_s\}_{s=1}^{n-1}, \quad y_s := (-1)^{n+s} P_n(x_s), \quad (22)$$

является вещественно-аналитичным локальным диффеоморфизмом.

Действительно, в области, где старший коэффициент r_{n-2} ненулевой, а все x_s различны, отображение $\{r_k\}_{k=0}^{n-2} \rightarrow \{x_s\}_{s=1}^{n-1}$ вещественно-аналитично. Соответственно, вещественно-аналитично и отображение $\{r_k\}_{k=0}^{n-2} \rightarrow \{y_s\}_{s=1}^{n-1}$. Отображение Φ имеет полный ранг, так как его матрица Якоби

$$\frac{\partial y_s}{\partial r_k} = (-1)^{n+s} (x_s^2 - 1) x_s^k, \quad s = 1, \dots, n-1, \quad k = 0, \dots, n-2,$$

получается из матрицы Вандермонда домножением на невырожденную диагональную.

Покажем, что Φ является биекцией пространства многочленов Чебышёва на квадрант

$$\{y_s \geq 1, \quad s = 1, \dots, n-1\}. \quad (23)$$

Корни x_s производной многочлена Чебышёва T_n не лежат ни в одном из интервалов I_k , $k = 1, \dots, n$, поэтому $(-1)^{n+s}T_n(x_s) \geq 1$. Обратно, пусть $\Phi(P_n) \in [1, \infty)^{n-1}$. Корни производной разбивают интервал I на n интервалов монотонности многочлена P_n (см. (21)). Для каждого из этих n интервалов значение P_n на одном конце не менее 1, а на другом – не более -1 , так что $P_n = T_n$ по теореме 1. Инъективность и сюръективность сужения Φ на $\bigcup_E T_n(E, \cdot)$ следует из связи отображения с введенными ранее координатами Ахизера $\{\tilde{\nu}_k\}_{k=1}^{n-1}$ на пространстве многочленов Чебышёва:

$$y_s = \operatorname{ch} \tilde{\nu}_s, \quad s = 1, \dots, n-1.$$

Требуемый диффеоморфизм $[1, \infty)^{n-1} \rightarrow \bigcup_E T_n(E, \cdot)$ осуществляет сужение Φ^{-1} на квадрант. Мы показали, что это отображение корректно определено, существенно-аналитично и имеет полный ранг вплоть до границы квадранта.

(2°) Норма $\|T_n(\cdot, x)\|_{C(\bar{I})} = \max_s y_s$ неограничена на пространстве многочленов Чебышёва ввиду сюръективности $\Phi|_{\bigcup_E T_n(E, \cdot)}$.

2.1. Уравнения Абеля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. (1°) Пусть $T_n(E^+, x)$ – многочлен Чебышёва с опорным множеством E^+ . Из теоремы 1 следует, что голоморфное отображение $X := \mathbb{C}\mathbb{P}_1 \xrightarrow{T_n} \mathbb{C}\mathbb{P}_1 := S$ ветвится с порядком 2 во всех прообразах точек $\pm 1 \in S$, за исключением $2g + 2$ точек ∂E^+ , в которых оно неразветвлено. Рассмотрим поверхности \tilde{X}, \tilde{S} , двулистно накрывающие соответственно X, S . Поверхность $\tilde{X} := M(E^+)$ разветвлена с порядком 2 над точками ∂E^+ , а поверхность $\tilde{S} := \mathbb{C}\mathbb{P}_1$ ветвится со вторым порядком над $\pm 1 \in S$:

$$\begin{array}{ccc} M(E^+) =: \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{T}_n} & \tilde{S} := \mathbb{C}\mathbb{P}_1 \\ \chi \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \mathbb{C}\mathbb{P}_1 =: X & \xrightarrow{T_n} & S := \mathbb{C}\mathbb{P}_1 \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \tilde{X}_\circ & \xrightarrow{\tilde{T}_n} & \tilde{S}_\circ \\ \chi \downarrow & & \downarrow \sigma \\ X_\circ & \xrightarrow{T_n} & S_\circ \end{array}. \quad (24)$$

Гиперэллиптическая инволюция $J: (x, w) \rightarrow (x, -w)$, $(x, w) \in M$, порождает группу скользящих $\mathfrak{G}(\chi)$ разветвленного накрытия $\chi: (x, w) \rightarrow x$. Группа скользящих $\mathfrak{G}(\sigma)$ второго разветвленного накрытия $\sigma: \tilde{s} \rightarrow \frac{1}{2}(\tilde{s} + 1/\tilde{s})$ порождена отображением $\tilde{s} \rightarrow 1/\tilde{s}$, $\tilde{s} \in \tilde{S}$. Покажем, что T_n можно поднять на накрывающие пространства, т.е. существует отображение $\tilde{T}_n: \tilde{X} \rightarrow \tilde{S}$, при котором диаграмма (24a) коммутативна.

Вначале определим суженное отображение $\tilde{T}_n: \tilde{X}_\circ \rightarrow \tilde{S}_\circ$, на образе $\tilde{S}_\circ \subset \tilde{S}$ которого σ неразветвлено. Введем пространства

$$\tilde{S}_\circ = S_\circ := \mathbb{C}\mathbb{P}_1 \setminus \{\pm 1\}, \quad X_\circ := \mathbb{C}\mathbb{P}_1 \setminus \{T_n^{-1}(\pm 1)\}, \quad \tilde{X}_\circ := \chi^{-1}(X_\circ),$$

на которых выберем отмеченные точки согласованно с отображениями χ, T_n, σ диаграммы (24b). Отображение $\tilde{T}_n: \tilde{X}_\circ \rightarrow \tilde{S}_\circ$ определим, сопоставляя концу всякого пути $\tau \subset \tilde{X}_\circ$, начинающегося в отмеченной точке, конец пути $\sigma^{-1} \circ T_n \circ$

$\chi(\tau) \subset \tilde{S}_o$, поднятого от отмеченной точки. Это определение корректно, если в фундаментальной группе $\pi_1(S_o)$ выполнено вложение [17]:

$$(T_n \circ \chi)\pi_1(\tilde{X}_o) \subset \sigma\pi_1(\tilde{S}_o). \quad (25)$$

Проверим выполнение этого вложения. Фундаментальная группа $\pi_1(S_o)$ – это свободная группа с одной образующей. Ее подгруппа $\sigma\pi_1(\tilde{S}_o)$ порождена *квадратом* этой образующей. Выберем в $\pi_1(\tilde{X}_o)$ базис, элементы которого представлены петлями двух видов: $4n$ петель 1-го вида – лассо, зацепленных за проколы $\chi^{-1} \circ T_n^{-1}(\pm 1)$ в римановой поверхности $M(E^+)$, и $2g$ петель 2-го вида, гомотопных циклам $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_g; \tilde{\mathbf{B}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{B}}_g$ (см. рис. 1). Индекс ветвления отображения $T_n \circ \chi$ равен двум в каждом из проколов поверхности \tilde{X}_o , поэтому петли 1-го вида проецируются в лассо, *дважды* огибающие один из проколов S_o . Проекция петли второго вида на X_o охватывает (см. рис. 1) *четное* число точек ∂E^+ (11), а также некоторое число других прообразов $T_n^{-1}(\pm 1)$. Прodeформируем эту проекцию на X_o в произведение лассо, зацепленных за проколы поверхности X_o . Проекция произведения на S_o гомотопна *четной* степени образующей группы $\pi_1(S_o)$.

Итак, функция \tilde{T}_n определена на всей поверхности \tilde{X} , за вычетом $4n$ проколов, в которых функцию доопределим по непрерывности. Исследуя зависимость приведенной выше конструкции поднятия отображения от выбора отмеченных точек на пространствах диаграммы (24b), можно прийти к выводу, что решение \tilde{T}_n единственно с точностью до скольжений из $\mathfrak{G}(\sigma)$ и удовлетворяет соотношению эквивалентности:

$$\tilde{T}_n(Jt) = \frac{1}{\tilde{T}_n(t)}, \quad t \in \tilde{X}. \quad (26)$$

Определим на накрывающей $\tilde{X} := M(E^+)$ абелев дифференциал 3-го рода:

$$d\eta = \frac{d\tilde{T}_n}{n\tilde{T}_n}, \quad (27)$$

полюсы которого ввиду коммутативности (24a) совпадают с полюсами функции $T_n \circ \chi$, т.е. находятся в бесконечно удаленных точках верхнего ∞_+ и нижнего ∞_- листов $M(E^+)$. Устраняя двужначность в выборе \tilde{T}_n , считаем

$$\text{Res } d\eta(t)|_{t=\infty_{\pm}} = \mp 1. \quad (28)$$

Остается определить периоды $d\eta$. Деформируя контур \mathbf{A}_s в отрезок $[a_s, b_s]$, проходимый сначала по нижнему листу M и обратно – по верхнему листу, убеждаемся, что

$$\int_{\mathbf{A}_s} d\eta = \frac{1}{n} \ln \tilde{T}_n|_{\mathbf{A}_s} = \frac{i}{n} \arg \tilde{T}_n|_{\mathbf{A}_s} = 0, \quad s = 1, \dots, g.$$

Аналогично, цикл $\tilde{\mathbf{B}}_k$ прodeформируем в отрезок $[b_k, a_{k+1}]$, проходимый сначала по нижнему берегу и обратно – по верхнему. Когда $\tilde{x} \in \tilde{X}$ пробегает по указанному

контур, точка $\tilde{s} := \tilde{T}_n(\tilde{x})$ ровно m_k раз описывает окружность $|\tilde{s}| = 1$ против часовой стрелки, следовательно,

$$\int_{\tilde{\mathbf{B}}_k} d\eta = \frac{i}{n} \arg \tilde{T}_n|_{\tilde{\mathbf{B}}_k} = 2\pi i \frac{m_k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, g.$$

Из коммутативности диаграммы (24а) следует представление (16): если $x = \chi(t)$, то

$$T_n(E^+, x) = T_n(E^+, \chi(t)) = \sigma \circ \tilde{T}_n(t) = \sigma \circ \exp\left(n \int_{t_0}^t d\eta\right) = \cos\left(in \int_{(1,0)}^{(x,w)} d\eta\right).$$

(2°) Пусть, обратно, риманова поверхность $M(E^+)$ вида (12) такова, что выполнены соотношения (15) для \mathbf{A} -нормированного дифференциала 3-го рода $d\eta$. На поверхности $M(E^+)$ корректно определена – ввиду (15) – функция

$$\tilde{T}_n(t) = \exp\left(n \int_{t_0}^t d\eta\right), \quad t \in M, \quad t_0 = (1, 0) \in M,$$

удовлетворяющая условию эквивариантности (26), поскольку $d\eta$ меняет знак при инволюции J , тождественно действующей на t_0 . Порожденное \tilde{T}_n отображение факторпространств

$$T_n: X = \tilde{X}/\mathfrak{G}(\chi) \xrightarrow{\tilde{T}_n} \tilde{S}/\mathfrak{G}(\sigma) = S$$

параметрически записывается в виде:

$$T_n(x) = \sigma \circ \tilde{T}_n(t) = \cos\left(ni \int_{t_0}^t d\eta\right), \quad x = \chi(t) \in X, \quad t \in \tilde{X},$$

и является рациональной функцией с единственным полюсом степени n на бесконечности, т.е. полиномом.

Остается показать, что интервал (b_k, a_{k+1}) составлен из m_k подынтервалов, каждый из которых функция $T_n(x)$ взаимно однозначно отображает на I . Действительно, при уменьшении x от a_{k+1} до b_k аргумент косинуса в представлении (16) монотонно – что следует из знакоопределенности дифференциала (14) на этом интервале – изменяется на πm_k . На краях b_k, a_{k+1} аргумент косинуса кратен π – это выводится индукцией по k из \mathbf{A} -нормированности дифференциала $d\eta$. Поскольку числа m_k в сумме дают степень многочлена $T_n(x)$, то из теоремы 1 следует, что T_n – многочлен Чебышёва с опорным множеством E^+ .

2.2. Геометрия многообразия опорных множеств. Ранее мы сопоставили всякому многочлену Чебышёва T_n его опорное множество E^+ и гиперэллиптическую кривую $M(E^+)$. Изучим дифференциально-геометрические свойства отображения клетки $\mathbb{T}(m_0, \dots, m_g)$ в пространство двулистных поверхностей рода g .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пространством модулей* $\mathcal{H}(\mathbb{R}; g, 1)$, связанным с задачей наименьшего отклонения¹, назовем $2g$ -мерный открытый симплекс (11) переменных a_s, b_s , точки которого считаем римановыми поверхностями M с двумя фиксированными выше базисами в гомологиях. Совокупность решений уравнений Абеля (15) при n из (9) назовем *многообразием опорных множеств*, которое обозначим также через $\mathbb{T}(m_0, m_1, \dots, m_g) \subset \mathcal{H}(\mathbb{R}; g, 1)$ – из контекста всегда будет ясно, идет ли речь о множестве многочленов или о множестве точек пространства модулей.

