

Автономная некоммерческая образовательная организация
высшего образования
«НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «СИРИУС»

Научный центр информационных технологий и искусственного интеллекта
направление «Математическое моделирование в биомедицине и геофизике»

К ЗАЩИТЕ ДОПУСТИТЬ

Научный руководитель направления
«Математическое моделирование в
биомедицине и геофизике»

член-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор

Ю.В. Василевский

«___» _____ 2024 г.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИИ ПРИ МЕНЯЮЩЕЙСЯ ПОРИСТОСТИ

Магистерская диссертация

по направлению подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика
(направленность (профиль) «Математическое моделирование в биомедицине и
нефтегазовом инжиниринге»)

Консультант по магистерской
диссертации

Руководитель проекта центра
компетенций по цифровому
анализу керна,

ООО «Газпромнефть НТЦ»

В.В. Крутько

«___» _____ 2024 г.

Студент гр. М01ММ-22

Т.А. Щудро

«___» _____ 2024 г.

Научный руководитель магистерской
диссертации

Доцент направления «Математическое
моделирование в биомедицине и
геофизике» научного центра
информационных технологий и
искусственного интеллекта, к.ф.-м.н.,

Р.М. Янбарисов

«___» _____ 2024 г.

Автономная некоммерческая образовательная организация
высшего образования
«НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «СИРИУС»

Научный центр информационных технологий и искусственного интеллекта

направление «Математическое моделирование в биомедицине и геофизике»

УТВЕРДИТЬ

Научный руководитель направления
«Математическое моделирование
в биомедицине и геофизике»
член-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор

Ю.В. Василевский

«03» июля 2024 г.

ТЕХНИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ
на выполнение выпускной квалификационной работы
обучающегося по направлению подготовки
01.04.02 Прикладная математика и информатика
направленность (профиль) «Математическое моделирование в биомедицине и
нефтегазовом инжиниринге»

Щудро Тимофея Алексеевича

1. Тема: «Исследование фильтрации при меняющейся пористости»
2. Цель: Разработка метода расчета абсолютной проницаемости в пористых средах, верификация на бенчмарках в двумерной и трехмерной областях, валидация на тесте с реальной геометрией порового пространства.
3. Задачи: Разработка метода расчета абсолютной проницаемости в пористых средах. Верификация с аналитикой в случае двумерной области и с литературой в трехмерном случае. Сравнение результатов с литературой на тесте с реальной геометрией порового пространства.
4. Рабочий график (план) выполнения выпускной квалификационной работы:

№	Перечень заданий	Сроки выполнения
1	Изучение литературы по тематике работы	30. 01.2024 - 30.02.2024
2	Отладка симулятора для проведения расчетов	30.02.2024 - 15.03.2024
3	Расчет и верификация на двумерной сетке	15.03.2024 - 23.04.2024
4	Расчет на трехмерной сетке и сравнение результатов с литературой	23.04.2024 - 30.04.2024

№	Перечень заданий	Сроки выполнения
5	Определение проницаемости реальной поровой структуры песчаника Berea и валидация результатов	30.04.2024 - 23.05.2024

Дата выдачи: «30» января 2024 г.

Руководитель ВКР:

Р.М. Янбарисов

Задание принял к исполнению:

Студент группы М01ММ-22

Т.А. Щудро

«30» января 2024 г.

Реферат

Выпускная квалификационная работа, 55 страниц, 18 рисунков, 1 таблица, 50 источников.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИИ ПРИ МЕНЯЮЩЕЙСЯ ПОРИСТОСТИ

Объектом исследования являются методы расчета абсолютной проницаемости в пористых средах.

Цель работы:

Разработка метода расчета абсолютной проницаемости в пористых средах, верификация на бенчмарках в двумерной и трехмерной областях, валидация на тесте с реальной геометрией порового пространства.

В данной работе был построен и реализован алгоритм расчета абсолютной проницаемости в пористых средах с использованием симулятора inmost-floctree. Был использован подход к получению значений проницаемости путем численного решения уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости.

Реализованный метод прошел верификацию на простой геометрии как в двумерном, так и в трехмерном случаях. Также в работе приведены расчеты и валидация не только на аналитических тестах, но и на реальной геометрии порового пространства.

Abstract

Final qualifying work, 55 pages, 18 figures, 1 table, 50 sources.

INVESTIGATION OF FILTRATION WITH VARYING POROSITY

The object of the study is methods for calculating absolute permeability in pore media

Goal of the work:

Development of a method for calculating absolute permeability in porous media, verification on benchmarks in two-dimensional and three-dimensional areas, validation on a test with real geometry of the pore space.

In this paper, an algorithm for calculating permeability in porous media was constructed and implemented using the inmost-floctree simulator. An approach to obtaining permeability values by numerically solving the Navier-Stokes equations for an incompressible liquid in a porous media was used.

The implemented method has been validated on simple geometry in both two-dimensional and three-dimensional cases. The work also provides calculations and validation not only on analytical tests, but also on the real geometry of the porous media.

