Институт вычислительной математики РАН
Московский физико-технический институт
(государственный университет)

В.П. Дымников

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИКИ ДВУМЕРНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Курс лекций

Москва 2004

УДК 551.513
ББК 22.162
Д38

Дымников В.П.

Избранные главы теории устойчивости динамики двумерной несжимаемой жидкости / Курс лекций. – М.: ИВМ РАН, 2004. – 140 с. – ISBN 5-901854-07-1

Предлагаемый курс лекций посвящён исследованию устойчивости динамики двумерной несжимаемой жидкости. Кроме традиционных, ставших уже классическими, методов исследования устойчивости решений уравнений, описывающих динамику идеальной и вязкой несжимаемой жидкости, в курсе рассматриваются новые подходы и методы, связанные с исследованием устойчивости аттракторов соответствующих диссипативных систем, в том числе и хаотических аттракторов.

Рассматриваются также некоторые вычислительные проблемы, возникающие при практическом исследовании устойчивости как стационарных (проблема на собственные значения), так и нестационарных (проблема вычисления показателей Ляпунова) решений.

Курс предназначен для студентов и аспирантов, специализирующихся в области геофизической гидродинамики и математического моделирования крупномасштабных атмосферных процессов.

Печатается по решению Ученого совета
Института вычислительной математики
Российской академии наук.

Рекомендован кафедрой математического моделирования
физических процессов Московского физико-технического
института для использования в учебном процессе.

ISBN 5-901854-07-1

© ИВМ РАН, 2004
© В.П. Дымников, 2004

Оглавление

Введение

Предлагаемый курс является составной частью цикла курсов лекций, направленных на подготовку специалистов по моделированию общей циркуляции атмосферы и океана, климата и его изменений на кафедре математического моделирования физических процессов Московского физико-технического института. Само название курса уже говорит о том, что он не претендует на полное изложение результатов, полученных в данной области. Цель курса другая. Используя в качестве основы наиболее простую модель геофизической гидродинамики – двумерную жидкость на вращающейся сфере, автор хотел дать представление о новых подходах и понятиях, возникших при изучении устойчивости динамики жидкостей, непосредственно связанных с исследованием устойчивости климата и предсказуемости его изменений. Если под климатом понимать ансамбль состояний, проходящих климатической системой за достаточно большой (в пределе – бесконечный) промежуток времени, и предположить, что модель климатической системы обладает глобальным аттрактором, то задача сводится к исследованию устойчивости аттрактора как множества и устойчивости инвариантной меры, порождаемой динамикой системы на её аттракторе. Поскольку рассматриваемые в теории климата аттракторы климатических моделей имеют, как правило, хаотическую динамику, связанную с неустойчивыми по Ляпунову траекториями на аттракторе, то естественно, прежде чем переходить к исследованию устойчивости аттракторов, рассмотреть проблемы устойчивости решений гидродинамических уравнений, в частности стационарных решений, поскольку все стационарные решения принадлежат глобальному аттрактору.

Исходя из этих соображений, курс построен таким образом, что в первых лекциях обсуждаются главным образом классические результаты исследования устойчивости решений идеальной жидкости. Хотя конечная цель – это исследование вязкой жидкости, изложение результатов исследования устойчивости идеальной жидкости представляется совершенно необходимым, особенно если принимать во внимание необходимость построения конечномерных аппроксимаций исходных уравнений для решения конкретных прикладных задач.

При изучении этой проблемы центральное направление, избранное в данном курсе, связано с изучением системы интегральных инвариантов, ограничивающих как класс возможных решений исходных нелинейных задач, так и класс решений уравнений в вариациях.

По мнению автора, важным аспектом является рассмотрение симметрий глобальных и локальных показателей Ляпунова, поскольку сами показатели в диссипативных системах являются важными параметрами, определяющими размерность глобальных аттракторов и характер динамики на них. С физической точки зрения интересна связь показателей с "понятными" интегральными характеристиками траекторий системы типа энстрофии и энергии.

В заключение курса мы рассмотрим некоторые вычислительные проблемы, возникающие при практическом исследовании устойчивости как стационарных решений через решение проблемы на собственные значения, так и нестационарных, через вычисление локальных и глобальных показателей Ляпунова. Предполагается при этом, что студенты уже знакомы с классическими результатами теории устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, изложенными, например, в курсе лекций А.Н. Филатова "Теория устойчивости" [4]. Тем не менее, нам кажется целесообразным дать основные определения устойчивости, в рамках которых будет проводиться исследование конкретных решений.

1. Устойчивость по Ляпунову. Пусть задана система уравнений
$$\frac{dy}{dt} = Y(t, y). \tag{1}$$
Система может быть как конечномерной, так и бесконечномерной. Пусть $y = \varphi(t)$ есть частное решение этой системы.

Решение $\varphi(t)$ будем называть устойчивым по Ляпунову, если для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in [0, \infty]$ можно указать $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ такое, что если
$$\|y_0 - \varphi(t_0)\| < \delta(\varepsilon, t_0),$$
то $\|y(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$ для всех $t \geq t_0$.

2. Устойчивость при постоянно действующих возмущениях. Пусть наряду с системой (1) имеется задача системы
$$\frac{dy}{dt} = Y(t, y) + R(t, y).$$

Решение $\varphi(t), t \geq 0$, системы (1) называется устойчивым при постоянно действующих возмущениях $R(t, y)$, если для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in [0, \infty]$ существуют числа $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon, t_0)$ и $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon, t_0)$ такие, что если
$$\|R(t, y)\| < \delta_1, \quad \|y(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta_2,$$
то для всех $t \geq t_0$ будет выполняться неравенство
$$\|y(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon.$$

Мы специально при формулировании этих определений не оговаривали пространства, которым принадлежат решения $y(t)$. В каждом конкретном случае эти пространства будут оговариваться специально, особенно в случае бесконечномерных пространств, в которых нормы неэквивалентны.

Поскольку в данном курсе излагается много результатов, являющихся недостаточно известными широкому кругу исследователей, занимающихся изучением динамики атмосферы и океана, представляется, что он будет интересным и для этого круга читателей.

Лекция 1

Уравнения динамики двумерной идеальной несжимаемой жидкости. Интегральные инварианты

В качестве основной задачи в данной лекции будем рассматривать уравнение двумерной несжимаемой жидкости. Для простоты динамику двумерной несжимаемой жидкости (в данной лекции – идеальной) рассмотрим в периодическом канале с условием непротекания на границах канала. В инвариантной форме уравнения двумерной идеальной несжимаемой жидкости имеют вид

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0.$$

В декартовой системе координат система уравнений будет иметь вид

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

Здесь u, v – компоненты скорости, $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}$ – индивидуальная производная, $\rho_0 = \text{const}$ – постоянная плотность, p – давление.

Граничные условия

$$u, v, p(x, y, t) = u, v, p(x + L_x, y, t)$$

(условие периодичности по x), $v = 0$ при $y = y_1, y_2$.

Так как жидкость баротропна, то на замкнутых границах можно выписать условие сохранения циркуляции

$$\int\limits_{L_1} udx = C_1, \quad \int\limits_{L_2} udx = C_2. \tag{2}$$

Условие несжимаемости (третье уравнение системы (1)) позволяет ввести функцию тока:

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{3}$$

при этом в предположении гладкости u и v уравнение несжимаемости будет удовлетворяться тождественно.

Поскольку жидкость двумерна, то мы имеем только одну (вертикальную) компоненту завихренности

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Используя (3), получим

$$\omega = \Delta \psi. \tag{4}$$

Нетрудно проверить, что уравнение для ω будет иметь вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u\frac{\partial \omega}{\partial x} + v\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0, \tag{5}$$

или

$$\frac{d\omega}{dt} = 0.$$

Уравнение (5) означает, что ω есть лагранжев инвариант. Лагранжевым инвариантом будет и любая гладкая функция от $\omega \to F(\omega)$

$$\frac{dF(\omega)}{dt} = 0,$$

или

$$\frac{\partial F(\omega)}{\partial t} + u\frac{\partial F(\omega)}{\partial x} + v\frac{\partial F(\omega)}{\partial y} = 0. \tag{6}$$

В силу условия бездивергентности потока уравнение (6) может быть записано в так называемой дивергентной форме:

$$\frac{\partial F(\omega)}{\partial t} + \frac{\partial F(\omega)u}{\partial x} + \frac{\partial F(\omega)v}{\partial y} = 0. \tag{7}$$

Интегрируя (7) по всей области (каналу) D и используя граничные условия, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_D F(\omega)dD = 0. \tag{8}$$

Соотношение (8) означает, что для системы (6) существует бесконечное множество интегральных инвариантов.

Умножая первое уравнение системы (1) на u, второе на v и складывая, получим уравнение сохранения энергии

$$\frac{\partial E}{\partial t} = 0, \tag{9}$$

где $E = \iint\limits_D \frac{u^2+v^2}{2} dD$.

Пусть $\psi, u, v, \omega \in \Phi$, где Φ – некоторое гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(\eta, \psi) = \iint\limits_D \eta\psi dD.$$

Тогда, используя представление (3), уравнение для ω можно записать в виде

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + J(\psi, \Delta\psi) = 0,$$

где

$$J(\psi, \eta) = \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x},$$

а интегральные соотношения (8) и (9) в виде

$$(F(\Delta\psi), 1) = C_3, \quad -(\Delta\psi, \psi) = C_4.$$

Действительно, поскольку

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad u^2 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2, \quad v^2 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2,$$

то $$\iint \Delta\psi\psi dD = \iint \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\psi dxdy + \iint \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\psi dxdy =$$

$$= -\iint \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} dxdy + \iint \frac{\partial}{\partial y}\left(\psi \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) dxdy -$$

$$-\iint \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} dxdy = -\iint (u^2 + v^2) dxdy + \int\limits_x \left(\psi \frac{\partial \psi}{\partial y}\right)\Bigg|_{y=y_1}^{y=y_2} dx.$$

В силу краевых условий: ψ на границе есть константа, $\int\limits_x \frac{\partial \psi}{\partial y}|_{y=y_1,y_2} dx$ есть также константа – последний интеграл не зависит от времени и, таким образом, наше представление энергии верно.

Получим несколько свойств якобиана, выполняющихся при заданных краевых условиях:

1) $J(\psi, \psi) = 0$, это свойство выполняется тождественно;

2) $J(\psi, \eta) = -J(\eta, \psi)$ – свойство кососимметричности;

3) $\iint J(\psi,\omega)\psi dD = 0$ – свойство ортогональности;

4) $\iint J(\psi,\omega)\omega dD = 0$ – свойство ортогональности

Первые два свойства очевидны. Третье соотношение следует из закона сохранения энергии, четвертое – из закона сохранения квадрата вихря (энстрофии). Действительно,

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + J(\psi,\omega) = 0.$$

Умножая это уравнение скалярно на ω, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{(\omega,\omega)}{2} + (J(\psi,\omega),\omega) = 0.$$

Можно выписать еще законы сохранения импульса в терминах ω. Например:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega, y) = 0.$$

Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega, y) = \frac{\partial}{\partial t}\iint\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) y dD =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\iint -\frac{\partial u}{\partial y} y dD = \frac{\partial}{\partial t}\iint \frac{\partial vy}{\partial x} dD = 0.$$

Итак, мы имеем бесконечный набор законов сохранения, которые должны быть связаны с определёнными симметриями исходной системы уравнений. Возникает фундаментальный вопрос: в какой степени эти законы сохранения определяют поведение решения исходной задачи, и в частности его устойчивость? Для ответа на этот вопрос мы должны сначала понять, с какими видами симметрии связан наш набор законов сохранения.

Мы знаем, что закон сохранения энергии определяется инвариантностью относительно сдвигов по времени, импульса – однородностью пространства, момента импульса –

изотропностью пространства. Понимание, что бесконечное количество инвариантов в баротропной жидкости связано с "вмороженностью" вихря в частицу, то есть с вихрем как лагранжевым инвариантом, кажется очевидным, однако соответствующая группа симметрий совершенно не очевидна. Недавно стало понятным, что эти инварианты связаны с инвариантностью системы относительно перестановок лагранжевых частиц в начальный момент времени, то есть эти инварианты не несут в себе какой-то физической "нагрузки".

Тем не менее само свойство "вмороженности" вихря в частицу даёт возможность получить дополнительные ограничения на поведение жидкости в канале, и в частности, получить конкретные условия устойчивости двумерных потоков. Для понимания этого рассмотрим два квадратических инварианта: энергию и энстрофию (с точностью до множителя 1/2):

$$E = -(\psi, \Delta\psi), \quad \Omega = (\Delta\psi, \Delta\psi).$$

Рассмотрим далее проблему на собственные значения для оператора Лапласа

$$\Delta\psi_i = -\lambda_i \psi_i \tag{10}$$

с краевым условием периодичности по x и условиями $\psi_i = 0$ при $y = y_1, y_2$. Решение нашей исходной задачи удовлетворяет краевым условиям

$$\psi_{y=y_1} = C_1, \quad \psi_{y=y_2} = C_2.$$

C_1 мы можем положить равным нулю, не снижая общности, так как функция ψ определена в задаче с точностью до константы. Константа C_2 определяет интегральный расход

$$\int\int u dx dy = \int\int \frac{\partial\psi}{\partial y} dx dy = -\int\limits_x \psi_{y=y_2} dx = -C_2 L_x.$$

Для простоты будем рассматривать потоки с интегральным расходом, равным нулю, чтобы иметь возможность рассматривать спектральную задачу (10) как порождающую полную систему $\{\psi_i\}$ для представления ψ в виде ряда

$$\psi = \sum \alpha_i \psi_i.$$

(В противном случае мы должны в качестве второго краевого условия принять $\frac{\partial\psi}{\partial x}|_{y=y_2} = 0$.)

Поскольку все λ_i в нашем случае неотрицательны, а ψ_i ортогональны, то мы имеем представление

$$E = \sum \lambda_i \alpha_i^2, \quad \Omega = \sum \lambda_i^2 \alpha_i^2.$$

Так как E и Ω – инварианты, то инвариантом будет и величина

$$\bar{\lambda} = \frac{\Omega}{E} = \frac{\sum \lambda_i^2 \alpha_i^2}{\sum \lambda_i \alpha_i^2}.$$

Обозначим через E_i величину $\lambda_i \alpha_i^2$. Очевидно, что E_i есть энергия, приходящаяся на подпространство, натянутое на ψ_i. Следовательно,

$$\bar{\lambda} = \frac{\sum \lambda_i E_i}{\sum E_i}$$

есть взвешенное по энергии среднее волновое число (квадрат действительного волнового числа, если учесть представление λ_i через волновое число k_i), которое является также интегральным инвариантом. Отсюда следует, что энергия в системе не может перераспределяться по волновым числам произвольно – если она идёт от движений с малыми волновыми числами к движениям с большими волновыми числами, то должно наблюдаться и обратное движение энергии.

Рассмотрим уравнение (1) с малой величиной диссипации (например, будем считать, что в системе есть молекулярная малая постоянная диссипация, так что мы должны рассматривать двумерное уравнение Навье-Стокса)

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\psi, \omega) = \varepsilon \Delta \omega.$$

Уравнение для Ω будет иметь вид

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = 2\varepsilon(\Delta\omega, \omega) = -2\varepsilon(\nabla\omega, \nabla\omega).$$

Уравнение для энергии имеет вид

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -2\varepsilon(\Delta\omega, \psi) = -2\varepsilon(\omega, \omega) = -2\varepsilon\Omega.$$

Если мы выберем ε очень малым, то в силу ограниченности Ω диссипацию энергии можно считать очень малой, то есть энергия будет почти сохраняться очень долгое время, в то время как диссипация энстрофии может быть не малой в силу больших градиентов завихренности. Если диссипация происходит на малых масштабах (соответствующих большим волновым числам), а приток энергии идёт на средних масштабах, то мы будем наблюдать каскад завихренности от средних волновых чисел к большим (каскад энергии при этом будет мал).

Другими словами, распределение энергии по спектру в инерционном интервале – там, где нет внешнего притока энергии и нет существенной диссипации энстрофии, будет определяться не потоком энергии, а потоком завихренности. Эта правдоподобная гипотеза подтверждается прямыми численными расчётами. Из соображений размерности следует, что наклон кривой зависимости энергии от волнового числа в этом диапазоне должен иметь вид $\sim k^{-3}$ (а не $k^{-5/3}$, как в обычной трёхмерной изотропной турбулентности Колмогорова).

Лекция 2

Устойчивость линейного приближения. Инварианты уравнения в вариациях

Традиционно исследование устойчивости по Ляпунову решений гидродинамических задач проводится с помощью линеаризации исходной системы уравнений. Этот метод даёт достаточные условия неустойчивости, поскольку можно всегда выбрать такое малое возмущение начальных данных, что линейное уравнение даст хорошее приближение на как угодно большом наперёд заданном промежутке времени. В то же время условия устойчивости, получаемые в такой форме, есть только необходимые условия, но не достаточные.

Первый вопрос, который мы далее исследуем, заключается в исследовании преобразований интегральных инвариантов, существующих для нелинейных уравнений, в инварианты, возникающие при процедуре линеаризации. Исследуем эту проблему в общем случае нелинейной системы уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + K(u) = 0, \quad u|_{t=0} = u_0, \tag{1}$$

имеющей множество инвариантов

$$I_i(u) = C_i(u_0), \quad \frac{\partial I_i}{\partial t} = 0.$$

Рассмотрим однопараметрическое семейство решений (1) вида $u_\varepsilon = u + \varepsilon v$. Пусть нелинейный оператор $K(u)$ дифференцируем по Гато. Это означает, что существует производная

$$\frac{d}{d\varepsilon}K(u+\varepsilon v)\Big|_{\varepsilon=0} = A(u)\cdot v.$$

Линеаризованное уравнение (уравнение в вариациях), следовательно, будет иметь вид, который получается дифференцированием уравнения (1) по ε (полагая $u_\varepsilon = u + \varepsilon v$):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + A(u)\cdot v = 0. \qquad (2)$$

Ясно, что интегралы $I_i(u+\varepsilon v) = C_i(\varepsilon, u_0, v_0)$ не зависят от времени.

Пусть I_i дифференцируем по Гато, то есть существует производная Гато от I_i по ε:

$$\frac{dI_i}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = (G_i(u), v). \qquad (3)$$

(Поскольку производная Гато есть линейный функционал по v, то он представим в виде скалярного произведения (3).) $G_i(u)$ называется градиентом функционала I_i. Поскольку I_i не зависит от t, то $(G_i(u), v)$ также не зависит от t, то есть $(G_i(u), v)$ есть интегральный инвариант. Таким образом, справедливо следующее утверждение, принадлежащее П.Лаксу [11]:

Утверждение. Пусть $u(t)$ есть решение (1), $v(t)$ есть решение линеаризованного уравнения (2) (уравнения в вариациях) и пусть $I(u)$ – интеграл уравнения (1), а $G(u)$ – градиент I. Тогда форма $(G(u), v)$ есть интеграл движения (не зависит от t).

Итак, уравнение в вариациях имеет такое же количество инвариантов, что и исходное нелинейное уравнение.

Рассмотрим в качестве примера уравнение двумерной несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\psi, \omega) = 0. \tag{4}$$

Линеаризованное уравнение (уравнение в вариациях) будет в этом случае иметь вид

$$\frac{\partial \delta\omega}{\partial t} + J(\delta\psi, \omega) + J(\psi, \delta\omega) = 0, \tag{5}$$

где $\delta\psi = \Delta^{-1}\delta\omega, \quad \psi = \Delta^{-1}\omega$. Рассмотрим снова два интеграла системы (4)

$$\frac{(\omega, \omega)}{2} = \Omega, \quad -\frac{(\Delta^{-1}\omega, \omega)}{2} = E$$

(энстрофия и энергия). Очевидно, что градиент Ω есть ω. Действительно,

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{d\varepsilon}(\omega + \varepsilon\delta\omega, \omega + \varepsilon\delta\omega)\bigg|_{\varepsilon=0} = (\omega, \delta\omega).$$

Таким образом, $(\omega, \delta\omega)$ есть инвариант (не зависит от времени). Это означает, что если $\delta\omega$ в начальный момент времени ортогонально ω, то $\delta\omega$ остаётся ортогонально $\omega(t)$ в любой момент времени. Более того, поскольку $\|\omega(t)\|$ ограничено, то если в любой момент времени $\delta\omega(t)$ экспоненциально растёт или экспоненциально убывает, то экспоненциально растущая (убывающая) компонента должна принадлежать подпространству, ортогональному $\omega(t)$.

Рассмотрим теперь интеграл энергии

$$\frac{1}{2}(\Delta^{-1}(\omega + \varepsilon\delta\omega), \omega + \varepsilon\delta\omega) = \frac{1}{2}\{(\Delta^{-1}\omega, \omega) +$$

$$+ \varepsilon(\Delta^{-1}\delta\omega, \omega) + \varepsilon(\Delta^{-1}\omega, \delta\omega) + \varepsilon^2(\Delta^{-1}\delta\omega, \delta\omega)\}.$$

Если оператор Δ^{-1} симметричный (мы рассматриваем соответствующие краевые условия), то градиент функционала энергии есть $(\Delta^{-1}\omega, \delta\omega)$. Поскольку $\psi = \Delta^{-1}\omega$, то $(\psi, \delta\omega)$ есть инвариант. Это означает, что все утверждения, высказанные выше относительно ω, справедливы и относительно $\psi = \Delta^{-1}\omega$.

Перейдем теперь к рассмотрению классической задачи об устойчивости стационарных решений системы (4), зависящих только от y. Из определения якобиана следует, что $\bar\omega = \bar\omega(y)$ есть решение (4). Уравнение в вариациях удобно записать в виде

$$\frac{\partial \Delta\psi'}{\partial t} + \bar u \frac{\partial}{\partial x}\Delta\psi' + \frac{\partial \psi'}{\partial x}\frac{\partial \bar\omega}{\partial y} = 0, \tag{6}$$

где $\bar u = -\frac{\partial \bar\psi}{\partial y}$. Обозначим для краткости записи $\Delta\psi'$ через ω'. Умножим уравнение (6) на $v' = \frac{\partial \psi'}{\partial x}$. Получим

$$\frac{\partial \omega' v'}{\partial t} - \omega\frac{\partial v'}{\partial t} + \bar u \frac{\partial \omega' v'}{\partial x} - \bar u \omega' \frac{\partial v'}{\partial x} = -v'^2 \frac{\partial \bar\omega}{\partial y},$$

или

$$\frac{\partial \omega' v'}{\partial t} - \omega' \left(\frac{\partial v'}{\partial t} + \bar u \frac{\partial v'}{\partial x}\right) + \bar u \frac{\partial \omega' v'}{\partial x} = -v'^2 \frac{\partial \bar\omega}{\partial y}. \tag{7}$$

Заметим, что $\frac{\partial v'}{\partial t} + \bar u \frac{\partial v'}{\partial x} \simeq \frac{dv'}{dt} = a'$ – возмущение ускорения частицы. Проинтегрируем уравнение (7) по области D. Будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_D \omega' v' dD - \iint\limits_D \omega' a' dD = -\iint\limits_D v'^2 \frac{\partial \bar\omega}{\partial y} dD.$$

Нетрудно показать, что $\iint\limits_D \omega' v' dD = 0$. Действительно,

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}\right) v' dD = \iint\limits_D \frac{1}{2}\frac{\partial v'^2}{\partial x} dD -$$

$$-\iint\limits_D \left(\frac{\partial u'v'}{\partial y} - u'\frac{\partial v'}{\partial y} \right) dD = -\iint\limits_D u'\frac{\partial u'}{\partial x} dD =$$
$$= -\iint\limits_D \frac{1}{2}\frac{\partial u'^2}{\partial x} dD = 0.$$

Таким образом, верно соотношение

$$\iint\limits_D \omega' a' dD = \iint\limits_D v'^2 \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} dD. \tag{8}$$

Предположим, что частица перемещается на δy. На уровне $y+\delta y$ завихренность частицы есть завихренность основного потока $\bar{\omega}(y+\delta y)$ и возмущения завихренности ω'. В силу закона сохранения вихря должно выполняться равенство

$$\bar{\omega}(y + \delta y) + \omega' = \bar{\omega}(y).$$

Так как
$$\bar{\omega}(y + \delta y) \simeq \bar{\omega}(y) + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}\delta y,$$
то $\omega' = -\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}\delta y$. Поскольку $\delta y = v'\delta t$, то $\omega' = -\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} v'\delta t$.

