УДК 512.644

# Модификации методов вычисления интегралов Чебышёва-Лагерра и Гаусса-Лежандра [1]

© 2004 г. Е. Е. Тыртышников

(*119991 Москва, ул.Губкина, 8, ИВМ РАН*)
tee@inm.ras.ru

Поступила в редакцию 19.08.2003 г.
Переработанный вариант 12.12.2003 г.

Предлагаются методы вычисления интегралов Фурье, эффективные при высоких частотах и для функций, аппроксимируемых произведением многочлена и экспоненты. Библ. 4. Табл. 4.

## 1. Введение

Вопрос о практическом вычислении интегралов Фурье

$$C(p) = \int_0^\infty f(x)\cos px\ dx, \quad S(p) = \int_0^\infty f(x)\sin px\ dx \tag{1}$$

или сводящегося к ним интеграла

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{\mathbf{i}px}\ dx$$

в интересующем нас случае, когда

$$f(x) = f_0(x) e^{-p_0 x}, \quad p_0 > 0, \tag{2}$$

а $f_0(x)$ может быть приближена многочленом, является, конечно, классическим [1], а наиболее естественная схема решения, очевидно, такая:

1) найти многочлен $\Pi_{n-1}(x)$ (степени $n-1$), интерполирующий $f_0(x)$ в некоторых (специальным образом выбранных) узлах $x_1, \ldots, x_n$;

2) найти аналитически интегралы

$$C_n(p) = \int_0^\infty \Pi_{n-1}(x)\ e^{-p_0 x}\cos(px)\ dx, \quad S_n(p) = \int_0^\infty \Pi_{n-1}(x)\ e^{-p_0 x}\sin(px)\ dx.$$

[1]) Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 02-01-00590).

При практической реализации данной схемы возникает, однако, серьезное затруднение, связанное с формой записи интерполяционного многочлена. В частности, если явным образом используются коэффициенты многочлена $\Pi_{n-1}(x)$, то схема остается численно устойчивой лишь для малых $n$ (когда интерполяционное приближение еще не дает достаточной точности).

В данной работе предлагается устойчивый метод в случае, когда узлы $x_1, \ldots, x_n$ являются корнями многочленов Лагерра (в [1] эти многочлены называются также многочленами Чебышёва-Лагерра).

Мы предполагаем, что основные вычислительные затраты идут на получение значений функции $f(x)$ (как, например, в квазитрехмерных задачах или при вычислении функций Грина для слоистых сред [2]). На этом фоне арифметические затраты самого метода интегрирования порядка $O(n)$ (в методе Чебышёва-Лагерра) или $O(n^2)$ (в нашем методе) являются незаметными. С учетом этого замечания, непосредственно метод Чебышёва-Лагерра успешно работает при малых $p$, но при больших $p$ он заметно уступает нашему методу. Кроме того, мы рассматриваем задачу вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций на конечном отрезке и предлагаем модификацию метода Гаусса-Лежандра. Выделение конечного отрезка с использованием данной модификации может помочь при вычислении интегралов Фурье; при этом модификация метода Чебышёва-Лагерра применяется к остающемуся бесконечному интервалу.

В разд. 2 мы выводим нужные нам свойства ортогональных многочленов. Несмотря на то, что сами свойства общеизвестны, мы предлагаем простой матричный подход к их изложению (часть фактов в схожем стиле можно найти в [3]). Главным для дальнейших построений является удобное представление интерполяционного многочлена с устойчивым и простым способом получения коэффициентов представления (см. ниже утверждение 2). В разд. 3 предлагается модификация метода Чебышева-Лагерра, а в разд. 4 – аналогичная модификация метода Гаусса-Лежандра. Для получения этих модификаций строятся точные формулы вычисления интегралов от произведения соответствующих ортогональных многочленов и экспоненты.