Сокращения, обозначения, термины и определения

В настоящей работе применяются следующие сокращения и обозначения:

- C_{kc} — Константа в законе Козени-Кармана. (Kozeni-Carman)
- ϕ — пористость среды;
- K — проницаемость среды;
- μ — динамическая вязкость жидкости;
- g — гравитационная постоянная;
- q — сток или исток флюида;
- ξ — множитель, определяющий вклад диффузии;
- ζ — множитель, определяющий вклад инерции;
- LBM — метод решеточных уравнений Больцмана (lattice Boltzman method).

Оглавление

Введение	8
1 ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ.	14
2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ	20
2.1 Базовые понятия.	20
2.2 Цель работы.	21
2.3 Новизна работы	21
2.4 Практическая значимость	22
3 МЕТОДОЛОГИЯ И ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ	24
3.1 Модель несжимаемой жидкости inmost-floctree.	24
3.2 Проекционный метод	25
3.3 Граничные условия для импульса	26
3.4 Расчет проекции скорости.	29
3.5 Дискретизация поправки к давлению	30
3.6 Граничные условия на поправку к давлению	32
3.7 Пошаговый алгоритм численного решения.	32
4 ПОСТАНОВКА ЭКСПЕРИМЕНТОВ	35
4.1 Течение в двумерной области с аналитическим решением.	35
4.2 Тест в трехмерной области	40
4.3 Моделирование потока в песчанике Berea	44
5 РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ	47
Заключение	50
Список использованных источников	51

Введение

Изучение потока жидкости в пористых структурах играет ключевую роль в широком спектре приложений [1—6], понимание и моделирование фильтрации в пористых средах важно для эффективного управления водными ресурсами, разработки месторождений полезных ископаемых.

Например, в гидрогеологии понимание процессов фильтрации в грунтах и подземных водоносных горизонтах имеет ключевое значение для управления водными ресурсами и предотвращения загрязнения. Грунты и породы имеют неоднородную пористость, которая изменяется под воздействием природных и антропогенных факторов.

Другим примером могут являться процессы оседания и эрозии, которые могут изменять структуру пористых сред, влияя на скорость и направление движения подземных вод. Исследование фильтрации позволяет более точно прогнозировать поведение подземных вод и разрабатывать эффективные меры по их защите. Как отмечено в работе [7], знание фильтрационных свойств грунтов является основой для моделирования потоков подземных вод и разработки мероприятий по их охране.

В материаловедении создание новых материалов с заданными фильтрационными свойствами требует глубокого понимания зависимости фильтрационных характеристик от пористости.

Фильтры и мембраны для очистки воды и воздуха, катализаторы для химических реакций и пористые сорбенты для улавливания загрязнителей должны иметь контролируемую пористость для достижения максимальной эффективности. Изменение пористости таких материалов в процессе эксплуатации может значительно влиять на их фильтрационные свойства. Исследование этих изменений позволяет создавать более долговечные материалы. В работе [8] исследуется влияние пористой структуры на эффективность филь-

трации в различных материалах.

В биомедицинских приложениях пористые структуры широко используются для создания биосовместимых материалов, таких как искусственные органы и ткани, а также для разработки медицинских фильтров и мембран, используемых в диализе и других процедурах.

Изменение пористости биоматериалов под воздействием биологических процессов может существенно влиять на их функциональные свойства и биосовместимость. Исследование фильтрации в таких материалах при меняющейся пористости позволяет разрабатывать более надежные и эффективные медицинские устройства. Например, в работе [9] описывается важность разработки пористых материалов с регулируемыми свойствами для использования в тканевой инженерии.

В области охраны окружающей среды пористые материалы используются для очистки загрязненных вод и газов, а также для создания барьеров, предотвращающих распространение загрязнений.

Например, активированный уголь и другие пористые сорбенты используются для улавливания вредных веществ из промышленных выбросов и сточных вод. Изменение пористости таких материалов в процессе адсорбции и десорбции может влиять на их эффективность. Исследование этих процессов позволяет разрабатывать более эффективные методы очистки и защиты окружающей среды.

В нефтегазовой промышленности фильтрация через пористые структуры играет ключевую роль в процессах добычи и переработки углеводородов. Нефтяные пласты часто характеризуются сложной пористо-проницаемой структурой, которая изменяется под воздействием добычи. Вторичные методы добычи, такие как закачка воды или газа, могут дополнительно изменять пористость пород, влияя на эффективность извлечения нефти и газа.

Исследование фильтрации позволяет оптимизировать методы добычи и

повысить коэффициент извлечения углеводородов. В работе [10] рассматриваются методы моделирования фильтрационных процессов в нефтяных пластах, что позволяет улучшить стратегии добычи нефти.

Актуальность исследования фильтрации обусловлена необходимостью решения множества прикладных задач в различных отраслях промышленности и науки. Понимание этих процессов позволяет разрабатывать более эффективные методы управления водными ресурсами, оптимизировать добычу углеводородов, создавать новые материалы с заданными свойствами и улучшать методы очистки окружающей среды.