Пусть $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} > 0$. Тогда при $v' > 0, \quad \omega' < 0$ и из соотношения (8) следует, что $a' < 0$ и частица начнёт замедляться (ускорение направлено в сторону, противоположную скорости). Такой же результат будет, если $v' < 0$. Таким образом, условие $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} > 0$ представляется условием устойчивости движения. Справедливость этого предположения мы докажем позже.

Поскольку мы показали, что $\iint\limits_D \omega' v' dD = 0$, то из (6) следует, что в линейном приближении при $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} > 0$ имеет место
$$\iint\limits_D \frac{\omega'^2}{\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}} dD = \text{const}.$$

Обращение $\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial y}$ в ноль хотя бы в одной точке есть условие, необходимое для неустойчивости. Оно означает, что в системе возможны перемещения частиц, не вызывающие возвращающей силы. Приведём ещё одно доказательство этого утверждения, принадлежащее Рэлею. Будем искать решение уравнения (6) в виде

$$\psi' = \varphi(y)e^{ik(x-ct)}.$$

Условие комплексности фазовой скорости (c) – есть условие неустойчивости решения. Отметим, что в силу краевых условий, сформулированных в лекции 1, это решение автоматически удовлетворяет полученным нами инвариантам при $k \neq 0$. Поскольку

$$\frac{\partial\psi'}{\partial x} = ik\psi', \quad \frac{\partial\psi'}{\partial t} = -ikc\psi',$$

$$\Delta\psi' = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - k^2\varphi\right)e^{ik(x-ct)},$$

то из (6) будем иметь

$$ik(\bar{u}-c)\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - k^2\varphi\right]e^{ik(x-ct)} + ik\varphi e^{ik(x-ct)}\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial y} = 0$$

или для $k \neq 0$

$$(\bar{u}-c)\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - k^2\varphi\right] = -\varphi\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial y}. \tag{10}$$

Предположим, что $c \neq \bar{u}$ (фазовая скорость волны не совпадает со скоростью основного потока). Тогда можно записать

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - k^2\varphi = -\frac{\varphi\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial y}}{\bar{u}-c}.$$

Проинтегрируем это выражение по y от y_1 до y_2, умножив предварительно на φ^*. Из условия $\frac{\partial\psi'}{\partial x} = 0$ при y_1, y_2 следует, что при $k \neq 0$ $\varphi = 0$ при y_1, y_2. (Следовательно, и $\varphi^* = 0$ при y_1, y_2.) Получим

$$\int\limits_{y_1}^{y_2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \varphi^* - k^2 |\varphi|^2 \right) dy = - \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{|\varphi|^2 \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}}{\bar{u} - c} dy,$$

или

$$- \int\limits_{y_1}^{y_2} \left(|\frac{\partial \varphi}{\partial y}|^2 + k^2 |\varphi|^2 \right) dy = - \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{|\varphi|^2 \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}}{\bar{u} - c} dy. \qquad (11)$$

Умножим теперь числитель и знаменатель подынтегральной функции правой части соотношения (11) на $\bar{u} - c^*$. Будем иметь

$$\int\limits_{y_1}^{y_2} \left(|\frac{\partial \varphi}{\partial y}| + k^2 |\varphi|^2 \right) dy = \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{|\varphi|^2 \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} (\bar{u} - c^*)}{|\bar{u} - c|^2} dy. \qquad (12)$$

Пусть $c^* = c_r - ic_i$. Приравнивая мнимые части в соотношении (12), получим

$$ic_i \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{|\varphi|^2 \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}}{|\bar{u} - c|^2} dy = 0.$$

Если $c_i \neq 0$, то $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}$ обязано обращаться в нуль на интервале (y_1, y_2). Это и есть знаменитое утверждение Рэлея.

Неравенство нулю c_i означает, что мы имеем экспоненциально растущую и экспоненциально затухающую моды. При этом, очевидно, наше предположение, что $\bar{u} - c \neq 0$, верно.

Найдём интервал возможных значений реальной части фазовой скорости c. Это важно, поскольку если c_r лежит вне интервала изменения $\bar{u} \in [\bar{u}_{\min}, \bar{u}_{\max}]$, то операция деления, которую мы производили выше, всегда законна. Если

$c_i \neq 0$, то функция $\eta = \frac{\varphi}{\bar{u}-c}$ будет регулярной. Справедливы следующие соотношения:

$$\varphi = \eta(\bar{u} - c),$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = (\bar{u} - c)\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\eta, \tag{14}$$
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = (\bar{u} - c)\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + 2\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}\eta.$$

Подставляя (14) в (10) и имея в виду, что $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}$, получим

$$(\bar{u} - c)\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + 2\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}\eta - k^2(\bar{u} - c)\eta = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}\eta,$$

или

$$(\bar{u} - c)\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + 2\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} - k^2(\bar{u} - c)\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}\eta = 0. \tag{15}$$

Умножим уравнение (15) на $(\bar{u} - c)$ и приведём его к виду

$$\frac{\partial}{\partial y}(\bar{u} - c)^2\frac{\partial \eta}{\partial y} - k^2(\bar{u} - c)^2\eta = 0. \tag{16}$$

Умножив (16) на η^* и проинтегрировав по y от y_1 до y_2, получим

$$-\int_{y_1}^{y_2}(\bar{u} - c)^2|\frac{\partial \eta}{\partial y}|^2 dy - \int_{y_1}^{y_2}(\bar{u} - c)^2 k^2|\eta|^2 dy = 0.$$

Мнимая часть этого уравнения приводит к равенству

$$c_i \int_{y_1}^{y_2}(\bar{u} - c_r)\left(|\frac{\partial \eta}{\partial y}|^2 + k^2|\eta|^2\right) dy = 0$$

или при $c_i \neq 0$

$$c_r = \frac{\int\limits_{y_1}^{y_2} \bar{u} \left(|\frac{\partial \eta}{\partial y}|^2 + k^2 |\eta|^2 \right) dy}{\int\limits_{y_1}^{y_2} \left(|\frac{\partial \eta}{\partial y}|^2 + k^2 |\eta|^2 \right) dy}.$$

Отсюда следует, что $\bar{u}_{\min} \leq c_r \leq \bar{u}_{\max}$, то есть c_r принадлежит интервалу $[\bar{u}_{\min}, \bar{u}_{\max}]$.

Лекция 3

Устойчивость стационарных потоков

Рассмотрим снова уравнение для ω в форме

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\psi, \omega) = 0. \tag{1}$$

Результаты, изложенные в предыдущих лекциях, дают основание надеяться на то, что если решение задачи (1) $\bar{\omega} = \bar{\omega}(y)$ (функция, зависящая только от y) и $\bar{\omega}$ – монотонная функция y (для определённости будем считать, что $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} > 0$), то такое решение устойчиво по Ляпунову. Приведём доказательство этого утверждения, принадлежащее Т.Шеперду [12].

Поскольку $\bar{\omega}(y)$ есть монотонная функция y, то можно определить функцию, ей обратную – $Y(\bar{\omega})$, монотонно зависящую от $\bar{\omega}$. Пусть

$$A(\bar{\omega}, \omega') = -\int\limits_0^{\omega'} \left\{ Y(\bar{\omega} + \omega'') - Y(\bar{\omega}) \right\} d\omega''. \tag{2}$$

Заметим, что функция $A(\bar{\omega}, \omega')$ знакопостоянная в силу монотонности $Y(\omega)$. Далее, если ω' мало, то

$$A(\bar{\omega}, \omega') = -\frac{\partial Y}{\partial \bar{\omega}} \frac{\omega'^2}{2} = -\frac{1}{2} \frac{\omega'^2}{\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}}.$$

Именно в терминах этой функции была нами исследована устойчивость решения $\bar{\omega}(y)$ на основе линеаризованной системы уравнений.

Уравнение для $A(\bar{\omega}, \omega')$ будет иметь вид

$$\frac{d}{dt}A(\bar{\omega}, \omega') = \frac{\partial A}{\partial \bar{\omega}}\frac{d\bar{\omega}}{dt} + \frac{\partial A}{\partial \omega'}\frac{d\omega'}{dt}. \tag{3}$$

Имеем

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} + u\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} + v\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} = \frac{\partial \psi'}{\partial x}\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}.$$

Здесь мы, как обычно, рассматриваем уравнение (1) при возмущенных начальных данных, полагая

$$\omega = \bar{\omega} + \omega', \quad \psi = \bar{\psi} + \psi', \quad \omega' = \Delta\psi'.$$

Далее

$$\begin{gathered}\frac{\partial A}{\partial \bar{\omega}} = -Y(\bar{\omega} + \omega') + Y(\bar{\omega}) + \omega'\frac{\partial Y}{\partial \bar{\omega}}, \\ \frac{\partial A}{\partial \omega'} = -Y(\bar{\omega} + \omega') + Y(\bar{\omega}).\end{gathered} \tag{4}$$

Справедливость второго уравнения в (4) очевидна. Первое уравнение получается из следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial \bar{\omega}} &= -\frac{\partial}{\partial \bar{\omega}}\int\limits_0^{\omega'} Y(\bar{\omega} + \omega'')d\omega'' + \frac{\partial Y}{\partial \bar{\omega}}\omega' = \\ &= -\frac{\partial}{\partial \bar{\omega}}\int\limits_{\bar{\omega}}^{\bar{\omega}+\omega'} Y(\eta)d\eta + \frac{\partial Y}{\partial \bar{\omega}}\omega' = \\ &= -Y(\bar{\omega} + \omega') + Y(\bar{\omega}) + \frac{\partial Y}{\partial \bar{\omega}}\omega'.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}A(\bar\omega,\omega') = (-Y(\bar\omega+\omega') + Y(\bar\omega) + \frac{\partial Y}{\partial\bar\omega}\omega')\frac{d\bar\omega}{dt} +$$

$$+ (-Y(\bar\omega+\omega') + Y(\bar\omega))\frac{d\omega'}{dt} =$$

$$= (-Y(\bar\omega+\omega') + Y(\bar\omega))\left[\frac{d\omega'}{dt} + \frac{\partial\bar\omega}{\partial y}\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right] +$$

$$+ \omega'\frac{\partial\psi'}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial\bar\omega}\frac{\partial\bar\omega}{\partial y}.$$

Но

$$\frac{\partial Y}{\partial\bar\omega}\frac{\partial\bar\omega}{\partial y} = 1, \quad \frac{d\omega'}{dt} + \frac{\partial\bar\omega}{\partial y}\frac{\partial\psi'}{\partial x} = \frac{d\omega}{dt} = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}A(\bar\omega,\omega') = \frac{\partial\psi'}{\partial x}\omega' \equiv v'\omega'.$$

Далее

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + u\frac{\partial A}{\partial x} + v\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Au}{\partial x} + \frac{\partial Av}{\partial y}.$$

Мы также показали в предыдущих лекциях, что

$$\int\!\!\int \omega' v' dxdy = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d}{dt}\int\!\!\int A(\bar\omega,\omega')dxdy = 0,$$

то есть $\int\!\!\int A(\bar\omega,\omega')dxdy$ - инвариант движения. Из существования этого инварианта уже нетрудно установить оценки для ω' в норме

$$\|\omega'\| = (\omega',\omega')^{1/2}.$$

Из гладкости функции $Y(\omega)$ следует, что

$$Y(\bar{\omega}+\omega'')-Y(\bar{\omega})=\frac{\partial Y}{\partial\bar{\omega}}(\Theta)\omega'',$$

где

$$\Theta\in[\bar{\omega},\bar{\omega}+\omega''].$$

Следовательно, справедливы неравенства

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial\omega}\right)_{\min}\iint\frac{\omega'^2}{2}dxdy\le\left|\iint A(\bar{\omega},\omega')dxdy\right|\le$$

$$\le\left(\frac{\partial Y}{\partial\bar{\omega}}\right)_{\max}\iint\frac{\omega'^2}{2}dxdy.$$

В силу инвариантности $\iint A(\bar{\omega},\omega')dxdy$ имеем

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial\bar{\omega}}\right)_{\min}\iint\frac{\omega'^2}{2}dxdy\le\left|\iint A(\bar{\omega},\omega')dxdy\right|=$$

$$=\left|\iint A(\bar{\omega},\omega')dxdy\right|_{t=0}\le\left(\frac{\partial Y}{\partial\bar{\omega}}\right)_{\max}\iint\frac{\omega'^2}{2}dxdy\Big|_{t=0}.$$

Отсюда

$$\iint\frac{\omega'^2}{2}dxdy\equiv\frac{1}{2}\|\omega'\|^2\le\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{\partial Y}{\partial\bar{\omega}}\right)_{\max}}{\left(\frac{\partial Y}{\partial\bar{\omega}}\right)_{\min}}\|\omega'\|^2_{t=0}. \tag{5}$$

Это неравенство означает устойчивость решения $\bar{\omega}=\bar{\omega}(y)$ при $\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial y}>0$.

Лекция 4

Преобразование энергии и устойчивость. Оценки энергии насыщения

Рассмотрим уравнение, описывающее динамику двумерной несжимаемой жидкости, в форме лагранжевого закона сохранения вихря

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u\frac{\partial \omega}{\partial x} + v\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

Пусть $\bar{\omega}, \bar{u}, \bar{v}$ – стационарное решение этого уравнения, устойчивость которого мы исследуем, и пусть

$$\omega = \bar{\omega} + \omega', \quad u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v'.$$

Уравнение для ω' будет иметь вид

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \omega'}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \omega'}{\partial y} + u'\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} + v'\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} + u'\frac{\partial \omega'}{\partial x} + v'\frac{\partial \omega'}{\partial y} = 0. \tag{2}$$

Будем для простоты считать, что

$$\bar{u} = \bar{u}(y), \quad \bar{v} = 0, \quad \bar{\omega} = -\frac{\partial \bar{u}}{\partial y},$$

так что уравнение (2) примет вид

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \omega'}{\partial x} + v'\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} + u'\frac{\partial \omega'}{\partial x} + v'\frac{\partial \omega'}{\partial y} = 0.$$

Поскольку $\omega' = \Delta\psi', u' = -\frac{\partial\psi'}{\partial y}, v' = \frac{\partial\psi'}{\partial x}$, то это уравнение можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial\Delta\psi'}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial\Delta\psi'}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial y} + J(\psi', \Delta\psi') = 0. \qquad (3)$$

В предыдущих лекциях мы показали, что энергия возмущений может быть представлена в виде скалярного произведения

$$E' = -(\Delta\psi', \psi')/2.$$

Поскольку $(J(\psi', \Delta\psi'), \psi') = 0$ (см. лекцию 1), то мы получим уравнение для энергии возмущений

$$\frac{\partial E'}{\partial t} = \iint \bar{u}\frac{\partial\Delta\psi'}{\partial x}\psi' dxdy + \iint \psi'\frac{\partial\psi'}{\partial x}\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial y}dxdy. \qquad (4)$$

Последний интеграл в уравнении (4) равен нулю в силу условия периодичности по x. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\iint \bar{u}\frac{\partial\Delta\psi'}{\partial x}\psi' dxdy = -\iint \bar{u}\frac{\partial^2\psi'}{\partial^2 y}\frac{\partial\psi'}{\partial x}dxdy =$$

$$= \iint \bar{u}\frac{\partial u'}{\partial y}v' dxdy = \iint \bar{u}\frac{\partial}{\partial y}(u'v')dxdy -$$

$$-\iint \bar{u}u'\frac{\partial v'}{\partial y}dxdy = \iint \bar{u}\frac{\partial}{\partial y}(u'v')dxdy. \qquad (5)$$

Интеграл $\iint \bar{u}u'\frac{\partial v'}{\partial y}dxdy = 0$, поскольку $\frac{\partial v'}{\partial y} = -\frac{\partial u'}{\partial x}$. Итак, окончательно соотношение (5) может быть представлено в виде

$$\frac{\partial E'}{\partial t} = \int\limits_y \bar{u}\frac{\partial}{\partial y}\overline{u'v'}dy, \qquad (6)$$

где черта сверху означает знак усреднения по x.

Поскольку величина $\overline{u'v'} = -\bar{\tau}$ есть "напряжение трения", то скорость изменения энергии возмущений может быть записана в следующей форме:

$$\frac{\partial E'}{\partial t} = -\int\limits_y \bar{u}\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial y}dy = \int\limits_y \tau\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}dy.$$

Эти равенства есть представления взаимодействия между средним потоком и возмущениями. Если энергия передаётся от среднего потока возмущением, то $\frac{\partial E'}{\partial t} > 0$, и наоборот.

Возникает вопрос: чем ограничена энергия возмущений?

Прежде чем перейти к исследованию этого вопроса, покажем, что в системе всегда выполняется "принцип Ле Шателье": возмущения, нарастая, должны снимать источник их роста. Действительно, в лекции 2 мы получили соотношение

$$\omega' \equiv q' = -\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}v'\delta t.$$

Умножим левую и правую части этого равенства на v' и проинтегрируем по x. Получим

$$\overline{q'v'} = -\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}\overline{v'^2}\delta t. \tag{7}$$

Из формулы (7) следует, что если градиент завихренности основного потока есть источник возмущений, то поток завихренности направлен всегда так, чтобы уменьшить этот градиент.

Вернемся теперь к решению поставленного выше вопроса. Очевидно, что из закона сохранения энстрофии следует, что

$$\|\bar{\omega} + \omega'\|_t = \|\bar{\omega} + \omega'\|_{t=0}.$$

(Будем считать, что $\bar{\omega}$ есть функция только y.) Разобьем ω' на две компоненты: зонально-симметричную $[\omega']$ и волновую ω''. Зонально-симметричная компонента есть функция только y, а для волновой компоненты справедливо соотношение

$$[\omega''] = 0,$$

где $[\cdot]$ есть знак осреднения вдоль x.

Итак, в силу закона сохранения энстрофии имеем

$$\|\bar{\omega} + [\omega'] + \omega''\|^2 = \|\bar{\omega} + \omega'\|^2_{t=0}.$$

Поскольку

$$(\bar{\omega} + [\omega'], \omega'') = 0,$$

то

$$\|\bar{\omega} + [\omega']\|^2 + \|\omega''\|^2 = \|\bar{\omega}\|^2 + \|\omega'\|^2_{t=0} + 2(\bar{\omega}, \omega')_{t=0}. \qquad (8)$$

Если считать, что в начальный момент времени $(\bar{\omega}, \omega') = 0$ и $\|\omega'\|^2_{t=0}$ мало, то мы получаем тривиальную оценку:

$$\|\omega''\|^2 \leq \|\bar{\omega}\|^2.$$

Эта оценка может быть улучшена несколькими способами. Из (8) имеем

$$\|\omega''\|^2 = \|\bar{\omega}\|^2 - \|\bar{\omega} + [\omega']\|^2.$$

Поставим следующую вариационную задачу. Мы располагаем законом сохранения энстрофии и законом сохранения импульса. Очевидно, что

$$\|\omega''\|^2 \leq \|\bar{\omega}\|^2 - \min \|\bar{\omega} + [\omega']\|^2. \qquad (9)$$

Будем искать минимум зонально-осреднённой величины ω при условии, что $\iint \omega y dx dy$ есть инвариант. В двойном интеграле можно оставить только интеграл по y от зонально-осреднённой величины, так как интеграл по x от "волновой" компоненты (ω'') есть нуль. Задача решается с помощью множителей Лагранжа.

Имеем
$$F \equiv (\tilde{\omega}, \tilde{\omega}) + \lambda\{(\tilde{\omega}, y) - C\}, \tag{9$'$}$$
где под $\tilde{\omega}$ понимается зонально-осреднённая компонента ω, $(\cdot, \cdot)$ есть интеграл по y, λ – множитель Лагранжа, C – константа, определяемая начальными условиями.

Для нахождения $\min F$ проварьируем (9$'$). Получим
$$(\delta\tilde{\omega}, \tilde{\omega}) + (\tilde{\omega}, \delta\tilde{\omega}) + \lambda(\delta\omega, y) = 0,$$
или
$$(2\tilde{\omega} + \lambda y, \delta\tilde{\omega}) = 0.$$
В силу произвольности $\delta\tilde{\omega}$ будем иметь
$$\tilde{\omega} = -\frac{\lambda y}{2}.$$
Отсюда $(\tilde{\omega}, y) = -\frac{\lambda}{2}(y, y)$, $(\tilde{\omega}, y)^2 = \frac{\lambda^2}{4}(y, y)^2$, $(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}) = \frac{\lambda^2}{4}(y, y)$ и, следовательно,
$$(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}) = \frac{(\tilde{\omega}, y)^2}{(y, y)} \equiv \frac{C^2}{(y, y)}. \tag{10}$$

Таким образом, минимальная зонально-симметричная энстрофия есть $C^2/(y, y)$, и мы получаем оценку
$$\|\omega''\|^2 \leq \|\bar{\omega}\|^2 - \frac{C^2}{(y, y)}. \tag{11}$$

Лекция 5

Связки интегралов в исследовании устойчивости

В данной лекции мы будем считать, что динамика двумерной несжимаемой жидкости происходит на двумерном торе (периодичность по обоим направлениям). Причина этого заключается в том, что операторы Δ (Лапласа) и ∇ (градиента) становятся симметричным и кососимметричным соответственно и коммутативными, что существенно облегчает выкладки. Итак, рассмотрим снова уравнение переноса вихря

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u\frac{\partial \omega}{\partial x} + v\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

Уравнение (1) допускает бесконечное количество инвариантов типа

$$\iint\limits_D F(\omega) dD = \mathrm{const},$$

где $F(\omega)$ – гладкое отображение и интеграл энергии

$$E = -(\psi, \Delta\psi)/2,$$

который в силу периодических краевых условий можно переписать в виде

$$E = (\nabla\psi \cdot \nabla\psi)/2.$$

В этом выражении скалярное произведение $(\,\cdot\,)$ вычисляется в пространстве двумерных вектор-функций.

Образуем "связку" интегралов, которая, очевидно, также будет инвариантом

$$I = E + \iint F(\omega) dD. \tag{2}$$

Доказательство устойчивости решения $\bar{\omega}$ задачи (1) основывается том, что находятся условия, при которых функционал I, являющийся инвариантом, имеет минимум. В конечномерном случае для этого достаточно показать, что первая вариация функционала должна обращаться в нуль, а вторая вариация должна быть больше нуля. Однако для бесконечномерного случая это не так. Тем не менее, мы сейчас получим условия, при которых первая вариация функционала I обращается в нуль, а вторая будет больше нуля. Для системы уравнений, описывающей динамику двумерной жидкости на вращающейся сфере, показано, что эти условия являются достаточными для устойчивости по Ляпунову решения $\bar{\omega}$ (см. [4]).

Итак, найдём первую вариацию функционала I (в предположении, что $\psi = \bar{\psi} + \delta\psi$, где $\bar{\psi}$ – исследуемое решение)

$$\delta I = \iint\limits_D \nabla\bar{\psi} \cdot \nabla\delta\psi dD + \iint\limits_D \frac{\partial F}{\partial\bar{\omega}} \delta\omega dD.$$

Поскольку

$$\iint\limits_D \nabla\bar{\psi} \cdot \nabla\delta\psi dD = -\iint\limits_D \bar{\psi}\Delta\delta\psi dD,$$

а

$$\Delta\delta\psi = \delta\omega,$$

то

$$\delta I = \iint\limits_D \left(\frac{\partial F}{\partial\bar{\omega}} - \bar{\psi}\right) \delta\omega dD.$$

Для того чтобы первая вариация обращалась в нуль, достаточно, чтобы

$$\bar{\psi} = \frac{\partial F}{\partial \bar{\omega}}.$$

Вторая вариация функционала есть

$$\delta^2 I = \iint\limits_D \frac{\nabla\delta\psi \cdot \nabla\delta\psi}{2} dD + \iint\limits_D \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{\omega}^2} \frac{\delta\omega^2}{2} dD. \qquad (4)$$

Чтобы эта вариация была положительной, достаточно выполнения неравенства

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{\omega}^2} > 0.$$

Поскольку

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{\omega}^2} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\omega}} = \frac{1}{\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{\psi}}},$$

то это условие переходит в условие

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{\psi}} > 0. \qquad (5)$$

Уравнение $\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\psi, \omega) = 0$, очевидно, допускает решение $\bar{\omega} = G(\bar{\psi})$, где $G(\bar{\psi})$ – гладкое отображение. Таким образом, если мы исследуем устойчивость решения

$$\bar{\omega} = G(\bar{\psi})$$

и для этого решения выполняется условие

$$\frac{\partial G(\bar{\psi})}{\partial \bar{\psi}} > 0,$$

то первая вариация функционала I обращается в нуль, а вторая – больше нуля при соответствующем выборе функции F при построении этого функционала.