ТЕОРЕМА 5 [12]. *Для любого набора натуральных чисел (m_0, m_1, \dots, m_g) множество $\mathbb{T}(m_0, m_1, \dots, m_g)$ является g -мерным вещественно-аналитическим неособым подмногообразием $\mathcal{H}(\mathbb{R}; g, 1)$, гомеоморфным клетке. Различные многообразия \mathbb{T} либо не пересекаются, либо совпадают; в последнем случае наборы чисел (m_0, \dots, m_g) пропорциональны. Всевозможные \mathbb{T} -многообразия плотны в пространстве модулей.*

Сформулируем лемму, следствием которой является теорема 5. Пусть $d\eta$ – абелев дифференциал 3-го рода (14) на римановой поверхности (12), не обязательно нормированный. Определим отображение $\{a_k, b_k, c_k\}_{k=1}^g \rightarrow \{\lambda_k, \mu_k, \nu_k\}_{k=1}^g$ при помощи равенств

$$\lambda_k := \int_{\mathbf{A}_k} d\eta, \quad \mu_k := -i \int_{\mathbf{B}_k} d\eta, \quad \nu_k := \int_{\mathbf{C}_k} d\eta, \quad k = 1, \dots, g, \quad (29)$$

пути $\mathbf{A}_k, \mathbf{C}_k$ указаны на рис. 1, $\mathbf{B}_k := \tilde{\mathbf{B}}_0 + \tilde{\mathbf{B}}_1 + \dots + \tilde{\mathbf{B}}_{k-1}$.

ЛЕММА 1. *Отображение (29) является вещественно-аналитическим диффеоморфизмом $3g$ -мерного симплекса*

$$-1 < a_1 < c_1 < b_1 < a_2 < \dots < c_g < b_g < 1 \quad (30)$$

на произведение g -мерного симплекса и $2g$ -мерного конуса

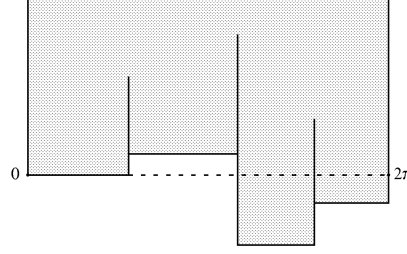
$$\begin{aligned} 0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_g < 2\pi, \\ \lambda_k < \nu_k, \quad 0 < \nu_k, \quad k = 1, \dots, g. \end{aligned} \quad (31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интеграл Кристоффеля–Шварца

$$2i \int_{-1}^x d\eta, \quad \operatorname{Im} x > 0,$$

конформно отображает верхнюю полуплоскость на гребенчато-ступенчатую область, показанную на рис. 2. Ее параметры взаимно однозначно связаны с величинами $\{\lambda_k, \mu_k, \nu_k\}$; например, абсцисса k -го вертикального разреза есть μ_k , высота k -го разреза относительно следующей за ним горизонтальной площадки

¹Пространство \mathcal{H} содержит конформно эквивалентные поверхности.


 Рис. 2. Гребенчато-ступенчатая область при $g = 3$

есть ν_k , разность уровней горизонтальных площадок, примыкающих к k -му разрезу, есть λ_k . Обратное отображение области (31) на симплекс (30) определим при помощи подходящим образом нормированного конформного отображения гребенчато-ступенчатых областей рисунка 2 на верхнюю полуплоскость. Инъективность вещественно-аналитического отображения $\{a_k, b_k, c_k\} \rightarrow \{\lambda_k, \mu_k, \nu_k\}$ легко следует из единственности нормированного конформного отображения.

Покажем, что биективное отображение $\{a_k, b_k, c_k\} \longleftrightarrow \{\lambda_k, \mu_k, \nu_k\}$ имеет полный ранг. Дифференцируя выражения для λ, μ, ν по параметрам a, b, c , получаем следующее выражение для матрицы Якоби отображения (29):

$$\frac{\partial(\lambda, \mu, \nu)}{\partial(a, b, c)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \int_{\mathbf{A}_k} \frac{d\eta}{x - a_s} & \cdots & \frac{1}{2} \int_{\mathbf{A}_k} \frac{d\eta}{x - b_s} & \cdots & - \int_{\mathbf{A}_k} \frac{d\eta}{x - c_s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2i} \int_{\mathbf{B}_k} \frac{d\eta}{x - a_s} & \cdots & \frac{1}{2i} \int_{\mathbf{B}_k} \frac{d\eta}{x - b_s} & \cdots & - \frac{1}{i} \int_{\mathbf{B}_k} \frac{d\eta}{x - c_s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2} \int_{\mathbf{C}_k} \frac{d\eta}{x - a_s} & \cdots & \frac{1}{2} \int_{\mathbf{C}_k} \frac{d\eta}{x - b_s} & \cdots & - \int_{\mathbf{C}_k} \frac{d\eta}{x - c_s} \end{vmatrix},$$

$k, s = 1, \dots, g$. Вырожденность матрицы Якоби означает, что найдется ненулевой дифференциал 2-го рода вида

$$d\omega := \sum_{s=1}^g \left(\frac{\alpha_s}{x - a_s} + \frac{\beta_s}{x - b_s} + \frac{\gamma_s}{x - c_s} \right) d\eta$$

с постоянными $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s$, для которого интегралы по всем кривым $\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k, \mathbf{C}_k$ равны нулю. Заметим, что полюсы $d\omega$ могут располагаться только в точках $(a_s, 0), (b_s, 0) \in M$, причем вычеты $d\omega$ в полюсах равны нулю: $d\omega$ меняет знак при инволюции J , оставляющей неподвижными точки ветвления M . Абелев интеграл

$$\omega(t) = \int_{t_0}^t d\omega, \quad t_0 = (1, 0) \in M, \quad (32)$$

однозначен на M , поскольку и циклические, и полярные периоды $d\omega$ равны нулю. Функция ω меняет знак при инволюции J ввиду нечетности дифференциала $d\omega$, поэтому $\omega = 0$ в обеих точках $t_k \in M$, накрывающих точку $c_k, k = 1, \dots, g$. Функция

$w\omega \in \mathbb{C}(M)$ инвариантна при инволюции J и имеет два полюса на бесконечности порядка не выше $g + 1$ в качестве единственных особенностей, поэтому

$$w(t)\omega(t) = P_{g+1}(x), \quad x = \chi(t), \quad t \in M,$$

где полином P_{g+1} степени не более $g + 1$ имеет $g + 2$ корня: $\pm 1, c_1, \dots, c_g$. Следовательно, $\omega \equiv 0$ и матрица Якоби невырождена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Вложим пространство модулей $\mathcal{H}(\mathbb{R}; g, 1)$ в $3g$ -мерный симплекс (30), дополнив систему чисел $\{a_k, b_k\}_{k=1}^g$ нулями c_k \mathbf{A} -нормированного дифференциала 3-го рода $d\eta$. Соответствие между \mathcal{H} и многообразием $\{\lambda_k(a, b, c) = 0\}_{k=1}^g$ взаимно однозначно. Покажем, что проекция $\{a_k, b_k, c_k\}_{k=1}^g \rightarrow \{a_k, b_k\}_{k=1}^g$, суженная на многообразии нулей $\lambda_k(a, b, c)$, везде имеет полный ранг.

Кокасательное пространство к многообразию $\{\lambda_k(a, b, c) = 0\}_{k=1}^g$ порождено дифференциалами da_k, db_k, dc_k при условиях связи

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^g \left(\int_{\mathbf{A}_k} \frac{d\eta}{x - a_j} \right) da_j + \sum_{j=1}^g \left(\int_{\mathbf{A}_k} \frac{d\eta}{x - b_j} \right) db_j \\ = 2 \sum_{j=1}^g \left(\int_{\mathbf{A}_k} \frac{d\eta}{x - c_j} \right) dc_j, \quad k = 1, \dots, g. \end{aligned} \quad (33)$$

Матрица $\left\| \int_{\mathbf{A}_k} (x - c_j)^{-1} d\eta \right\|$ невырождена, ибо противное влечет существование абелева дифференциала 1-го рода $\sum_{j=1}^g \gamma_j (x - c_j)^{-1} d\eta$ с нулевыми \mathbf{A} -периодами. Отсюда легко вывести, что порожденное проекцией отображение кокасательных пространств невырождено.

Множество $\mathbb{T}(m_0, \dots, m_g) \subset \mathcal{H}(\mathbb{R}; g, 1)$ выделяется в симплексе (30) g дополнительными равенствами $\mu_k = 2\pi\tilde{m}_k/n, k = 1, \dots, g$, с n из (9). Отсюда и из леммы 1 легко вытекают все утверждения теоремы.

2.3. Деформации чебышевских многочленов. Исследуем вопрос об устойчивости представления (16) относительно малых изменений параметров $\{a, b\}$ в пространстве модулей $\mathcal{H}(\mathbb{R}; g, 1)$. Вытекающий из теоремы 6 основной результат таков: *функция*

$$T_n^*(E^+, x) := \cos \left(in \int_1^x d\eta(E^+) \right) \quad (34)$$

является многочленом Чебышёва с той же точностью, с которой для множества E^+ выполнены условия Абеля (15). Это подтверждает и компьютерный эксперимент. При вычислениях с точностью 10^{-13} удается добиться выполнения соотношений (15) с точностью 10^{-11} – 10^{-12} , при этом функция T_n^* с точностью 10^{-10} – 10^{-11} совпадает со своим интерполяционным многочленом Лагранжа для многих наборов узлов интерполяции.

Для произвольной точки $\{a_k, b_k\}_{k=1}^g$ пространства модулей фиксируем однозначный на плоскости с разрезами $(-\infty, -1] \cup \{\bigcup_{k=1}^g [a_k, b_k]\} \cup [1, +\infty)$ \mathbf{A} -нормированный абелев дифференциал $d\eta(E^+, x)$ (14), знак которого выберем из условия

$\int_{-1}^1 d\eta(E^+, x) = -i\pi$. Определенная по этому дифференциалу функция $T_n^*(E^+, x)$ многочленом относительно x , вообще говоря, не является. Значения T_n^* совпадают на противоположных берегах каждого из разрезов $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$, так что функция голоморфна по x в $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{k=1}^g [a_k, b_k]$ и имеет полюс порядка n на бесконечности.

Изучим зависимость функции (34) от параметра E^+ . В $(2g+2)$ -мерной области

$$\left\{ \{a, b, x\} : \{a_k, b_k\}_{k=1}^g \in \mathcal{H}(\mathbb{R}; g, 1), x \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{k=1}^g [a_k, b_k] \right\} \quad (35)$$

T_n^* вещественно-аналитична по a, b и голоморфна по x . Дифференциал функции имеет следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 dT_n^*(E^+, x) &= -in \sin\left(ni \int_1^x d\eta(E^+, u)\right) \\
 &\times \left[\dot{\eta}(E^+, x) dx + \sum_{j=1}^g \frac{1}{2} \left(\int_1^x \frac{d\eta(E^+, u)}{u - a_j} \right) da_j \right. \\
 &\left. + \sum_{j=1}^g \frac{1}{2} \left(\int_1^x \frac{d\eta(E^+, u)}{u - b_j} \right) db_j - \sum_{j=1}^g \left(\int_1^x \frac{d\eta(E^+, u)}{u - c_j} \right) dc_j \right]. \quad (36)
 \end{aligned}$$

Здесь интегрирование производится в слое $\{a, b\} = \text{const}$ и коэффициенты дифференциальной формы не зависят от пути интегрирования, поскольку из-за \mathbf{A} -нормированности дифференциала $d\eta$ существуют условия (33). Можно проверить, что особенности коэффициентов в форме dT_n^* при $x = \pm 1$ — лишь кажущиеся.