Одним из нетривиальных аспектов процессов фильтрации, который до сих пор является объектом исследований, является определение зависимости макроскопической величины проницаемости среды от пористости, которая в свою очередь является микроскопической величиной и зависит от структуры материала.

Важный вклад в понимание зависимости внесли исследования пористых сред с различной геометрией пор и структурой порового пространства. Например, в работе [10] показано, что проницаемость может сильно варьироваться в зависимости от распределения размера пор и формы зерен. Например, более крупные и округлые зерна способствуют увеличению проницаемости при той же пористости.

Современные исследования используют методы численного моделирования и рентгеновской микротомографии для анализа пористых структур. Исследования на микроскопическом уровне позволяют более точно оценить влияние микроструктуры на макроскопические свойства пород. К примеру, в исследовании [11] представлены численные модели, которые учитывают реальную геометрию пористого пространства.

Еще одним примером определения проницаемости является работа [12], авторы которой показали, что использование трехмерного моделирова-

ния и микротомографии позволяет значительно уточнить взаимосвязь между пористостью и проницаемостью, особенно в гетерогенных и анизотропных породах.

Таким образом, для учета пористой природы среды при моделировании течений жидкости в поровом пространстве необходимо проводить расчеты на масштабе пор, что является вычислительно сложным и времязатратным.

Другой способ определения проницаемости, не прибегая к расчетам на микроскопических масштабах, является эмпирическим и предполагает прокачку флюида через керн с последующим измерением объёмной пористости и перепада давления.

Экспериментальные исследования часто включают в себя лабораторные измерения пористости и проницаемости на образцах пород. Например, в работе [13] продемонстрировано, что для различных типов осадочных пород зависимость проницаемости от пористости имеет линейный характер в ограниченном диапазоне значений пористости, но может значительно отклоняться при высоких или низких значениях.

Другим примером экспериментальных исследований может служить работа [14], в которой подтверждается, что микроструктура пор имеет решающее значение в определении проницаемости, особенно в углеродистых породах, где вторичные процессы, такие как растворение и осаждение, могут существенно изменять поровое пространство.

Однако экспериментальные способы также являются времязатратными и дорогостоящими, поскольку включает в себя длительный эксперимент. Более того, измерения в масштабах керна часто могут не сопоставляться с результатами на масштабах коллектора из-за неоднородностей, присутствующих в коллекторе (такие как трещины, впадины), которые не фиксируются в образце керна [15—19]. Поскольку получение керна и проведение такого эксперимента является крайне ресурсоемким процессом, предложение более

практичного метода определения проницаемости значительно облегчит стадию проектирования месторождений.

В данной работе используется метод определения абсолютной проницаемости, в основе которого лежит численное решение уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости в пористой среде проекционным методом. Реализуя данный метод, представляется возможным фитирование параметров в законе Козени-Кармана для определения зависимости проницаемости материала от его пористости с последующим огрублением расчетных сеток, что в свою очередь позволяет не проводить моделирование на микроскопическом масштабе и снизить вычислительные и временные затраты.

В работе проведены расчеты для двумерного случая простой геометрии для отладки модели путем сравнения результатов с аналитическим решением [20; 21]. Для этого были построены двумерные адаптивные сетки с простой геометрией. В своей работе автор привел детальный вывод зависимости проницаемости от пористости в случае квадратного или гексогонального расположения круглых пор.

Далее проведено сравнение значений проницаемости с литературой для трехмерного случая аналогичной геометрии и расположения непроницаемых участков. Конфигурация порового пространства была выбрана исходя из того факта, что для трехмерного случая отсутствует точное аналитическое решение, а подобная форма и расположение непроницаемых участков является достаточно описанным в литературе.

Например, в работе [22] авторы исследовали возможность уточнения модели Козени-Кармана путем рассмотрения простой геометрии и варьирования формы параметра C_{kc} с фитированием соответствующих коэффициентов относительно полученных результатов.

Также в работе было выполнено сравнение не только на аналитических тестах, но и на реальной геометрии для двумерного случая, полученной

путем оцифровки сегментированных рентгеновских микро-КТ изображений
песчаника Berea.

1 ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Фильтрация в поровых структурах является важным аспектом многих инженерных и научных дисциплин, включая гидрогеологию, нефтедобычу, биомедицину. Понимание процессов, которые управляют движением жидкости через пористые среды, имеет ключевое значение для разработки эффективных методов фильтрации, прогнозирования поведения грунтовых вод, повышения эффективности добычи нефти и создания новых материалов с заданными фильтрационными свойствами.

Результаты исследований представлены как в более ранних работах, так и в современной литературе. Например, в работе [7] в области гидрогеологии авторы предлагают комплексные подходы к моделированию грунтовых вод и предсказыванию их движения через различные поровые среды. В исследовании [23] рассматриваются различные модели фильтрации в пористых средах, в том числе многофазные течения и капиллярные эффекты, которые находят применение в нефтяной промышленности, где фильтрация через пористые структуры играет ключевую роль в процессе добычи нефти и газа.