Положительность второй вариации может быть и при отрицательных значениях $\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{\omega}^2}$. Для этого нам нужно удовлетворить условию

$$\iint\limits_D \frac{\nabla\delta\psi\cdot\nabla\delta\psi}{2}dD + \iint\limits_D \frac{\partial^2 F}{\partial\bar{\omega}^2}\frac{\delta\omega^2}{2}dD > 0.$$

Поскольку

$$\iint\limits_D \nabla\delta\psi\cdot\nabla\delta\psi dD = -\iint\limits_D \Delta\delta\psi\delta\psi dD \tag{7}$$

и оператор Δ на подпространстве, ортогональном константе (там, где мы ищем решение) отрицательно определен, а

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\bar{\omega}^2} = \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\bar{\omega}},$$

то нам нужно, чтобы минимум выражения (7) был больше, чем $\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\bar{\omega}}$.

Минимум (7) достигается на собственной функции оператора Лапласа, соответствующей минимальному по модулю собственному числу $\lambda_{\min}$. Таким образом, условие положительности второй вариации примет вид

$$|\lambda_{\min}| > \left|\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\bar{\omega}}\right|.$$

Покажем теперь, что на торе вообще невозможно построить решение $\bar{\omega} = F(\bar{\psi})$, для которого бы выполнялось неравенство

$$\frac{\partial F}{\partial\bar{\psi}} > 0.$$

Рассмотрим выражение для энстрофии $\Omega \equiv (\bar{\omega},\bar{\omega})$. Поскольку $\bar{\omega} = F(\bar{\psi})$, $\quad \bar{\omega} = \Delta\bar{\psi}$, $\quad$ то $\quad (\Delta\bar{\psi}, F(\bar{\psi})) = (\bar{\omega},\bar{\omega}) > 0$.

В силу того что $\triangle = \nabla^2$, а на торе ∇ – кососимметрический оператор, будем иметь

$$(\Delta\bar{\psi}, F(\bar{\psi})) = -(\nabla\bar{\psi} \cdot \nabla F(\bar{\psi})) = -\left(\nabla\bar{\psi} \cdot \frac{\partial F}{\partial\bar{\psi}} \nabla\bar{\psi}\right) > 0,$$

или

$$-\iint\limits_D \frac{\partial F}{\partial\bar{\psi}} |\nabla\bar{\psi}|^2 dD > 0. \tag{7}$$

Из (7) следует, что $\frac{\partial F}{\partial\bar{\psi}}$ не может быть величиной положительной.

Лекция 6

Динамика двумерной несжимаемой жидкости на вращающейся сфере. Волны Россби-Блиновой

Уравнение двумерной несжимаемой идеальной жидкости в инвариантной форме представляет из себя лагранжев закон сохранения вихря:

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = 0. \tag{1}$$

На вращающейся сфере вихрь частиц будет складываться из относительного вихря (вихря относительно вращающейся системы координат) и вихря самого вращающегося тела $\vec{\Omega}_0$, который, как известно, равен удвоенной угловой скорости твёрдого тела

$$\vec{\Omega}_0 = 2\vec{\Omega}_b$$

($\vec{\Omega}_b$ – угловая скорость тела).

Поскольку для двумерной жидкости ненулевой компонентой будет только вертикальная компонента вихря, то

$$\Omega = \omega + l,$$

где ω – вертикальная компонента относительной завихренности, а l – соответствующая компонента удвоенной угловой скорости вращающейся системы координат.

В сферической системе координат (сфера радиуса $a = 1$)

$$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \lambda \in [0, 2\pi],$$

где φ – широта, λ – долгота, метрика определяется естественным образом:

$$dx = \cos\varphi d\lambda, \quad dy = d\varphi$$

и полная производная будет иметь вид

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda} + v\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}.$$

Уравнение неразрывности для двумерной несжимаемой жидкости будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{1}{\cos\varphi}\left[\frac{\partial u}{\partial\lambda} + \frac{\partial}{\partial\varphi}(v\cos\varphi)\right] = 0. \tag{2}$$

Следовательно, из (2) u и v можно выразить через функцию тока:

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}, \quad v = \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}.$$

Вертикальная компонента завихренности может быть представлена следующей формулой:

$$\omega = \frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\cos\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}) \equiv \Delta\psi. \tag{3}$$

Формула (3) есть формула для "двумерного" лапласиана на сфере. Нетрудно также видеть, что

$$l = 2\Omega_b\sin\varphi,$$

если ось вращения системы координат проходит через полюсы с $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$.

Таким образом, уравнение для абсолютной завихренности $\Omega = \omega + l$ в сферической системе координат можно записать в виде

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{u}{\cos\varphi}\frac{\partial\omega}{\partial\lambda} + v\frac{\partial\omega}{\partial\varphi} + v\frac{\partial l}{\partial\varphi} = 0. \tag{4}$$

Поскольку $\omega = \Delta\psi, u = -\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}, v = \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}, \frac{\partial l}{\partial\varphi} = 2\Omega_b\cos\varphi$, то уравнение (4) может быть переписано в виде:

$$\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + J(\psi, \Delta\psi) + 2\Omega_b\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = 0, \tag{5}$$

где якобиан J определяется естественным образом:

$$J(\psi, \eta) = \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\frac{\partial\eta}{\partial\varphi} - \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\frac{\partial\eta}{\partial\lambda}\right). \tag{6}$$

Мы будем рассматривать решения уравнения (5) на пространстве функций, удовлетворяющих условию периодичности по λ и условию ограниченности на полюсах

$$\eta\cos\varphi \to 0 \quad \text{при} \quad \varphi \to \pm\pi/2.$$

Если ввести скалярное произведение в этом пространстве следующим образом:

$$(\psi, \eta) = \iint\limits_S \psi\eta\cos\varphi d\lambda d\varphi,$$

то нетрудно проверить, что якобиан $J(\psi, \Delta\psi)$ будет удовлетворять следующим соотношениям: $(J, \psi) = 0$; $(J, \Delta\psi) = 0$. Очевидно также, что $J(\eta, \eta) = 0$.

Ясно, что $J(\psi, \Delta\psi)$ будет обращаться в нуль также для функций, удовлетворяющих соотношению

$$\Delta\psi = F(\psi),$$

где F есть некоторое гладкое отображение. В частности, функция F может быть линейной, и мы приходим к следующей задаче на собственные значения:

$$\Delta\psi = -\lambda\psi. \tag{7}$$

Функции, удовлетворяющие (7) и сформулированным выше "граничным" условиям, называются сферическими гармониками. Остановимся более подробно на их свойствах, поскольку это нам понадобится в дальнейшем.

Итак, сферические гармоники должны удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial Y_n}{\partial\varphi}\right) = -\lambda_n Y_n. \tag{8}$$

Известно, что в уравнении (8)

$$\lambda_n = n(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

($Y_0 = \text{const}$).

Если искать Y_n в виде

$$Y_n = \tilde{P}(\varphi)e^{im\lambda},$$

то уравнение для $\tilde{P}(\varphi)$ может быть записано в виде

$$\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial\tilde{P}(\varphi)}{\partial\varphi}\right) - \frac{m^2}{\cos^2\varphi}\tilde{P}(\varphi) + n(n+1)\tilde{P}(\varphi) = 0. \tag{9}$$

Можно сделать две замены переменных:

$$\Theta = \varphi + \frac{\pi}{2}, \quad \cos\Theta = z.$$

Тогда в терминах координаты z уравнение (9) примет вид

$$\begin{gathered}(1-z^2)\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - 2z\frac{\partial P}{\partial z} + \left\{n(n+1) - \frac{m^2}{1-z^2}\right\}P = 0,\\ z \in [-1, 1].\end{gathered} \tag{10}$$

Решениями уравнения (10) будут присоединенные полиномы Лежандра $P_n^m(z)$ (n – степень, m – порядок функции).

Присоединенные полиномы Лежандра при фиксированном m образуют полную ортогональную систему на отрезке $[-1, 1]$:

$$\int_{-1}^{1} P_n^{|m|}(\mu) P_k^{|m|}(\mu) d\mu = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad k \neq n, \\ \frac{2}{2n+1}\frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!}, & \text{если} \quad k = n. \end{cases}$$

Сферические гармоники образуют полную ортогональную систему функций в пространстве регулярных функций на сфере (периодичность по λ и ограниченность на полюсах).

Если m – произвольные целые числа, то для каждого n существует $2n+1$ независимых сферических гармоник степени n. Таким образом, оператор Лапласа на сфере индуцирует разбиение всего пространства на инвариантные подпространства H_n размерности $2n+1$.

Вернемся теперь к исходному уравнению (5). Будем искать решение этого уравнения в виде

$$\psi = Y_n e^{i\sigma t}.$$

Поскольку

$$\Delta Y_n = -(n+1)nY_n,$$

то будем иметь

$$-(n+1)ni\sigma Y_n + 2\Omega_b imY_n = 0, \quad \text{или}$$

$$\sigma = \frac{2\Omega_b m}{n(n+1)}. \tag{11}$$

Так как

$$Y_n = P_n^m(\varphi)e^{im\lambda},$$

то решение ψ может быть представлено в виде

$$\psi = P_n^m(\varphi)e^{im\left(\lambda + \frac{2\Omega_b}{n(n+1)}t\right)} = Y_n\left(\varphi, \lambda + \frac{2\Omega_b}{n(n+1)}t\right).$$

Мы видим, что нелинейное уравнение вихря на сфере допускает точные решения в виде сферических гармоник, бегущих с постоянной фазовой скоростью $c = \frac{2\Omega_b}{n(n+1)}$ на "запад", если $\Omega_b > 0$.

Этот уникальный тип волн был открыт в атмосфере Россби и Блиновой и носит их имена (волны Россби-Блиновой). Важной проблемой с точки зрения задач этого курса является исследование их устойчивости. На этой проблеме мы остановимся позже и ввиду её сложности несколько упростим постановку задачи.

Лекция 7

Устойчивость стационарных решений уравнений, описывающих динамику идеальной несжимаемой жидкости на вращающейся сфере

Для уравнения вихря на вращающейся сфере

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\psi, \omega + l) = 0 \tag{1}$$

стационарные решения, очевидно, удовлетворяют уравнению

$$J(\psi, \omega + l) = 0.$$

Якобиан будет обращаться в нуль, если абсолютный вихрь есть гладкая функция от функции тока:

$$\omega + l = F(\psi). \tag{2}$$

Умножим уравнение (2) скалярно на ω. Получим

$$(F(\psi), \omega) = (\omega, \omega) + (l, \omega).$$

Поскольку $\omega = \nabla \cdot \nabla\psi$, то справедлива цепочка равенств:

$$(F(\psi), \omega) = (F(\psi), \nabla \cdot \nabla\psi) = -(\nabla F(\psi), \nabla\psi) =$$

$$= -\left(\frac{\partial F}{\partial \psi}\nabla\psi, \nabla\psi\right) \equiv -\iint \frac{\partial F}{\partial \psi}|\nabla\psi|^2 \cos\varphi d\varphi d\lambda.$$

Естественно, что вся эта цепочка равенств справедлива только тогда, когда $\omega, \psi, \nabla\psi$ принадлежат пространству регулярных (ограниченных на сфере вместе со своими производными) функций. Далее,

$$(l, \omega) = \iint \Delta\psi 2\Omega_b \sin\varphi \cos\varphi d\varphi d\lambda =$$

$$= \iint \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right) 2\Omega_b \sin\varphi\cos\varphi d\varphi d\lambda =$$

$$= -\iint \cos\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}2\Omega_b\cos\varphi d\varphi d\lambda =$$

$$= \iint 2\Omega_b(u\cos\varphi)\cos\varphi d\varphi d\lambda. \qquad (3)$$

Поскольку $u\cos\varphi \equiv M$ есть момент количества движения относительно оси вращения, то окончательно будем иметь

$$-\iint \frac{\partial F}{\partial\psi}|\nabla\psi|^2\cos\varphi d\varphi d\lambda = \iint \omega^2\cos\varphi d\varphi d\lambda +$$

$$+\iint 2\Omega_b M\cos\varphi d\varphi d\lambda. \qquad (4)$$

Из (4) следует справедливость следующего утверждения

Утверждение. Не существует стационарного решения (2), принадлежащего пространству регулярных функций на сфере и удовлетворяющего условиям положительности $\frac{\partial F}{\partial\psi}$ и положительности углового момента. (Мы всегда считаем, что $\Omega_b > 0$.)

Рассмотрим в качестве примера ситуацию, когда $F(\psi)$ – линейная функция. Имеем

$$\Delta\psi + 2\Omega_b\sin\varphi = \lambda\psi.$$

Если ψ есть функция только φ, то уравнение будет иметь вид

$$\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)+2\Omega_b\sin\varphi=\lambda\psi. \tag{5}$$

Очевидно, что решением (5) будет сферическая гармоника Y_n^0 с $n=1, m=0$, то есть

$$\psi=Y_1^0=A\sin\varphi. \tag{6}$$

Подставляя (6) в (5), получим

$$-2A\sin\varphi+2\Omega_b\sin\varphi=A\lambda\sin\varphi,$$

или

$$\lambda=-2+\frac{2\Omega_b}{A}.$$

При $A>0$ для этого решения угловой момент будет отрицательным. Действительно,

$$u=-\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}=-A\cos\varphi<0 \quad \text{при} \quad \varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

хотя при этом λ может быть и положительным, если Ω_b достаточно большое.

Пусть $A<0, \lambda<0$. Решение $\psi=A\sin\varphi, \quad u=-A\cos\varphi$ будет описывать твёрдое вращение. Исследуем устойчивость этого решения. Пусть $\omega=\bar\omega+\omega', \quad \psi=\bar\psi+\psi'$. Тогда уравнение для возмущений будет иметь вид

$$\frac{\partial\omega'}{\partial t}+J(\bar\psi,\omega')+J(\psi',\bar\omega)+2\Omega_b\frac{\partial\psi'}{\partial\lambda}+J(\psi',\omega')=0. \tag{6'}$$

Умножим (6′) скалярно на ω'. Получим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial(\omega',\omega')}{\partial t}+(J(\psi',\bar\omega),\omega')=0. \tag{7}$$

При этом члены $\left(\frac{\partial\psi'}{\partial\lambda}, \psi'\right) = 0$ в силу условий периодичности. Умножим скалярно ($6'$) на ψ'. Будем иметь

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\omega', \psi') + (J(\bar{\psi}, \omega'), \psi') = 0. \tag{8}$$

Покажем, что

$$\iint \Delta\psi' \frac{\partial\psi'}{\partial\lambda}\cos\varphi d\varphi d\lambda = 0,$$

или

$$\iint \left[\frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{\partial^2\psi'}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial\psi'}{\partial\varphi}\right)\right]\frac{\partial\psi'}{\partial\lambda}\cos\varphi d\varphi d\lambda = 0$$

Очевидно, что первый член равен нулю в силу условий периодичности.

Имеем

$$\iint \frac{\partial\psi'}{\partial\lambda}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial\psi'}{\partial\varphi}\right)d\varphi d\lambda =$$

$$= -\iint \cos\varphi\frac{\partial\psi'}{\partial\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial\psi'}{\partial\varphi}d\varphi d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2}\iint \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial\psi'}{\partial\varphi}\right)^2\cos\varphi d\varphi d\lambda = 0.$$

Поскольку $\Delta\bar{\psi} = \bar{\omega} = -2\bar{\psi} \quad (n = 1, m = 0)$, то

$$(J(\psi', \bar{\omega}), \omega') = (J(\omega', \psi'), \bar{\omega}) =$$

$$= (J(\bar{\omega}, \omega'), \psi') = -2(J(\bar{\psi}, \omega'), \psi'),$$

и, следовательно, уравнение (7) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\|\omega'\|^2}{4} - (J(\bar{\psi}, \omega'), \psi') = 0.$$

Складывая его с уравнением (8), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\|\omega'\|^2+2(\omega',\psi')}{2}\right)=0.$$

Поскольку $(\omega',\psi')=-(\nabla\psi',\nabla\psi')$, то можно заключить, что в данном случае величина

$$\|\omega'\|^2-2(\nabla\psi',\nabla\psi')$$

есть интеграл движения. Если мы докажем, что он всегда одного знака, то его можно принять за норму, и устойчивость твёрдого вращения доказана.

Пусть $\psi'=\sum\alpha_i Y_i$, то есть ψ' разложена в ряд по сферическим гармоникам. Тогда

$$\|\omega'\|^2=(\omega',\omega')=\sum\lambda_i^2\alpha_i^2(Y_i,Y_i),$$

$$(\psi',\omega')=\sum\lambda_i\alpha_i^2(Y_i,Y_i)=-\sum|\lambda_i|E_i=-\sum\tilde{E}_i,$$

так как λ_i – отрицательные числа вида $-n(n+1)$. Следовательно, все $\tilde{E}_i>0$. Отсюда следует, что

$$\frac{\|\omega'\|^2}{-(\omega',\psi')}\geq\min|\lambda_i|=2,$$

и равенство достигается, если $Y_i\in H_1$, где H_1 – подпространство, натянутое на сферические гармоники, соответствующие $n=1$. Это подпространство имеет размерность $2n+1=3$. Следовательно, мы должны исследовать поведение коэффициентов Фурье разложения ψ' только на этом подпространстве.

Поскольку на подпространстве H_1: $\bar{\omega}=-2\bar{\psi},\omega'=-2\psi'$, то уравнение для возмущений будет

$$-2\frac{\partial\psi'}{\partial t}-2J(\bar{\psi},\psi')-2J(\psi',\bar{\psi})+2\Omega_b\frac{\partial\psi'}{\partial\lambda}-2J(\psi',\psi')=0.$$

Отсюда следует, что ψ' удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\psi'}{\partial t} - \Omega_b \frac{\partial\psi'}{\partial\lambda} = 0,$$

то есть ψ' будет бегущей волной Россби-Блиновой с постоянной амплитудой, что доказывает устойчивость по Ляпунову твёрдого вращения. Доказательство устойчивости твёрдого вращения можно получить и другим путём, например из вариационного принципа, используя связку интегралов энергии и момента количества движения.

Поставим такую задачу: при заданном моменте количества движения найти движение, обладающее минимальной энергией. Имеем

$$E = -(\psi, \Delta\psi) \equiv -\iint \Delta\psi\psi \cos\varphi d\varphi d\lambda,$$

$$M = -\iint \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \cos\varphi \cos\varphi d\varphi d\lambda.$$

Для решения задачи используем метод множителей Лагранжа. Пусть

$$I = E + \tilde{\lambda}(M - C),$$

где $C = \mathrm{const}$, а $\tilde{\lambda}$ – множитель Лагранжа.
Проварьируем функционал I по ψ и приравняем первую вариацию к нулю. Получим

$$\delta I = \delta E + \tilde{\lambda}\delta M =$$

$$= -\iint \Delta\delta\psi\psi \cos\varphi d\varphi d\lambda - \iint \Delta\psi\delta\psi \cos\varphi d\varphi d\lambda -$$

$$-\tilde{\lambda} \iint \frac{\partial}{\partial\varphi}\delta\psi \cos^2\varphi d\varphi d\lambda = 0.$$

В силу симметричности оператора Лапласа на сфере будем иметь

$$\delta E = -2\iint \Delta\psi\delta\psi \cos\varphi d\varphi d\lambda,$$

$$\delta M = \iint \delta\psi \frac{\partial}{\partial\varphi} \cos^2\varphi d\varphi d\lambda =$$
$$= -2 \iint \delta\psi \sin\varphi \cos\varphi d\varphi d\lambda.$$

Отсюда в силу произвольности $\delta\psi$ получим

$$\Delta\psi + \tilde{\lambda}\sin\varphi = 0,$$

или

$$\psi = -2\sin\varphi, \quad \tilde{\lambda} = 2.$$

Поскольку неустойчивые возмущения принадлежат подпространству, ортогональному $\bar{\psi}$, то эти возмущения ψ не могут изменить угловой момент. Следовательно, энергия возмущений не может расти за счёт энергии основного движения, так как в противном случае это бы означало, что существует другое движение, обладающее минимальной энергией и имеющее тот же угловой момент (суммарная энергия есть инвариант). В этом доказательстве, конечно, предполагается, что нулевая первая вариация и положительная вторая вариация обеспечивают минимум функционала.

Лекция 8

Галёркинские приближения. Инварианты

Структура инвариантных подпространств, генерируемых оператором Лапласа на сфере (подпространств, натянутых на соответствующие сферические функции), устроена так, что в координатной плоскости (m, n) множество сферических гармоник с индексом m, n будет ограничено прямыми $|m| = n$, как показано на рисунке 1.

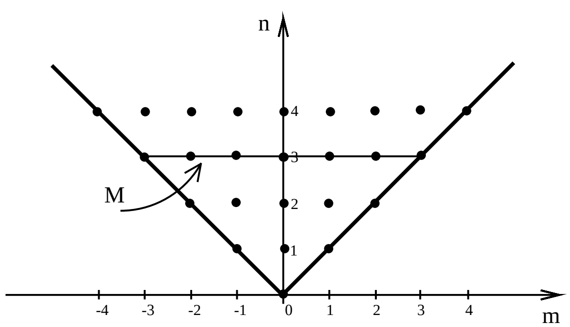

Рис. 1. Область M в пространстве индексов (m, n)

Обозначим все множество точек с координатами (m, n) через M_∞. Некоторое конечное множество $M \subset M_\infty$, сохраняющее свойство симметрии, назовём усечением. Если мы используем для решения уравнения вихря на сфере

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\psi, \omega) + 2\Omega_b \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = 0,$$

$$\omega = \Delta \psi,$$

метод Галёркина, в котором в качестве базисных функций используются сферические гармоники, то естественным усечением может быть использование всех сферических функций, для которых $n \le N$, где N – заданное число. Такое усечение называется треугольным. Возможны, конечно, и другие усечения. Задачей данной лекции будет доказательство того, что при любом усечении усеченная система (система галёркинских приближений) будет обладать двумя квадратичными инвариантами – аналогами энергии и энстрофии.

Введём в рассмотрение волновой вектор $\vec{\alpha} = (m_\alpha, n_\alpha)^T$ и его сопряженный $\vec{\alpha}^* = (-m_\alpha, n_\alpha)^T$. Коэффициенты Фурье разложения функций по сферическим гармоникам f_{nm} будем обозначать через f_α. Пусть

$$\psi = \sum_\alpha \psi_\alpha Y_\alpha, \tag{1}$$

где суммирование ведется по конечному множеству α. Тогда

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} -\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \end{array} \right) = \sum_\alpha \psi_\alpha \left(\begin{array}{c} -\frac{\partial Y_\alpha}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial Y_\alpha}{\partial \lambda} \end{array} \right) \equiv \sum_\alpha \psi_\alpha \vec{V}_\alpha, \tag{2}$$

где векторы $\vec{V}_\alpha$ – так называемые "тороидальные" векторы, по которым может быть разложено произвольное соленоидальное векторное поле.