ТЕОРЕМА 6. *Функция $T_n^*(E^+, x)$ является дифференцируемой функцией своих аргументов $\{a, b, x\}$ в любой точке $\{a^0, b^0, x^0\}$, для которой $\{a^0, b^0\} \in \mathbb{T}(m_0, m_1, \dots, m_g)$, а x^0 принадлежит замыканию области $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{k=1}^g [a_k, b_k]$, при котором сфера с разрезами дополняется верхним и нижним берегами каждого из разрезов.² При $x^0 \notin \{a_k^0, b_k^0\}_{k=1}^g$ дифференциал dT_n^* имеет представление (36), а при $x^0 \in \{a_k^0, b_k^0\}_{k=1}^g$*

$$dT_n^*(E_0^+, x^0) = (-1)^{n+\tilde{m}_k} 2n^2 \operatorname{Res}_{u=x^0} \dot{\eta}^2(E_0^+, u) \cdot \begin{cases} dx - da_k, & x^0 = a_k^0, \\ dx - db_k, & x^0 = b_k^0. \end{cases} \quad (37)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В произвольной точке $\{a_k, b_k\}_{k=1}^g$ пространства модулей функцию $T_n^*(E^+, x)$ можно аналитически продолжать по x через разрезы $\bigcup_{k=1}^g [a_k, b_k]$. Соответственно, на берегах разрезов дифференциал dT_n^* существует и совпадает с (36). В точках ветвления T_n^* этот дифференциал имеет особенность, исчезающую на \mathbb{T} -многообразиях.

²Имеется в виду замыкание в смысле расстояния по области (т.е. в метрике Мазуркевича).

Пусть, к примеру, $x^0 = a_k^0$. Преобразуем выражение для абелева интеграла из (34):

$$\begin{aligned}
\int_1^x d\eta(E^+) &= \int_1^{a_k} d\eta(E^+) + \int_{a_k}^x d\eta(E^+) \\
&= i\pi - i \frac{\mu_k(E^+)}{2} \\
&\quad \pm \int_{a_k}^x (u - a_k)^{-1/2} \left(\sqrt{\operatorname{Res}_{u=a_k^0} \dot{\eta}^2(E_0^+, u)} + O(|\delta a| + |\delta b| + |u - a_k|) \right) du \\
&= i\pi \frac{m_k + \dots + m_g}{n} \\
&\quad \pm 2\sqrt{x - a_k} \sqrt{\operatorname{Res}_{u=a_k^0} \dot{\eta}^2(E_0^+, u)} + O(|\delta a| + |\delta b| + |\delta x|),
\end{aligned}$$

где $|\delta a| := \sum_{j=1}^g |a_j - a_j^0|$; $|\delta b| := \sum_{j=1}^g |b_j - b_j^0|$; $|\delta x| := x - x^0$ и знаки квадратных корней выбраны согласованно с берегом разреза, на котором лежит x . Вариация T_n^* имеет вид:

$$\begin{aligned}
\delta T_n^* &:= T_n^*(E^+, x) - T_n^*(E_0^+, x^0) \\
&= (-1)^{m_k + \dots + m_g} \\
&\quad \times \left[\cos \left(\pm 2ni\sqrt{x - a_k} \sqrt{\operatorname{Res}_{u=a_k^0} \dot{\eta}^2(E_0^+, u)} + O(|\delta a| + |\delta b| + |\delta x|) \right) - 1 \right] \\
&= (-1)^{n + \tilde{m}_k} 2n^2 \operatorname{Res}_{u=a_k^0} \dot{\eta}^2(E_0^+, u) (\delta x - \delta a_k) + o(|\delta a| + |\delta b| + |\delta x|).
\end{aligned}$$

§ 3. Модель Шоттки

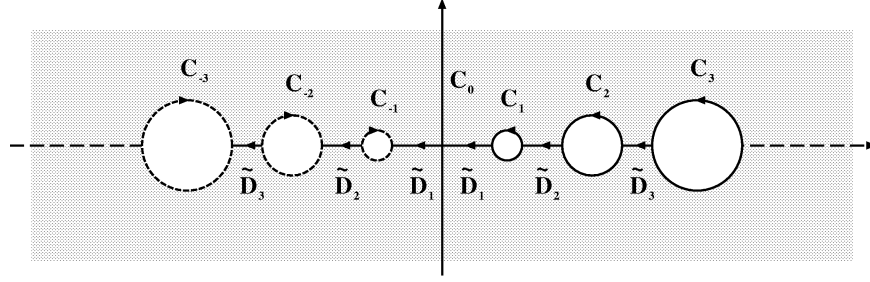
В § 2 мы показали, что задача эффективного вычисления многочленов Чебышёва $T_n(\cdot, \cdot)$ может быть сведена к поиску таких представлений (моделей) римановых поверхностей M , составляющих пространство модулей $\mathcal{H}(\mathbb{R}; g, 1)$, для которых

- (А) конструктивно разрешаются связи (15),
- (Б) эффективно вычисляются выражение (16) для T_n , а также независимая переменная x как функции точки на M .

В качестве такой модели мы будем использовать униформизацию по Шоттки. Все необходимые нам сведения об этой модели приведены в настоящем параграфе.

3.1. Симметричная группа Шоттки. Рассмотрим $\mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_g$ – окружности с центрами на действительной оси, лежащие в правой полуплоскости одна вне другой (см. рис. 3).

Совокупность движений G сферы Римана, образованных четным числом отражений относительно мнимой оси \mathbf{C}_0 и окружностей $\mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_g$, образует группу Шоттки \mathfrak{S} , фундаментальная область $\mathcal{R}(\mathfrak{S})$ которой есть внешность окружностей $\mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_g$ и симметричных им относительно оси \mathbf{C}_0 окружностей $\mathbf{C}_{-1}, \dots, \mathbf{C}_{-g}$


 Рис. 3. Круговая область \mathcal{R} с границей $\sum_{s=1}^g (\mathbf{C}_{-s} + \mathbf{C}_s)$, $g = 3$

(см. [18]). Отождествление границ фундаментальной области производится при помощи свободно порождающих \mathfrak{G} дробнолинейных отображений

$$G_k u := G_k(u) := c_k - \frac{r_k^2}{u + c_k}, \quad k = 1, \dots, g, \quad (38)$$

где c_k – центр и r_k – радиус окружности \mathbf{C}_k . На группе Шоттки обычным образом введем норму $|G|$ как длину несократимого разложения элемента G по образующим $G_1^{\pm 1}, G_2^{\pm 1}, \dots, G_g^{\pm 1}$.

На римановой поверхности $\mathcal{D}(\mathfrak{G})/\mathfrak{G}$ (\mathcal{D} – область разрывности [18] группы \mathfrak{G}) фиксируем канонический базис гомологий $\mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_g$; $\mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_g$, в котором $\mathbf{D}_j := \tilde{\mathbf{D}}_1 + \dots + \tilde{\mathbf{D}}_j$, а представители \mathbf{C}_j и $\tilde{\mathbf{D}}_j$ указаны на рис. 3.

3.2. Функции и дифференциалы на области разрывности. Оказывается, что Θ_1 -ряды Пуанкаре для описанной выше симметричной группы Шоттки \mathfrak{G} сходятся абсолютно [19] и равномерно на компактах в области разрывности $\mathcal{D}(\mathfrak{G})$. Это обстоятельство позволяет эффективно построить теорию функций на римановой поверхности $\mathcal{D}(\mathfrak{G})/\mathfrak{G}$. Начнем с абелева дифференциала 3-го рода:

$$\begin{aligned} d\eta_{xy}(u) &:= \sum_{G \in \mathfrak{G}} \{(Gu - x)^{-1} - (Gu - y)^{-1}\} dG(u) \\ &\stackrel{(42)}{=} \sum_{G \in \mathfrak{G}} \{(u - Gx)^{-1} - (u - Gy)^{-1}\} du, \end{aligned} \quad (39)$$

здесь $x, y \in \mathcal{D}(\mathfrak{G})$. Почленно интегрируя ряд (39) по окружностям $\mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_g$, убеждаемся, что если точки x, y лежат в фиксированной ранее фундаментальной области $\mathcal{R}(\mathfrak{G})$, то дифференциал $d\eta_{xy}$ является \mathbf{C} -нормированным дифференциалом 3-го рода на поверхности $M = \mathcal{D}(\mathfrak{G})/\mathfrak{G}$, т.е.

$$\int_{\mathbf{C}_s} d\eta_{xy} = 0, \quad x, y \in \mathcal{R}, \quad s = 1, \dots, g. \quad (40)$$

Самый простой способ получить дифференциал 1-го рода – это поместить полюсы x, y в формуле (39) в одну орбиту группы \mathfrak{G} :

$$\begin{aligned}
d\zeta_k(u) &:= d\eta_{G_k y} = \sum_{G \in \mathfrak{G}} \{(u - GG_k y)^{-1} - (u - Gy)^{-1}\} du \\
&= \sum_{G \in \mathfrak{G} | \langle G_k \rangle} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{(u - GG_k^{m+1} y)^{-1} - (u - GG_k^m y)^{-1}\} du \\
&= \sum_{G \in \mathfrak{G} | \langle G_k \rangle} \{(u - G\alpha_k)^{-1} - (u - G\beta_k)^{-1}\} du \\
&= \sum_{G \in \langle G_k \rangle | \mathfrak{G}} \{(Gu - \alpha_k)^{-1} - (Gu - \beta_k)^{-1}\} dG(u), \quad k = 1, \dots, g,
\end{aligned} \tag{41}$$

здесь α_k и β_k – притягивающая и отталкивающая неподвижные точки G_k , а суммирование производится по представителям классов смежности \mathfrak{G} по ее подгруппе $\langle G_k \rangle$, порожденной элементом $G_k \in \mathfrak{G}$. Независимость слагаемых в (41) от выбора представителей смежных классов следует из инфинитезимальной формы тождества двойного отношения

$$\frac{\frac{d}{du} G(u)(\alpha - \beta)}{(Gu - \alpha)(Gu - \beta)} = \frac{G^{-1}\alpha - G^{-1}\beta}{(u - G^{-1}\alpha)(u - G^{-1}\beta)}. \tag{42}$$

Заметим (почленно интегрируя ряд), что дифференциалы $d\zeta_k$, $k = 1, \dots, g$, автоматически образуют \mathbf{C} -нормированный набор, т.е.

$$\int_{\mathbf{C}_s} d\zeta_k = 2\pi i \delta_{sk}, \quad s, k = 1, \dots, g. \tag{43}$$

Абелевы интегралы η_{xy}, ζ_k являются неоднозначными функциями на области разрывности $\mathcal{D}(\mathfrak{G})$, однако экспоненты от них однозначны:

$$\exp \int_v^u d\eta_{xy} = \prod_{G \in \mathfrak{G}} \frac{u - Gx}{u - Gy} : \frac{v - Gx}{v - Gy} =: (u, v; x, y), \tag{44}$$

$$\exp \int_{\infty}^u d\zeta_k = \prod_{G \in \mathfrak{G} | \langle G_k \rangle} \frac{u - G\alpha_k}{u - G\beta_k} =: E_k(u), \quad k = 1, \dots, g. \tag{45}$$

Функции $(u, v; x, y)$, $E_k(u)$ были введены Шоттки в [20] и как функции u являются функциями Прима на римановой поверхности $M = \mathcal{D}(\mathfrak{G})/\mathfrak{G}$, поскольку умножаются на константы при обходе циклов M :

$$(G_k u, v; x, y) = (u, v; x, y) \frac{E_k(x)}{E_k(y)}, \tag{46}$$

$$E_k(G_j u) = E_k(u) E_{kj}, \tag{47}$$

E_{kj} – экспонента от периода абелева интеграла 1-го рода – имеет представление

$$E_{kj} = E_{jk} = \prod_{G \in \langle G_k \rangle | \mathfrak{G} | \langle G_j \rangle} \frac{G\alpha_j - \alpha_k}{G\alpha_j - \beta_k} : \frac{G\beta_j - \alpha_k}{G\beta_j - \beta_k}, \quad k, j = 1, \dots, g, \quad (48)$$

здесь произведение берется по двусторонним классам смежности группы \mathfrak{G} и при $j = k$ сомножитель $0/\infty$, соответствующий $G = 1$, заменяется на коэффициент растяжения $\lambda_k := \dot{G}_k(\alpha_k)$.

Всякую мероморфную функцию $F(u)$, однозначную на поверхности M (т.е. автоморфную функцию), можно представить в виде

$$F(u) = F(v) \prod_{k=1}^s (u, v; x_k, y_k) \prod_{k=1}^g \left(\frac{E_k(u)}{E_k(v)} \right)^{l_k}, \quad (49)$$

где x_k – нули, y_k – полюсы функции $F(u)$, точка $v \in \mathcal{D}(\mathfrak{G})$ произвольна, $l_k \in \mathbb{Z}$. Действительно, разлагая абелев дифференциал dF/F на дифференциалы 3-го рода $d\eta_{x_k y_k}$ и дифференциалы 1-го рода $d\zeta_k$, интегрируя от v до u и потенцируя, приходим к (49). Ограничения, накладываемые теоремой Абеля на дивизор F , – это в точности условия неизменности правой части (49) при обходе \mathbf{D} -циклов.