В более современных исследованиях, например, в области материаловедения, где исследования фильтрации сосредоточены на создании новых материалов с заданными пористыми структурами, которые могут использоваться в фильтрах, мембранах и сорбентах [8], авторы исследуют влияние структуры пор на эффективность фильтрации и возможность управления этими свойствами на микроскопическом уровне.

В биомедицинских приложениях пористые структуры используются для создания биосовместимых материалов, таких как искусственные органы и ткани, а также для разработки фильтров и мембран для диализа и других медицинских процедур. Исследования в этой области, такие как работы [9], фокусируются на биосовместимости и эффективности материалов в различ-

ных биологических средах.

Одними из важнейших характеристик среды, определяющих течение жидкости, являются микроскопическая величина пористости и макроскопическая величина проницаемости. Под пористостью(ϕ) понимается отношение объема пор к общему объему пористой среды, и она определяется микроскопической структурой среды. Проницаемость(K) - это физическая величина, количественно описывающая способность пропускать жидкость под действием градиента давления. Проницаемость характеризует, насколько легко жидкость может протекать через пористую среду, и поток жидкости в таком случае описывается законом Дарси:

$$\bar{u} = K \frac{\nabla P}{\mu}, \quad (1.1)$$

где $\bar{u}$ - средняя скорость потока, ∇P - градиент давления, μ - вязкость жидкости.

Одной из задач в этой области, которая на данный момент активно исследуется [24—26], является определение зависимости проницаемости среды от её пористости. Взаимосвязь двух этих величин является существенной, поскольку она влияет на транспортировку жидкости внутри пористой среды и, как описано выше, может влиять на эффективность любого технологического процесса.

Еще одним примером, где величина проницаемости является определяющим фактором, является исследование [27], где описано, как при улавливании углерода высокопроницаемые песчаники обеспечивают желаемую емкость для хранения углекислого газа (CO_2), в то время как низкопроницаемые породы над местами хранения необходимы для удержания закачиваемого сверхкритического CO_2 [10]. Следовательно требуется тщательное исследование проницаемости пористых сред.[28—32].

На данный момент существует эмпирическая модель, которая была предложена в работе [33]. Ее отличительной особенностью является возможность учета влияния структуры и распределение размеров пор:

$$K = \frac{\phi^n}{(1 - \phi)^m} \cdot d^2, \quad (1.2)$$

где ϕ - пористость среды, n, m - эмпирические фитируемые параметры, d - характерный размер.

Существует также другое, более популярное эмпирическое соотношение, определяющее зависимость проницаемости от пористости - эмпирическая модель Козени-Кармана:

$$K = \frac{1}{C_{kc}} \cdot \frac{\phi^3}{S^2 \tau^2}, \quad (1.3)$$

где S - характерная площадь поверхности, τ - извилистость, C_{kc} - эмпирический параметр, который зависит от материала.

Модель Козени-Кармана зачастую применяется для оценки проницаемости при численном моделировании соответствующих процессов.

Однако, данная модель имеет ряд ограничений, например, невозможность учета микроскопической структуры материала и геометрии пор. Это в свою очередь приводит к существенным отклонениям модели от реальных результатов при низких показаниях пористости. Таким образом, модель в таких диапазонах пористости нуждается в уточнении. Например, в работе [33] расширили модель КС при оценке проницаемости при низких пористостях. Чтобы устранить то же ограничение, авторы работы [34] предложили степенной закон, который существенно улучшил оценку проницаемости при низкой

пористости среды. Модель проницаемости в данной работе имела вид:

$$K = C\phi^n d^2, \quad (1.4)$$

где, C - эмпирический фитируемый параметр, d - характерная длина, n - показатель, зависящий от величины пористости среды.

В других работах [35; 36] авторы включили в модель распределение частиц по размерам и использовали эффективную проницаемость для повышения точности прогнозирования проницаемости в модели Козени-Кармана. Более того, современные исследования показывают, что параметр C_{kc} в соотношении Козени-Кармана не является постоянной величиной и может меняться для разных значений пористости даже в случае одного и того же материала [37].

Таким образом, разработка метода определения проницаемости, позволяющего избежать одновременного прямого моделирования как на масштабах пор, так и на масштабах коллектора является актуальной задачей. Для определения локальной проницаемости могут быть использованы как традиционные математические модели на масштабах пор, так и модели машинного обучения для снижения вычислительных затрат.

Традиционные математические модели потока жидкости на масштабе пор могут быть разделены на два вида:

- модели прямых численных симуляций (DNS)
- сетевые модели пор (PNM)

В моделях численных симуляций главные уравнения (например, уравнения Навье–Стокса) решаются на основе подробной геометрии и структуры порового пространства, предоставляемой с помощью технологий 3D-визуализации, таких как сегментация рентгеновских микро-КТ изображений

[38]. Наиболее распространенные методы DNS включают в себя, например, решеточные уравнения Больцмана (LBM) и модели вычислительной гидродинамики (CFD) [39]. В последние годы точность прогнозирования прямого численного моделирования была подтверждена экспериментами [40—44]. Основным недостатком DNS является высокое требование к вычислительным ресурсам.