## 2. Представление интерполяционного многочлена

Пусть $\mathcal{P}$ - линейное пространство многочленов с вещественными коэффициентами от переменной $x$ со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$, определенным произвольным образом, но так, что выполняется следующее свойство:

$$(xu(x), v(x)) = (u(x), xv(x)), \quad u(x), v(x) \in \mathcal{P}, \tag{3}$$

и рассмотрим последовательность ортогональных многочленов $L_n(x)$, $n = 0, 1, \ldots$, в которой $L_n(x)$ имеет степень $n$ и

$$(L_i(x), L_j(x)) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{4}$$

**Утверждение 1.** *Предположения* (3), (4) *гарантируют выполнение трехчленных соотношений*

$$xL_n(x) = \beta_{n-1}L_{n-1}(x) + \alpha_n L_n(x) + \beta_n L_{n+1}(x), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{5}$$

*где*

$$\beta_0 = 0; \qquad \beta_n \neq 0,\ n > 0.$$

**Доказательство.** Запишем

$$xL_n(x) = s_{n0}L_0(x) + \ldots + s_{nn}L_n(x) + s_{n\ n+1}L_{n+1}(x).$$

Тогда

$$s_{nj} = (xL_n(x), L_j) = (L_n(x), xL_j(x)) = 0 \quad \text{при} \quad j \leq n-2.$$

Положим $\alpha_n = s_{nn}$, $\beta_n = s_{n\ n+1} = (xL_n(x), L_{n+1}(x))$. Тогда, согласно (3), получаем $s_{n\ n-1} = \beta_{n-1}$ и в итоге (5).

**Следствие 1.** Выполняется соотношение

$$x\begin{bmatrix} L_0(x) \\ L_1(x) \\ \ldots \\ L_{n-2}(x) \\ L_{n-1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \beta_{n-2} & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ & & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_0(x) \\ L_1(x) \\ \ldots \\ L_{n-2}(x) \\ L_{n-1}(x) \end{bmatrix} + \beta_n L_n(x) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

**Следствие 2.** Многочлен $L_n(x)$ имеет $n$ простых корней $x_1, \ldots, x_n$, совпадающих с собственными значениями симметричной трехдиагональной матрицы из (6). Векторы $[L_0(x_j), \ldots, L_{n-1}(x_j)]^T$, $j = 1, 2, \ldots, n$, являются соответствующими собственными векторами.

**Следствие 3.** Матрица

$$Q_n = \begin{bmatrix} L_0(x_1) & \ldots & L_{n-1}(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ L_0(x_n) & \ldots & L_{n-1}(x_n) \end{bmatrix}$$

имеет ортогональные строки, а матрица $D_n^{-1}Q_n$, где

$$D_n = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix}, \qquad d_j^2 = L_0^2(x_j) + \ldots + L_{n-1}^2(x_j), \quad (7)$$

является ортогональной.

Данное утверждение вытекает из ортогональности системы собственных векторов симметричной матрицы для попарно различных собственных значений.

Главной целью этого раздела является следующее

**Утверждение 2.** *Многочлен $\Pi_{n-1}(x)$, интерполирующий значения $f_1, \ldots, f_n$ в узлах $x_1, \ldots, x_n$, допускает представление*

$$\Pi_{n-1}(x) = \gamma_1 L_0(x) + \ldots + \gamma_n L_{n-1}(x), \quad (8)$$

*где*

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \dots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = Q_n^\top D_n^{-2} \begin{bmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix}. \qquad (9)$$

**Доказательство.** Поскольку $(D_n^{-1}Q_n)^{-1} = (D_n^{-1}Q_n)^\top = Q_n^\top D_n^{-1}$, находим

$$Q_n^{-1} = Q_n^\top D_n^{-2},$$

откуда и вытекает соотношение (9).

Преимущество записи интерполяционного многочлена в виде (8) заключается в том, что коэффициенты $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ определяются устойчивым образом (умножением на диагональную и ортогональную матрицы). В силу Утверждения 2, для вычисления этих коэффициентов достаточно $O(n^2)$ операций.

**Замечание.** Для умножения на $Q_n$ существуют и более быстрые алгоритмы (сложности $O(n\log^2 n)$ или даже $O(n\log n)$ в специальных случаях), но их численная устойчивость, вообще говоря, требует изучения.