3.3. Вычисление функций и дифференциалов. В этом пункте мы дадим равномерную на компактах оценку остаточного члена для ряда (39), из которой следует сходимость всех рядов и произведений п. 3.2 и можно вывести оценки для остаточных членов последних.

Вычислительная практика показывает, что Θ_1 -ряды Пуанкаре сходятся плохо, если промежутки между соседними окружностями в последовательности $\mathbf{C}_{-g}, \dots, \mathbf{C}_{-1}, \mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_g$ малы по сравнению с их радиусами. Введем величину q_{\max} , характеризующую скорость сходимости Θ_1 -рядов для заданной группы \mathfrak{G} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $z_k^\pm := c_k \pm r_k, k = 1, \dots, g$, – точки пересечения окружностей \mathbf{C}_k с действительной осью. Положим

$$q_1 := \frac{z_2^- - z_1^-}{z_2^- - z_1^+} : \frac{z_1^-}{c_1};$$

$$q_k := \frac{z_{k+1}^- - z_k^-}{z_{k+1}^- - z_k^+} : \frac{z_{k-1}^+ - z_k^-}{z_{k-1}^+ - z_k^+}, \quad k = 2, \dots, g - 1; \quad (50)$$

$$q_g := \frac{c_g}{z_g^+} : \frac{z_{g-1}^+ - z_g^-}{z_{g-1}^+ - z_g^+};$$

$$1 < q_{\max} := \max_{k=1, \dots, g} q_k. \quad (51)$$

ЛЕММА 2. *Остаточный член Θ_1 -ряда Пуанкаре удовлетворяет равномерной на компакте $\mathcal{K} \subset \mathcal{D}(\mathfrak{G})$ асимптотической оценке*

$$\begin{aligned} & \sum_{|G|>k} |(Gu - x)^{-1} - (Gu - y)^{-1}| |\dot{G}(u)| \\ & \leq 2 \left(\sum_{s=1}^g r_s \right) [\text{dist}^{-2}\{\mathcal{K}, \Lambda(\mathfrak{G})\} + o(1)] \left(\frac{\sqrt{q_{\max}} - 1}{\sqrt{q_{\max}} + 1} \right)^k [\sqrt{q_{\max}} + 1], \end{aligned} \quad (52)$$

где $x, y \in \overline{\mathcal{R}}$, $u \in \mathcal{K}$, $\Lambda(\mathfrak{G}) := \mathbb{C}\mathbb{P}_1 \setminus \mathcal{D}(\mathfrak{G})$ – предельное множество группы; $o(1) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы уже отмечали, что тождество двойного отношения (42) позволяет переписать Θ_1 -ряд Пуанкаре (39) в виде

$$\Theta_1(u) = \sum_{G \in \mathfrak{G}} \{(u - Gx)^{-1} - (u - Gy)^{-1}\}. \quad (53)$$

Компакт \mathcal{K} не пересекается с компактом $G\overline{\mathcal{R}}$ для элементов G с достаточно большой нормой, поэтому соответствующие члены ряда (53) голоморфны на \mathcal{K} . Абсолютная величина общего члена ряда (53) не превосходит

$$\text{dist}^{-2}(\mathcal{K}, G\overline{\mathcal{R}}) |Gx - Gy|,$$

а поскольку $\text{dist}(\mathcal{K}, G\overline{\mathcal{R}}) \geq \text{dist}(\mathcal{K}, \Lambda(\mathfrak{G})) - o(1)$, то для доказательства леммы необходимо оценить сумму $\sum_{|G|>k} |Gx - Gy|$.

Предварительно покажем, что для $|G| \neq 0$ диаметр внешней окружности области $G\mathcal{R}$ больше суммы диаметров всех $2g - 1$ внутренних окружностей по меньшей мере в $\frac{\sqrt{q_{\max}} + 1}{\sqrt{q_{\max}} - 1}$ раз. Пусть $[w_0^-, w_0^+]$ – минимальный отрезок действительной оси, содержащий диаметры всех внутренних окружностей области $G\mathcal{R}$, а $[w_1^+, w_1^-]$ – диаметр внешней окружности, лежащей на действительной оси. Известно, что отрезок геодезической фиксированной *неевклидовой* длины на плоскости Лобачевского имеет максимальную *евклидову* длину, если он концентричен с абсолютом (см. рис. 4).

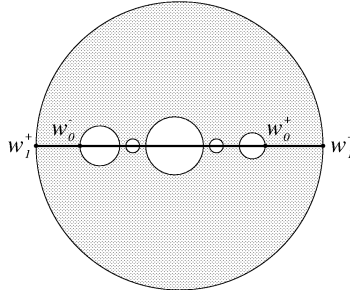


Рис. 4. Внешняя граница $G\mathcal{R}$ – абсолют плоскости Лобачевского

Применяя этот аргумент к $[w_0^-, w_0^+]$, получаем неравенство

$$\frac{w_0^+ - w_0^-}{w_1^- - w_1^+} \leq \frac{\sqrt{\mu} - 1}{\sqrt{\mu} + 1}, \quad \mu := \frac{w_1^- - w_0^-}{w_1^- - w_0^+} : \frac{w_1^+ - w_0^-}{w_1^+ - w_0^+},$$

где μ — одно из двойных отношений, перечисленных в (50).

Обозначая через $d(G\mathcal{R})$ диаметр внешней окружности $G\mathcal{R}$, получаем требуемую оценку суммы:

$$\begin{aligned} \sum_{|G|>k} |Gx - Gy| &\leq \sum_{|G|>k} d(G\mathcal{R}) = \sum_{l=k+1}^{\infty} \sum_{|G|=l} d(G\mathcal{R}) \\ &\leq \sum_{|G|=k+1} d(G\mathcal{R}) \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{q_{\max}} - 1}{\sqrt{q_{\max}} + 1} \right)^l \\ &\leq 2(\sqrt{q_{\max}} + 1) \left[\frac{\sqrt{q_{\max}} - 1}{\sqrt{q_{\max}} + 1} \right]^k \left(\sum_{l=1}^g r_l \right). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ. Ряды $\frac{d}{du}\eta_{xy}$, $\frac{d}{du}\zeta_k$ и произведения $(u, v; x, y)$, $E_k(u)$, E_{kj} (см. п. 3.2) являются абсолютно сходящимися.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ряд (41) для $\dot{\zeta}_k(u)$ — это (преобразованный) частный случай ряда $\dot{\eta}_{xy}$; бесконечные произведения $E_k(u)$, E_{kj} — частные случаи произведения $(u, v; x, y)$, которое, в свою очередь, получено потенцированием интеграла от $d\eta_{xy}$. Поэтому достаточно показать, что выражение (39) для $d\eta_{xy}$ сходится равномерно на компактах в области разрывности при $x, y \in \mathcal{D}(\mathfrak{G})$. Из представления (53) следует, что ряд не изменится, если на его полюсы x, y подействовать одним преобразованием $G \in \mathfrak{G}$, поэтому всякий ряд (39) представим в виде конечной суммы рядов того же вида, но с полюсами $x, y \in \overline{\mathcal{R}}$. Для последних же равномерная сходимость на компактах следует из леммы.

В заключение скажем несколько слов об организации вычисления сумм и произведений по группе \mathfrak{G} . Построим граф Кэли группы Шоттки, для чего поместим элементы группы в вершины дерева, связав G с элементами $G_s^{\pm 1}G$, $s = 1, \dots, g$, среди которых при $|G| \neq 0$ есть один элемент с верхнего уровня (его норма равна $|G| - 1$) и $2g - 1$ элемент с более низкого уровня (их нормы равны $|G| + 1$). Для вычисления слагаемого ряда (53) в вершине $G_s G$ достаточно подняться по дереву вверх на один уровень и взять хранящиеся в вершине G значения $G(x)$, $G(y)$. Такая схема особенно эффективна, если один и тот же ряд $\dot{\eta}_{xy}$ необходимо посчитать для нескольких значений аргумента u . Если же необходимо вычислять различные ряды $\dot{\eta}_{xy}$ в одной точке u , то в вершинах дерева следует хранить $G(u)$, $\dot{G}(u)$, а вычисления проводить по первому ряду в (39).

Реальные вычисления проводятся, разумеется, по конечному поддереву. Если в качестве этого поддерева выбрано дерево конечной глубины k , то доказанная

выше лемма дает априорную оценку погрешности суммирования. Практика показала, что более экономным является выбор другого поддерева, которое определяется лишь в процессе счета. Именно, если слагаемое ряда (39) в узле G меньше фиксированной точности ε , то дальнейшее суммирование по дереву, растущему из этой вершины, можно не проводить, так как существуют оценки, показывающие, что сумма по этому (бесконечному) дереву имеет тот же порядок, что и слагаемое в его корне G . Для такой организации суммирования есть апостериорные оценки точности, т.е. погрешность становится известной по окончании процесса вычислений.

3.4. Вариационная теория. В связи с решением уравнений (15) нас будет интересовать, как изменятся функции Шоттки (44), (45) и множители (48) при возмущении группы \mathfrak{G} . Пространство (ненормированных) групп Шоттки рода g с выделенной системой образующих обладает естественной структурой $3g$ -мерного комплексного многообразия [21], в котором введенные в п. 3.1 симметричные группы образуют вещественное подмногообразие (вещественной) размерности $2g$. Координаты в окрестности фиксированной группы \mathfrak{G}_0 вводятся путем отождествления образующих $G_k(u)$ с матрицами $\widehat{G}_k \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, $k = 1, \dots, g$, с точностью до знака.

Рассмотрим близкие к \mathfrak{G}_0 группы Шоттки \mathfrak{G} , порожденные матрицами

$$\widehat{G}_k = \widehat{G}_{k0} + \varepsilon \widehat{H}_k, \quad k = 1, \dots, g, \quad (54)$$

где \widehat{H}_k – касательная матрица пространства SL_2 в точке \widehat{G}_{k0} . При малых ε соответствующие (54) отображения G_k порождают группу Шоттки, которая имеет указанный выше симметричный вид лишь при специальном выборе возмущающих матриц \widehat{H}_k :

$$\widehat{H}_k = \xi_1^k \left\| \begin{array}{cc} 1 & 2c_{k0} \\ 0 & 1 \end{array} \right\| + \xi_2^k \left\| \begin{array}{cc} 0 & r_{k0}^2 - c_{k0}^2 \\ 1 & 0 \end{array} \right\|, \quad \widehat{G}_{k0} =: \frac{1}{r_{k0}} \left\| \begin{array}{cc} c_{k0} & c_{k0}^2 - r_{k0}^2 \\ 1 & c_{k0} \end{array} \right\| \quad (55)$$

при $\xi_1^k, \xi_2^k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, g$. Для возмущенной группы определены следующие объекты:

- $d\eta_{xy}$ – \mathbf{C} -нормированный абелев дифференциал 3-го рода,
- $d\zeta_1, \dots, d\zeta_g$ – \mathbf{C} -нормированные абелевы дифференциалы 1-го рода,
- π_{jk} , $j, k = 1, \dots, g$, – интегралы от абелевых дифференциалов $d\zeta_k$ по циклам $\mathbf{D}_j := \widetilde{\mathbf{D}}_1 + \dots + \widetilde{\mathbf{D}}_j$ на возмущенной поверхности.