Рассмотрим разложение якобиана по сферическим гармоникам. Пусть

$$J(\psi, \omega) = \sum_\gamma J_\gamma(\psi, \omega) Y_\gamma.$$

Тогда

$$J_\gamma(\psi,\omega) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_S J(\psi,\omega)\bar{Y}_\gamma dS =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \vec{V}(\psi)\cdot\nabla\omega\bar{Y}_\gamma dS \qquad (3)$$

$$(dS = \cos\varphi d\varphi d\lambda).$$

В формуле (3) $\bar{Y}_\gamma$ – функции, сопряженные Y_γ. Пусть

$$\omega = \sum_\beta \omega_\beta Y_\beta.$$

Тогда

$$J_\gamma = \sum_\beta \omega_\beta \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \bar{Y}_\gamma\vec{V}\cdot\nabla Y_\beta dS \equiv \sum_\beta \omega_\beta M_{\beta\gamma},$$

где

$$M_{\beta\gamma} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \bar{Y}_\gamma\vec{V}\cdot\nabla Y_\beta dS. \qquad (4)$$

Проводя интегрирование по частям, получим

$$M_{\beta\gamma} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \bar{Y}_\gamma\vec{V}\cdot\nabla Y_\beta dS = \frac{1}{4\pi}\int\limits_S Y_\gamma\nabla\cdot(\vec{V}Y_\beta)dS =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int\limits_S Y_\beta\vec{V}\cdot\nabla\bar{Y}_\gamma dS = -M^*_{\gamma\beta}. \qquad (5)$$

Формула (5) означает, что матрица, элементами которой являются $M_{\beta\gamma}$, косоэрмитова. Подставляя в (5) выражение для $\vec{V}$

$$\vec{V} = \sum_\alpha \psi_\alpha\vec{V}_\alpha,$$

получим

$$M_{\beta\gamma} = \sum_\alpha \psi_\alpha \frac{1}{4\pi} \int\limits_S \bar{Y}_\gamma \vec{V}_\alpha \cdot \nabla Y_\beta dS =$$

$$= \sum_\alpha \psi_\alpha \frac{1}{4\pi} \int\limits_S \bar{Y}_\gamma [\nabla Y_\alpha] \cdot \nabla Y_\beta dS, \tag{6}$$

где символ $[\cdot]$ обозначает поворот вектор-аргумента на $90°$ по часовой стрелке, то есть $[\vec{V}] = \binom{v}{-u}$. Введём обозначение

$$L_{\beta\gamma\alpha} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_S \bar{Y}_\gamma [\nabla Y_\alpha] \cdot \nabla Y_\beta dS. \tag{7}$$

Тогда выражение для J_γ может быть представлено в виде

$$J_\gamma(\psi, \omega) = \sum_\beta \sum_\alpha \omega_\beta \psi_\alpha L_{\beta\gamma\alpha}.$$

Это есть искомое представление коэффициента Фурье нелинейной функции переноса через коэффициенты Фурье вихря ω и функции тока ψ. Выражение (8) есть билинейная форма для каждого γ, $L_{\beta\gamma\alpha}$ – её коэффициенты, которые назовём коэффициентами взаимности. Пусть

$$\Omega^2 = (\omega, \omega)_N \equiv \sum_\gamma |\omega_\gamma|^2.$$

Ω^2 есть аналог энстрофии при некотором симметричном усечении. По определению ω_γ имеем

$$\frac{d}{dt}|\omega|^2 = \omega_\gamma \frac{d\omega_\gamma^*}{dt} + \omega_\gamma^* \frac{d\omega_\gamma}{dt},$$

а из уравнения вихря следует, что

$$\frac{d\omega_\gamma}{dt} + J_\gamma + 2\Omega_b i m_\gamma \psi_\gamma = 0.$$

Так как $\omega = \Delta\psi$, то $\omega_\gamma = -c_\gamma \psi_\gamma$ и, следовательно,

$$\frac{d\omega_\gamma}{dt} + J_\gamma - \frac{2m_\gamma i\Omega_b}{c_\gamma}\omega_\gamma = 0,$$

$$\frac{d\omega_\gamma^*}{dt} + J_\gamma^* + \frac{2m_\gamma i\Omega_b}{c_\gamma}\omega_\gamma^* = 0. \tag{8}$$

Умножая первое уравнение (8) на ω_γ^*, второе – на ω_γ и складывая, получим

$$\frac{d}{dt}|\omega_\gamma|^2 + \omega_\gamma^* J_\gamma + \omega_\gamma J_\gamma^* = 0.$$

Далее

$$J_\gamma = \sum_\beta \omega_\beta M_{\beta\gamma}, \quad J_\gamma^* = \sum_\beta \omega_\beta^* M_{\beta\gamma}^*.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}|\omega_\gamma|^2 + \sum_\beta (\omega_\gamma^* \omega_\beta M_{\beta\gamma} + \omega_\beta^* \omega_\gamma M_{\beta\gamma}^*) = 0. \tag{8$'$}$$

Суммируя по γ, получим

$$\frac{d}{dt}\sum_\gamma |\omega_\gamma|^2 + \sum_\gamma \sum_\beta (\omega_\gamma^* \omega_\beta M_{\beta\gamma} + \omega_\beta^* \omega_\gamma M_{\beta\gamma}^*) = 0. \tag{9}$$

Но мы показали, что

$$M_{\beta\gamma} = -M_{\gamma\beta}^*.$$

Следовательно,

$$\sum_\gamma \sum_\beta (\omega_\gamma^* \omega_\beta M_{\beta\gamma} + \omega_\beta^* \omega_\gamma M_{\beta\gamma}^*) =$$

$$= \sum_{\gamma} \sum_{\beta} (\omega_\gamma^* \omega_\beta M_{\beta\gamma} - \omega_\beta^* \omega_\gamma M_{\gamma\beta}) =$$

$$= \sum_{\gamma} \sum_{\beta} \omega_\gamma^* \omega_\beta M_{\beta\gamma} - \sum_{\gamma} \sum_{\beta} \omega_\beta^* \omega_\gamma M_{\gamma\beta}.$$

Меняя во второй сумме γ на β, получаем, что обе суммы тождественны, и следовательно,

$$\frac{d}{dt} \sum_{\gamma} |\omega_\gamma|^2 = 0. \tag{10}$$

Покажем теперь, что конечномерный аналог энергии также сохраняется. Поскольку

$$E = -(\psi, \omega) \equiv -\frac{1}{4\pi} \int_S \psi \omega dS$$

и

$$\omega = \sum_{\gamma} \omega_\gamma Y_\gamma, \quad \omega_\gamma = -c_\gamma \psi_\gamma,$$

то

$$E = \sum_{\gamma} \frac{1}{c_\gamma} |\omega_\gamma|^2.$$

Умножим уравнение (8′) на $\dfrac{1}{c_\gamma}$ и просуммируем. Получим

$$\sum_{\gamma} \frac{d}{dt} \frac{1}{c_\gamma} |\omega_\gamma|^2 + \sum_{\gamma} \sum_{\beta} c_\gamma^{-1} (\omega_\gamma^* \omega_\beta M_{\beta\gamma} - \omega_\beta^* \omega_\gamma M_{\gamma\beta}) = 0.$$

Так как

$$M_{\beta\gamma} = \sum_{\alpha} \psi_\alpha L_{\beta\gamma\alpha} = -\sum_{\alpha} c_\alpha^{-1} \omega_\alpha L_{\beta\gamma\alpha},$$

$$M_{\gamma\beta} = \sum_{\alpha} \psi_\alpha L_{\alpha\gamma\beta} = -\sum_{\alpha} c_\alpha^{-1} \omega_\alpha L_{\alpha\gamma\beta},$$

то

$$\sum_\gamma \sum_\beta \sum_\alpha c_\gamma^{-1} c_\alpha^{-1} (\omega_\gamma^* \omega_\beta \omega_\alpha L_{\beta\gamma\alpha} - \omega_\beta^* \omega_\gamma \omega_\alpha L_{\gamma\beta\alpha}) = 0.$$

Рассмотрим сумму

$$\sum_\gamma \sum_\beta \sum_\alpha c_\gamma^{-1} c_\alpha^{-1} \omega_\beta^* \omega_\gamma \omega_\alpha L_{\gamma\beta\alpha} \equiv A.$$

Если мы поменяем (переобозначим) γ на α в этой сумме, то очевидно, что сумма не поменяется, то есть

$$A = \sum_\alpha \sum_\beta \sum_\gamma c_\gamma^{-1} c_\alpha^{-1} \omega_\beta^* \omega_\gamma \omega_\alpha L_{\alpha\beta\gamma}.$$

Но

$$L_{\gamma\beta\alpha} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_S \bar{Y}_\beta [\nabla Y_\alpha] \cdot \nabla Y_\gamma dS,$$

причем

$$[\nabla Y_\alpha] \cdot \nabla Y_\gamma \equiv J(Y_\gamma, Y_\alpha).$$

Поскольку якобиан – функция антисимметричная, то $J(Y_\gamma, Y_\alpha) = -J(Y_\alpha, Y_\gamma)$, и следовательно,

$$L_{\alpha\beta\gamma} = -L_{\gamma\beta\alpha}.$$

Итак, мы имеем $A = -A$, то есть $A = 0$. Так как $A = 0$, то и $A^* = 0$, и, следовательно, мы показали, что при симметричном усечении энергия есть также инвариант.

Лекция 9

Симметрии показателей Ляпунова

Пусть мы имеем некоторую конечномерную (галёркинскую) аппроксимацию уравнения вихря на сфере, которую запишем в виде

$$\frac{d\omega_i}{dt} = Q_i(\omega), \tag{1}$$

$$\omega_i|_{t=0} = \omega_{io}, \qquad i = 1, \ldots, N.$$

Линеаризуем систему относительно решения $\omega(t)$. Соответствующую линеаризованную систему запишем в виде

$$\frac{d\omega'}{dt} = A(\omega)\omega', \qquad \omega'|_{t=0} = \omega'_0 \tag{2}$$

(ω' – вектор в N-мерном пространстве). Вводя понятие разрешающего оператора $L(t)$, систему (2) можно записать следующим образом:

$$\omega'(t) = L(t)\omega'_0. \tag{3}$$

Согласно эргодической мультипликативной теореме Оселедеца [3] показатели Ляпунова системы (1) можно определить следующим образом:

$$\mu_k = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2t} \ln \lambda_k(L^*(t)L(t)). \tag{4}$$

Ясно, что матрица $L(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dL(t)}{dt} = A(\omega)L(t), \quad L(0) = E,$$

E – тождественная матрица.

Предположим, что наша система (1) имеет гамильтонову структуру (при этом, конечно, N – чётно). Известно, что для гамильтоновых систем выполняется следующее соотношение:

$$L^*(t)JL(t) = J, \tag{5}$$

где J – так называемая симплектическая единица:

$$J = \left\{ \begin{matrix} O & E \\ -E & O \end{matrix} \right\}.$$

Заметим, что J – ортогональная кососимметрическая матрица, так что

$$J = -J^T = -J^{-1}.$$

Из (5) следует, что

$$L^*(t) = JL^{-1}(t)J^{-1}$$

(J – матрица невырожденная), и

$$L(t) = J^{-1}(L^*(t))^{-1}J.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} L^*(t)L(t) = JL^{-1}(t)J^{-1}J^{-1}(L^*(t))^{-1}J = \\ = J(L^{-1}(t)(-E)(L^*(t))^{-1})(-J^{-1}) = \\ = J(L^*(t)L(t))^{-1}J^{-1}. \end{aligned} \tag{6}$$

Из (6) следует, что спектры L^*L и $(L^*L)^{-1}$ совпадают, и поскольку собственные числа матрицы $(L^*L)^{-1}$ и матрицы L^*L связаны соотношением

$$\lambda(L^*L)^{-1} = \frac{1}{\lambda(L^*L)},$$

то это означает, что спектры матриц L^*L и $(L^*L)^{-1}$ должны состоять из пар $(\lambda_i, \frac{1}{\lambda_i})$.

Таким образом, показатели Ляпунова системы (1) будут расположены симметрично относительно нуля. Поскольку свойство симметрии не зависит от t, то будут симметрично расположены и так называемые локальные показатели Ляпунова, вычисленные по формуле (4) при фиксированном t.

Предположим теперь, что наша система (1) может быть приведена к гамильтоновой форме с помощью некоторого невырожденного (в общем случае нелинейного) преобразования

$$\omega = F(\eta)$$

с невырожденной матрицей Якоби

$$\left\{\frac{\partial F}{\partial \eta}\right\} \equiv Y.$$

Решения линеаризованных задач для ω и η должны быть связаны соотношением

$$\omega' = Y(\eta)\eta'.$$

Это означает, что и фундаментальные решения линеаризованных систем будут связаны соотношением

$$\omega_i' = Y\eta_i', \quad \text{или} \quad \eta_i' = Y^{-1}\omega_i'.$$

Мы знаем, что показатели Ляпунова определяются через нормы фундаментальных решений. Для приведённой системы будем иметь

$$\lambda_i(\eta) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \frac{\|\eta_i'\|}{\|\eta_{io}'\|}.$$

Вычислим показатели Ляпунова для исходной системы:

$$\sigma_i(\omega) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\omega_i'\|}{\|\omega_{io}'\|} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|Y\eta_i'\|}{\|Y\eta_{io}'\|} \le \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|Y\|\|\eta_i'\|}{\|Y\eta_{io}'\|}.$$

Если норма $\|Y\|$ ограничена константой, то

$$\sigma_i(\omega) \le \lambda_i(\eta).$$

С другой стороны,

$$\lambda_i(\eta) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|Y^{-1}\omega_i'\|}{\|\eta_{io}'\|} \le \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|Y^{-1}\|\|\omega_i'\|}{\|Y^{-1}\omega_{io}'\|} \le \sigma_i(\omega),$$

если ограничена норма $\|Y^{-1}\|$. Следовательно, $\sigma_i = \lambda_i$.

Заметим, что мы можем говорить только о симметрии глобальных показателей Ляпунова в исходной системе уравнений. Это заключение будет неверным относительно локальных показателей.

Лекция 10

Уравнения двумерной вязкой несжимаемой жидкости

Уравнения Навье-Стокса вязкой несжимаемой жидкости имеют вид

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \mu\Delta\vec{u},$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0. \tag{1}$$

В двумерном случае (как и в случае невязкой жидкости) мы можем ввести функцию тока, определив через неё компоненты вектора скорости и вертикальную компоненту завихренности. В декартовой системе координат будем иметь

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\psi}{\partial x},$$

$$\omega = \Delta\psi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

В терминах функции тока уравнение (1) будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + J(\psi, \Delta\psi) = \mu\Delta^2\psi. \tag{2}$$

Если рассматривать уравнение (2) в периодическом канале, то по координате x, как и раньше, в качестве краевых условий можно использовать условие периодичности функции ψ и всех её производных, а на вертикальных границах канала мы уже должны ставить условия прилипания $u, v = 0$ при $y = y_1, y_2$. В терминах функции тока эти условия будут иметь вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = y_1, y_2.$$

Исторически в гидродинамике для исследования устойчивости стационарных решений уравнения (2) использовалось линейное приближение. В частности, уравнение (2) имеет решение, которое называется течением Пуазейля, которое зависит только от координаты y. (Напомним, что в невязком случае любая гладкая функция, зависящая только от координаты y, есть стационарное решение уравнений динамики двумерной жидкости.) Уравнения Навье-Стокса для $u = u(y)$ в естественных переменных будут иметь вид

$$\begin{gathered} -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Из второго уравнения системы (3) следует, что $p = p(x)$. Из первого уравнения системы (3) в силу независимости u от x и p от y получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = \text{const}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lambda y + a, \quad u = \frac{\lambda y^2}{2} + ay + b.$$

Если ширина канала есть h и $u = 0$ при $y = 0$ и $y = h$, то

$$u = \frac{\lambda}{2}(y-h)y,$$

$$\text{или} \quad u = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}(y-h)y.$$

Чтобы u было больше нуля, необходимо, чтобы $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$. Пусть

$$\psi = \bar{\psi}(y)$$

$$\text{и} \quad u = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} = \bar{u}(y).$$

Будем искать решение (2) в виде $\psi = \bar{\psi} + \psi'$.

Линеаризованное относительно $\bar{\psi}$ уравнение (2) будет иметь вид

$$\frac{\partial \Delta\psi'}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \Delta\psi'}{\partial x} + \frac{\partial \psi'}{\partial x}\frac{\partial \Delta\bar{\psi}}{\partial y} = \mu\Delta^2\psi'. \tag{3$'$}$$

Решение (3$'$) будем искать в виде

$$\psi' = \varphi(y)e^{ik(x-ct)}.$$

Уравнение для $\varphi(y)$ будет иметь вид

$$\mu\left(\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4} - 2k^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + k^4\varphi\right) =$$

$$= ik\left[(\bar{u}-c)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - k^2\varphi\right) - \varphi\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}\right]. \tag{4}$$

Это так называемое уравнение Орра-Зоммерфельда. Мы не будем заниматься исследованием методов его решения, поскольку нашей главной задачей будет исследование устойчивости решений системы уравнений, описывающей динамику вязкой жидкости на вращающейся сфере. Принципиальное отличие здесь заключается в том, что сфера есть многообразие без края. Рассматривая на сфере вязкую жидкость, мы в принципе можем иметь так называемый невязкий предел, устремляя μ к нулю. В случае наличия твёрдых границ (стенок) мы этого сделать не можем, так как для вязкого случая из-за условия прилипания на границах происходит образование пограничных слоев и при $\mu \to 0$ градиент скорости у границ должен нарастать. В этом случае вязкость становится источником неустойчивости.

Первая задача, которую мы должны решить, – это задача о возможности использования линейного приближения в случае вязкой жидкости для исследования устойчивости и неустойчивости основного потока.

Итак, система уравнений, которую мы будем исследовать, имеет вид

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + J(\psi, \Delta\psi + l) - \mu\Delta^2\psi = F, \tag{5}$$

где функция F от времени не зависит. Стационарное решение $\bar{\psi}$ удовлетворяет, очевидно, уравнению

$$J(\bar{\psi}, \Delta\bar{\psi} + l) - \mu\Delta^2\bar{\psi} = F. \tag{6}$$

Будем считать, что $\Delta\bar{\psi} \in C^1(S)$, то есть является непрерывно-дифференцируемой функцией. Перепишем уравнение (2) в отклонениях от стационарного решения

$$\frac{\partial \Delta\psi'}{\partial t} + J(\bar{\psi}, \Delta\psi') + J(\psi', \Delta\bar{\psi} + l) + J(\psi', \Delta\psi') - \mu\Delta^2\psi' = 0. \tag{7}$$

Если $\Delta\psi' = \omega'$, $\psi' = \Delta^{-1}\omega'$, то (7) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t} + A(\bar{\omega})\omega' = B(\omega'), \tag{8}$$

где $A(\omega)$ – линейный оператор

$$A(\bar{\omega})\omega' = J(\Delta^{-1}\bar{\omega}, \omega') + J(\Delta^{-1}\omega', \bar{\omega} + l) - \mu\Delta\omega',$$

а $B(\omega')$ – оператор нелинейный

$$B(\omega') = -J(\Delta^{-1}\omega', \omega').$$

Нам необходимо сформулировать условия, при которых нулевое решение системы (8) устойчиво или неустойчиво. Особенность задачи заключается прежде всего в том, что нам необходимо выбрать пространства, в которых мы должны формулировать те или иные утверждения. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть спектр оператора A содержится в правой полуплоскости

$$Re\lambda(A) > \lambda_0 > 0.$$

Тогда стационарное решение $\bar{\omega} = 0$ системы (4) асимптотически устойчиво в $W_p^k(S)$, $p > 1$, $k \geq 1$. Если имеются точки спектра оператора A, расположенные в левой полуплоскости, то это решение неустойчиво.

Мы не будем приводить доказательства этой теоремы ввиду громоздкости (это доказательство можно найти в [1]), отметим только, что подобное утверждение можно сформулировать и для других типов пространств [1]. Для пространства Соболева $W_p^k(S)$, $p > 1$, $k \geq 1$, можно также показать, что оператор A – секториальный и его спектр содержится в области, определяемой неравенствами

$$Re\lambda \geq 2\mu - \beta_0,$$

$$Im\lambda \leq \alpha_0\sqrt{\frac{Re\lambda + \beta_0}{\mu}} + \beta_0 + \Omega_b,$$

где

$$\beta_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\max_S |\nabla(\Delta\bar{\psi})|,$$

$$\alpha_0 = \max_S |\nabla\bar{\psi}|.$$

Следствием этих оценок является следующее утверждение.

Утверждение 2. Если $\frac{1}{\sqrt{2}}\max|\nabla(\Delta\bar{\psi})| \leq C < 2\mu$, то решение $\bar{\psi}$ асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Лекция 11

Аттракторы уравнений двумерной вязкой несжимаемой жидкости на вращающейся сфере

Начиная с этой лекции, мы будем изучать устойчивость предельных инвариантных множеств, к которым стремится решение системы уравнений двумерной вязкой несжимаемой жидкости при $t \to \infty$. Для того, чтобы хоть как-то справиться с этой задачей, нужно обсудить много новых понятий. Будем рассматривать динамическую систему, описываемую уравнением

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\psi, \omega + l) = \mu \Delta \omega + f \tag{1}$$

с начальным условием

$$\omega|_{t=0} = \omega_0$$

на сфере единичного радиуса, где правая часть f не зависит от времени, $l = 2\Omega \sin\varphi$, так что уравнение (1) может быть переписано в виде

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\psi, \omega) + 2\Omega \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = \mu \Delta \omega + f. \tag{2}$$

В предыдущих лекциях мы показали, что

$$\iint\limits_S \Delta\psi \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} dS = 0.$$

Умножая (2) скалярно на ω, получим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial(\omega,\omega)}{\partial t} = \mu(\Delta\omega,\omega) + (f,\omega),$$

или

$$\frac{1}{2}\frac{\partial(\omega,\omega)}{\partial t} = -\mu(\nabla\omega,\nabla\omega) + (f,\omega).$$

Ясно, что если $f \equiv 0$, то $\|\omega\|^2 \equiv (\omega,\omega)$ будет стремиться к нулю при $t \to \infty$, то есть нуль будет предельным множеством уравнения (1), если $f \equiv 0$. (Как мы договорились ранее, мы рассматриваем динамику на подпространстве, ортогональном константе.) Поскольку $\|\omega\|$ есть функция Ляпунова в этом случае, то нуль будет асимптотически устойчивым решением уравнения (1) при $f \equiv 0$. Задача заключается в том, чтобы понять, какие предельные множества возникают при $f \neq 0$ и как формулировать определения их устойчивости.

Введём определение расстояния точки от множества, полагая, что расстояние между двумя точками некоторого метрического пространства X задано. Будем обозначать это расстояние через $\rho(x,y), x,y \in X$. Пусть A – некоторое множество, $A \subset X$. Расстоянием от точки X до множества A называется число

$$\rho(x,A) = \inf_{a\in A} \rho(x,a).$$

Через $O_\varepsilon(A)$ обозначим ε-окрестность множества A, то есть

$$O_\varepsilon(A) = \{x : \rho(x,A) < \varepsilon\}.$$

Введём определение расстояния между множествами A и B:

$$\mathrm{dist}_x(A, B) = \sup_{a \in A} \rho(a, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \rho(a, b).$$

Операция dist обладает следующими свойствами:

1) $\mathrm{dist}_x(A, B) \neq \mathrm{dist}_x(B, A)$;

2) $\mathrm{dist}_x(A, B) = 0$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$;

3) если $\mathrm{dist}_x(A, B) < \varepsilon$, то $A \subset O_\varepsilon(B)$.

Введём понятие хаусдорфового расстояния между множествами A и B:

$$\mathrm{dist}_x^H(A, B) = \max \left\{ \mathrm{dist}_x(A, B), \mathrm{dist}_x(B, A) \right\}.$$

Хаусдорфово расстояние обладает всеми свойствами метрики, то есть симметрично, удовлетворяет неравенству треугольника и обращается в нуль тогда и только тогда, когда $A = B$.

Для удобства записи перепишем уравнение (1) в терминах разрешающего оператора

$$\omega(t) = S_t \omega_0. \tag{3}$$

В силу автономности исходной системы разрешающий оператор будет обладать групповым свойством:

$$S_{t+\tau} = S_t S_\tau.$$

Далее, пространство, которому принадлежит решение – $\omega(t)$, будем называть фазовым пространством, а кривую, которую описывает решение ω при $t > t_0$ – траекторией системы (1) в фазовом пространстве. Введём понятие поглощающего множества.

Определение 1. Множество $B_\alpha \subset X$ называется поглощающим, если для любого ограниченного множества $B \subset X$ найдется $T(B)$ такое, что

$$S_t B \subset B_\alpha, \quad \forall t \geq T(B).$$

Или другими словами, любое ограниченное множество пространства X рано или поздно втянется в поглощающее множество B_α и останется в нём навсегда.