Из наших построений легко получить также следующее утверждение (в наших модификациях методов вычисления интегралов оно прямым образом не используется, но дает возможность легко переключиться на квадратуры типа Гаусса).

**Утверждение 3.** *Для любого многочлена $f(x)$ степени $k \le 2n-1$ выполняется соотношение*

$$(f(x), 1) = w_1 f(x_1) + \ldots + w_n f(x_n), \qquad w_j = d_j^{-2}. \qquad (10)$$

**Доказательство.** Рассмотрим деление с остатком

$$f(x) = q_{n-1}(x) L_n(x) + r_{n-1}(x),$$

где $q_{n-1}(x)$ и $r_{n-1}(x)$ - многочлены степени не выше $n-1$. Последовательно применяя (3), находим

$$(q_{n-1}(x)L_n(x), 1) = (q_{n-1}(x), L_n(x)) = 0.$$

Следовательно, $(f(x), 1) = (r_{n-1}, 1)$. Учитывая,что $f(x_i) = r_{n-1}(x_i)$, остается доказать (10) в случае, когда $f(x)$ – многочлен степени $n-1$. Но тогда, согласно утверждению 2,

$$f(x) = \gamma_1 L_0(x) + \ldots + \gamma_n L_{n-1}(x),$$

и, в силу ортогональности многочленов, $(f(x), 1) = \gamma_1(L_0(x), 1)$. Далее, согласно (9) и поскольку $L_0(x_1) = \ldots = L_0(x_n)$,

$$\gamma_1 = L_0(x_1) w_1 f(x_1) + \ldots + L_0(x_n) w_n f(x_n) = (w_1 f(x_1) + \ldots + w_n f(x_n)) L_0(x_j).$$

Очевидно,

$$L_0(x_j)(L_0(x), 1) = (L_0(x), L_0(x)) = 1.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \gamma_1(L_0(x), 1) &= (w_1 f(x_1) + \ldots + w_n f(x_n)) L_0(x_j)(L_0(x), 1) = \\ & w_1 f(x_1) + \ldots + w_n f(x_n), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Соотношение (10) может рассматриваться как формальная квадратура с $n$ узлами максимального алгебраического порядка точности (она точна для многочленов степени $2n-1$ и не точна, например, для многочлена $L_n^2(x)$).

## 3. Модификация метода Чебышёва-Лагерра

Пусть скалярное произведение в $\mathcal{P}$ определяется формулой

$$(u(x), v(x)) = \int_0^\infty u(x)v(x)e^{-x}\ dx, \qquad u(x), v(x) \in \mathcal{P}.$$

В этом случае соответствующие ортогональные многочлены $L_n(x)$ называются многочленами Лагерра. Метод Чебышёва-Лагерра – это, в частности, квадратурная формула вида

$$\int_0^\infty f(x)e^{-x}\ dx = w_1 f(x_1) + \ldots + w_n f(x_n), \tag{11}$$

где $x_1, \ldots, x_n$ – корни многочлена $L_n(x)$, а весовые коэффициенты $w_j$ определяются согласно (7), (10). В силу утверждения 3, формула (11) точна для многочленов степени $2n-1$.

**Утверждение 4.** *Для любого комплексного $q \neq 0$ имеет место формула*

$$\int_0^\infty L_n(x)e^{-qx}\ dx = \frac{(1/q-1)^n}{q}.$$

**Доказательство.** Известно (см. [1]), что

$$L_n(x) = \frac{1}{n!}\left(x^n - \frac{n^2}{1!}x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-2} - \ldots + (-1)^n n!\right).$$

Прямое вычисление дает

$$\int_0^\infty x^n e^{-qx}\ dx = \frac{n!}{q^{n+1}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty L_n(x)e^{-qx}\ dx \ &= \ \frac{1}{n!}\left(\frac{n!}{q^{n+1}} - \frac{n^2(n-1)!}{1!q^n} + \frac{n^2(n-1)^2(n-2)!}{2!q^{n-1}} - \ldots + (-1)^n\frac{n!}{q}\right) = \\ &\frac{1}{q}\left(\frac{1}{q^n} - \frac{n}{1!q^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{2!q^{n-2}} - \ldots + (-1)^n\right) = \frac{(1/q-1)^n}{q}.\end{aligned}$$

Наша модификация метода Чебышёва-Лагерра для вычисления интегралов (1), (2) опирается на утверждение 4 и заключается в следующем.