Сетевые модели пор позволяет снизить вычислительную нагрузку, упрощая поровое пространство, представляя его как сеть взаимосвязанных пор и сужений. Объем пустот может быть присвоен только порам, только сужениям или их комбинации [45]. Помимо геометрических упрощений, в PNM часто вводятся дополнительные физические допущения, например, предполагается идеальное перемешивание внутри пор, что может привести к значительным ошибкам.

Другим способом снижения требований к вычислительным ресурсам является подход машинного обучения. Например, в работе [46] расчетная область, которая представляет собой 15-фазное сегментированное компьютерное изображение известняка размером $1200 \times 1200 \times 6000$ вокселей с разрешением 3,9 мкм, разделяется на небольшие подобласти, часть из которых используется для обучения модели. Более того, авторам данной работы удалось достичь большей точности предсказания проницаемости, чем у традиционной модели Козени-Кармана. Также в данной работе описывается метод огрубления расчетной области. На первом этапе расчетная область разделяется на небольшие подобласти, для каждой из которых проводится определение параметра проницаемости. Далее при помощи полученного значения усредненной на каждой подобласти пористости создается огрубленная сетка со значениями проницаемости и пористости в каждой точке.

Как показывают результаты работы [46], наиболее точным методом упрощения расчетной области является определение проницаемости при по-

мощи численного моделирования каждой подобласти. Исходя из этого, в текущей работе в качестве главного метода расчета будет использован подход численного моделирования, заключающийся в решении уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости. А для снижения вычислительных затрат без существенной потери в точности предлагается использовать проекционный метод.

2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

2.1 Базовые понятия

Пористость (ϕ) — это отношение объема доступного для флюида к общему объему пористой среды. Она может быть выражена в процентах или в виде дроби. Различают первичную пористость, сформировавшуюся при образовании породы, и вторичную, возникающую в результате различных геологических процессов.

Проницаемость (K) — это физическая величина, количественно описывающая способность пропускать жидкость под действием градиента давления. Единицей измерения проницаемости является дарси (D).

Поток жидкости через пористую среду под действием градиента давления описывается законом Дарси:

$$\bar{u} = K \frac{\nabla P}{\mu}, \quad (2.1)$$

где $\bar{u}$ - средняя скорость флюида, ∇P - градиент давления, μ - динамическая вязкость флюида.

Из закона Дарси, при известной средней скорости флюида, можно получить значение проницаемости для исследуемой области:

$$K = \mu \frac{\bar{u}}{\nabla P}, \quad (2.2)$$

Стоит также обратить внимание на то, что в законе Дарси используется предположение о линейности перепада давления на противоположащих границах исследуемой области, а усреднение скорости проводится не только по доступной флюиду области, а по всей области определения проницаемости (в том числе по тем участкам, которые являются непроницаемыми, и скорость

на таких участках равна нулю).

2.2 Цель работы

Цель: Разработка метода расчета абсолютной проницаемости в пористых средах, верификация на бенчмарках в двумерной и трехмерной областях, валидация на тесте с реальной геометрией порового пространства.

Критерий достижения цели: Значения проницаемости, полученные описанным в теоретической части методом, совпадают с аналитикой в двумерном случае простой геометрии, с данными из литературы в трехмерном случае [22] и в случае реальных данных [47].

2.3 Новизна работы

Новизна данной работы заключается в реализации и юстировании алгоритма расчета проницаемости численными методами. Для определения средней скорости флюида в работе используется *inmost-floctree* [48], в основе которого реализовано численное решение уравнения Навье-Стокса проекционным методом. Данный метод основан на идее последовательного приближения решения за счет проекции на подпространства, определяемые итерациями.

Проекционный метод является особенно эффективным, когда речь идет о больших разреженных системах, поскольку не требует хранения всей матрицы в памяти, что значительно снижает требования к объему памяти и позволяет решать системы больших размеров.

Еще одним плюсом этого метода является сравнительно быстрая сходимость при правильном выборе предобуславливателя, который данный метод позволяет использовать.

Более того, используемый метод хорошо поддается параллелизации,

что делает его привлекательным для использования на современных много-ядерных процессорах и вычислительных кластерах, что и было использовано в данной работе. Для всех расчетов применялся вычислительный кластер ИВМ РАН, что значительно ускорило процесс определения проницаемости.

2.4 Практическая значимость

Разработка метода определения проницаемости, позволяющего избежать одновременного прямого моделирования как на масштабах пор, так и на масштабах коллектора, является актуальной задачей, решение которой может находить применение в различных областях, таких как гидрогеология, биомедицина или нефтегазовая промышленность.