Те же объекты для невозмущенной группы будем снабжать индексом 0.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\mathfrak{H} = (\widehat{H}_1, \dots, \widehat{H}_g)$ – касательный вектор к многообразию групп Шоттки в точке $\mathfrak{G}_0 = \langle \widehat{G}_{10}, \dots, \widehat{G}_{g0} \rangle$, тогда справедливы следующие

выражения для производных вдоль \mathfrak{H} :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \int_p^q (d\eta_{xy} - d\eta_{xy}^0) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{s=1}^g \int_{\mathbf{C}_{s0}} \dot{\eta}_{xy}^0(u) \dot{\eta}_{pq}^0(u) \operatorname{tr}[\mathcal{M}(u) \widehat{H}_s \widehat{G}_{s0}^{-1}] du, \quad (56)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \int_p^q (d\zeta_k - d\zeta_k^0) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{s=1}^g \int_{\mathbf{C}_{s0}} \dot{\zeta}_k^0(u) \dot{\eta}_{pq}^0(u) \operatorname{tr}[\mathcal{M}(u) \widehat{H}_s \widehat{G}_{s0}^{-1}] du, \quad (57)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} (\pi_{jk} - \pi_{jk}^0) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{s=1}^g \int_{\mathbf{C}_{s0}} \dot{\zeta}_j^0(u) \dot{\zeta}_k^0(u) \operatorname{tr}[\mathcal{M}(u) \widehat{H}_s \widehat{G}_{s0}^{-1}] du, \quad (58)$$

в которых

$$\mathcal{M}(u) := \left\| \begin{array}{cc} -u & u^2 \\ -1 & u \end{array} \right\| \in \mathfrak{sl}_2; \quad p, q, x, y \in \mathcal{R}_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим равенство (56). При малых ε фундаментальная область \mathcal{R}_0 группы \mathfrak{G}_0 содержится в области разрывности возмущенной группы \mathfrak{G} , поэтому разность интегралов 3-го рода $\delta\eta_{xy} := \eta_{xy} - \eta_{xy}^0$ однозначна и голоморфна в \mathcal{R}_0 . Имеем цепочку равенств:

$$\begin{aligned} 2\pi i (\delta\eta_{xy}(q) - \delta\eta_{xy}(p)) &= \sum_{s=1}^g \int_{\mathbf{C}_{s0} - \mathbf{C}_{-s0}} \delta\eta_{xy} d\eta_{pq}^0 \\ &= \sum_{s=1}^g \int_{\mathbf{C}_{s0} - \mathbf{C}_{-s0}} \eta_{xy} d\eta_{pq}^0 \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} &\left(\text{поскольку } \eta_{xy}^0(G_{s0}u) - \eta_{xy}^0(u) = \text{const}, \text{ а } \int_{\mathbf{C}_{\pm s0}} d\eta_{pq}^0 = 0 \right) \\ &= \sum_{s=1}^g \int_{\mathbf{C}_{s0}} (\eta_{xy}(u) - \eta_{xy}(G_{s0}^{-1}u)) d\eta_{pq}^0 \\ &= \sum_{s=1}^g \int_{\mathbf{C}_{s0}} (\eta_{xy}(u) - \eta_{xy}(G_s \circ G_{s0}^{-1}u)) d\eta_{pq}^0 \end{aligned} \quad (60)$$

(аргументация здесь та же, что и раньше: $\eta_{xy}(G_s v)$ отличается от $\eta_{xy}(v)$ на константу)

$$\begin{aligned} &= \varepsilon \sum_{s=1}^g \int_{\mathbf{C}_{s0}} \dot{\eta}_{xy}(u) \operatorname{tr}[\mathcal{M}(u) \widehat{H}_s \widehat{G}_{s0}^{-1}] d\eta_{pq}^0(u) + o(\varepsilon) \quad (61) \\ &= \varepsilon \sum_{s=1}^g \int_{\mathbf{C}_{s0}} \dot{\eta}_{xy}^0(u) \operatorname{tr}[\mathcal{M}(u) \widehat{H}_s \widehat{G}_{s0}^{-1}] d\eta_{pq}^0(u) + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

В последнем равенстве мы воспользовались равномерной на окружности \mathbf{C}_s оценкой $\dot{\eta}_{xy} - \dot{\eta}_{xy}^0 = O(\varepsilon)$, получить которую можно методами теории квазиконформных отображений (подробности см. в работах Альфорса [22] и Берса [23]).

К вариационной формуле (57) нетрудно прийти по той же схеме, что и к (56). Приведем, однако, другой ее вывод, основанный на совершении предельного перехода в (56). Искомая величина – предел выражения

$$\varepsilon^{-1} \int_p^q (d\eta_{xy} - d\eta_{zy}^0) = \varepsilon^{-1} \left[\int_p^q (d\eta_{xy} - d\eta_{xy}^0) + \int_p^q d\eta_{xz}^0 \right] \quad (62)$$

при $x \rightarrow G_k y$, $z \rightarrow G_{k0} y$, $\varepsilon \rightarrow 0$, причем предел по ε берется последним. Зафиксируем малое ε , $y \in \mathcal{R}$ и найдем предел при $x \rightarrow G_k y$ от первого интеграла в правой части (62). Воспользуемся тождеством (59)–(60) и продолжим правую часть (60) аналитически по x внутрь окружности \mathbf{C}_{k0} : для этого необходимо разбить k -е слагаемое в сумме на два интеграла и для каждого деформировать контур интегрирования \mathbf{C}_{k0} так, чтобы он все время оставался в области однозначности абелева интеграла $\eta_{xy}(u)$ либо соответственно $\eta_{xy}(G_k \circ G_{k0}^{-1} u)$; k -е слагаемое правой части (60) в пределе при $x \rightarrow G_k y$ принимает вид

$$\int_{\mathbf{C}'_k} \zeta_k(u) d\eta_{pq}^0(u) - \int_{\mathbf{C}''_k} \zeta_k(G_k \circ G_{k0}^{-1} u) d\eta_{pq}^0(u), \quad (63)$$

где пути \mathbf{C}'_k , \mathbf{C}''_k – деформации \mathbf{C}_{k0} – начинаются в точках $G_k(y)$ и $G_{k0}(y)$ соответственно. Начальная точка интегрирования на контурах \mathbf{C}'_k , \mathbf{C}''_k существенна, поскольку абелев интеграл ζ_k получает приращение при обходе контуров. Выражение (63) преобразуем к форме

$$\int_{\mathbf{C}_k} (\zeta_k(u) - \zeta_k(G_k \circ G_{k0}^{-1} u)) d\eta_{pq}^0(u) + 2\pi i \int_{G_{k0}(y)}^{G_k(y)} d\eta_{pq}^0, \quad (64)$$

подставляя которую вместо первого слагаемого в правой части (62) и сокращая – ввиду соотношения Римана для абелевых интегралов 3-го рода – последнее слагаемое в (62) с последним слагаемым в (64), приходим к соотношению

$$2\pi i \int_p^q (d\zeta_k - d\zeta_k^0) = \sum_{s=1}^g \int_{\mathbf{C}_{s0}} (\zeta_k(u) - \zeta_k(G_s \circ G_{s0}^{-1} u)) d\eta_{pq}^0(u). \quad (65)$$

Дальнейший переход к пределу по ε теперь вполне аналогичен (61).

Оставшуюся вариационную формулу (58) получим предельным переходом из (57). Для вариации периода π_{jk} имеем следующее выражение:

$$\delta\pi_{jk} := \int_{G_{jq}}^q d\zeta_k - \int_{G_{j0q}}^q d\zeta_k^0 = \int_{G_{j0q}}^q (d\zeta_k - d\zeta_k^0) + \int_{G_{jq}}^{G_{j0q}} d\zeta_k. \quad (66)$$

Первый интеграл в правой части (66) был нами по существу найден в предыдущем пункте доказательства: продолжая обе части (65) аналитически по p внутрь окружности \mathbf{C}_{j0} и переходя к пределу при $p \rightarrow G_{j0}(q)$, получаем выражение

$$\begin{aligned} & 2\pi i \int_{G_{j0q}}^q (d\zeta_k - d\zeta_k^0) \\ &= \sum_{s=1}^g \int_{\mathbf{C}_{s0}} (\zeta_k(u) - \zeta_k(G_s \circ G_{s0}^{-1} u)) d\zeta_j^0 - 2\pi i (\zeta_k(G_{j0q}) - \zeta_k(G_{jq})). \end{aligned}$$

Откуда

$$2\pi i \delta_{jk} = \sum_{s=1}^g \int_{\mathcal{C}_{s0}} (\zeta_k(u) - \zeta_k(G_s \circ G_{s0}^{-1}u)) d\zeta_j^0(u)$$

и, устремляя ϵ к нулю, получаем выражение для производной (58).

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Формула (56) – это по существу формула Адамара для вариации функции Грина. Похожие вариационные формулы есть в работах Шиффера и Спенсера [24], Рауха [25], Альфорса [22].

2) Любопытна геометрическая природа выражений в правых частях вариационных формул (56)–(58). Ввиду тождества $\text{tr}[\mathcal{M}(u)\mathcal{M}(v)] = -(u-v)^2$ это есть значения периода Эйхлера интеграла для квадратичных дифференциалов $d\eta_{xy} d\eta_{pq}$, $d\zeta_k d\eta_{pq}$, $d\zeta_j d\zeta_k$. О связи вариационных формул с когомологиями Эйхлера см. также [26].

3.5. Вычисление вариаций. Прямое вычисление вариаций по формулам (56)–(58) является весьма дорогостоящим, поскольку квадратурные формулы требуют вычисления рядов в большом количестве точек. Однако существует обходной путь, позволяющий прийти к результату, суммируя ряды лишь в $2g-1$ точке. Мы основываемся на работе Хейхала [27], в которой фигурирующие в наших вариационных формулах отображения

$$\Xi(u)(du)^2 \mapsto \int_{\mathcal{C}_k} \Xi(u)\mathcal{M}(u) du, \quad k = 1, \dots, g, \quad (67)$$

из пространства (мероморфных) квадратичных дифференциалов в $\text{sl}_2(\mathbb{C})$ вычислено в явном виде для относительных Θ_2 -рядов Пуанкаре.

3.5.1. Квадратичные ряды Пуанкаре. Всякому неединичному элементу $T \in \mathfrak{G}$ с неподвижными точками α (притягивающей), β (отталкивающей) и коэффициентом растяжения $0 < \lambda < 1$ сопоставим голоморфный квадратичный дифференциал $\Theta_2[R_T](du)^2$, а также мероморфный с полюсами в орбитах точек $x, y \in \mathcal{D}(\mathfrak{G})$ квадратичный дифференциал $\Theta_2[R_T^{xy}](du)^2$, где

$$\Theta_2[R_T](du)^2 := \sum_{G \in \langle T \rangle | \mathfrak{G}} R_T(Gu)(dG(u))^2, \quad (68)$$

$$R_T(u) := (u - \alpha)^{-2}(u - \beta)^{-2};$$

$$\Theta_2[R_T^{xy}](du)^2 := \sum_{G \in \mathfrak{G}} R_T^{xy}(Gu)(dG(u))^2, \quad (69)$$

$$R_T^{xy}(u) := (u - \alpha)^{-1}(u - \beta)^{-1}(u - x)^{-1}(u - y)^{-1}.$$

Сходимость (68) в нашем случае следует из сходимости ряда (41) для голоморфного дифференциала $d\zeta_k$ и из классических оценок площадей [28] в общем случае; о сходимости Θ -ряда Пуанкаре (69) см., например, [28].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. При фиксированном $k = 1, \dots, g$ зададим *сопутствующие* T элементы $T_j(k)$ группы \mathfrak{G} . Если несократимое разложение элемента T по образующим имеет вид

$$T = (G_{\bullet} \cdots G_k^{\varepsilon_1} \cdots G_k^{\varepsilon_2} \cdots G_k^{\varepsilon_l} \cdots G_*) \cdot (G_{\Delta} \cdots G_k^{\varepsilon_{l+1}} \cdots G_k^{\varepsilon_s} \cdots G_{\nabla}) \cdot (G_*^{-1} \cdots G_k^{-\varepsilon_l} \cdots G_k^{-\varepsilon_2} \cdots G_k^{-\varepsilon_1} \cdots G_{\bullet}^{-1}), \quad (70)$$

в котором указаны все вхождения элемента G_k ; $\varepsilon_j = \pm 1$; $G_{\Delta} G_{\nabla} \neq 1$, то положим

$$T_j(k) := (G_{\bullet} \cdots G_k^{\varepsilon_1} \cdots G_k^{\varepsilon_2} \cdots G_k^{\varepsilon_j}) \cdot \begin{cases} G_k^{-1}, & \varepsilon_j = 1, \\ 1, & \varepsilon_j = -1, \end{cases} \quad j = 1, \dots, s. \quad (71)$$

ТЕОРЕМА 8. (1°) Для квадратичных рядов Пуанкаре отображение (67) является конечной суммой (см. [27]):

$$\int_{\mathbf{C}_k} \Theta_2[R_T](u) \mathcal{M}(u) du = \frac{2\pi i}{(\alpha - \beta)^3} \sum_{j=l+1}^s \varepsilon_j \widehat{T}_j^{-1}(k) \left\| \begin{array}{cc} \alpha + \beta & -2\alpha\beta \\ 2 & -\alpha - \beta \end{array} \right\| \widehat{T}_j(k); \quad (72)$$

(2°) если полюсы x, y квадратичного дифференциала $\Theta_2[R_T^{xy}](du)^2$ лежат в \mathcal{R} , то