Систему (3) будем называть диссипативной, если она имеет поглощающее множество.

Покажем, что система (1) диссипативна. В качестве фазового пространства будем рассматривать гильбертово пространство H. Умножая уравнение (1) скалярно на ω, получим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\|\omega\|^2}{\partial t} = \mu(\Delta\omega, \omega) + (f, \omega). \tag{4}$$

Поскольку

$$(f, \omega) \leq \|f\|\|\omega\| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{\|f\|^2}{\varepsilon} + \varepsilon\|\omega\|^2\right),$$

$$(\Delta\omega, \omega) \leq \lambda_{\max}(\Delta)(\omega, \omega) = -2\|\omega\|^2,$$

то будем иметь

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\omega\|^2 \leq -2\mu\|\omega\|^2 + \frac{1}{2}\frac{\|f\|^2}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2}\|\omega\|^2,$$

или

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\omega\|^2 \leq -2\left(\mu - \frac{\varepsilon}{4}\right)\|\omega\|^2 + \frac{1}{2}\frac{\|f\|^2}{\varepsilon}. \tag{5}$$

Положим $\varepsilon = 2\mu$. Неравенство (5) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\|\omega\|^2 \leq -2\mu\|\omega\|^2 + \frac{\|f\|^2}{2\mu}. \tag{5'}$$

Отсюда

$$\|\omega\|^2 \leq \|\omega_0\|^2 e^{-2\mu t} + \frac{\|f\|^2}{4\mu^2}(1 - e^{-2\mu t}). \tag{6}$$

Действительно, выражение (5′) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\|\omega\|^2 e^{2\mu t} \leq \frac{\|f\|^2}{2\mu} e^{2\mu t}.$$

Интегрируя это выражение от нуля до t, получим неравенство (6).

Выберем $T(\delta)$ таким, чтобы

$$e^{-2\mu T(\delta)} < \delta.$$

Тогда

$$\|\omega\|^2 \leq \|\omega_0\|^2 \delta + \frac{\|f\|^2}{4\mu^2}.$$

Если $\|\omega_0\| < R$, то поглощающее множество будет определяться неравенством

$$\|\omega\|^2 \leq R^2 \delta + \frac{\|f\|^2}{4\mu^2}.$$

Полагая $R^2\delta < \frac{\|f\|^2}{4\mu^2}$, будем иметь

$$\delta < \frac{\|f\|^2}{4R^2\mu^2},$$

или

$$T(\delta) > \frac{1}{2\mu} \ln \frac{4R^2\mu^2}{\|f\|^2}.$$

Таким образом, для каждого R мы определили время T, при котором траектория попадёт в поглощающее множество, определяемое неравенством

$$\|\omega\|^2 \leq \frac{\|f\|^2}{2\mu^2}, \tag{7}$$

и, следовательно, показали, что динамическая система, описываемая уравнением (1), диссипативна.

Введём теперь определение глобального аттрактора.

Определение 2. Множество $A \subset X$ называется глобальным аттрактором полугруппы $S_t, t \geq 0$, если:

1) A – компактно;
2) A – инвариантно, то есть $S_t A = A$;
3) A притягивает каждое ограниченное множество $B \subset X$; это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $T(\varepsilon, B)$ такое, что $S_t B \subset O_\varepsilon(A), \forall t \geq T(\varepsilon, B)$.

Таким образом, глобальный аттрактор обладает двумя характеристиками: притяжением и инвариантностью. Если в определении аттрактора упор делать на свойство притяжения, то среди притягивающих множеств аттрактор будет минимальным притягивающим множеством. Если же упор делать на инвариантность аттрактора, то среди всех инвариантных множеств глобальный аттрактор будет максимальным. Это означает, что глобальный аттрактор может состоять из локальных аттракторов, область притяжения которых есть только некоторое подмножество из пространства X. Динамику системы мы можем также разбить на два класса – притяжение к аттрактору и динамика на аттракторе. При этом время притяжения к аттрактору играет фундаментальную роль, определяющую корректность поставленной задачи. На этой проблеме мы остановимся ниже.

Несколько слов об истории изучения аттракторов динамических систем. Совершенно естественно, что вначале она была связана с изучением нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Основателем качественной теории дифференциальных уравнений является Анри Пуанкаре. Он, в частности, показал, что для автономных систем второго порядка предельными множествами могут быть либо точка, либо предельный цикл (замкнутая кривая в фазовом пространстве).

В 1963 году метеоролог Эдвард Лоренц опубликовал работу, в которой продемонстрировал на примере системы третьего порядка существование предельного множества, не являющегося ни точкой, ни циклом. Более того, Лоренц показал, что динамика на этом множестве хаотична, а сама структура его подобна структуре канторовского совершенного множества. Аттракторы такого сорта получили название странных аттракторов.

Общей формулировкой понятия глобального аттрактора для систем уравнений в частных производных и доказательством его существования для двумерных уравнений Навье-Стокса мы обязаны О.А.Ладыженской.

Фактически аттрактор диссипативной системы можно найти по формуле

$$A = \bigcap_{t>0} S_t(B_\alpha),$$

где B_α – поглощающее множество.

Если B_α компактное множество (например, замкнутое ограниченное множество в конечномерном пространстве), то A всегда непусто. Другими словами, для диссипативных конечномерных систем существование аттрактора является фактом почти тривиальным. Важно подчеркнуть, что если пространство H, в котором действует отображение S_t, связно, то A – связное множество. Этот факт будет нами использован в дальнейшем.

Следуя общей тенденции изложения, принятой в данном курсе лекций, сформулируем основные результаты, связанные с исследованием аттракторов системы уравнений, описывающих динамику двумерной несжимаемой жидкости на вращающейся сфере.

Утверждение 1. Полугруппа S_t (1) обладает глобальным аттрактором A в пространстве H_0^2. Аттрактор A является компактным связным множеством в H_0^2.

Здесь под пространством H_0^2 понимается пространство функций, определенных на единичной сфере с нормой

$$\|f\|_{H_0^2} = \left(\sum_{n=1} \sum_{|m| \leq n} \lambda_n^2 f_{mn}^2 \right)^{1/2},$$

где λ_n – собственные числа оператора Лапласа на сфере, а f_{mn} – коэффициенты Фурье разложения функции f в ряд по сферическим гармоникам.

Первый вопрос, на который нужно ответить, – какова размерность этого аттрактора? Поскольку аттрактор – множество, как правило, негладкое и даже часто фрактальное, то понятие размерности не является тривиальным. Существует много подходящих определений размерности. Приведём определение хаусдорфовой и фрактальной размерности множеств.

Пусть X – компактное множество в метрическом пространстве H. Покроем это множество шарами $B_{r_j}(x_j)$ радиуса $r_j \leq \varepsilon$ с центрами в точках $x_j \in H$. Полученное покрытие обозначим через $u(\varepsilon)$. Очевидно,

$$X \subseteq u(\varepsilon) = \bigcup_{j=1}^{M(\varepsilon,\cup)} B_{r_j}(x_j).$$

Составим выражение

$$\mu_H(X, \varepsilon, \cup) = \sum_{j=1}^{M(\varepsilon,\cup)} r_j^d,$$

где $d \geq 0$ – некоторый параметр.

Это выражение определяет "объём" множества $\cup$, состоящего из шаров радиуса $r_j \leq \varepsilon$ размерности d, покрывающих X. Теперь из всех покрытий множества X d-мерными шарами радиуса $r_j \leq \varepsilon$ выберем покрытие, содержащее наименьшее число указанных шаров. Пусть

$$\mu(H, d, \varepsilon) = \inf \mu_H(X, \varepsilon, \cup) = \inf \sum_{j=1}^{M} r_j^d = \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} r_j^d.$$

Хаусдорфовой мерой размерности d множества X называется число

$$\mu_H(X, d) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mu_H(X, d, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} r_j^d.$$

Наименьшее d, при котором этот ряд сходится (при прочих равных условиях), называется хаусдорфовой размерностью множества X

$$d_H(X) \equiv \dim_H X = \{d : \inf_d \mu_H(X, d) < \infty\}.$$

Если $r = \varepsilon$ для всех шаров, то мы приходим к понятию фрактальной размерности. В этом случае будем иметь

$$\mu_H = \lim_{\varepsilon \to 0} N_\varepsilon \varepsilon^d,$$

μ_H – конечная величина

$$\ln \mu_H = \lim_{\varepsilon \to 0} (\ln N_\varepsilon + d \ln \varepsilon),$$

и следовательно,

$$d_F = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup \frac{\ln N_\varepsilon}{\ln 1/\varepsilon}.$$

Из самого построения следует, что $d_H \leq d_F$.

Размерность аттрактора конечномерной диссипативной системы можно определить, используя понятие показателей Ляпунова. Действительно, на аттракторе объем фазового пространства "растягивается" вдоль направлений, соответствующих положительным показателям, и "сжимается" вдоль направлений, соответствующих отрицательным показателям. Все "положительные" направления должны принадлежать аттрактору, следовательно, размерность аттрактора должна быть больше числа положительных показателей Ляпунова. Поскольку в среднем фазовый объем на аттракторе должен сохраняться, то оценку сверху для размерности аттрактора можно получить, например, с помощью формулы, принадлежащей Каплану и Йорку [10]:

$$d_k = j + |\lambda_{j+1}|^{-1} \sum_{k=1}^{j} \lambda_k,$$

где число j определяется из условия

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_j \geq 0,$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_j + \lambda_{j+1} < 0$$

(все показатели Ляпунова λ_i упорядочены по убыванию).

В настоящее время получены различные оценки различных размерностей аттрактора A системы (1). Все они имеют вид

$$d(A) \leq C_1 G^{2/3} (C_2 + \ln G)^{1/3}, \tag{8}$$

где $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ – константы (для различных определений размерностей они различны), а G – обобщенное число Грассгофа

$$G = \frac{\|f\|}{2\mu^2}.$$

Из формулы (8) можно получить одно интересное следствие – определить число Грассгофа, при котором аттрактором будет точка в фазовом пространстве. Для этого, очевидно, достаточно решить равенство

$$C_2 + \ln G = 0.$$

Отсюда

$$G = e^{-C_2},$$

и следовательно, справедливо утверждение.

Утверждение 2. Если

$$\frac{\|f\|}{2\mu^2} \leq e^{-C_2},$$

то уравнение (1) имеет единственное стационарное решение, являющееся глобальным аттрактором.

Единственность стационарного решения следует из того факта, что все стационарные точки принадлежат глобальному аттрактору. Поскольку аттрактор связное множество, то если стационарных точек несколько, они должны быть соединены через свои устойчивые и неустойчивые многообразия, то есть размерность аттрактора должна быть больше нуля.

Лекция 12

Устойчивость аттракторов уравнений двумерной вязкой несжимаемой жидкости на вращающейся сфере

В предыдущей лекции мы определили аттрактор как множество. Следовательно, под устойчивостью аттрактора мы должны понимать устойчивость множества. Последняя подразумевает устойчивость по отношению к возмущениям параметра динамической системы, порождающей этот аттрактор. Мы также определили понятие расстояния между множествами и показали, что хаусдорфово расстояние имеет реальные свойства метрики. Таким образом, нашей задачей будет формирование условий, при которых аттракторы динамических систем близки в хаусдорфовой метрике, если мы слегка возмутим параметры этих систем. Заметим, что при этом допускаются разного рода бифуркации типа бифуркации Хопфа – образование цикла из точек и тому подобное. Другими словами, при изучении устойчивости аттрактора как множества устойчивость динамики на аттракторе не изучается. К этому вопросу мы обратимся ниже.

Итак, пусть разрешающий оператор нашей системы $S_t(\lambda)$ зависит от некоторого параметра $\lambda \in \Lambda$. При этом $S_t \equiv S_t(\lambda_0)$ и выполнены следующие условия (I):

1. Λ – некоторый метрический компакт с метрикой ρ и

λ_0 является неизолированной точкой Λ.

2. Для каждого $\lambda \in \Lambda$ соответствующая диссипативная система имеет поглощающее множество B_λ и непустой аттрактор A_λ.

3. Существует ограниченное поглощающее множество B_α, содержащее все B_λ.

4. Пусть семейство операторов $S_t(\lambda)$ является асимптотически слабо сходящимся: $\forall\varepsilon > 0$ и $\forall T > 0$, $\exists\delta > 0$ такое, что в некоторой точке $\tilde{T} > T$ имеет место неравенство

$$\|S_{\tilde{T}}(\lambda, h) - S_{\tilde{T}}(\lambda_0, h)\| \leq \varepsilon, \tag{1}$$

$$\forall\lambda \in O_{\delta_\varepsilon}(\lambda_0), \forall h \in B_\alpha.$$

Если $S_t(\lambda)$ обладает непустым аттрактором, то любая замкнутая окрестность $O_\varepsilon(A_\lambda)$ является поглощающим множеством (по определению), то есть $\forall\varepsilon > 0$ и $h \in B$, B – ограниченное замкнутое множество, $\exists T = T(\lambda, \varepsilon, B)$ (T – время притяжения в $O_\varepsilon(A_\lambda)$) такое, что $S_T(\lambda, h) \in O_\varepsilon(A_\lambda)$ при $t \geq T$, $\forall h \in B$. Будем считать, что известна возрастающая при $\varepsilon \to 0$ функция $\Theta(\lambda, \varepsilon, B_\alpha)$, значения которой есть время притяжения множества B_α в ε-окрестность A_λ.

Теорема [6]. Пусть выполнены условия I. Тогда аттрактор $A(\lambda)$ непрерывно зависит от λ (непрерывно в хаусдорфовой метрике) в точке λ_0 тогда и только тогда, когда функция $\Theta(\lambda, \varepsilon, B_\alpha)$ равномерно ограничена по λ для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta_\varepsilon > 0,$$

$$\sup \Theta(\lambda, \varepsilon, B_\alpha) \leq T_\varepsilon < \infty,$$

$$\lambda \in O_{\delta_\varepsilon}(\lambda_0).$$

Достаточность. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По условию теоремы найдется такая окрестность $O_{\delta_1}(\lambda_0)$, что $\Theta\left(\lambda_1, \frac{\varepsilon}{2}, B_\alpha\right) \leq T_{\varepsilon/2}$ для $\forall \lambda_1 \in O_{\delta_1}(\lambda_0)$. Это значит, что

$$\mathrm{dist}(S_t(\lambda_1, B_\alpha), A_{\lambda_1}) \leq \varepsilon/2 \quad \forall t \geq T_{\varepsilon/2}.$$

Из условия слабой асимптотической сходимости следует, что

$$\exists \delta_2 < \delta_1 \quad \text{такое, что} \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in O_{\delta_2}(\lambda_0),$$

в некоторой точке $\tilde{T}_{\varepsilon/2} \geq T_{\varepsilon/2}$, выполняется неравенство

$$\|S_{\tilde{T}}(\lambda_1, h) - S_{\tilde{T}}(\lambda_2, h)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall h \in B_\alpha.$$

Отсюда

$$\mathrm{dist}(S_{\tilde{T}}(\lambda_2, h), A_{\lambda_1}) \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq B_\alpha.$$

Поскольку

$$A_{\lambda_2} \in S_{\tilde{T}}(\lambda_2, B_\alpha),$$

то $\mathrm{dist}(A_{\lambda_2}, A_{\lambda_1}) \leq \varepsilon$. В силу произвольности λ_1 и λ_2 имеем

$$\mathrm{dist}(A_{\lambda_0}, A_\lambda) \leq \varepsilon,$$

$$\mathrm{dist}(A_\lambda, A_{\lambda_0}) \leq \varepsilon,$$

что приводит к неравенству

$$\mathrm{dist}_H(A_{\lambda_0}, A_\lambda) \leq \varepsilon, \quad \forall \lambda \in O_{\delta_2}(\lambda_0).$$

Необходимость. Пусть аттрактор A_λ непрерывно зависит от параметра λ в точке λ_0. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Рассмотрим произвольное $T_{\varepsilon/3} = \Theta(\lambda_0, \varepsilon/3, B_\alpha)$. По определению имеем

$$S_t(\lambda_0, B_\alpha) \subset O_{\varepsilon/3}(A_{\lambda_0}), \quad \forall t \geq T_{\varepsilon/3}. \tag{1'}$$

В силу непрерывности аттрактора в точке λ_0 $\exists \delta > 0$ такое, что

$$\mathrm{dist}_H(A_{\lambda_0}, A_\lambda) \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall \lambda \in O_\delta(\lambda_0).$$

Так как верно $(1')$, то

$$S_t(\lambda_0, B_\alpha) \subset O_{2\varepsilon/3}(A_\lambda), \quad \forall t \geq T_{\varepsilon/3}, \quad \forall \lambda \in O_\delta(\lambda_0).$$

Из условия асимптотически слабой сходимости операторов следует, что $\exists \delta_1 \leq \delta$ такое, что при некотором конечном $\tilde{T}_{\varepsilon/3} \geq T_{\varepsilon/3}$ имеем

$$\|S_{\tilde{T}_{\varepsilon/3}}(\lambda_1, h) - S_{\tilde{T}_{\varepsilon/3}}(\lambda_0, h)\| \leq \varepsilon/3, \quad \forall h \in B_\alpha, \quad \lambda \in O_{\delta_1}(\lambda_0).$$

Отсюда имеем включение

$$S_{\tilde{T}_{\varepsilon/3}}(\lambda, B_\alpha) \subset O_\varepsilon(A_\lambda).$$

С учетом вложения

$$S_{\tilde{T}_{\varepsilon/3}+\tau}(\lambda, B_\alpha) \subset S_{\tilde{T}_{\varepsilon/3}}(\lambda, B_\alpha)$$

при всех $\tau > 0$. Это означает, что для произвольного $\lambda \in O_{\delta_1}(\lambda_0)$ верна оценка $\Theta(\lambda_0, \varepsilon, B_\alpha) \leq \tilde{T}_{\varepsilon/3} < \infty$.

Условие устойчивости аттрактора системы можно принять за определение корректности постановки исходной задачи. Поясним это утверждение.

Диссипативные системы, и в частности рассматриваемое нами уравнение

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\psi, \omega + l) = \mu \Delta \omega + f, \tag{2}$$

подразумевают сток энергии, который в данном уравнении описывается членом $\mu\Delta\omega$, и внешний источник энергии f, который не зависит от ω и времени. Это означает, что при постановке задачи (2) мы предполагаем, что "обратное воздействие" ω на f очень мало и им можно пренебречь. Мы также предполагаем, что характерное время изменения f настолько мало, что на временных масштабах, на которых мы рассматриваем задачу (2), им можно пренебречь. Следовательно, мы неявно предполагаем, что существует T_* такое, что все интересующие нас проблемы должны рассматриваться на временах $t < T_*$. В этом смысле время притяжения к аттрактору при всех физически мыслимых значениях параметров задачи должно быть также меньше T_*, в противном случае такая задача не может быть решена, если нас интересует динамика, связанная с аттрактором.

К сожалению, доказать, что в общем смысле для задачи (2) время притяжения к аттрактору равномерно ограничено, к настоящему времени не удалось. Однако в случае малых чисел Грассгофа, при которых, как мы показали в предыдущей лекции, уравнение (2) имеет в качестве глобального аттрактора одну стационарную точку, можно показать, что имеет место экспоненциальное притяжение к аттрактору, из которого следует существование равномерно ограниченного времени притяжения в ε-окрестность аттрактора и, следовательно, устойчивость аттрактора к малым возмущениям параметров задачи.

Итак, рассмотрим уравнение вихря на сфере

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\psi, \omega) + 2\Omega \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = \mu \Delta \omega + f \tag{3}$$

с такими условиями на f, что аттрактором системы (3) является стационарная точка, удовлетворяющая уравнению

$$J(\bar{\psi}, \bar{\omega}) + 2\Omega \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \lambda} = \mu \Delta \bar{\omega} + f. \tag{4}$$

Пусть $\omega = \bar{\omega} + \omega'$. Уравнение для ω' будет иметь вид

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t} + J(\psi', \bar{\omega}) + J(\bar{\psi}, \omega') + 2\Omega \frac{\partial \psi'}{\partial \lambda} = \mu \Delta \omega'. \tag{5}$$

Умножим (5) скалярно на ω'. Получим

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|\omega'\|^2 + (J(\psi', \bar{\omega}), \omega') = \mu (\Delta \omega', \omega'). \tag{6}$$

Основная идея доказательства состоит в том, что мы должны сформулировать условия на $\bar{\omega}$ такие, что

$$-(J(\psi', \bar{\omega}), \omega') + \mu(\Delta\omega', \omega') \le -\gamma\|\omega'\|^2,$$

$$\gamma > 0.$$

В этом случае будет справедливо неравенство

$$\frac{\partial\|\omega'\|^2}{\partial t} \le -2\gamma\|\omega'\|^2$$

и, следовательно,

$$\|\omega'\|^2 \le e^{-2\gamma t}\|\omega_0'\|^2. \tag{7}$$

Из (7) уже следует равномерная ограниченность времени притяжения в окрестность аттрактора из любого множества $\|\omega'\|^2 \le R^2$ и, как следствие, устойчивость стационарной точки как по Ляпунову, так и к малым постоянно действующим возмущениям параметров задачи (3).

Справедливы неравенства

$$\mu(\Delta\omega', \omega') \le -2\mu\|\omega'\|^2,$$

$$|(J(\psi', \bar{\omega}), \omega')| \le \|\omega'\|\|\bar{\omega}\|\|\omega'\|$$

(см. [4]). Таким образом, мы имеем

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\omega'\|^2 \le -2\mu\|\omega'\|^2 + \|\bar{\omega}\|\|\omega'\|^2 = -2\mu\left(1 - \frac{\|\bar{\omega}\|}{2\mu}\right)\|\omega'\|^2.$$

Умножая (4) скалярно на $\bar{\omega}$, будем иметь

$$\mu(\Delta\bar{\omega}, \bar{\omega}) = (f, \bar{\omega}).$$

Отсюда

$$2\mu\|\bar{\omega}\|^2 \le \mu|(\Delta\bar{\omega}, \bar{\omega})| \le \|f\|\|\bar{\omega}\|,$$

или
$$\|\bar{\omega}\| \leq \frac{\|f\|}{2\mu}.$$
Следовательно, условие экспоненциального притяжения будет иметь вид
$$\frac{\|f\|}{4\mu^2} < 1.$$

Лекция 13

Стационарные решения галёркинских приближений двумерных уравнений вязкой несжимаемой жидкости и их устойчивость

В настоящей лекции мы рассмотрим проблему устойчивости аттракторов галёркинских приближений уравнения баротропного вихря на сфере, когда эти аттракторы являются стационарными точками. Прежде чем перейти к исследованию этой проблемы, напомним один общий результат, имеющий место для систем обыкновенных уравнений. Пусть имеется система обыкновенных уравнений

$$\frac{du}{dt} = B(u), \quad u \in R^N, \tag{1}$$

и пусть $B(u)$ – достаточно гладкая функция, такая что

$$(B(u), u) < 0 \quad \text{для всех} \quad u : |u| \geq r$$

и

$$B(u) \neq 0 \quad \text{для} \quad |u| = r.$$

Тогда имеет место следующее утверждение [2]:

Утверждение. Система (1) имеет по крайней мере одно стационарное решение. Число стационарных решений, таких что якобиан $\left|\frac{\partial B_i}{\partial u_j}\right| \neq 0$, нечётно: $M = 2m + 1$. При этом среди всех $M = 2m+1$ решений по крайней мере m решений неустойчивы по Ляпунову.