На данный момент основным методом определения проницаемости является эмпирический метод. Однако он является дорогостоящим и времязатратным, поскольку включает в себя длительный эксперимент над образцом пористой среды. Эксперимент заключается в прокачке флюида через образец под действием перепада давления, и может занимать порядка месяца, не говоря о том, что, например, в нефтегазовой промышленности, получение образца является нетривиальным спектром дорогостоящих операций.

В противовес эмпирическому методу существует способ прямого моделирования процесса фильтрации. Однако в таком случае, для получения достоверных результатов необходимо проводить численный эксперимент одновременно как на масштабе пор, так и на масштабе, например, нефтенесущих коллекторов, что является крайне вычислительно сложной задачей.

Отладка метода определения проницаемости позволит значительно ускорить и упростить моделирование, поскольку с его помощью представляется возможным, например, огрубление расчетной области до макроскопического масштаба [46]. Более того, разработка подобного метода может нахо-

дить применение в процессе разработки цифрового ядра, поскольку позволяет определить одну из значительных характеристик моделируемого материала.

3 МЕТОДОЛОГИЯ И ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ

3.1 Модель несжимаемой жидкости inmost-floctree

В качестве симулятора для параллельных вычислений средней скорости потока флюида в данной работе используется inmost-floctree [48], где реализовано численное решение уравнений Brinkman-Hasen-Dupuit-Darcy для несжимаемой жидкости в пористой среде в области Ω , которые при определенном выборе коэффициентов сводятся к уравнениям Навье-Стокса:

$$\begin{cases} \zeta \partial_t \mathbf{v} + \operatorname{div} (\zeta \phi^{-1} \mathbf{v} \mathbf{v}^T - \xi \boldsymbol{\tau}(\mathbf{v})) + \phi \nabla p + \nu \phi \boldsymbol{\kappa}^{-1} \mathbf{v} = \phi g \nabla z, \\ \operatorname{div}(\mathbf{v}) = q, \end{cases} \quad (3.1)$$

где $\mathbf{v} = \phi \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}^T$ - вектор скорости флюида, p - нормированное на плотность давление жидкости, $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{v}) = 2\nu\phi\boldsymbol{\epsilon}(\phi^{-1}\mathbf{v})$ - напряжение жидкости, $\boldsymbol{\epsilon}(\phi^{-1}\mathbf{v}) = \phi^{-1}(\mathbf{v}\nabla^T + \nabla\mathbf{v}^T)/2$ - вектор деформаций, ν - кинематическая вязкость жидкости, g - ускорение свободного падения, ∇z - вектор вдоль которого направлена сила тяжести, q - исток или сток жидкости, ξ - коэффициент, определяющий вклад инерции, ζ - коэффициент, определяющий вклад вязкости.

Также для дальнейших выкладок определим матрицу градиента вектора скорости $\nabla\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v}\nabla^T = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_x & \partial_y & \partial_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x u & \partial_y u & \partial_z u \\ \partial_x v & \partial_y v & \partial_z v \\ \partial_x w & \partial_y w & \partial_z w, \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Также определим симметричную часть градиента скорости:

$$\frac{\mathbf{v}\nabla^T + \nabla\mathbf{v}^T}{2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\partial_x u & \partial_y u + \partial_x v & \partial_z u + \partial_x w \\ \partial_y u + \partial_x v & 2\partial_y v & \partial_z v + \partial_y w \\ \partial_z u + \partial_x w & \partial_z v + \partial_y w & 2\partial_z w \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Таким образом, в частных случаях при $\xi = 1, \zeta = 0$ мы получим уравнения Бринкмана, при $\xi = \zeta = 0$ уравнения Дарси, а при $\xi = \zeta = 1$ - полную систему уравнений Brinkman-Hazen-Dupuit-Darcy.

На границах система уравнений (3.1) замыкается граничными условиями. Во всех вычислениях на границах используется граничное условие неприлипания кроме тех, через которые входит и выходит поток жидкости:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= 0, & (\text{неприлипание}), \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_{\text{in}}, & (\text{входящий поток}), \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} &= 0, \quad (\mathbb{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^T) \mathbf{v}\nabla^T \mathbf{v}\nabla^T \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad p = p_b, & (\text{выходящий поток}), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $\mathbf{n}$ - положительно ориентированная нормаль к границе области $\partial\Omega$.

3.2 Проекционный метод

Для дискретизации производной по времени используется формула второго порядка точности:

$$\partial_t \mathbf{v} = \frac{\alpha (\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n) - \beta (\mathbf{v}^n - \mathbf{v}^{n-1})}{\Delta t}, \quad (3.5)$$

где $\alpha = 1 + \frac{\eta}{\eta+1}$, $\beta = \frac{\eta^2}{\eta+1}$, $\eta = \frac{\Delta t}{\Delta t^n}$ - отношение текущего шага по времени к предыдущему. Например, для постоянного шага по времени $\eta = 1$, $\alpha = 3/2$, $\beta = 1/2$.