**Подготовительный этап.** Знать $p_0$ или $p$ на этом этапе не требуется. Для инициализации метода нужно найти узлы $x_1, \ldots, x_n$ и весовые коэффициенты $w_j = d_j^{-2}$ формулы Чебышева-Лагерра и получить матрицу $Q_n = [a_{ij}]_{ij=1}^n$ (см. разд. 2). Используя трехчленные рекуррентные соотношения для многочленов Лагерра

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = x - 1,$$

$$L_{n+1}(x) = \left(\frac{1}{n}x - \left(2 - \frac{1}{n}\right)\right) L_n(x) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) L_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

получаем такой алгоритм:

$$a_{i1} = 1, \quad a_{i2} = x_i - 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, n;$$

$$a_{i,j+1} = \left(\frac{1}{j}x_i - 2 + \frac{1}{j}\right) a_{ij} - \left(1 - \frac{1}{j}\right) a_{i,j-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 2, 3, \ldots, n-1.$$

Заметим, что $Q_n$ можно получить также иным способом – через собственные векторы симметричной трехдиагональной матрицы из соотношения (6).

**Основной этап.** Пусть заданы $p_0$ и $p$. Чтобы найти приближенные значения интегралов Фурье

$$C_n(p) \approx C(p), \quad S_n(p) \approx S(p)$$

нужно выполнить такие действия:

1) вычислить значения $f_1 = f(x_1)e^{p_0 x_1}$, …, $f_n = f(x_n)e^{p_0 x_n}$;

2) найти величины $\gamma_1$, …, $\gamma_n$:

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \cdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = Q_n^\top \begin{bmatrix} w_1 f_1 \\ \cdots \\ w_n f_n \end{bmatrix};$$

3) получить приближенные значения интегралов:

$$q = p_0 - \mathbf{i}p, \quad z = 1/q - 1,$$

$$C_n(p) = \gamma_1 \mathrm{Re}(1/q) + \gamma_2 \mathrm{Re}(z/q) + \ldots + \gamma_n \mathrm{Re}(z^{n-1}/q),$$
$$S_n(p) = \gamma_1 \mathrm{Im}(1/q) + \gamma_2 \mathrm{Im}(z/q) + \ldots + \gamma_n \mathrm{Im}(z^{n-1}/q).$$

Символы Re и Im обозначают вещественную и мнимую части комплексного числа.

Для численной устойчивости достаточно выполнение условия $|z| \leq 1$, которое эквивалентно условию $p_0 \geq 1/2$.

Приведем численные примеры для функции

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3)e^{-x}.$$

При выборе $p_0 = 1$ наш метод дает точное значение для $C(p)$ и $S(p)$ при любых $p$ для всех $n \geq 4$. В табл. 1 наш метод сравнивается с методом Чебышева-Лагерра при $p_0 = 1$ для значений $p = 4$ и $p = 10$.

**Таблица 1.**

| Метод | $n$ | $C(4)$ | $C(10)$ |
|---|---|---|---|
| Точные значения | | -0.000646543983... | 0.000157696875... |
| Метод данной статьи | 4 | -0.000646543983... | 0.000157696875... |
| Метод Чебышёва-Лагерра | 80 | -0.00067... | 0.09... |
| | 100 | -0.000642... | -3.4... |
| | 150 | -0.000646544... | -0.9... |

На практике точное значение показателя экспоненты может быть неизвестно. Результаты для той же функции $f(x)$ при выборе $p_0 = 0.5$ приведены в табл. 2.