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{C}_k} \Theta_2[R_T^{xy}](u) \mathcal{M}(u) du &= \frac{2\pi i}{\alpha - \beta} \left[\sum_{j=1}^l \varepsilon_j \widehat{T}_j^{-1} \left\{ \frac{\mathcal{M}(\alpha)}{(\alpha - x)(\alpha - y)} - \frac{\mathcal{M}(\beta)}{(\beta - x)(\beta - y)} \right\} \widehat{T}_j \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=l+1}^s \frac{\varepsilon_j}{\lambda^{-1/2} - \lambda^{1/2}} \widehat{T}_j^{-1} \left\{ \frac{\lambda^{-1/2} \mathcal{M}(\alpha)}{(\alpha - x)(\alpha - y)} - \frac{\lambda^{1/2} \mathcal{M}(\beta)}{(\beta - x)(\beta - y)} \right\} \widehat{T}_j \right]. \quad (73) \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1°) Отметим прежде всего ключевое тождество Хейхала

$$\mathcal{M}(Gu) = \widehat{G} \mathcal{M}(u) \widehat{G}^{-1} \dot{G}(u), \quad G \in \mathfrak{G}, \quad (74)$$

пользуясь которым преобразуем выражение для левой части (72):

$$\int_{\mathbf{C}_k} \Theta_2[R_T](u) \mathcal{M}(u) du = \sum_{G \in \langle T \rangle | \mathfrak{G}} \widehat{G}^{-1} \left\{ \int_{G\mathbf{C}_k} R_T(u) \mathcal{M}(u) du \right\} \widehat{G}.$$

Полюсы функции $R_T(u)$ попадают внутрь окружности $G\mathbf{C}_k$ для следующих элементов G группы \mathfrak{G} :

ТАБЛИЦА 1

| полюс | $G \in \mathfrak{G}$ | примечание |
|--------------|---|------------|
| $u = \alpha$ | $T_1, \dots, T_l; T^m T_{l+1}, T^m T_{l+2}, \dots, T^m T_s$ | $m \geq 0$ |
| $u = \beta$ | $T_1, \dots, T_l; T^m T_s, T^m T_{s-1}, \dots, T^m T_{l+1}$ | $m < 0$ |

Оценки длины несократимого разложения по образующим показывают, что элементы $T_1, \dots, T_l; T_{l+1}, \dots, T_s$ лежат в различных правых классах смежности по подгруппе $\langle T \rangle$, поэтому, вычисляя

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{u=\alpha}(R_T(u)\mathcal{M}(u)) &= (\alpha - \beta)^{-2} \dot{\mathcal{M}}(\alpha) - 2(\alpha - \beta)^{-3} \mathcal{M}(\alpha) \\ &= (\alpha - \beta)^{-3} \left\| \begin{array}{cc} \alpha + \beta & -2\alpha\beta \\ 2 & -\alpha - \beta \end{array} \right\|, \end{aligned} \quad (75)$$

а также вычет $R_T \mathcal{M}$ при $u = \beta$, мы приходим к правой части (72). Отметим, что матрица (75) является $\operatorname{Ad} \hat{T}$ -инвариантной, что следует из тождества

$$\left\| \begin{array}{cc} \alpha + \beta & -2\alpha\beta \\ 2 & -\alpha - \beta \end{array} \right\| = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} (1, -\beta) + \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} (1, -\alpha),$$

поэтому результат правой части (72) также не зависит от выбора представителей классов смежности по подгруппе $\langle T \rangle$ из таблицы 1.

(2°) Преобразуем левую часть (73), пользуясь тождеством Хейхала:

$$\int_{G\mathbf{C}_k} \Theta_2[R_T^{xy}](u)\mathcal{M}(u) du = \sum_{G \in \mathfrak{G}} \hat{G}^{-1} \left\{ \int_{G\mathbf{C}_k} R_T^{xy}(u)\mathcal{M}(u) du \right\} \hat{G}.$$

Заметим, что точки $x, y \in \mathcal{R}$ лежат вне всех окружностей $G\mathbf{C}_k$, а точки α, β лежат внутри окружности $G\mathbf{C}_k$ лишь для перечисленных в таблице 1 элементов G . Для суммирования величин $\hat{G}^{-1} \operatorname{Res}_{u=\alpha, \beta}(R_T^{xy} \mathcal{M}) \hat{G}$ по элементам G таблицы 1 необходимо знать значения рядов

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \hat{T}^{-m} \mathcal{M}(\alpha) \hat{T}^m &= \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \mathcal{M}(\alpha) = \frac{\mathcal{M}(\alpha)}{1 - \lambda}, \\ \sum_{m=1}^{\infty} \hat{T}^m \mathcal{M}(\beta) \hat{T}^{-m} &= \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \mathcal{M}(\beta) = \frac{\lambda \mathcal{M}(\beta)}{1 - \lambda}. \end{aligned}$$

Проделав вычисления, приходим к форме (73).

3.5.2. *Базис из Θ_2 -рядов Пуанкаре.* Пользуясь теоремой 8, вычислим отображение Хейхала для нескольких квадратичных (относительных) рядов Пуанкаре:

ТАБЛИЦА 2

| $T \in \mathfrak{G}$ | $\int_{\mathbf{C}_s} \Theta_2[R_T](u)\mathcal{M}(u) du$ |
|----------------------|--|
| G_k | $\frac{i\pi}{2\alpha^2} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha^{-1} & 0 \end{pmatrix} \delta_{ks}$ |
| $G_k G_s^{-1} G_k$ | $-\frac{i\pi}{2\alpha^2} \hat{G}_k \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha^{-1} & 0 \end{pmatrix} \hat{G}_k^{-1}$ |
| $G_s G_k^{-1} G_s$ | $\frac{i\pi}{2\alpha^2} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha^{-1} & 0 \end{pmatrix} + \hat{G}_s \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha^{-1} & 0 \end{pmatrix} \hat{G}_s^{-1} \right\}$ |

СЛЕДСТВИЕ ТЕОРЕМЫ 8. *Квадратичные дифференциалы (68) при $T = G_1, G_2, \dots, G_g; G_1G_2^{-1}G_1, G_1G_3^{-1}G_1, \dots, G_1G_g^{-1}G_1$ образуют базис в $(2g - 1)$ -мерном пространстве четных, т.е. инвариантных при гиперэллиптической инволюции, голоморфных квадратичных дифференциалов на M .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Убедимся, что все интересующие нас квадратичные дифференциалы инвариантны при инволюции M , которая в рассматриваемой нами модели действует как $u \rightarrow -u$. Действительно, все перечисленные движения T удовлетворяют соотношению $T(-u) = -T^{-1}(u)$ (вспомним, что каждый элемент G_1, \dots, G_g есть суперпозиция двух отражений), и поэтому

- (а) $\alpha(T) + \beta(T) = 0$,
- (б) инволюция $G(u) \rightarrow \tilde{G}(u) := -G(-u)$ продолжается на правые классы смежности $\langle T \rangle | \mathfrak{G}$.

Эти два наблюдения позволяют заключить, что $\Theta_2[R_T]$ – четная функция переменной u при указанных T .

Для доказательства полноты рассматриваемой системы квадратичных дифференциалов определим линейные функционалы $\langle l_k, \Xi \rangle$ и $\langle m_k, \Xi \rangle$ над голоморфными квадратичными дифференциалами $\Xi(u)(du)^2$ как соответственно элементы $(1, 2)$ и $(1, 1)$ в матрице $\int_{\mathbf{C}_k} \Xi(u) \mathcal{M}(u) du$. Используя таблицу 2, составим матрицу значений системы из $2g - 1$ функционала $\langle l_1, \cdot \rangle, \dots, \langle l_g, \cdot \rangle; \langle m_2, \cdot \rangle, \dots, \langle m_g, \cdot \rangle$ на квадратичных дифференциалах $\Theta_2[R_T](du)^2$:

| T | $\langle l_1, \cdot \rangle$ | $\langle l_2, \cdot \rangle$ | \dots | $\langle l_g, \cdot \rangle$ | $\langle m_2, \cdot \rangle$ | $\langle m_3, \cdot \rangle$ | \dots | $\langle m_g, \cdot \rangle$ |
|------------------|------------------------------|------------------------------|----------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|----------|------------------------------|
| G_1 | L_1 | 0 | \dots | 0 | 0 | 0 | \dots | 0 |
| G_2 | 0 | L_2 | \dots | 0 | 0 | 0 | \dots | 0 |
| \vdots | \vdots | | \ddots | \vdots | \vdots | \vdots | 0 | \vdots |
| G_g | 0 | 0 | \dots | L_g | 0 | 0 | \dots | 0 |
| $G_1G_2^{-1}G_1$ | * | * | \dots | * | M_2 | 0 | \dots | 0 |
| $G_1G_3^{-1}G_1$ | * | * | \dots | * | 0 | M_3 | | 0 |
| \vdots | \vdots | | | \vdots | \vdots | | \ddots | |
| $G_1G_g^{-1}G_1$ | * | * | \dots | * | 0 | 0 | \dots | M_g |

где $L_k := i\pi\alpha^{-1}(G_k)/2$, $M_k := i\pi\alpha^{-3}r_1^{-2}c_1(\alpha^2 - \alpha^2(G_1))/2$, $\alpha := \alpha(G_1G_k^{-1}G_1)$.

Из условия $\alpha^2 = \alpha^2(G_1)$ следует, что $\alpha(G_1)$ – неподвижная точка G_k . Как видим, диагональные элементы матрицы ненулевые, поэтому сама матрица невырождена и рассматриваемые квадратичные дифференциалы действительно образуют базис.

Покажем, как применять квадратичные ряды Пуанкаре для вычисления производных по направлениям из теоремы 7. Начнем с голоморфных квадратичных дифференциалов $d\zeta_j d\zeta_k$, используемых для вычисления производных от периодов π_{jk} .

Эти квадратичные дифференциалы инвариантны при инволюции M , поэтому, зная коэффициенты разложения $d\zeta_j d\zeta_k$ по явному базису из квадратичных рядов Пуанкаре, мы можем воспользоваться таблицей 2 для вычисления отображения (67) с $\Xi(du)^2 = d\zeta_j d\zeta_k$. Для нахождения же коэффициентов разложения достаточно иметь полный набор эффективно вычисляемых функционалов над пространством четных квадратичных дифференциалов.

ЛЕММА 3. *Фиксируем локальные переменные в $2g - 1$ точке гиперэллиптической кривой M , среди которых нет двух точек, переходящих друг в друга при инволюции. Значения квадратичных дифференциалов в указанных точках образуют полный набор функционалов над $(2g - 1)$ -мерным пространством четных голоморфных квадратичных дифференциалов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что свойство полноты системы функционалов не зависит от выбора локальных координат в фиксированных точках $p_1, p_2, \dots, p_{2g-1} \in M$ – замена координат влечет домножение функционалов на ненулевые константы.

Рассмотрим [14] элемент второго порядка $x \in \mathbb{C}(M)$, конечный в выбранных нами точках, а также элемент $w \in \mathbb{C}(M)$, связанный с x уравнением $w^2 = P_{2g+2}(x)$, P_{2g+2} – некоторый полином степени $2g + 2$ с простыми нулями. Не ограничивая общности, считаем, что в точках p_1, p_2, \dots, p_m элемент $w \neq 0$, и в них выберем x в качестве локальной координаты; в оставшихся точках ветвления $p_{m+1}, p_{m+2}, \dots, p_{2g-1}$ в качестве локальной координаты возьмем w . Из значений определенных только что функционалов на базисе $w^{-2}x^j(dx)^2$, $j = 0, \dots, 2g - 2$, в пространстве четных квадратичных дифференциалов [14] составим матрицу

$$\begin{array}{c|c|c} & p_k \ (k = 1, \dots, m) & p_k \ (k = m + 1, \dots, 2g - 1) \\ \hline w^{-2}x^j(dx)^2 & w^{-2}(p_k)x^j(p_k) & 4(P_{2g+2})^{-2}(p_k)x^j(p_k) \\ (j = 0, \dots, 2g - 2) & & \end{array} \quad . \quad (76)$$

Матрица (76) лишь домножением справа на диагональную отличается от матрицы Вандермонда $\|x^j(p_k)\|$. По условию леммы $x(p_k) \neq x(p_s)$ при $p_k \neq p_s$, поэтому матрица невырождена, а значит, функционалы образуют базис в сопряженном пространстве.

В случае мероморфных квадратичных дифференциалов $d\eta_{xy} d\eta_{pq}, d\zeta_k d\eta_{pq}$ можно подобрать сумму (из не более чем четырех либо соответственно двух) квадратичных дифференциалов вида (69) с теми же особенностями, а оставшуюся голоморфную часть разложить по явному базису [27] из относительных квадратичных Θ -рядов Пуанкаре.