Подставляя дискретизацию по времени в систему (3.1), получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\zeta\alpha}{\Delta t} (\mathbf{v} - \mathbf{v}^n) - \frac{\zeta\beta}{\Delta t} (\mathbf{v}^n - \mathbf{v}^{n-1}) + \operatorname{div} \left(\frac{\zeta}{\phi} \mathbf{v} \mathbf{v}^T - \xi \boldsymbol{\tau}(\mathbf{v}) \right) + \\ & \phi \nabla p^n + \nu \phi \boldsymbol{\kappa}^{-1} \mathbf{v} = \phi g \nabla z, \\ & \frac{\zeta\alpha}{\Delta t} (\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}) + \phi \nabla (p^{n+1} - p^n) + \nu \phi \boldsymbol{\kappa}^{-1} (\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}) = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

Где первое уравнение есть исходное уравнение Навье-Стокса, а второе получено исходя из проекционного метода, преобразуя которое в удобный вид получаем:

$$\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v} + \left(\frac{\zeta\alpha}{\Delta t} \mathbb{I} + \nu \phi \boldsymbol{\kappa}^{-1} \right)^{-1} \phi \nabla (p^{n+1} - p^n) = \mathbf{0} \quad (3.7)$$

Далее, применив дифференциальный оператор дивергенции к полученному выражению, получим задачу анизотропной диффузии:

$$-\operatorname{div}(\mathbb{K} \nabla \delta p) = q^{n+1} - \operatorname{div}(\mathbf{v}), \quad \mathbb{K} = \left(\frac{\zeta\alpha}{\Delta t} \mathbb{I} + \nu \phi \boldsymbol{\kappa}^{-1} \right)^{-1} \phi, \quad (3.8)$$

где $\delta p = p^{n+1} - p^n$ - поправка к давлению, q^{n+1} - исток или сток жидкости на следующем шаге, $\mathbb{K}$ - симметричная матрица 3×3 .

Граничные условия для этого уравнения будут:

$$\begin{aligned} \delta p &= p_b^{n+1} - p_b^n, & (\text{выходящий поток}) \\ \mathbb{K} \mathbf{n} \cdot \nabla \delta p &= 0, & (\text{остальные границы}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

3.3 Граничные условия для импульса

Для обработки всех типов граничных условий в модели используются параметры α , β - матрицы размерности 3×3 и γ - вектор 3×1 :

$$\alpha = \alpha_{\perp} \mathbf{n} \mathbf{n}^T + \alpha_{\parallel} (\mathbb{I} - \mathbf{n} \mathbf{n}^T), \quad \beta = \beta_{\perp} \mathbf{n} \mathbf{n}^T + \beta_{\parallel} (\mathbb{I} - \mathbf{n} \mathbf{n}^T), \quad (3.10)$$

При помощи комбинаций параметров представляется возможным задание любых граничных условий, в частности, соответствующим задаче граничным условиям будут соответствовать параметры, представленные в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Параметры, соответствующие граничным условиям задачи.

Г.У.	$\alpha_{\perp}$	$\beta_{\perp}$	$\alpha_{\parallel}$	$\beta_{\parallel}$	γ
(3.4.1)	1	0	1	0	0
(3.4.2)	1	0	1	0	u_{in}
(3.4.3)	0	1	0	1	0

Общее граничное условие для скорости представляется в виде:

$$\boldsymbol{\alpha} \mathbf{v} + \boldsymbol{\beta} \mathbf{v} \nabla^T \mathbf{n} = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{v} + \boldsymbol{\beta} \otimes \mathbf{n}^T (\mathbf{v} \otimes \nabla) = \gamma. \quad (3.11)$$

Данное граничное условие аппроксимируется выражением:

$$\boldsymbol{\alpha} \mathbf{v}_{\sigma} + \boldsymbol{\beta} \Lambda_b (\mathbf{v}_{\sigma} - \mathbf{v}_1) + \boldsymbol{\beta} \Gamma_b (\mathbf{v}_1 \otimes \nabla) = \gamma, \quad (3.12)$$

где Λ_b - матрица размерности 3×3 , Γ_b - 3×3 матрица, состоящая из 1×3 векторов, включающих только поперечную часть градиента:

$$\Lambda_b = \frac{1}{r_1} \mathbb{I}, \quad \Gamma_b = \mathbb{I} \otimes \mathbf{n}^T - \Lambda_b \otimes (\mathbf{x}_{\sigma} - \mathbf{x}_1)^T. \quad (3.13)$$

Из данного граничного условия (3.12) можно получить скорость на границе:

$$\mathbf{v}_{\sigma} = (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \Lambda_b)^{-1} (\gamma + \boldsymbol{\beta} \Lambda_b \mathbf{v}_1 - \boldsymbol{\beta} \Gamma_b (\mathbf{v}_1 \otimes \nabla)). \quad (3.14)$$