Покажем, что галёркинские аппроксимации уравнения

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\Delta^{-1}\omega, \omega + l) = \mu\Delta\omega + f \tag{2}$$

удовлетворяют условию теоремы. Пусть

$$\omega = \sum_n \omega_n Y_n,$$

где Y_i – сферические гармоники, $i = 1, \ldots, N$,

$$\Delta Y_n = -\lambda_n Y_n, \quad \lambda_n = n(n+1).$$

Пусть также

$$f = \sum_n f_n Y_n, \quad J = \sum_n J_n Y_n.$$

Система уравнений для коэффициентов Фурье ω_n будет иметь вид

$$\begin{gathered} \frac{\partial \omega_n}{\partial t} + J_n - \frac{2\Omega_b i m_n \omega_n}{\lambda_n} + \mu\lambda_n\omega_n = f_n, \\ \\ \frac{\partial \omega_n^*}{\partial t} + J_n^* + \frac{2\Omega_b i m_n \omega_n^*}{\lambda_n} + \mu\lambda_n\omega_n^* = f_n^*. \end{gathered} \tag{3}$$

Из (3) следует (см. лекцию 8), что

$$\sum_n \frac{\partial}{\partial t}|\omega_n|^2 + 2\mu \sum_n \lambda_n |\omega_n|^2 - \sum_n (f_n\omega_n^* + f_n^*\omega_n) = 0.$$

Таким образом, в данном конкретном случае

$$(B(\omega),\omega) = -2\mu\sum_n \lambda_n|\omega_n|^2 + \sum_n (f_n\omega_n^* + f_n^*\omega_n).$$

Поскольку $Re\ z \le |z|$, где z – произвольное комплексное число, то

$$\sum_n (f_n\omega_n^* + f_n^*\omega_n) \le 2\sum_n |f_n||\omega_n| \le \sum_n \frac{|f_n|^2}{\varepsilon} + \sum_n \varepsilon|\omega_n|^2,$$

где ε – произвольное положительное число. Выберем $\varepsilon = 2\mu$. Поскольку $\lambda_{\min} = 2$, то

$$(B(\omega),\omega) \le -2\mu\sum_n |\omega_n|^2 + \frac{\sum\limits_n |f_n|^2}{2\mu}. \qquad (4)$$

Из (4) следует, что $(B(\omega),\omega) \le 0$ при условии, что

$$\sum_n |\omega_n|^2 > \frac{\sum\limits_n |f_n|^2}{4\mu^2},$$

то есть условия теоремы выполнены.

Получим далее условие на норму правой части, при котором стационарное решение системы (3) будет непрерывно зависеть от параметров задачи. Для этого, как было показано в лекции 12, достаточно получить условие экспоненциального притяжения траектории системы (3) к этому стационарному решению.

Пусть $\omega_n = \bar{\omega}_n + \omega_n'$, где $\bar{\omega}_n$ – коэффициенты Фурье разложения стационарного решения по специфическим гармоникам. Из свойств разложения якобиана, изученных нами в лекции 8, следует, что

$$2\mu\|\bar{\omega}\|_N \le \|f\|_N,$$

где

$$\|\bar{\omega}\|_N \equiv \sum_n |\bar{\omega}_n|^2, \quad \|f\|_N \equiv \sum_n |f_n|^2.$$

Линеаризуем систему (3) относительно $\bar{\omega}_n$. Получим

$$\frac{\partial \omega_n'}{\partial t} + J_n(\psi', \bar{\omega}) + J_n(\bar{\psi}, \omega') - \frac{2\Omega_b i m_n \omega_n'}{\lambda_n} + \lambda_n \mu \omega_n' = 0,$$

$$\frac{\partial \omega_n^{*\prime}}{\partial t} + J_n^*(\psi', \bar{\omega}) + J_n^*(\bar{\psi}, \omega') + \frac{2\Omega_b i m_n \omega_n^{*\prime}}{\lambda_n} + \lambda_n \mu \omega_n^{*\prime} = 0. \tag{5}$$

Умножим первое уравнение системы (5) на $\omega_n^{*\prime}$, второе – на ω_n', сложим и просуммируем по n. Будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t}\|\omega'\|_N^2 + \sum_n J_n(\bar{\psi}, \omega')\omega_n^{*\prime} + \sum_n J_n^*(\bar{\psi}, \omega')\omega_n' + 4\mu\|\omega'\|_N^2 \leq 0. \tag{6}$$

Остальные суммы равны нулю в силу свойств якобиана (лекция 8). Знак неравенства в (6) возникает из-за ограниченности собственных чисел $\lambda_n \geq 2$. Из неравенства Коши-Буняковского вытекает, что:

$$|\sum_n J_n \omega_n^{*\prime}| \leq \|J\|_N \|\omega'\|_N,$$

$$|\sum_n J_n^* \omega_n'| \leq \|J\|_N \|\omega'\|_N.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t}\|\omega'\|_N^2 \leq 2\|J\|_N \|\omega'\|_N - 4\mu\|\omega'\|_N^2. \tag{7}$$

В лекции 8 мы использовали соотношение

$$\|J\| \leq \|\omega'\| \|\bar{\omega}\|.$$

Если теперь предположить, что $\omega', \bar{\omega} \in Z_N$, то это неравенство сохранится при условии, что якобиан принадлежит "расширенному" пространству – в силу нелинейных взаимодействий размерность этого пространства будет больше, чем N. Обозначим эту размерность через M. Следовательно,

$$\|J\|_M \leq \|\omega'\|_N \|\bar{\omega}\|_N.$$

Спроектируем теперь якобиан на пространство Z_N. Очевидно, что

$$\|PJ\|_M = \|J\|_N \leq \|J\|_M$$

$$(\|P\| \leq 1).$$

Таким образом, окончательно будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t}\|\omega'\|_N^2 \leq 2\|\bar{\omega}\|_N \|\omega'\|_N^2 - 4\mu\|\omega'\|_N^2. \tag{8}$$

Для экспоненциальной сходимости ω' к нулю достаточно удовлетворить неравенству

$$\frac{\|\bar{\omega}\|_N}{2\mu} < 1.$$

Лекция 14

E-регуляризация динамических диссипативных систем. Устойчивость стационарного решения уравнения Фоккера-Планка

Целью исследования устойчивости аттракторов диссипативных систем является построение теории чувствительности аттракторов к малым возмущениям параметров системы. Если нас интересует проблема динамических характеристик аттрактора (их чувствительность к изменению внешних параметров), то мы должны исследовать и устойчивость инвариантной меры, порождаемой системой на её аттракторе. Как правило, эта мера сингулярна (не гладкая), и построить теорию непрерывной зависимости этой меры от параметров задачи представляется процедурой очень сложной. Естественно провести некоторую регуляризацию системы, чтобы перейти к мере гладкой. Такой регуляризацией может быть введение в правую часть системы малого случайного шума. С физической точки зрения эта процедура кажется естественной, так как мы не знаем точно ни правой части, ни параметров модели. В дальнейшем вместо исходной системы уравнений для завихренности мы при изучении процедуры регуляризации будем использовать некоторую её галёркинскую аппроксимацию, переводя систему из бесконечномерного в вещественное конечномерное пространство R^N.

Здесь, конечно, возникает проблема сходимости аттракторов конечномерной системы к аттрактору бесконечномерной при $N \to \infty$, но эту проблему мы специально изучать не будем, хотя теоретически она укладывается в общую теорему непрерывной зависимости аттракторов (как множеств) от параметров задачи.

Итак, будем считать, что наша динамическая система описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = B(\vec{u}), \quad \vec{u}|_{t=0} = \vec{u}_0, \quad \vec{u} \in R^N. \tag{1}$$

Будем считать, что система (1) диссипативна, например, как мы уже говорили выше, это есть галёркинская аппроксимация уравнений вязкой несжимаемой жидкости на вращающейся сфере. Систему (1) регуляризируем следующим образом: в правую часть введём δ-коррелированный по времени и пространству гауссов случайный шум малой амплитуды, то есть вместо (1) будем рассматривать следующую систему уравнений:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = B(\vec{u}) + \eta(t), \tag{2}$$

$$< \eta_i(t)\eta_j(t') >= 2\varepsilon\delta_{ij}\delta(t - t'),$$

где η есть δ-коррелированный по времени гауссов процесс, ε – малый параметр, δ_{ij} – символ Кронекера. В этом случае вектор $\vec{u}$ уже становится векторным случайным процессом, плотность вероятности которого на фазовом пространстве R^N удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div} B\rho = \varepsilon\Delta\rho, \tag{3}$$

$$\int \rho du = 1, \quad \rho \geq 0.$$

При исследовании решения уравнения (3) возникает несколько вопросов, а именно:

1. Существуют ли стационарные решения системы (3), удовлетворяющие условиям

$$\bar{\rho} \geq 0, \quad \int \bar{\rho} du = 1;$$

очевидно, что (3) имеет стационарное решение $\rho = 0$.

2. Если решение типа "плотность вероятности" существует, то единственно ли оно?

3. Является ли это решение аттрактором и устойчиво ли оно?

4. Сходится ли $\rho(u)$ к инвариантной мере, порождаемой системой (1) на её аттракторе, если $\varepsilon \to 0$?

Мы сформулируем ответы на эти вопросы, следуя работе Зимана [13], который изучал эту проблему, при условии, что

$$\vec{u} \in K \subset R^N,$$

где K – компактное множество, принадлежащее R^N, без края.

В этом случае справедливо следующее утверждение: если B есть гладкое векторное поле, то уравнение (3) имеет единственное стационарное решение на множестве

$$\bar{\rho} \geq 0, \quad \int \bar{\rho} du = 1,$$

причем $\bar{\rho} \geq \bar{\rho}_{\min} > 0$, и на этом подпространстве это решение является аттрактором.

Устойчивость решения доказывается построением функции Ляпунова φ:

$$\varphi(t) = \int \frac{\rho^2}{\bar{\rho}} du,$$

где $\bar{\rho}$ – стационарное решение уравнения Фоккера-Планка, удовлетворяющее условию

$$\bar{\rho} > 0, \quad \int \bar{\rho} du = 1,$$

ρ – произвольное решение уравнения Фоккера-Планка на множестве, определяемом предыдущими условиями.

Покажем, что $\frac{\partial \varphi}{\partial t} < 0$ везде, кроме $\rho = \bar{\rho}$. Так как $\rho, \bar{\rho}$ есть решение уравнения Фоккера-Планка, то можно написать

$$\rho_t = \nabla \cdot w, \quad w = \varepsilon \nabla \rho - B\rho;$$

$$\bar{\rho}_t = \nabla \cdot \bar{w}, \quad \bar{w} = \varepsilon \nabla \bar{\rho} - B\bar{\rho}.$$

Следовательно,

$$\bar{\rho} w - \rho \bar{w} = \varepsilon(\bar{\rho}\nabla\rho - \rho\nabla\bar{\rho}) = \varepsilon \bar{\rho}^2 \nabla \frac{\rho}{\bar{\rho}}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \int (\frac{2\rho\rho_t}{\bar{\rho}} - \frac{\rho^2 \bar{\rho}_t}{\bar{\rho}^2}) du =$$

$$= \int \left(\frac{2\rho}{\bar{\rho}} \nabla \cdot w - \frac{\rho^2}{\bar{\rho}^2} \nabla \cdot \bar{w} \right) du =$$

$$= -\int \left(2\nabla \frac{\rho}{\bar{\rho}} \cdot w - \nabla \left(\frac{\rho}{\bar{\rho}} \right)^2 \cdot \bar{w} \right) du =$$

$$= -\int \left(2\nabla \frac{\rho}{\bar{\rho}} \cdot w - 2\frac{\rho}{\bar{\rho}} \nabla \frac{\rho}{\bar{\rho}} \cdot \bar{w} \right) du =$$

$$= -2 \int \nabla \frac{\rho}{\bar{\rho}} \cdot \frac{\bar{\rho} w - \rho \bar{w}}{\bar{\rho}} =$$

$$= -2\varepsilon \int \bar{\rho} \left(\nabla \frac{\rho}{\bar{\rho}} \right)^2 du \leq 0. \tag{4}$$

(При получении этих формул предполагалось, что K есть множество без границ.)

Из (4) видно, что $\frac{\partial\varphi}{\partial t} < 0$ везде, кроме случая $\rho/\bar{\rho} = C =$ $= \mathrm{const}$. Но $\int \rho du = \int \bar{\rho} du = 1$, следовательно, $C = 1$.

Итак, $\frac{\partial\varphi}{\partial t} < 0$ везде, кроме $\rho = \bar{\rho}$, и следовательно, доказана асимптотическая устойчивость $\bar{\rho}$ по Ляпунову. Можно показать, что приближение ρ к $\bar{\rho}$ будет экспоненциальным. Отсюда следует, как мы показали в предыдущих лекциях, что $\bar{\rho}$ будет непрерывно зависеть от всех параметров задачи (1). Действительно,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -2\varepsilon \int \bar{\rho} \left(\nabla \frac{\rho}{\bar{\rho}}\right)^2 du \le -2\varepsilon \frac{\bar{\rho}_{\min} \int \left(\nabla \frac{\rho}{\bar{\rho}}\right)^2 du}{\int \left(\frac{\rho}{\bar{\rho}}\right)^2 \bar{\rho} du} \varphi \le$$

$$\le -2\varepsilon \frac{\bar{\rho}_{\min}}{\bar{\rho}_{\max}} \frac{\int \left(\nabla \frac{\rho}{\bar{\rho}}\right)^2 du}{\int \left(\frac{\rho}{\bar{\rho}}\right)^2 du} \varphi.$$

Поскольку область определения ρ и $\bar{\rho}$ есть компакт без границ, то

$$\int \left(\nabla \frac{\rho}{\bar{\rho}}\right)^2 du = \int -\Delta \frac{\rho}{\bar{\rho}} \frac{\rho}{\bar{\rho}} du \ge \lambda_{\min}(-\Delta) \int \left(\frac{\rho}{\bar{\rho}}\right)^2 du.$$

Отсюда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} \le -2\varepsilon \frac{\bar{\rho}_{\min}}{\bar{\rho}_{\max}} \lambda_{\min}(-\Delta)\varphi,$$

что доказывает наше утверждение. Отметим, что $\lambda_{\min}$ ищется на подпространстве, ортогональном константе, то есть вне точки $\rho = \bar{\rho}$.

Лекция 15

Некоторые вычислительные проблемы теории устойчивости

В этой лекции мы остановимся на некоторых проблемах, связанных с вычислениями собственных и сингулярных чисел. Напомним, что в предыдущих лекциях мы показали, что для вязкой несжимаемой жидкости на вращающейся сфере справедливо утверждение, что устойчивость или неустойчивость стационарных решений определяется по линейному приближению. Это означает, что в общем случае мы должны уметь решить проблему на собственные значения для несамосопряженных операторов. Поскольку метод решения в общем случае может быть только численным, то нам необходимо иметь теоремы, доказывающие близость собственных значений приближённых задач и собственных чисел исходной задачи. Мы эту проблему в данной лекции рассматривать не будем, а остановимся на некоторых вычислительных аспектах алгебраической проблемы решения задач на собственные значения. Очень часто в геофизической гидродинамике исследуется устойчивость стационарного решения системы

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\psi, \omega + l) = \mu \Delta \omega + f, \tag{1}$$

где значения ψ и ω берутся из данных наблюдений в предположении, что правая часть f такая, что удовлетворяется уравнение

$$J(\bar{\psi}, \bar{\omega} + l) = \mu \Delta \bar{\omega} + f. \tag{2}$$

Линейная часть оператора в задаче (1) имеет вид

$$A\omega' = J(\bar{\psi}, \omega') + J(\Delta^{-1}\omega', \bar{\omega} + l) - \mu \Delta \omega'. \tag{3}$$

Ясно, что элементы матрицы A_h, аппроксимирующей этот оператор A, будут заданы неточно, то есть вместо задачи

$$A_h \omega^h = \lambda_h \omega^h$$

мы будем решать другую задачу:

$$(A_h + \delta A_h)\tilde{\omega}^h = \tilde{\lambda}_h \tilde{\omega}^h. \tag{4}$$

Пусть

$$\|\delta A_h\| \leq \varepsilon \|A_h\|.$$

Из (4) следует, что в этом случае справедливо неравенство

$$\|(A_h - \tilde{\lambda}_h E)\tilde{\omega}^h\| \leq \varepsilon \|A_h\| \|\tilde{\omega}^h\|. \tag{5}$$

Поскольку минимум $\|(A_h - \tilde{\lambda}_h E)\tilde{\omega}_b^h\|$ достигается на сингулярном векторе матрицы $(A_h - \tilde{\lambda}_n E)$, соответствующем минимальному сингулярному числу, то можно утверждать, что

$$\sigma_{\min}(A_h - \tilde{\lambda}_h E)\|\tilde{\omega}^h\| \leq \varepsilon \|A_h\| \|\tilde{\omega}^h\|, \quad \text{или}$$
$$\sigma_{\min}(A_h - \tilde{\lambda}_h E) \leq \varepsilon \|A_h\|. \tag{6}$$

Все числа $\tilde{\lambda}_h$, удовлетворяющие неравенству (6), принадлежат так называемому ε-спектру матрицы A_h. Так как

$$\sigma_{\min}(A_h - \tilde{\lambda}_h E) = \frac{1}{\sigma_{\max}((A_h - \tilde{\lambda}_h E)^{-1})},$$

$$\sigma_{\max}((A_h - \tilde{\lambda}_h E)^{-1}) = \|(A_h - \tilde{\lambda}_h E)^{-1}\|,$$

то неравенство (6) можно переписать в виде

$$\|(A_h - \tilde{\lambda}_h E)^{-1}\| \geq \frac{1}{\varepsilon\|A_h\|}. \tag{7}$$

E-спектр задаёт область, в которой могут лежать истинные собственные значения матрицы A_h. Вычисление этой области представляется весьма полезным, особенно если все реальные части собственных чисел лежат в окрестности нуля, поскольку именно эта окрестность в данном случае даёт нам "качественное" утверждение об устойчивости или неустойчивости исходной системы уравнений.

Перейдём теперь к проблеме вычисления показателей Ляпунова. Показатели Ляпунова являются основной характеристикой устойчивости по Ляпунову произвольных нестационарных решений, в частности уравнений двумерной вязкой несжимаемой жидкости. Пусть уравнение в вариациях имеет вид

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t} + A(\bar{\omega})\omega' = 0, \tag{8}$$

где оператор A определен формулой (3). Это уравнение можно записать в разрешенной форме:

$$\omega'(t) = L(t)\omega_0'. \tag{9}$$

Напомним, что согласно теореме Оселедеца [3] показатели Ляпунова есть числа, определяемые следующим образом:

$$\sigma_i = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \lambda_i(L^*(t)L(t)),$$

где λ_i – сингулярные числа оператора $L(t)$. При этом предполагается, что исходная система на аттракторе имеет эргодическую инвариантную меру, так что σ_i не зависят от ω_0' почти для всех ω_0' (с точностью до меры ноль).

Ясно, что аналитически мы вычислить показатели Ляпунова не можем, поэтому возникает проблема аппроксимации показателей, вычисленных для некоторых (например, галёркинских) аппроксимаций исходной задачи. Эту сходимость можно рассматривать на положительных показателях Ляпунова, если они существуют, конечно (мы эту проблему обсуждали в предыдущих лекциях).

Обсудим сначала алгоритм вычисления показателей Ляпунова для конечномерных систем. Применим к уравнению (8) схему Кранка-Николсон (штрихи для сокращения записи опускаем)

$$\frac{\omega^{n+1}-\omega^n}{\tau}+A_h(\bar{\omega}^h)\frac{\omega^{n+1}+\omega^n}{2}=0. \tag{10}$$

Считаем, что аппроксимация по пространственным переменным также осуществлена. Разрешив это уравнение относительно ω^{n+1}, получим

$$\omega^{n+1}=\left(E+\frac{\tau A_h}{2}\right)^{-1}\left(E-\frac{\tau A_h}{2}\right)\omega^n\equiv B(\bar{\omega}^n)\omega^n. \tag{11}$$

За L шагов по времени будем иметь

$$\omega^{n+L}=\left(\prod_{i=0}^{L-1}B(\bar{\omega}^{n+i})\right)\omega^n\equiv B^L(\bar{\omega})\omega^n. \tag{12}$$

Таким образом, мы должны вычислить собственные числа предельного оператора

$$\lim_{L\to\infty}((B^L(\bar{\omega}))^*B^L(\bar{\omega}))^{\frac{1}{2L}}, \tag{13}$$

который в случае эргодичности системы и типичности траектории не зависит от начальной точки. Если собственные числа этого оператора представить в виде

$$\sigma_i^L=e^{\lambda_i^L},$$

то λ_i^L при $L \to \infty$ будут глобальными показателями Ляпунова для разностной схемы (10). Конечно, мы должны ещё исследовать сходимость этих показателей к показателям исходной дифференциальной задачи при $\tau, h \to 0$.

При вычислении B^L возникает трудность, связанная с многократным перемножением матриц, произведение которых оказывается плохо обусловленным. Если использовать стандартные алгоритмы, то это приводит к большим ошибкам вычисления сингулярных чисел. Поэтому применяются специальные методы, так или иначе связанные с QR-разложением матриц. Алгоритм, который будет изложен ниже, принадлежит Экману и Рюэлю(см. [5]).

Алгоритм заключается в последовательном QR-разложении произведения матрицы $B(\bar{\omega}^{n+i})$ и матрицы Q^{i-1}, взятой с предыдущего шага разложения:

$$B(\bar{\omega}^{n+i})Q^{i-1} = Q^i R^i, \quad Q^0 = E. \tag{14}$$

При вычислении $(B^L(\bar{\omega}))^* B^L(\bar{\omega})$ итерационный процесс (14) необходимо повторить $2L$ раз, используя в качестве B прямую матрицу $B(\bar{\omega}^{n+i})$ в течение первых L шагов и сопряженную $B^*(\bar{\omega}^{n+i})$ в течение вторых L шагов. В результате мы сформируем ряд

$$(B^L(\bar{\omega}))^* B^L(\bar{\omega}) = Q^{2L} R^{2L} R^{2L-1} \dots R^1 \equiv M_0. \tag{15}$$

Определим матрицу $M_1 \equiv R^{2L} R^{2L-1} \dots R^1 Q^{2L}$, составленную из тех же матриц R^k, но умноженную на Q^{2L} справа:

$$M_1 = (Q^{2L})^* M_0 Q^{2L}.$$

Очевидно, что M_1 и M_0 имеют одни и те же собственные числа. Выполним для M_1 QR-разложение:

$$M_1 = Q_1^{2L} R_1^{2L} R_1^{2L-1} \dots R_1^1.$$

Аналогичным образом формируем матрицы $M_2, M_3, \dots\ M_n$. Доказывается, что $Q_n^{2L} \to E$ при $n \to \infty$. Когда достигается необходимая точность, мы можем получить интересующие нас $\lambda_i^L(\bar{\omega})$, сложив логарифмы диагональных элементов R_n^k

$$\lambda_i^L = \frac{1}{2L}\sum_{k=1}^{2L}\ln(R_n^k(i,i)). \tag{16}$$

Алгоритм, конечно, более дорогой, чем прямое перемножение матриц, но зато значительно более точный.

В заключение сделаем одно замечание. Пусть мы имеем интервал $L\tau$, по которому вычисляем показатели Ляпунова. Разобьем этот интервал на два интервала длиной $\frac{L}{2}\tau$, по каждому из которых вычислим показатели Ляпунова, а потом найдем среднее от этих показателей. Максимальное значение этого среднего будет всегда больше (или равно) максимального показателя, вычисленного по полному интервалу. Это утверждение есть следствие известной теоремы линейной алгебры, утверждающей, что если есть матрицы A, B, C, где

$$C = AB,$$

и если ρ_i, μ_i, τ_i – их сингулярные числа, занумерованные в порядке их невозрастания, то для любого k $(1 \le k \le n)$

$$\sum_{i=k}^{n}\ln\tau_i \le \sum_{i=k}^{n}\ln\rho_i + \sum_{i=k}^{n}\ln\mu_i \tag{17}$$

(равенство достигается при $k = 1$).

Очевидно, что справедливость утверждения следует из неравенства (17) при $k = n - 1$. В данном случае это утверждение можно обосновать проще, если вспомнить, что максимальное сингулярное число есть норма матрицы, однако из формулы (17) следует ещё один результат: сумма всех осреднённых показателей Ляпунова (положительных и отрицательных) не зависит от выборки, если осреднение проводится внутри одной генеральной выборки.