§ 4. Вычисление многочленов Чебышёва

Покажем, как для модели Шоттки решаются поставленные во введении задачи:

- А) решение уравнений Абеля,
- Б) вычисление T_n и аргумента x .

4.1. Униформизация с разрезами A_1, A_2, \dots, A_g .

4.1.1. *Группа Шоттки.* Пусть (11), (12) – произвольная точка пространства модулей $\mathcal{H}(\mathbb{R}; g, 1)$. Сопоставим ей симметричную группу Шоттки \mathfrak{G} следующим образом. Конформно отобразим сферу Римана с разрезами $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_g, b_g], [1, -1]$ на круговую область при нормировании $\{-1, \infty_{\pm}, 1\} \rightarrow \{0, \pm i, \infty\}$, как на рис. 5. Область с разрезами инвариантна при комплексном сопряжении, поэтому и круговая область будет симметрична относительно действительной оси. Последняя порождает группу Шоттки \mathfrak{G} вида, описанного в п. 3.1.

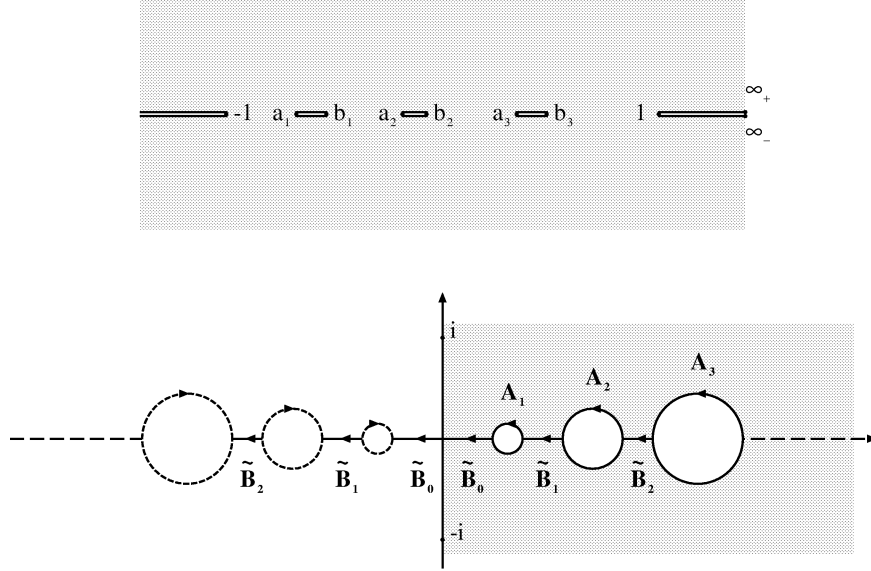


Рис. 5. Униформизация M с разрезами вдоль \mathbf{A} -циклов

Теория квазиконформных отображений [29] либо результаты по отображению монодромии [26] позволяют утверждать, что величины c_k и r_k – центры и радиусы кругов из (38) при ограничениях

$$0 < c_1 - r_1 < c_1 + r_1 < c_2 - r_2 < c_2 + r_2 < \dots < c_g - r_g < c_g + r_g \quad (77)$$

– образуют глобальную вещественно-аналитическую систему координат в пространстве модулей $\mathcal{H}(\mathbb{R}; g, 1)$. Преимущество этой системы координат над старой, в которой за модули берутся точки ветвления поверхностей, состоит в том, что ключевой для всей теории объект – \mathbf{A} -нормированный абелев дифференциал 3-го рода $d\eta$, фигурирующий в (15) и (16), – теперь имеет эффективно вычисляемое представление

$$d\eta^{\mathbf{A}} := d\eta_{-ii} = \sum_{G \in \mathfrak{G}} \{(Gu + i)^{-1} - (Gu - i)^{-1}\} dG(u). \quad (78)$$

4.1.2. *Уравнения клетки* $\mathbb{T}(m_0, \dots, m_g)$.

ЛЕММА 4. Уравнения Абеля (15) эквивалентны следующим соотношениям:

$$E_k(i) = \exp\left(i\pi \frac{\tilde{m}_k}{n}\right), \quad k = 1, \dots, g, \quad (79)$$

где $\tilde{m}_k := m_0 + m_1 + \dots + m_{k-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1°) Из (15) имеем:

$$2\pi i \frac{\tilde{m}_k}{n} = \int_{\mathbf{B}_k} d\eta = \int_{G_k u}^u d\eta_{-ii} \stackrel{(*)}{=} \int_{-i}^i d\eta_{G_k u u} = \int_{-i}^i d\zeta_k \stackrel{(**)}{=} 2 \int_{\infty}^i d\zeta_k, \quad (80)$$

переход (*) – это билинейное соотношение Римана, интегрирование $d\zeta_k$ производится вдоль мнимой оси от $-i$ через ∞ до i ; в (**) мы использовали нечетность $d\zeta_k$ при инволюции. Сокращая равенство (80) на два и потенцируя, приходим к (79).

(2°) Обратное,

$$\exp \int_{\mathbf{B}_k} d\eta \stackrel{(80)}{=} \exp\left(2 \int_{\infty}^i d\zeta_k\right) \stackrel{(79)}{=} \exp\left(2\pi i \frac{\tilde{m}_k}{n}\right).$$

Утверждение леммы следует теперь из неравенства

$$0 < -i \int_{\mathbf{B}_k} d\eta < 2\pi,$$

установленного в лемме 1 для модели (12) при помощи конформного отображения верхней полуплоскости на гребенчатую область ширины 2π . В модели Шоттки выражение $-i \int_{\mathbf{D}_k} d\eta_{-ii}$ имеет смысл удвоенного угла, под которым из точки $u = i$ видно лежащее на действительной оси множество $\mathfrak{D}_k = \mathfrak{D}\{\tilde{\mathbf{D}}_1 \cup \dots \cup \tilde{\mathbf{D}}_k\}$ (см. рис. 3).

4.1.3. “Навигация” в пространстве модулей. Задача “навигации” состоит в том, чтобы из произвольной точки M пространства модулей спуститься на клетку \mathbb{T} , высекаемую системой уравнений (79). На заключительном этапе спуска весьма эффективен метод Ньютона, при котором левая часть уравнений (79) линеаризуется относительно координат $\{c_k, r_k\}_{k=1}^g$ пространства модулей при помощи вариационной теоремы 7. Спуск производится в ближайшую точку g -мерной плоскости, определяемой линейной частью уравнений (79). Если начальная точка M_0 расположена далеко от искомого многообразия, то “навигация” сводится к “дрейфу” в направлении \mathbb{T} , например вдоль траектории специально подобранной динамической системы.

Рассмотрим на пространстве модулей функцию расстояния до фиксированной клетки $\mathbb{T}(m_0, \dots, m_g)$ в системе координат $\{\mu_k, \nu_k\}_{k=1}^g$, порожденной вложением \mathcal{H} в симплекс (30) как многообразия $\{\lambda_k(a, b, c) = 0, k = 1, \dots, g\}$:

$$\Phi(M) := \sum_{k=1}^g \left(\mu_k(M) - 2\pi \frac{\tilde{m}_k}{n} \right)^2. \quad (81)$$

Та же функция в системе координат $\{c_k, r_k\}_{k=1}^g$ имеет выражение

$$\Phi^A(M) := 4 \sum_{k=1}^g \left(\operatorname{Arg} E_k(i) - \pi \frac{\tilde{m}_k}{n} \right)^2 \quad (82)$$

— мы воспользовались (80) и тем, что на мнимой оси $|E_k(u)| = 1$. Эта функция, как и ее дифференциал, равна нулю тогда и только тогда, когда $M \in \mathbb{T}(m_0, \dots, m_g)$. На дополнении к клетке $\mathbb{T}(m_0, \dots, m_g)$ определена динамическая система

$$\frac{dM}{dt} = - \frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|^2}(M), \quad M \in \mathcal{H}(\mathbb{R}; g, 1) \setminus \mathbb{T}, \quad (83)$$

к сожалению, не инвариантная относительно замены координат. Производная Φ вдоль траектории (83) равна -1 , так что из точки M_0 можно достичь требуемого многообразия за время $\Phi(M_0)$. Нельзя, правда, гарантировать, что за еще меньшее время траектория не уйдет на границу пространства модулей. Для ответа на вопрос: *все ли траектории динамической системы (83) в координатах $\{c_k, r_k\}_{k=1}^g$ пересекают клетку $\mathbb{T}(m_0, \dots, m_g)$* , необходимо детальное описание поведения диффеоморфизма $\{c_k, r_k\}_{k=1}^g \leftrightarrow \{\mu_k, \nu_k\}_{k=1}^g$ вблизи границы пространства модулей. Этот вопрос остается открытым.

Оказавшись на \mathbb{T} -многообразии, мы можем двигаться вдоль него — ведь в каждой точке мы можем эффективно вычислять положение касательной плоскости — и таким образом добраться до любой точки многообразия.

4.1.4. Параметрическое представление многочленов Чебышёва. Остается восстановить многочлены Чебышёва, соответствующие точкам многообразия опорных множеств. Начнем с независимой переменной x , которую мы считаем функцией на поверхности $M \in \mathcal{H}(\mathbb{R}; g, 1)$. Рассмотрим элемент второго порядка $x_1 \in \mathbb{C}(M)$, принимающий значения $0, 1, \infty$ при $x = -1, \infty, 1$ соответственно, т.е.

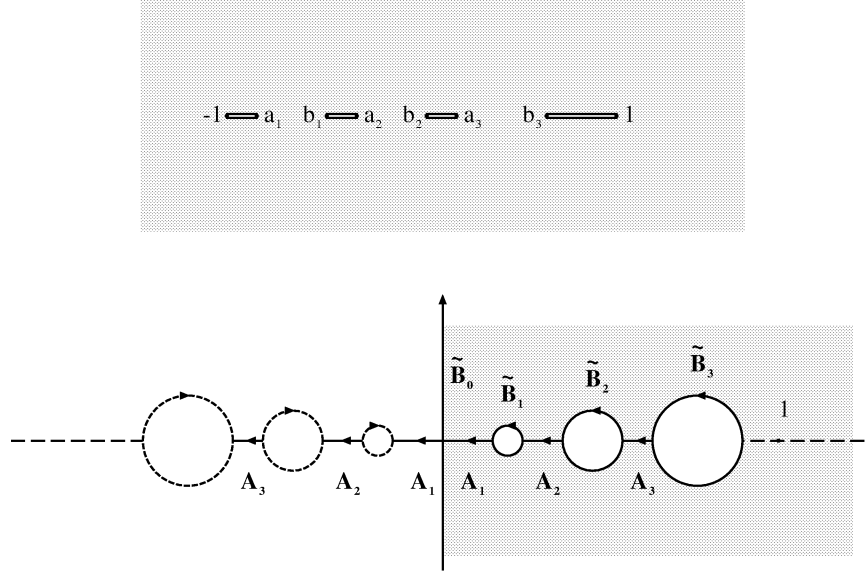
$$x = \frac{x_1 + 1}{x_1 - 1}. \quad (84)$$

Нетрудно понять, что $\frac{dx_1}{x_1}(u) = 2 d\eta_{0\infty}(u)$, откуда

$$x_1(u) = \exp\left(2 \int_i^u d\eta_{0\infty}\right) = (u, i; 0, \infty)^2$$

и $x(u)$ восстанавливается из формул (84), (44). Выражение для T_n следует непосредственно из (16):

$$T_n = \frac{1}{2} [(u, \infty; -i, i)^n + (u, \infty; i, -i)^n].$$


 Рис. 6. Униформизация M с разрезами вдоль $\tilde{\mathbf{B}}$ -циклов

4.2. Униформизация с разрезами $\tilde{\mathbf{B}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{B}}_g$. Проводя униформизацию Шоттки с разрезами вдоль $\tilde{\mathbf{B}}$ -циклов, мы получим более громоздкие формулы.

4.2.1. *Группа Шоттки.* Фиксируем поверхность M вида (11), (12), и расширенную плоскость с разрезами $[-1, a_1], [b_1, a_2], [b_2, a_3], \dots, [b_g, 1]$ при условиях нормировки $\{-1, a_1, \infty\} \rightarrow \{\infty, 0, 1\}$ конформно отобразим на круговую область (см. рис. 6).

Как и в предыдущем случае, эта круговая область порождает симметричную группу Шоттки, что дает нам еще одну систему глобальных вещественно-аналитических координат $\{c_k, r_k\}_{k=1}^g$ на пространстве модулей:

$$0 < c_1 - r_1 < c_1 + r_1 < c_2 - r_2 < c_2 + r_2 < \dots < c_g - r_g < c_g + r_g < 1, \quad (85)$$

разумеется, отличных от (77).