**Таблица 2.**

| Метод | $n$ | $C(4)$ | $C(10)$ |
|---|---|---|---|
| Точные значения | | -0.000646543983... | 0.000157696875... |
| Метод данной статьи | 4 | -0.08... | -0.01... |
| | 20 | -0.0006476... | 0.000158... |
| | 30 | -0.00064654390... | 0.000157696878... |
| | 40 | -0.000646543983... | 0.000157696875... |

Если условие $p_0 \geq 1/2$ не выполнено, то предложенный нами метод можно применять лишь при $n \leq N$, где $N$ зависит от особенностей арифметики на конкретном компьютере. В табл. 3 демонстрируется неустойчивость нашего метода при выборе $p_0 = 0.1$ и $p = 0.75$ (в этом случае $60 \leq N < 80$).

**Таблица 3.**

| Метод | $n$ | $C(0.75)$ |
|---|---|---|
| Точное значение | | -1.61349632... |
| Метод данной статьи | 30 | -1.70... |
| | 60 | -1.61336... |
| | 80 | 2.28... |
| | 100 | 1482.7... |
| Метод Чебышёва-Лагерра | 10 | -1.61346... |
| | 30 | -1.61349632... |

## 4. Модификация метода Гаусса-Лежандра

Если скалярное произведение в $\mathcal{P}$ определяется формулой

$$(u(x), v(x)) = \int_{-1}^{1} u(x)v(x)\ dx, \qquad u(x), v(x) \in \mathcal{P},$$

то соответствующие ортогональные многочлены $L_n(x)$ называются многочленами Лежандра. Квадратурная формула Гаусса-Лежандра вида (10) использует корни $L_n(x)$ и точна для многочленов степени $2n-1$.

Покажем, как многочлены Лежандра можно использовать для вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций вида

$$A(p) = \int_{-1}^{1} f(x)\cos(px)\ dx, \quad B(p) = \int_{-1}^{1} f(x)\sin(px)\ dx. \tag{12}$$

**Утверждение 5.** *Пусть $q \neq 0$. Тогда для величин вида*

$$\Phi_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \int_{-1}^{1} L_n(x)e^{-qx}\ dx,$$

*имеют место рекуррентые соотношения*

$$\Phi_{n+1} = \frac{2n+1}{q}\Phi_n + \Phi_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{13}$$

**Доказательство.** Для многочленов

$$T_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} L_n(x)$$

известно (см. [4]), что

$$T'_{n+1}(x) = (2n+1)T_n(x) + T'_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Учитывая также, что $T_n(1) = 1$ и $T_n(-1) = (-1)^n$, отсюда получаем

$$\begin{aligned}
\Phi_{n+1} \;&=\; \int_{-1}^{1} T_{n+1}(x)e^{-qx}\ dx = -\frac{e^{-qx}}{q}T_{n+1}(x)\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{q}\int_{-1}^{1} e^{-qx}T'_{n+1}(x)\ dx = \\
& -\frac{e^{-qx}}{q}T_{n+1}(x)\Big|_{-1}^{1} + \frac{2n+1}{q}\int_{-1}^{1} T_n(x)e^{-qx}\ dx + \frac{1}{q}\int_{-1}^{1} e^{-qx}T'_{n-1}(x)\ dx = \\
& -\frac{e^{-qx}}{q}T_{n+1}(x)\Big|_{-1}^{1} + \frac{2n+1}{q}\Phi_n + \frac{e^{-qx}}{q}T_{n-1}(x)\Big|_{-1}^{1} + \Phi_{n-1} = \frac{2n+1}{q}\Phi_n + \Phi_{n-1}.
\end{aligned}$$

Метод вычисления интегралов (12) легко получается (по аналогии с вычислением интегралов Фурье в разделе 3) на основе записи интерполяционного многочлена в виде (8) и формул (13). Однако, несмотря на то что