Приложение

Сопряжённые уравнения, интегральные законы сохранения и разностные схемы для уравнения двумерной несжимаемой жидкости. Устойчивость решений сопряжённых уравнений

Будем рассматривать операторы, действующие в вещественном гильбертовом пространстве со скалярным произведением

$$(\eta, \psi) = \int\limits_S \eta\psi ds.$$

Если рассматриваемое пространство конечномерно, то будем считать его евклидовым со скалярным произведением

$$(\eta, \psi) = \sum_i \eta_i \psi_i.$$

Под сопряженным оператором мы будем понимать оператор, определяемый в смысле тождества Лагранжа

$$(A\eta, \psi) = (\eta, A^*\psi). \tag{1}$$

В конечномерном вещественном пространстве, как хорошо известно, сопряжённый к линейному оператор представим матрицей, которая является транспонированной к A:

$$A^* = A^T.$$

В бесконечных гильбертовых пространствах возникает проблема областей определения прямого и сопряжённого операторов. Каждый раз мы будем специально её оговаривать.

В качестве простого примера построения сопряжённого к линейному оператора в гильбертовом пространстве рассмотрим оператор

$$Au \equiv \frac{d^2u}{dx^2}, \quad x \in [0,1],$$

$$u \in C^2[0,1], \quad u = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, 1.$$

Имеем

$$(Au, v) = \int_0^1 \frac{d^2u}{dx^2} v dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}v\right) dx - \int_0^1 \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} dx =$$

$$\left.\frac{du}{dx}v\right|_0^1 - \int_0^1 \frac{d}{dx}\left(u\frac{dv}{dx}\right) dx + \int_0^1 u\frac{d^2v}{dx^2} dx =$$

$$= \left.\frac{du}{dx}v\right|_0^1 - u\left.\frac{dv}{dx}\right|_0^1 + \int_0^1 u\frac{d^2v}{dx^2} dx.$$

Если под областью определения сопряженного оператора понимать функцию $v \in C^2[0,1], v = 0$ при $x = 0, 1$, то получим, что

$$A^*v \equiv \frac{d^2v}{dx^2}.$$

Ситуация становится неоднозначной, если оператор A нелинеен, что является предметом нашего рассмотрения.

Идея построения сопряженного оператора для нелинейного оператора $B(\varphi)$ заключается в следующем. Нелинейный оператор $B(u)$ представляется в виде (если это возможно):

$$B(u) = A(u) \cdot u. \tag{2}$$

После этого оператор $A(u)$ формально считается линейным: мы считаем, что решение u нам известно и, следовательно, $A(u)$ – известный оператор. Далее, действуя формальным образом, строим сопряженный оператор

$$(B(u), v) = (A(u) \cdot u, v) = (u, A^*(u) \cdot v). \tag{3}$$

Таким образом, построенный оператор $A^*(u)$ считается оператором, сопряженным к $B(u)$. Ясно, что представление $A^*(u)$ неоднозначно, поскольку неоднозначно представление (2).

Рассмотрим в качестве примера нелинейный оператор $B(u) = u\frac{\partial u}{\partial x}$ с условием периодичности по $x, x \in [0, 1]$. Можно, очевидно, построить бесконечное количество представлений оператора $B(u)$ через $A(u) \cdot u$ вида

$$B(u) \equiv \left(\alpha u \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial x}\right) u,$$

$$\alpha + \beta = 1.$$

Рассмотрим два предельных случая: $\alpha = 1, \beta = 0$ и $\alpha = 0, \beta = 1$. В первом имеем

$$B(u) = \left(u \frac{\partial}{\partial x}\right) u; \quad A(u) \equiv u \frac{\partial}{\partial x}.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 u \frac{\partial u}{\partial x} v dx = -\int_0^1 \frac{\partial uv}{\partial x} u dx$$

$$\text{и} \quad A^*(u)\cdot v = -\frac{\partial}{\partial x}(uv).$$

Во втором случае мы видим, что $A(u)$ есть просто оператор умножения на $\frac{\partial u}{\partial x}$. В дальнейшем мы покажем, что эта неоднозначность может быть полезной. Эта неоднозначность увеличивается, если ввести в рассмотрение тривиальные нелинейные операторы $C(u) = 0$, представления которых $C(u) = D(u)\cdot u$ дают ненулевые $D(u)$. Например,

$$J(u,u) = 0,$$

$$\text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Но $J(u,u) \equiv D(u)\cdot u,$ где

$$D(u) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} \neq 0.$$

Пусть мы имеем некоторую нелинейную эволюционную задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} + B(u) = 0, \tag{4}$$

где $u \in H$, H – гильбертово пространство. Пусть $B(u)$ представимо в виде $B(u) = A(u)\cdot u$. Тогда сопряжённое уравнение может быть сконструировано следующим образом:

$$-\frac{\partial v}{\partial t} + A^*(u)\cdot v = f(u), \tag{5}$$

где $f(u)$ – некоторая, пока неопределённая, операторная функция. Умножим скалярно (4) на v, (5) – на u и вычтем одно из другого. Получим

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v\right) + \left(u, \frac{\partial v}{\partial t}\right) + (A(u)\cdot u, v) - (u, A^*(u)\cdot v) = -(f(u), u). \tag{6}$$

В силу тождества Лагранжа будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t}(u,v) = -(f(u),u). \tag{7}$$

Если положить $(f(u),u)=0$ ($f(u)$ ортогонально u), то придём к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}(u,v) = 0,$$

$$\text{или}\quad (u,v) = \text{const}. \tag{8}$$

Соотношение (8) есть, очевидно, законы сохранения, которые в общем случае нелокальны, так как могут зависеть от u, заданном на всем промежутке времени. Докажем одно общее утверждение.

Утверждение 1. Пусть уравнение (4) имеет интегральный инвариант вида $(\Phi(u),u)=\text{const}$ и $B(u)$ представимо в виде $B(u)=A(u)\cdot u$. Тогда для уравнения (4) всегда можно построить сопряжённое уравнение, решением которого будет $\Phi(u)$.

Действительно, поскольку $(\Phi(u),u)=\text{const}$, то

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi(u),u) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}, u\right) + \left(\Phi(u), \frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0.$$

Но $\dfrac{\partial u}{\partial t} = -B(u)$, следовательно,

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}, u\right) - (\Phi(u), B(u)) = 0.$$

Так как $B(u)=A(u)\cdot u$, то

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}, u\right) - (\Phi(u), A(u)\cdot u) = 0.$$

По определению сопряжённого оператора имеем

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}, u\right) - (A^*(u)\cdot\Phi(u), u) = 0,$$

или

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} - A^*(u)\cdot\Phi(u), u\right) = 0. \tag{9}$$

Из (9) следует, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - A^*(u)\cdot\Phi(u) = f(u),$$

где $f(u)$ – ортогонально u.

В дальнейшем мы покажем, что в интересных для нас случаях $f(u)$ будет формироваться из тривиального оператора, добавленного к исходной задаче, а все утверждения будем формулировать непосредственно для уравнения динамики двумерной несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u\frac{\partial \omega}{\partial x} + v\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0,$$

$$\omega = \Delta\psi, \quad u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{10}$$

Утверждение 2. Какое бы ни было решение уравнения (10), всегда можно построить сопряженное к нему уравнение, решение которого будет устойчиво по Ляпунову.

Для доказательства этого утверждения выпишем две формы уравнения (10) – потоковую и дивергентную:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u\frac{\partial \omega}{\partial x} + v\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0,$$

(11)

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+\frac{\partial\omega u}{\partial x}+\frac{\partial\omega v}{\partial y}=0.$$

Складывая оба представления, получим:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(u\frac{\partial\omega}{\partial x}+\frac{\partial\omega u}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial\omega}{\partial y}+\frac{\partial\omega v}{\partial y}\right)=0. \qquad (12)$$

Это так называемая полудивергентная (или симметризованная) форма уравнения для ω. Будем считать, что уравнение (12) рассматривается в двоякопериодическом канале, то есть в качестве краевых условий используются условия периодичности по x и y. Для построения сопряженного к (12) уравнения представим его в виде

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+K(u,v)\cdot\omega=0,$$

где

$$K(u,v)\equiv\frac{1}{2}\left(u\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial u\cdot}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial v\cdot}{\partial y}\right).$$

Нетрудно показать, что оператор K кососимметричен независимо от свойств устойчивости функций u и v. Действительно,

$$(K\varphi,\varphi)=\frac{1}{2}\iint\left(u\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial u\varphi}{\partial x}\right)\varphi ds+$$

$$+\frac{1}{2}\iint\left(v\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial v\varphi}{\partial y}\right)\varphi ds=$$

$$=\frac{1}{2}\iint\left(\frac{\partial u\varphi^2}{\partial x}+\frac{\partial v\varphi^2}{\partial y}\right)ds=0$$

в силу условий периодичности по x и y.

Сопряженное к (12) уравнение построим следующим образом:

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial t}+K^*(u,v)\cdot\varphi=0.$$

Поскольку $K^*(u, v) = -K(u, v)$, то будем иметь

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + K(u, v) \cdot \varphi = 0. \tag{13}$$

Отметим, что сопряженное уравнение всегда линейное, следовательно, полагая $\varphi = \tilde{\varphi} + \varphi'$, для φ' получим то же уравнение:

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial t} + K(u, v)\varphi' = 0. \tag{14}$$

Умножая (14) скалярно на φ', в силу кососимметричности оператора K будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi', \varphi') = 0, \quad \text{или} \quad \|\varphi'\|^2 = \mathrm{const},$$

что означает устойчивость по Ляпунову решения $\tilde{\varphi}$.

Утверждение 3. Линеаризованное относительно решения ω уравнение (10) – уравнение в вариациях – является уравнением, сопряженным к нему.

Запишем уравнение (10) в следующем виде:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\Delta^{-1}\omega, \omega) = 0. \tag{14$'$}$$

Уравнение в вариациях будет иметь вид

$$\frac{\partial \delta\omega}{\partial t} + J(\Delta^{-1}\delta\omega, \omega) + J(\Delta^{-1}\omega, \delta\omega) = 0. \tag{15}$$

Поскольку уравнение (14$'$) допускает инвариант $(\omega, \omega) = \mathrm{const}$, то в соответствии с результатами, изложенными в предыдущих лекциях, инвариантом будет и величина

$$(\omega, \delta\omega) = \mathrm{const}. \tag{16}$$

Перепишем уравнение (15) в виде

$$\frac{\partial \delta\omega}{\partial t} + J(\psi, \delta\omega) = -J(\Delta^{-1}\delta\omega, \omega),$$

или

$$\frac{\partial \delta\omega}{\partial t} + u\frac{\partial \delta\omega}{\partial x} + v\frac{\partial \delta\omega}{\partial y} = -J(\Delta^{-1}\delta\omega, \omega). \qquad (17)$$

Вследствие выполнения уравнения неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

левую часть уравнения (17) можно записать в виде

$$\frac{\partial \delta\omega}{\partial t} - A^*(\omega)\delta\omega,$$

где $A^*(\omega) = \frac{\partial u \cdot}{\partial x} + \frac{\partial v \cdot}{\partial y}$, а правая часть $f(\omega) = -J(\Delta^{-1}\delta\omega, \omega)$ ортогональна ω.

Покажем, что выражение $-J(\Delta^{-1}\delta\omega, \omega)$ может быть получено построением сопряженного оператора к тривиальному оператору, включенному в уравнение (10). Запишем тривиальный оператор в уравнение (10) в виде

$$T(\omega) \equiv \Delta^{-1}J(\omega, \omega) = \Delta^{-1}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial x}\right).$$

Оператор T может быть представлен в виде

$$T \equiv \Delta^{-1}K,$$

где $K = \frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}$ – кососимметрический оператор (при периодических краевых условиях). Это действительно так, поскольку мы можем ввести фиктивные скорости

$$\tilde{u} = -\frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad \tilde{v} = \frac{\partial \omega}{\partial x},$$

которые удовлетворяют уравнению неразрывности. Сопряженный к T оператор, следовательно, имеет вид

$$T^* = K^*(\Delta^{-1})^* = -K\Delta^{-1},$$

который может быть записан в виде

$$T^*\delta\omega = -\left(\tilde{u}\frac{\partial}{\partial x}\Delta^{-1}\delta\omega + \tilde{v}\frac{\partial}{\partial y}\Delta^{-1}\delta\omega\right),$$

или

$$T^*\delta\omega = -J(\Delta^{-1}\delta\omega, \omega).$$

Перейдем теперь к методу построения разностной схемы решения уравнений двумерной несжимаемой жидкости, основанному на использовании техники сопряженных уравнений.

Метод основан на неоднозначности построения сопряженных операторов для нелинейных операторов. Прежде чем перейти к его описанию, сформулируем понятие класса эквивалентности нелинейных операторов. Мы будем называть множества линейных операторов $\{A(u), \varphi \in D\}$ и $\{B(u), \varphi \in D\}$ эквивалентными, если

$$A^*(\varphi)\cdot\varphi = B^*(\varphi)\cdot\varphi, \varphi \in D.$$

С точки зрения этого определения (если не касаться областей определения) все сконструированные сопряженные операторы будут эквивалентными, так как сопряженные к ним, действующие на функцию φ, будут давать исходный нелинейный оператор.

Итак, пусть нам нужно построить разностную схему для уравнения

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + J(\psi, \omega) = 0,$$

обладающую двумя квадратичными инвариантами: аналогами энстрофии и энергии

$$(\omega, \omega) = C_1, \quad -(\psi, \omega) = C_2.$$

На дифференциальном уровне мы можем построить сопряжённые уравнения, решениями которых будут ω и ψ, и оба этих уравнения принадлежат одному классу эквивалентности (имеется в виду, что пространственные сопряжённые операторы принадлежат одному классу эквивалентности). Чтобы сделать это, выпишем несколько базовых представлений якобиана:

$$J(\psi,\omega) = u\frac{\partial\omega}{\partial x} + v\frac{\partial\omega}{\partial y} \equiv -\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y}.$$

Определим эти представления следующим образом:

$$A_1(\omega)\cdot\omega \equiv \left(-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot\omega,$$

$$\begin{aligned}
A_2(\omega)\cdot\omega &\equiv \left(-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right)\cdot\omega,\\
A_3(\omega)\cdot\omega &\equiv \left\{-\frac{\partial}{\partial x}\omega\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\omega\frac{\partial}{\partial x}\right\}\Delta^{-1}\cdot\omega, \qquad (18)\\
A_4(\omega)\cdot\omega &\equiv \left\{-\frac{\partial}{\partial y}\psi\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\psi\frac{\partial}{\partial y}\right\}\cdot\omega,\\
A_5(\omega)\cdot\omega &\equiv \left\{-\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right\}\Delta^{-1}\cdot\omega,\\
A_6(\omega)\cdot\omega &\equiv \left\{-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)\right)\Delta^{-1}\cdot\omega.
\end{aligned}$$

Отметим важные для нас свойства операторных представлений (18):

1) оператор $K(\omega) \equiv A_1(\omega) + A_2(\omega)$ кососимметричен, то есть $(K(\omega)\varphi,\varphi) = 0$;

2) оператор A_4 кососимметричен: $(A_4(\omega)\varphi,\varphi) = 0$.

Таким образом, кососимметричным будет и семейство операторов:

$$\tilde{K}(\omega) = \alpha(A_1 + A_2) + \beta A_4,$$
$$\tilde{K}(\omega)\cdot\omega = J(\psi,\omega)$$

при $2\alpha + \beta = 1$.

Итак, если исходные уравнения записать в виде

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \tilde{K}(\omega) \cdot \omega = 0, \tag{19}$$

то сопряжённое к нему уравнение будет иметь вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \tilde{K}(\omega)^* \cdot v = 0,$$

или в силу кососимметричности оператора $\tilde{K}(\omega)$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \tilde{K}(\omega) \cdot v = 0. \tag{20}$$

Очевидно, что уравнение (20) допускает решение $v = \omega$. Если мы построим симметричные разностные аппроксимации производных, входящих в определение $\tilde{K}(\omega)$, то будем иметь кососимметрическую аппроксимацию $\tilde{K}(\omega)$ в конечномерном пространстве (матрица оператора будет кососимметрической). Это означает, что мы имеем бесконечный набор сопряженных уравнений ($2\alpha + \beta = 1$), допускающих решения ω^h, где ω^h – решение соответствующего уравнения

$$\frac{\partial \omega^h}{\partial t} + \tilde{K}_h(\omega^h) \cdot \omega^h = 0. \tag{21}$$

Определим в конечномерном пространстве аппроксимацию оператора $\omega^h = \Delta^h \psi^h$ так, чтобы Δ^h был представим симметрической матрицей. Выберем теперь представление оператора $J(\psi, \omega)$ следующим образом:

$$J(\psi, \omega) = \{\gamma[A_5 + A_6] + \delta A_3\}\, \omega, \tag{22}$$

$$2\gamma + \delta = 1.$$

Очевидно, что его можно записать в виде

$$J(\psi, \omega) = \{\tilde{\tilde{K}}(\omega) \cdot \Delta^{-1}\}\omega,$$

где $\tilde{\tilde{K}}(\omega)$ – кососимметрический оператор, а Δ^{-1} – симметрический. Семейство соответствующих сопряженных уравнений будет иметь вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} - (\tilde{\tilde{K}} \cdot \Delta^{-1})^* v = 0,$$

или

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \Delta^{-1}\tilde{\tilde{K}} v = 0 \qquad (23)$$

в силу свойств операторов $\tilde{\tilde{K}}$ и Δ^{-1}. Очевидно, что уравнение (23) допускает решение $v = \psi$.

Построим теперь конечномерные аппроксимации уравнения (23), строя симметричные аппроксимации для производных, входящих в $\tilde{\tilde{K}}$, и формально полагая

$$(\Delta^{-1})^h = (\Delta^h)^{-1}.$$

Будем иметь

$$\frac{\partial v^h}{\partial t} + (\Delta^h)^{-1}\tilde{\tilde{K}}_h v^h = 0.$$

Если теперь мы выдвинем требование, чтобы семейства операторов $\tilde{K}_h$ и $(\Delta^h)^{-1}\tilde{\tilde{K}}_h$ принадлежали одному классу эквивалентности, то есть

$$\tilde{K}_h \omega^h = \tilde{\tilde{K}}_h (\Delta^h)^{-1} \omega^h, \qquad (24)$$

то получим схему, которая будет обладать законами сохранения

$$(\omega^h, \omega^h) = C_3 \quad \text{и} \quad (\psi^h, \omega^h) = C_4.$$

Поскольку справедливы равенства $A_5^h \omega^h = A_1^h \omega^h$, $A_3^h \omega^h = A_2^h \omega^h$, $A_6^h \omega^h = A_4^h \omega^h$ и из (24) следует, что

$$(\gamma(A_1^h + A_4^h) + \delta A_2^h)\omega^h = (\alpha(A_1^h + A_2^h) + \beta A_4^h)\omega^h,$$

то это равенство будет удовлетворяться, если

$$\gamma = \alpha, \quad \gamma = \beta, \quad \delta = \alpha,$$

и следовательно,

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1/3.$$

Мы получили, таким образом, хорошо известную схему, предложенную Аракава еще в 1968 году.

Задачи

Задача 1.

Пусть задана система линейных уравнений

$$\frac{du}{dt} + Au = f; \quad u \in R^N, \tag{1}$$

A – вещественная $n \times n$-матрица, элементы которой не зависят от времени.

Исследовать на устойчивость нулевое решение этой системы, если:

а) $A = S_1 S_2,\ S_1 = S_1^*,\ S_2 = S_2^*,\ S_1 S_2 \neq S_2 S_1,$

$$(S_i \varphi, \varphi) > 0 \ (i = 1, 2).$$

Решение. Покажем, что $\lambda_i(A) > 0$. Собственные числа не меняются при преобразовании подобия. Следовательно,

$$\lambda(A) = \lambda(S_1^{-1/2} A S_1^{1/2}) = \lambda(S_1^{-1/2} S_1 S_2 S_1^{1/2}) = \lambda(S_1^{1/2} S_2 S_1^{1/2}).$$

Матрица $S_1^{1/2} S_2 S_1^{1/2}$ – симметричная матрица. Условие $\lambda(S_1^{1/2} S_2 S_1^{1/2}) > 0$ есть необходимое и достаточное условие её положительной определенности. Имеем

$$(S_1^{1/2} S_2 S_1^{1/2} \varphi, \varphi) = (S_2 S_1^{1/2} \varphi, S_1^{1/2} \varphi) = (S_2 \psi, \psi) > 0.$$

Следовательно, нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво.

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1/2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1/2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Решение (1) асимптотически устойчиво, так как круги Гершгорина лежат в правой полуплоскости. Матрица A симметрична, следовательно, её собственные числа вещественны. Один круг касается нуля, но матрица A – неразложима и из теоремы Тауски следует, что если бы она имела нулевое собственное значение, то все круги проходили бы через нуль.

c)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 10 & 0 \\ 0 & -10 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Решение (1) асимптотически устойчиво, так как $A \equiv D + K$, где D – диагональная положительно определенная матрица, а K – кососимметрическая

$$D \equiv \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & 0 \\ 0 & & 2 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}, \qquad K \equiv \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Умножив (1) скалярно на u, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + 2\|u\|^2 + (Ku, u) = 0.$$

Отсюда

$$\|u\| = \|u_0\|e^{-2t}.$$

d)

$$A \equiv \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 11 & 0 \\ 0 & -9 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица A представима в виде $A \equiv S + K$:

$$S \equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad K \equiv \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица K – кососимметрична, матрица S – симметрична. Нетрудно видеть, что она положительно определена. Из теоремы Гершгорина следует, что $\lambda_{\min}(S) \geq 1$. Отсюда $\|u\| \leq$ $\leq |u_0\|e^{-t}$. Решение (1) асимптотически устойчиво.

e) Пусть A является одновременно ортогональной и кососимметрической матрицей. Написать характеристический полином для этой матрицы.

Решение. A – ортогональная матрица, $A^* = A^{-1}$, следовательно, модули всех собственных чисел есть 1:

$$|\lambda_i(A)| = 1.$$

Матрица A – кососимметрична, следовательно, все собственные числа мнимые. Нуля быть не может, так как ортогональная матрица невырождена. Это означает, что A имеет чётную размерность.

Отсюда следует, что характеристический полином есть

$$(\lambda^2 + 1)^{n/2} = 0.$$

Задача 2.

Пусть дано уравнение

$$\frac{du}{dt} + (E - A)u = 0. \qquad (1)$$

Что можно сказать об устойчивости его нулевого решения, если матрица A имеет вид:

$$A \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица A – неразложима и имеет неотрицательные элементы. По теореме Фробениуса её спектральный радиус лежит в интервале

$$\frac{1}{4} < \rho(A) < 1,$$

причем есть положительное собственное число, равное спектральному радиусу. Поскольку A – симметрична, то это означает, что

$$\frac{1}{2}\frac{d\|u\|^2}{dt} \leq -(1 - \lambda_{\max}(A))\|u\|^2 \leq -\delta\|u\|^2,$$

то есть нуль есть глобальный аттрактор системы (1) (нуль – глобально асимптотически устойчивое решение).

Задача 3.

Для задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u(x+L,t) = u(x) \tag{1}$$

выстроить сопряженную задачу, решение которой устойчиво по Ляпунову.

Решение. Преобразуем исходное уравнение к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{3}\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial uu}{\partial x}\right) = 0.$$

Оператор $u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial uu}{\partial x}$ представим в виде

$$A(u)\cdot u,$$

где

$$A(u) \equiv u\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial u \cdot}{\partial x}.$$

Таким образом, будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{3}A(u)\cdot u = 0. \tag{2}$$

Сопряженное к (2) уравнение будет иметь вид

$$-\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{3}A^*(u)\cdot v = 0, \quad v(x+L,t) = v(x,t),$$

где

$$A^*(u)\cdot v = -\frac{\partial uv}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x},$$

или

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{3}A(u)\cdot v = 0.$$

Так как $A(u)$ – оператор кососимметрический, то $(A(u)v, v) = 0$, и следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t}(v, v) = 0, \quad \text{или} \quad (v, v) = (v_0, v_0). \tag{3}$$

Поскольку сопряженное уравнение линейное, то условие (3) есть условие устойчивости его решения при произвольных v_0.

Задача 4.

Определить наклон линий постоянных ψ' для растущих возмущений зонально-симметричного решения двумерных уравнений идеальной несжимаемой жидкости.