4.2.2. *Уравнения клетки $\mathbb{T}(m_0, \dots, m_g)$.*

ЛЕММА 5. *Уравнения Абеля (15) эквивалентны следующим соотношениям*

$$E_k^{2n}(1) = E_{1k}^{m_1} E_{2k}^{m_2} \dots E_{gk}^{m_g}, \quad k = 1, \dots, g. \quad (86)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. \mathbf{A} -нормированный дифференциал 3-го рода $d\eta$ в рассматриваемой модели имеет вид:

$$d\eta^{\mathbf{B}} := d\eta_{-11} + \sum_{j=1}^g \gamma_j d\zeta_j, \quad (87)$$

где коэффициенты γ_j находятся из решения линейной системы

$$2 \int_{\infty}^1 d\zeta_s + \sum_{j=1}^g \gamma_j \int_{\tilde{\mathbf{A}}_s} d\zeta_j = 0, \quad s = 1, \dots, g. \quad (88)$$

Действительно, \mathbf{A} -нормированность совпадает с $\tilde{\mathbf{A}}$ -нормированностью и

$$\int_{\tilde{\mathbf{A}}_s} d\eta_{-11} = \int_{G_s u}^u d\eta_{-11} = \int_{-1}^1 d\eta_{G_s u u} = \int_{-1}^1 d\zeta_s = 2 \int_{\infty}^1 d\zeta_s.$$

Дифференциал (87), удовлетворяющий уравнениям Абеля, имеет коэффициенты $\gamma_j = m_j/n$, тем самым, мы приходим к форме (17) этих уравнений. Уравнения (88) вещественны, поэтому, потенцируя их, мы приходим к эквивалентным уравнениям (86).

4.2.3. “Навигация” в пространстве модулей. Введенная ранее функция Φ расстояния до вложенной в пространство \mathcal{H} клетки \mathbb{T} в новых координатах (85) имеет вид

$$\Phi^{\mathbf{B}}(M) = (2\pi)^2 \sum_{k=1}^g \left(\sum_{s=k}^g \left(\gamma_s - \frac{m_s}{n} \right) \right)^2, \quad (89)$$

где $\gamma_s(M)$ – решения линейной системы (88). Спускаясь вдоль градиента $\Phi^{\mathbf{B}}$, мы попадаем на многообразии опорных множеств \mathbb{T} (это снова опытный факт!), вдоль которого можно перемещаться.

4.2.4. Восстановление многочлена. Параметрическое представление многочлена Чебышёва $T_n(\cdot, x)$ дается формулами

$$T_n = \frac{1}{2}(V + V^{-1}), \quad (90)$$

$$V(u) := (-1)^n(u, \infty; -1, 1)^n E_1^{m_1}(u) E_2^{m_2}(u) \dots E_g^{m_g}(u),$$

$$x = \frac{x_1 - a_1}{1 - x_1}, \quad x_1(u) = (u, 1; 0, \infty)^2, \quad a_1 = 2x_1(c_g + r_g) - 1. \quad (91)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Условия нормировки, использованные нами в п. 4.2, в некотором смысле несимметричны по отношению к компонентам опорного множества: цикл $\tilde{\mathbf{B}}_0$ имеет выделенное положение. Вместо этого можно использовать нормировку $\{b_s, a_{s+1}, \infty\} \rightarrow \{\infty, 0, 1\}$, тогда формулы (87), (86), (90), (91) незначительно изменятся.

4.3. Графики многочленов Чебышёва. На основе формул этой статьи автором была составлена программа SCHOTTKY, вычисляющая многочлены Чебышёва, наименее отклоняющиеся от нуля на системе отрезков. Входными данными программы являются числа g, m_0, \dots, m_g , задающие клетку \mathbb{T} , начальная точка $\{c_k^0, r_k^0\}_{k=1}^g$ в пространстве модулей (85) и точность ε . Программа осуществляет градиентный спуск в пространстве модулей на многообразии $\mathbb{T}(m_0, \dots, m_g)$ с точностью ε и вычисляет параметрическое представление соответствующего многочлена Чебышёва по формулам (90), (91). На рис. 7 показаны графики нескольких многочленов.

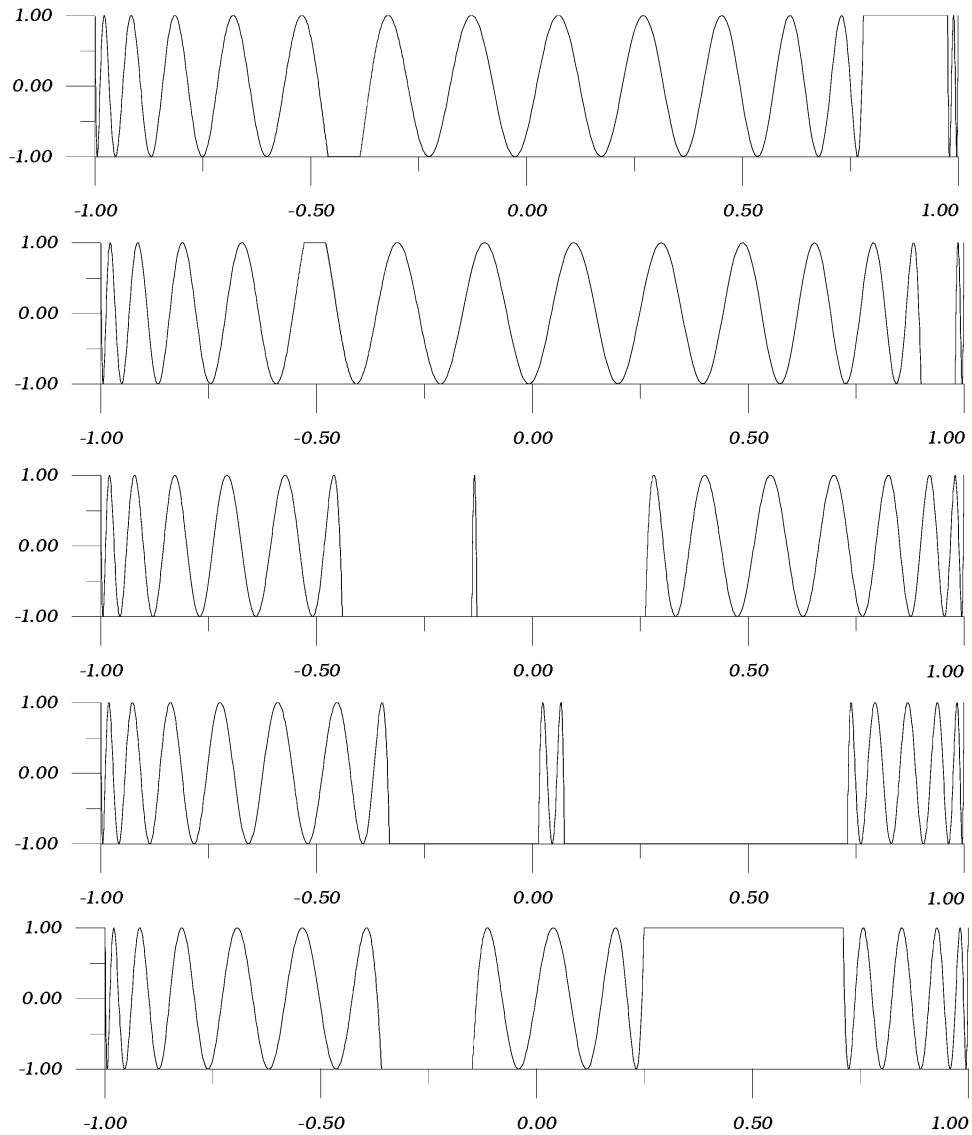


Рис. 7. Многочлены Чебышёва для $g = 2$, $n = 30$ и разбиений $11 + 15 + 4$; $10 + 17 + 3$; $13 + 2 + 15$; $15 + 4 + 11$; $13 + 7 + 10$

Список литературы

1. *Ахиезер Н. И.* Über einige Funktionen welche in zwei gegebenen Intervallen am wenigsten von Null abweichen. I // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1932. Т. 9. С. 1163–1202; II, III // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1933. Т. 4. С. 499–536.
2. *Золотарёв Е. И.* Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее и наиболее отклоняющихся от нуля (1877) // Полное собрание сочинений Е. И. Золотарёва. Т. 2. Л.: Изд-во АН СССР, 1932. С. 1–59.
3. *Золотарёв Е. И.* Об одной задаче наименьших величин (1868) // Полное собрание сочинений Е. И. Золотарёва. Т. 2. Л.: Изд-во АН СССР, 1932. С. 130–166.

4. *Lebedev V. I.* Zolotarev polynomials and extremum problems // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1994. V. 9. №3. P. 231–263.
5. *Лебедев В. И.* Об итерационных методах решения операторных уравнений со спектром, лежащим на нескольких отрезках // Журн. выч. матем. и матем. физ. 1969. Т. 9. №6. С. 1247–1252.
6. *Peherstorfer F., Schiefermayr K.* Description of extremal polynomials on several intervals and their computation. I, II // Acta. Math. Hungar. 1999. V. 83. P. 71–102, 103–128.
7. *Ахиезер Н. И.* Über einige Funktionen die in gegeben Intervallen am wenigsten von Null abweichen // Изв. Казанского физ.-матем. общества. 1928. Т. 3. №3. С. 1–69.
8. *Лукашев А. Л.* Алгебраические дроби Чебышёва–Маркова на нескольких отрезках // Anal. Math. 1998. Т. 24. С. 111–130.
9. *Содин М. Л., Юдицкий П. М.* Функции, наименее уклоняющиеся от нуля на замкнутых подмножествах действительной оси // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4. №2. С. 1–61.
10. *Ахиезер Н. И., Левин Б. Я.* Неравенства для производных, аналогичные неравенству Бернштейна // Докл. АН СССР. 1957. Т. 117. №5. С. 735–738.
11. *Peherstorfer F.* On Bernstein–Szegő orthogonal polynomials on several intervals. II // J. Approx. Theory. 1991. V. 64. P. 123–161.
12. *Богатырёв А. Б.* Многообразия опорных множеств многочленов Чебышёва // Матем. заметки. (в печати).
13. *Ахиезер Н. И.* Об ортогональных многочленах на нескольких интервалах // Докл. АН СССР. 1960. Т. 134. №1. С. 9–12.
14. *Farkas H., Kra I.* Riemann surfaces. New York: Springer-Verlag, 1992.
15. *Peherstorfer F.* Orthogonal and extremal polynomials on several intervals // J. Comput. Appl. Math. 1993. V. 48. P. 187–205.
16. *Крейн М. Г., Левин Б. Я., Нудельман А. А.* Специальные представления многочленов, положительных на системе отрезков, и их приложения // Препринт №28-84. Харьков: Физ.-тех. ин-т низких температур АН УССР, 1984.
17. *Фоменко А. Т., Фукс Д. Б.* Курс гомотопической топологии. М.: Наука, 1989.
18. *Beardon A. F.* The geometry of discrete groups. New York: Springer-Verlag, 1983.
19. *Burnside W.* On a class of automorphic functions // Proc. London Math. Soc. 1891. V. 23. №433. P. 49–88.
20. *Schottky F.* Über eine specielle Function welche bei einer bestimmten linearen Transformation ugeändert bleibt // J. Reine Angew. Math. 1887. V. 101. P. 227–272.
21. *Hejhal D. A.* On Schottky and Teichmüller spaces // Adv. Math. 1975. V. 15. P. 133–156.
22. *Альфорт Л. В.* Комплексно аналитическая структура пространства замкнутых римановых поверхностей // Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения. М.: ИЛ, 1961. С. 51–79.
23. *Берс Л.* Голоморфные дифференциалы как функции модулей // Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения. М.: ИЛ, 1961. С. 99–103.
24. *Шиффер М., Спенсер Д. С.* Функционалы на конечных римановых поверхностях. М.: ИЛ, 1957.
25. *Rauch H. E.* Weierstrass points, branch points and moduli of Riemann surfaces // Comm. Pure Appl. Math. 1959. V. 12. №3. P. 543–560.
26. *Earl C. J.* On variations of projective structures // Riemann surfaces and related topics. Princeton: Princeton Univ. Press, 1980. P. 87–99.
27. *Hejhal D. A.* Sur les paramètres accessoires pour l’uniformization de Schottky // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. 1974. V. 279. P. 713–716.
28. *Кра И.* Автоморфные формы и клейновы группы. М.: Мир, 1975.
29. *Альфорт Л. В.* Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир, 1969.