# О приближении тёплицевых матриц суммой циркулянта и матрицы малого ранга *

Замарашкин Н.Л., Оселедец И.В., Тыртышников Е.Е.

(*119991 Москва, ул.Губкина, 8, ИВМ РАН*)

УДК 591.6 Вычислительная математика

**1. Введение.** Матрица $T = [a_{ij}]_{ij=1}^{n}$ называется тёплицевой, если $a_{ij} = t_{i-j}$. Для решения систем с такими матрицами естественно использовать итерационный метод. Однако для быстрой сходимости необходимо предобусловливание. В [1] было предложено использовать циркулянтные предобусловливатели, ставшие предметом изучения в [2,3] и большом числе других работ. Все известные доказательства быстрой (суперлинейной) сходимости итерационных методов опираются на разложение вида [3]

$$T = C + R + E,$$

где $C$ - циркулянтная матрица, $||E|| \leq \varepsilon$, $R$ — матрица ранга $r = r(\varepsilon, n) \ll n$. Полученные в [3] и некоторых других работах оценки ранга имеют вид $r =$

*) Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 05-01-00721).

$\mathcal{O}(1)$ или $r = o(n)$; при этом, к сожалению, $r \sim \frac{1}{\varepsilon^\alpha}$, $\alpha > 0$. В данной работе доказано, что в типичных случаях (включающих все примеры в работах по построению суперлинейных предобусловливателей) циркулянтную матрицу можно выбрать таким образом, что $r(\varepsilon, n) = \mathcal{O}((\log \varepsilon^{-1} + \log n) \log \varepsilon^{-1})$.

**2. Тёплицевы матрицы с рациональными символами.** Говорят, что матрица $T$ порождена символом $f$, если

$$t_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-itk} dt.$$

**Лемма 1.** *Пусть $T$ — нижнетреугольная тёплицева матрица с первым столбцом $t_k = \alpha\rho^k$. Тогда $T = C + R$, где $C$ — циркулянтная матрица, а $R$ — матрица ранга 1.*

**Доказательство.** В качестве $R$ достаточно взять одноранговую тёплицеву матрицу

$$R = [r_{i-j}], \quad r_k = \frac{\alpha\rho^k}{1 - \frac{1}{\rho^n}}, \quad k = -n+1, \dots, n-1.$$

Напрямую проверяется, что матрица $C = T - R$ циркулянтная.

**Следствие 1.** *Если тёплицева матрица $T$ порождена символом*

$$f(z) = \frac{1}{1 - \rho z}, \quad z = e^{it}, \quad |\rho| \neq 1,$$

*то $T = C + R$, где $C$ — циркулянтная матрица, а $R$ — матрица ранга 1.*

**Лемма 2.** *Пусть $T$ — нижнетреугольная тёплицева матрица с первым столбцом $t_k = k^q$,  $q$ —* натуральное число. *Тогда $T = C + R$, где $C$ — циркулянтная матрица, и при этом* $\mathrm{rank} R \leq q + 2$.

**Доказательство.** В качестве $R$ возьмём тёплицеву матрицу

$$R = [r_{i-j}], \quad r_k = p(k),$$

где $p$ — многочлен степени $q+1$ удовлетворяющий равенству

$$p(k) - p(k-n) = k^q.$$

Очевидно, ранг матрицы $R$ не больше $q+2$, а матрица $C \equiv T - R$ будет циркулянтной в силу того, что

$$c_k - c_{k-n} = t_k - t_{k-n} - r_k - r_{k-n} = 0.$$

**Теорема 1.** *Пусть тёплицева матрица $T$ порождена рациональным тригонометрическим символом*

$$f(z) = P(z) + \frac{Q(z)}{L(z)}, \quad z = e^{it},$$

*где $P, Q, L$ — многочлены, $L$ не имеет корней на единичной окружности, степень $Q$ меньше степени $L$ и они не имеют общих корней. Тогда*

$$T = C + R,$$

*где $C$–циркулянтная матрица, и при этом* $\mathrm{rank}(R) \leq \deg P + \deg L + 1$.