Решение. Уравнения для возмущений при $\bar{\psi} = \bar{\psi}(y)$ имеют вид:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial u'}{\partial x} + v'\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + u'\frac{\partial u'}{\partial x} + v'\frac{\partial u'}{\partial y} = -\frac{\partial p'}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial v'}{\partial x} + v'\frac{\partial v'}{\partial y} + u'\frac{\partial v'}{\partial x} = -\frac{\partial p'}{\partial y}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0.$$

Умножаем первое уравнений на u', второе на v' и складываем

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{u'^2 + v'^2}{2} + \bar{u}\frac{\partial \frac{u'^2+v'^2}{2}}{\partial x} + u'v'(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x}) +$$

$$+ u'^2\frac{\partial u'}{\partial x} + v'^2\frac{\partial v'}{\partial y} = -u'\frac{\partial p'}{\partial x} - v'\frac{\partial p'}{\partial y}. \tag{2}$$

Интегрируя (2) по области и полагая $\iint \frac{u'^2+v'^2}{2} dD = E'$ с учетом уравнения неразрывности и периодических краевых условий, получим

$$\frac{\partial E'}{\partial t} = -\iint u'v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} dD. \tag{3}$$

Пусть

$$u' = -\frac{\partial \psi'}{\partial y}, \quad v' = \frac{\partial \psi'}{\partial x}.$$

Тогда

$$\frac{\partial E'}{\partial t} = \iint \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} dD.$$

Для растущих возмущений $\frac{\partial E'}{\partial t} > 0$. Далее,

$$\frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\frac{\partial \psi'}{\partial x}}{\frac{\partial \psi'}{\partial y}} \left| \frac{\partial \psi'}{\partial y} \right|^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} =$$

$$= \left(\frac{dy}{dx} \right)_{\psi' = const} \left| \frac{\partial \psi'}{\partial y} \right|^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}.$$

Итак, если $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} > 0$, то $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\psi' = \mathrm{const}} > 0$ (и наоборот).

Задача 5.

Выписать выражение для напряжения трения $\tau =$ $= -\overline{Reu' Rev'}^{x}$ и определить условия, при которых $\tau \equiv 0$.

Решение. Пусть

$$u' = -\frac{\partial \psi'}{\partial y}, \quad v' = \frac{\partial \psi'}{\partial x}.$$

Возмущение ψ' ищем в виде

$$\psi' = \psi'(y) e^{ik(x-ct)}.$$

Таким образом, для напряжения трения $\tau = -\overline{Reu' Rev'}^x$ справедливо равенство (черта сверху означает знак осреднения по x):

$$\tau = -\overline{\frac{1}{4}\left[\frac{\partial\psi'}{\partial y}e^{ik(x-ct)} + \frac{\partial\psi'^*}{\partial y}e^{-ik(x-c^*t)}\right]}^x \times$$
$$\times\overline{\left[ik\psi' e^{ik(x-ct)} - ik\psi'^* e^{-ik(x-c^*t)}\right]}^x =$$
$$= \frac{ik}{4}\left(\psi'^*\frac{\partial\psi'}{\partial y} - \psi'\frac{\partial\psi'^*}{\partial y}\right)e^{2kc_it}. \quad (1)$$

Для $\psi'(y)$ имеем уравнения:

$$\frac{\partial^2\psi'}{\partial y^2} - k^2\psi' = -\frac{\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial y}\psi'}{\bar{u} - c},$$
$$(2)$$
$$\frac{\partial^2\psi'^*}{\partial y^2} - k^2\psi'^* = -\frac{\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial y}\psi'^*}{\bar{u} - c^*}.$$

Умножим первое уравнение (2) на ψ'^*, второе на ψ' и вычтем второе из первого. Получим

$$\frac{\partial^2\psi'}{\partial y^2}\psi'^* - \frac{\partial^2\psi'^*}{\partial y^2}\psi' = -\frac{\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial y}2ic_i|\psi'|^2}{|\bar{u} - c|^2}. \quad (3)$$

Умножим (3) на $\frac{ik}{4}e^{2kc_it}$. Получим

$$\frac{ik}{4}\left(\frac{\partial^2\psi'}{\partial y^2}\psi'^* - \frac{\partial^2\psi'^*}{\partial y^2}\psi'\right)e^{2kc_it} \equiv$$
$$\equiv \frac{\partial\tau}{\partial y} = \frac{\frac{k}{2}\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial y}|\psi'|^2 c_i e^{2kc_it}}{|\bar{u} - c|^2}. \quad (4)$$

Итак, из (4) можно сделать следующие заключения. Если $c_i \neq 0$, то, поскольку $\tau = 0$ на границах, $\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial y}$ должно менять знак внутри области. Если $c_i = 0$ и c нигде не равно $\bar{u}$ внутри области, то $\tau \equiv 0$ во всей области. Точки y_c, в которых $\bar{u} = c$, называются критическими. Эти точки очень важны при исследовании устойчивости для исчезающе малых c_i.

Задача 6.

Показать, что траектории частиц в стационарной волне Россби на β-плоскости устойчивы по Ляпунову.

Решение. Уравнение переноса вихря на сфере

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\psi, \omega) + 2\Omega_b \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = 0 \tag{1}$$

допускает решения в виде бегущих на запад (при $\Omega_b > 0$) волн Россби-Блиновой. В качестве стационарного решения этого уравнения было изучено решение типа "твёрдого вращения" – сферическая гармоника с $n = 1, m = 0$.

Рассмотрим решение типа волн Россби в приближении, называемом приближением β-плоскости. В рамках этого приближения считается, что абсолютный вихрь, который на вращающейся сфере можно записать как

$$\Omega = \omega + 2\Omega_b \sin\varphi,$$

где ω – относительный вихрь, а $2\Omega_b \sin\varphi$ – вихрь вращающейся системы координат, можно в локальной декартовой системе координат представить как

$$\Omega = \omega + \beta(y - y_0) + \beta y_0.$$

Другими словами, мы полагаем, что в окрестности некоторой широты выражение

$$\sin\varphi = \sin(\bar{\varphi} + \varphi') = \sin\bar{\varphi}\cos\varphi' + \cos\bar{\varphi}\sin\varphi'$$

можно заменить приближенным (при достаточно малых φ'):

$$\sin\varphi \approx \sin\bar{\varphi} + \varphi'\cos\bar{\varphi}.$$

Таким образом, используя это приближение, мы, вообще говоря, можем быть уверены в его правильности, только если сформулируем задачу в узкой широтной полосе, однако в данной лекции мы его будем использовать на всей плоскости (x, y).

Итак, запишем уравнение (1) в декартовой системе координат в приближении β-плоскости

$$\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + u\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} + v\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y} + \beta\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0. \tag{2}$$

Нетрудно проверить, что это уравнение допускает стационарное решение

$$\bar{\psi} = -\bar{u}y + A\sin k_0 x \tag{3}$$

при условии, что $\bar{u} = \frac{\beta}{k_0^2}$. Действительно, имеем

$$u = -\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial y} = \bar{u} = \mathrm{const},$$

$$\Delta\bar{\psi} = -k_0^2 A\sin k_0 x,$$

$$\frac{\partial\Delta\bar{\psi}}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x} = Ak_0\cos k_0 x,$$

и соотношение

$$(-\bar{u}k_0^2 + \beta)Ak_0\cos k_0 x = 0$$

будет выполняться, если

$$\bar{u} = \frac{\beta}{k_0^2}.$$

С физической точки зрения это означает, что фазовая скорость волны Россби движения на запад должна совпадать по величине со скоростью потока на восток так, что относительно системы координат, связанной с β-плоскостью, волна будет стационарной. Поскольку решение стационарно, траектории частиц будут совпадать с линиями тока. Для траекторий частиц мы можем записать систему уравнений, которая имеет гамильтонову форму:

$$\frac{dx}{dt} = u = -\frac{\partial \psi}{\partial y},$$

$$\frac{dy}{dt} = v = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{4}$$

Здесь роль функции Гамильтона играет функция тока ψ.

Практически очевидно, что движение частиц вдоль этих траекторий устойчиво по Ляпунову. Действительно, из (4) и (3) имеем

$$x = x_0 + \bar{u}t,$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = Ak_0 \cos k_0 x = Ak_0 \cos k_0(x_0 + \bar{u}t).$$

Следовательно,

$$y = y_0 + \frac{A}{\bar{u}} \sin k_0(x_0 + \bar{u}t).$$

Возмущая начальные данные на δx_0 и δy_0, получим:

$$\delta x = \delta x_0,$$

$$\delta y = \delta y_0 + \frac{A}{\bar{u}} \sin k_0(x_0 + \bar{u}t + \delta x_0) - \frac{A}{\bar{u}} \sin k_0(x_0 + \bar{u}t) \equiv$$

$$\equiv \delta y_0 + \frac{Ak_0}{\bar{u}} \cos k_0(x_0 + \bar{u}t)\delta x_0$$

при достаточно малых δx_0. Таким образом,

$$\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2} \equiv \|\delta r\|^2 \leq$$

$$\leq \sqrt{\delta x_0^2 + \delta y_0^2 + \frac{A^2 k_0^2}{\bar{u}^2}\delta x_0^2 + \frac{2Ak_0}{\bar{u}}\delta x_0 \delta y_0} \leq$$

$$\leq \sqrt{\delta x_0^2 + \delta y_0^2 + \frac{A^2 k_0^2}{\bar{u}^2}\delta x_0^2 + \frac{Ak_0}{\bar{u}}(\delta x_0^2 + \delta y_0^2)} \leq c_1 \|\delta r_0\|.$$

Отметим, что из (3) следует, что сама траектория описывается уравнением

$$y = \frac{A}{\bar{u}} \sin k_0 x + c.$$

Устойчивость траекторий частиц по Ляпунову при заданной функции тока, вообще говоря, совсем не связана с устойчивостью по Ляпунову самой функции тока. Одна и та же функция тока может быть решением различных систем уравнений, аппроксимирующих динамику жидкости; важно только, чтобы жидкость была несжимаемой.

Задача 7.

Пусть дано уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u(x+L,t) = u(x,t), \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \quad \bar{u} = \text{const} > 0.$$

Для уравнения (1) построить схему направленных разностей и исследовать её на существование аттрактора.

Решение. Проведём исследование только для аппроксимации по пространству. Схема будет иметь вид

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \bar{u}\frac{u_i - u_{i-1}}{h} = 0,$$

или в векторном виде

$$\frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{\bar{u}}{h} A\vec{u}, \qquad (2)$$

где матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & 0 \\ 0 & & 1 & -1 & \\ & & & 1 & -1 \\ -1 & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что нулевое решение (1) будет глобальным аттрактором на подпространстве, ортогональном константе. Умножим уравнение (2) скалярно на $\vec{u}$. Получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\vec{u}\|^2 + \frac{\bar{u}}{h}(A\vec{u}, \vec{u}) = 0,$$

или

$$\frac{d}{dt}\|\vec{u}\|^2 + \frac{\bar{u}}{h}((A + A^*)\vec{u}, \vec{u}) = 0.$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt}\|\vec{u}\|^2 \leq -\frac{\bar{u}}{h}\lambda_{\min}(A + A^*)\|\vec{u}\|^2.$$

Матрица $A + A^*$ имеет вид

$$A + A^* \equiv \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ & & \ddots & \\ -1 & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица имеет одно собственное число, равное нулю. Соответствующая собственная функция есть константа. Остальные собственные числа больше нуля. Следовательно,

$$\|\vec{u}\|^2 \leq \|\vec{u}_0\|^2 e^{-\frac{\bar{u}}{h}\lambda_{\min}(A+A^*)}$$

и при любом $\vec{u}_0 \neq \mathrm{const}$, принадлежащем подпространству, ортогональному константе, $\|\vec{u}\|^2 \to 0$ при $t \to \infty$.

Задача 8.

Пусть дано уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\alpha u + f, \tag{1}$$

$$u(x+L,t) = u(x,t), \quad \|f\| \leq C, \quad \alpha > 0.$$

Доказать, что уравнение (1) обладает поглощающим множеством в L_2.

Построить аппроксимацию $\frac{\partial u}{\partial x}$ такую, что конечномерная аппроксимация (1) также будет обладать поглощающим множеством.

Решение. Умножим (1) на u. Получим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial t} + \frac{1}{3}\frac{\partial u^3}{\partial x} = -\alpha u^2 + fu. \tag{2}$$

Проинтегрируем (2) по периоду L. В силу периодических условий на u получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\|u\|^2 = -2\alpha\|u\|^2 + 2(f,u).$$

Имеем

$$2(f,u) \equiv 2\int fudx \leq \frac{1}{\varepsilon}\int f^2dx + \varepsilon\int u^2dx$$

для любого $\varepsilon > 0$. Положим $\varepsilon = \alpha$. Получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\|u\|^2 \leq -\alpha\|u\|^2 + \frac{1}{\alpha}\|f\|^2, \tag{3}$$

или

$$\|u\|^2 \le \|u_0\|^2 e^{-\alpha t} + (1 - e^{-\alpha t})\frac{\|f\|^2}{\alpha^2}.$$

Пусть $\|u_0\| \le R$ и $\delta > 0$ и пусть $e^{-\alpha T^*} < \delta$, то есть $T^* > \frac{\ln\delta}{\alpha}$. Тогда для $t > T^*$ будем иметь

$$\|u\|^2 \le \delta R^2 + (1-\delta)\frac{\|f\|^2}{\alpha^2} \le \delta R^2 + \frac{\|f\|^2}{\alpha^2}.$$

Полагая $\delta R^2 = \varepsilon\frac{\|f\|^2}{\alpha^2}$, получим

$$\|u\|^2 \le (1+\varepsilon)\frac{\|f\|^2}{\alpha^2},$$

что эквивалентно условию существования поглощающего множества.

Далее, преобразуем уравнение (1) к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{3}\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial uu}{\partial x}\right) = -\alpha u + f. \tag{4}$$

Следуя решению задачи (3), построим конечномерную аппроксимацию (4), используя центральные разности по пространству. Получим

$$\frac{\partial u^h}{\partial t} + K_h(u^h)\cdot u^h = -\alpha u^h + f^h, \tag{5}$$

где $K_h(u^h)$ – кососимметрический оператор, так что $(K_h(u^h)\cdot u^h, u^h)_h = 0$, где $(\cdot,\cdot)_h$ – скалярное произведение в евклидовом пространстве $E_h; \{u^h, f^h \in E_h\}$.

Умножая (5) скалярно на u^h, получим соотношение, эквивалентное (3), откуда уже будет следовать существование поглощающего множества.

Задача 9.

Дано уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \qquad (1)$$

$$x \in [0, 1], \quad u|_{t=0} = u_0, \quad u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0.$$

Требуется получить условия на f, при которых стационарное решение задачи (1) будет непрерывно зависеть от параметра μ.

Решение. Для непрерывной зависимости стационарного решения (1) от μ достаточно доказать, что при $u_0 \in R$, R – поглощающее множество системы (1), время притяжения решения в ε-окрестность стационарного решения $\bar{u}$ будет равномерно ограничено по u_0. Очевидно, что достаточным условием будет условие экспоненциального притяжения.

Покажем сначала, что система (1) обладает поглощающим множеством. Для этого скалярно умножим (1) на u. Получим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \|u\|^2}{\partial t} = \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u\right) + (f, u) \leq$$

$$\leq \mu\lambda_{\max}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\|u\|^2 + \frac{\|f\|^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2.$$

Полагая $\varepsilon = -\lambda_{\max}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\mu$, будем иметь

$$\frac{\partial \|u\|^2}{\partial t} \leq \mu\lambda_{\max}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\|u\|^2 + \frac{\|f\|^2}{-\lambda_{\max}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\mu}.$$

Известно, что

$$\lambda_{\max}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) = -\pi^2$$

$$(u = 0, \quad x = 0, \pi).$$

Если обозначить $\tilde{\mu} = \pi^2 \mu$, то

$$\|u\|^2 \leq e^{-\tilde{\mu}t}\|u_0\|^2 + (1 - e^{-\tilde{\mu}t})\frac{\|f\|^2}{\tilde{\mu}^2},$$

и поглощающее множество можно оценить как

$$\|u\| \leq \frac{\|f\|}{\tilde{\mu}}(1 + \delta),$$

где δ – как угодно малая положительная величина.

Пусть стационарное решение удовлетворяет уравнению

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + f.$$

Умножим это уравнение скалярно на $\bar{u}$. Получим

$$\mu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}, \bar{u} \right) + (f, \bar{u}) = 0$$

или

$$\mu \left\| \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right\|^2 = (f, \bar{u}). \tag{2}$$

Пусть $u = \bar{u} + u'$. Уравнение для u' будет иметь вид

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial u'}{\partial x} + u'\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + u'\frac{\partial u'}{\partial x} = \mu \Delta u'. \tag{3}$$

Умножим это уравнение скалярно на u'. Получим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \|u'\|^2}{\partial t} + \left(\bar{u}\frac{\partial u'}{\partial x}, u' \right) + \left(u'\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, u' \right) = -\mu \left\| \frac{\partial u'}{\partial x} \right\|^2,$$

или после интегрирования по частям

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \|u'\|^2}{\partial t} = -\frac{1}{2}\left(u', \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} u' \right) - \mu \left\| \frac{\partial u'}{\partial x} \right\|^2.$$

Имеем
$$\left(u', u'\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right) \le \sup|u'|\|u'\| \left\|\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right\|.$$

Справедлива следующая цепочка соотношений:

$$|u'| = \left|\int\limits_0^x \frac{\partial u'}{\partial x} dx\right| \le \int\limits_0^x \left|\frac{\partial u'}{\partial x}\right| dx \le \int\limits_0^1 \left|\frac{\partial u'}{\partial x}\right| dx \le \left\|\frac{\partial u'}{\partial x}\right\|.$$

Следовательно,

$$\|u'\| \le \sup|u'| \le \left\|\frac{\partial u'}{\partial x}\right\|.$$

Таким образом, будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t}\|u'\|^2 \le \left\|\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right\| \left\|\frac{\partial u'}{\partial x}\right\|^2 - 2\mu \left\|\frac{\partial u'}{\partial x}\right\|^2 =$$

$$= -2\mu\left(1 - \frac{\left\|\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right\|}{2\mu}\right)\left\|\frac{\partial u'}{\partial x}\right\|^2 \le -2\mu\left(1 - \frac{\left\|\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right\|}{2\mu}\right)\|u'\|^2,$$

если $\frac{1}{2\mu}\left\|\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right\| < 1$.

Следовательно, для экспоненциального приближения необходимо выполнить условие

$$\frac{\left\|\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right\|}{2\mu} \le 1 - \delta, \quad 0 < \delta < 1.$$

Из (2) имеем

$$\mu\left\|\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right\|^2 \le \|f\|\|\bar{u}\| \le \|f\| \left\|\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right\|.$$

Отсюда
$$\left\|\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right\| \le \frac{\|f\|}{\mu}.$$

Таким образом, если мы выполним условие

$$\frac{\|f\|}{2\mu^2} < 1,$$

то приближение к стационарному решению будет экспоненциальным и, следовательно, стационарное решение будет непрерывно зависеть от всех параметров задачи.

Задача 10.

Пусть дано уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial \rho x}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \quad x \in [-\infty, \infty], \quad \varepsilon = \mathrm{const} > 0.$$

Найти стационарное решение, удовлетворяющее условию $\int \rho dx = 1, \quad \rho \geq 0$, и показать, что если в начальный момент $\rho|_{t=0} = Ae^{-\frac{x^2}{B}}$, то стационарное решение есть аттрактор. Показать, что характерное время притяжения к стационарному решению не зависит от ε.

Решение. Стационарное решение удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial}{\partial x} x\bar{\rho} = \varepsilon \frac{\partial^2 \bar{\rho}}{\partial x^2},$$

или

$$-x\bar{\rho} = \varepsilon \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} + C.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$-\frac{x^2}{2} = \varepsilon \ln \bar{\rho} + \int \frac{C}{\bar{\rho}}.$$

Поскольку $\bar{\rho} \to 0$ при $x \to \infty$, C должно быть равно нулю.

Итак, $\bar{\rho} = Ae^{-\frac{x^2}{2\varepsilon}}$. Будем искать решение нестационарного уравнения для ρ в виде

$$\rho = \frac{a}{\sqrt{D(t)}} e^{-\frac{x^2}{D(t)}},$$

так что при

$$t = 0 \quad \rho_0 = \frac{a}{\sqrt{D(0)}} e^{-\frac{x^2}{D(0)}}.$$

Имеем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = (\frac{dD}{dt}\frac{x^2}{D^2} - \frac{dD}{dt}\frac{1}{2D})\rho,$$

$$\frac{\partial \rho x}{\partial x} = (1 - \frac{2x^2}{D})\rho,$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = (\frac{4x^2}{D^2} - \frac{2}{D})\rho.$$

Отсюда, собирая все слагаемые и сокращая на ρ, получим

$$\frac{1}{2D}\frac{dD}{dt}(\frac{2x^2}{D} - 1) - (1 - \frac{2x^2}{D}) = \frac{2\varepsilon}{D}(\frac{2x^2}{D} - 1),$$

$$\text{или} \quad (\frac{1}{2D}\frac{dD}{dt} + 1 - \frac{2\varepsilon}{D})(\frac{2x^2}{D} - 1) = 0.$$

Поскольку уравнение для $D(t)$ должно выполняться при произвольном x, то

$$\frac{dD}{dt} + 2D = 4\varepsilon.$$

Отсюда

$$D = 2\varepsilon(1 - e^{-2t}) + D_0 e^{-2t}.$$

Литература

[1] Дымников В.П., Филатов А.Н. *Устойчивость крупномасштабных атмосферных процессов.* - Л.: Гидрометеоиздат. 1990 - 236 с.

[2] Корнев А.А. *Об аппроксимации аттракторов полудинамических систем* // Математический сборник. 2001. 192, 10. С.19-32.

[3] Оселедец В.И. *Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем*// Труды Моск.мат.общ. 1968. Т19. С.179-210.

[4] Филатов А.Н. *Теория устойчивости.* - М.: ИВМ РАН. 2002. - 206 с.

[5] Abarbanel H.D.I., Brown R., Kennel M.B. *Lyapunov exponents in chaotic systems: their importance and their evaluation using observed data* //Modern physics letters. 1991.

[6] Deker U., Haake T. *Fluctuation-dissipation theorems for classical processes* //Physical Review A. 1975. Vol.1, N 6. P.2043-2056.

[7] Dymnikov V.P. *Adjoint equations, integral conservation laws, and conservative difference schemes for nonlinear*

equations of mathematical physics //Russ. J. Num. Math. Math. Modelling. 2003. Vol.18, N 3. P.229-242.

[8] Dymnikov V., Filatov A. *Mathematics of climate modeling.* - Birkhauser. 1997. - 264 p.

[9] Jacobs S.J. *A note on multiple flow equilibria*// Pageoph. 1989. Vol.30, N 3.

[10] Kaplan J.L., Yorke J.A. *Chaotic behaviour in multidimensional difference equations*// Lecture Notes in Math. 1979. Vol.730. P.228

[11] Lax P.D. *Integrals of Nonlinear equations of evolution and solitary waves* //Communications of Pure and Applied Mathematics. 1968. 21. P.467-490.

[12] Shepherd T.G. *Nonlinear saturation of baroclinic instability. Part I: The two-layer model*// J. Atmos. Sci. Vol.45, N 14. P.2014-2025.

[13] Zeeman E.-C. *Stability of dynamical systems* //Nonlinearity. 1988. 1. P.115-155.

Научное издание

Дымников Валентин Павлович

Избранные главы теории устойчивости динамики двумерной несжимаемой жидкости

Курс лекций

Институт вычислительной математики
Российской академии наук
119991 Москва, ул. Губкина, д. 8

Оригинал-макет изготовлен в ИВМ РАН
Компьютерная верстка
С.В. Кострыкин, Л.И. Журина

Лицензия ИД № 03991 от 12.02.2001 г.
Подписано в печать 15.12.2004 г. Формат 60×90 1/16.
Печать офсетная. Бумага офсетная № 1. Печ.л. 9,0.
Тираж экз. Заказ

Отпечатано согласно представленному оригинал-макету
в ФГУП "Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ"
140010 г. Люберцы Московской обл., Октябрский просп., 403.
Тел. 554-21-86