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n \;=\; 0,$$

прямое вычисление по формулам (13) является численно неустойчивым. Чтобы получить устойчивый алгоритм вычисления значений $\Phi_0, \ldots, \Phi_n$, возьмем достаточно большое $N > n$, положим

$$a_j = \frac{2j+1}{q}, \quad j = 1, \ldots\ N,$$

и запишем соотношения (13) в матрично-векторном виде:

$$\begin{bmatrix} a_1 & -1 & & & \\ 1 & a_2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & a_{N-1} & -1 \\ & & & 1 & a_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \ldots \\ \Phi_{N-1} \\ \Phi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Phi_0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ \Phi_{N+1} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -\Phi_0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Очевидная вариация метода прогонки (исключения элементов) позволяет получить следующее разложение:

$$\begin{bmatrix} a_1 & -1 & & & \\ 1 & a_2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & a_{n-1} & -1 \\ & & & 1 & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_1 & & & \\ & 1 & -\beta_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -\beta_{n-1} \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & & \\ 1 & \alpha_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & \alpha_{n-1} & \\ & & & 1 & \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Расчетные формулы имеют вид

$$\begin{gathered} \alpha_n = a_n; \quad \beta_j = \frac{1}{\alpha_{j+1}}, \quad \alpha_j = a_j + \beta_j, \qquad j = n-1, n-2, \ldots, 1. \\ \Phi_j = -\Phi_{j-1}/\alpha_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \end{gathered} \tag{14}$$

В отличие от исходных трехчленных соотношений (13), вычисления по формулам (14) оказываются численно устойчивыми и позволяют найти $\Phi_0, \ldots, \Phi_n$ с нужной точностью при подходящем выборе $N > n$. В наших тестовых расчетах хорошие результаты получались при $N \geq n + |p| + 10$.

На предварительном этапе стандартным образом вычисляются узлы $x_1, \ldots, x_n$ (как собственные значения трехдиагональной матрицы из формулы (6)) и весовые коэффициенты $w_j = d_j^{-2}$ формулы Гаусса-Лежандра. Матрица $Q_n = [a_{ij}]_{ij=1}^{n}$ в случае многочленов Лежандра вычисляется следующим образом:

$$a_{ij} = \tilde{a}_{ij}\sqrt{\frac{2j-1}{j}}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

где

$$\tilde{a}_{i1} = 1, \quad \tilde{a}_{i2} = x_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n;$$

$$\tilde{a}_{i,j+1} = \frac{2j-1}{j} x_i \tilde{a}_{ij} - \frac{j-1}{j} \tilde{a}_{i,j-1}, \quad j = 2, 3, \ldots, n-1, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

В более общем случае вычисления интегралов

$$\mathcal{A}(p) = \int\limits_a^b f(x)\cos(px)\ dx, \quad \mathcal{B}(p) = \int\limits_a^b f(x)\sin(px)\ dx \tag{15}$$

замена

$$x = s + ht, \quad s = \frac{a+b}{2}, \quad h = \frac{b-a}{2},$$

позволяет свести задачу к вычислению интегралов $A(hp)$ и $B(hp)$ вида (12).

В табл. 4 приведены некоторые численные результаты при выборе $p_0 = 0$ в случае $a = 0$, $b = 40$, $p = 10$ для функции $f(x) = (1 + x + x^2 + x^3)e^{-x}$.

**Таблица 4.**

| Метод | $n$ | $\mathcal{A}(10)$ |
|---|---|---|
| Точное значение | | 0.000157696875... |
| Метод данной статьи | 30 | 0.000158... |
| | 40 | 0.000157696872... |
| | 100 | 0.000157696874... |
| | 120 | 0.000157696874... |
| Метод Гаусса-Лежандра | 30 | -4.8... |
| | 40 | -0.2... |
| | 100 | 0.00187... |
| | 120 | 0.00015769688... |

Автор выражает благодарность анонимному рецензенту за полезные замечания в целом и особенно за предложение использовать прогонку для устойчивой реализации рекуррентных соотношений (13).

# Список литературы

[1] Крылов В. И., *Приближенное вычисление интегралов.* М.: Наука,1967.

[2] Дмитриев В. И., Захаров Е. В., *Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики.* М.: Изд-во МГУ, 1987.

[3] Тыртышников Е. Е., *Краткий курс численного анализа.* М.: ВИНИТИ, 1994.

[4] Никифоров А. Ф., Уваров В. Б., *Специальные функции математической физики.* М.: Наука, 1978.