**Доказательство.** Представляем $\frac{Q(z)}{L(z)}$ в виде суммы простых дробей и используем следствие 1.

**2. Тёплицевы матрицы с логарифмическими особенностями символов.**

**Лемма 3.** *Пусть $T$ — нижнетреугольная тёплицева матрица с первым столбцом*

$$t_k = \begin{cases} 0, & k = 0; \\ \rho^k k^{-\alpha}, & k = 1, ..., n-1, \ \ \alpha > 0. \end{cases}$$

*Тогда для любого $\varepsilon$ существуют циркулянтная матрица $C$ и матрица $R$ ранга $r$ такие, что*

$$|(T - C - R)_{ij}| \leq |T_{ij}|\varepsilon,$$

*причJм*

$$r \leq \log \varepsilon^{-1}[c_0 + c_1 \log \varepsilon^{-1} + c_2 \log n],$$

*где $c_0, c_1, c_2$ зависят только от $\alpha$.*

**Доказательство.** Для любого $\varepsilon$ существуют $f_m, w_m$ такие, что [4]

$$|k^{-\alpha} - \sum_{m=1}^{r} w_m e^{-f_m k}| \leq k^{-\alpha}\varepsilon, \qquad r \leq \log \varepsilon^{-1}[c_0 + c_1 \log \varepsilon^{-1} + c_2 \log n].$$

Остается применить лемму 1.

**Следствие 3.** *Пусть тёплицева матрица $T$ порождена символом*

$$f(z) = \log(z - \zeta), \quad z = e^{it}, \quad |\zeta| = 1.$$

*Тогда для любого $\varepsilon$ существуют циркулянтная матрица $C$ и матрица $R$ ранга $r$ такие, что*

$$|(T - C - R)_{ij}| \leq |T_{ij}|\varepsilon,$$

*причJм*

$$r \leq \log \varepsilon^{-1}[c_0 + c_1 \log \varepsilon^{-1} + c_2 \log n].$$

**Следствие 4.** *Пусть тёплицева матрица $T$ порождена символом*

$$f = (z - \zeta)^\alpha \log(z - \zeta), \quad z = e^{ix}, \quad |\zeta| = 1, \quad \alpha \in \mathbb{N}.$$

*Тогда для любого $\varepsilon$ существуют циркулянтная матрица $C$ и матрица $R$ ранга $r$ такие, что*

$$|(T - C - R)_{ij}| \leq |T_{ij}|\varepsilon,$$

*причJм*

$$r \leq \log \varepsilon^{-1}[c_0 + c_1 \log \varepsilon^{-1} + c_2 \log n] + 2\alpha.$$

Результаты данного раздела объединяет следующая

**Теорема 2.** *Пусть тёплицева матрица $T$ порождена кусочно-аналитическим символом вида*

$$f = g + \sum_{\alpha=0}^{l} \sum_{k=0}^{m} A_{k\alpha}(z - \zeta_k)^\alpha \log(z - \zeta_k), \quad z = e^{it}, |\zeta_k| = 1,$$

*где функиця $g$ является аналитической в кольце, содержащем $|z| = 1$. Тогда для любого $\varepsilon$ существуют циркулянтная матрица $C$ и матрица $R$ такие,* *что*

$$|(T - C - R)_{ij}| \le |T_{ij}|\varepsilon,$$

*причJм*

$$\mathrm{rank}(R) \le \log \varepsilon^{-1}[c_0 + c_1 \log \varepsilon^{-1} + c_2 \log n] + c_3,$$

*а* $c_0, c_1, c_2, c_3$ *не зависят от* $n$ *и* $\varepsilon$.

**Список литературы**

1. G. Strang, A proposal for Toeplitz matrix calculations, *Stud. in Appl. Math.*, **84:** 171–176, 1986.

2. R. Chan, Circulant preconditioners for Hermitian Toeplitz systems, *Linear Algebra Appl.*, **10**: 542–550, 1989.

3. E. E. Tyrtyshnikov, A unifying approach to some old and new theorems on distribution and clustering, *Linear Algebra Appl.*, **232**: 1–43, 1996.

4. N. Yarvin, V. Rokhlin, Generalized Gaussian quadratures and singular value decompositions of integral operators, *SIAM J. Sci. Comput.*, **20(2)**: 699–718, 1999.