При помощи найденной скорости получим поток импульса через границу σ :

$$(\zeta \phi^{-1} \mathbf{v}^T - \boldsymbol{\tau}(\mathbf{v}))|_{\sigma} \mathbf{n} \approx \Lambda_1^{\theta} \mathbf{v}_1 - \Lambda_1^{\psi} \mathbf{v}_{\sigma}, \quad (3.15)$$

где

$$\mathbf{v}_{\sigma} = (\boldsymbol{\alpha} + \beta \Lambda_b)^{-1} (\gamma + \beta \Lambda_b \mathbf{v}_1)$$

В модели учитывается возможность задать различный вклад для вязкости и инерции, например для непроницаемых ячеек $\nu = 0$ и $\xi = \zeta = 0$ для ячеек, соответствующих среде, течение в которой подчиняется закону Дарси. Оба варианта приводят к отсутствию адвекционного и диффузионного вклада импульса в таких ячейках.

Опишем правила определения скорости на границе непроницаемых сред. Пусть внутренняя граница σ является общей для двух ячеек $\sigma = \omega_1 \cap \omega_2$. И адвекция либо диффузия учтена в ячейке ω_1 . Если ω_2 является непроницаемой или ячейкой, соответствующих среде, течение в которой подчиняется закону Дарси, тогда вклад потока импульса и экстраполяция скорости со стороны соседней ячейки сводятся к нулю. В таких случаях $\mathbf{v}_{\sigma}$ фиксируется равной $\mathbf{v}_2$ и для непроницаемых сред и сред, течение в которых подчиняется закону Дарси, имеют место соотношения:

$$\mathbf{v}_{\sigma} = \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \quad \text{and} \quad \mathbf{v}_{\sigma} = \mathbf{v}_2 = \nu^{-1} \boldsymbol{\kappa} (\nabla p_2 - g \nabla z), \quad (3.16)$$

Первое уравнение представляет собой нулевую скорость просачивания в непроницаемые ячейки, а второе выражение следует из дискретизации закона сохранения импульса, и скорость в пределах ячейки ω_2 в этом случае является кусочно-постоянной.

3.4 Расчет проекции скорости

Перед тем, как интерполировать скорость в центре ячейки на грани, выпишем $\bar{\mathbf{v}}$ без вклада давления:

$$\frac{\zeta_\alpha}{\Delta t}(\bar{\mathbf{v}} - \mathbf{v}) - \phi \nabla p^n + \nu \phi \kappa^{-1}(\bar{\mathbf{v}} - \mathbf{v}) = \mathbf{0}, \quad (3.17)$$

что приводит к явной формуле:

$$\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v} + \mathbb{K} \nabla p^n. \quad (3.18)$$

Вклад давления будет переопределяться через нормальную компоненту проекции скорости после интерполяции. Определим эту скорость как $\bar{\psi} = \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{v}}_\sigma$. На границе σ скорость интерполируется, однако на внутренних гранях уравнение для скорости на грани σ приводит к экстраполяции из вышестоящей ячейки, что способствует неустойчивости метода.

Для того, чтобы обеспечить устойчивость, на внутренней грани $\sigma = \omega_1 \cap \omega_2$ с ненулевой пористостью $\phi_1 \neq 0, \phi_2 \neq 0$ в обеих соседних ячейках предполагается приближение для обеих ячеек:

$$\bar{\psi}_i = \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{v}}_i, \quad (3.19)$$

и окончательное значение определяется с использованием ограничителя потока Ван Леера:

$$\bar{\psi} = \mu_1 \bar{\psi}_1 + \mu_2 \bar{\psi}_2, \quad \mu_1 = \frac{|\bar{\psi}_2| + \epsilon}{|\bar{\psi}_1| + |\bar{\psi}_2| + 2\epsilon}, \quad \mu_2 = \frac{|\bar{\psi}_1| + \epsilon}{|\bar{\psi}_1| + |\bar{\psi}_2| + 2\epsilon}. \quad (3.20)$$

Если же пористость соседней ячейки равна нулю, нормальная компонента проекции равна нулю: $\bar{\psi} = 0$. Это соответствует отсутствию течения

через непроницаемый материал.

После интерполяции нормальная компонента проекции дополняется вкладом градиента давления:

$$\psi = \bar{\psi} - \mathbb{K} \mathbf{n} \cdot \nabla p^n. \quad (3.21)$$

3.5 Дискретизация поправки к давлению

Для расчета потока $\mathbb{K} \mathbf{n} \cdot \nabla p^n$ проинтегрируем уравнение (3.8) по объёму ячейки ω_1 . Далее, используя теорему Остроградского-Гаусса и приближения интегралов в средних точках, получим:

$$- \sum_{\sigma \in \partial \omega} |\sigma| \mathbb{K} \mathbf{n} \cdot \nabla \delta p \Big|_{\sigma} = |\omega_1| q^{n+1} - \sum_{\sigma \in \Omega \omega} |\sigma| \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_{\sigma}, \quad (3.22)$$

где $\mathbf{n}$ - положительно ориентированная нормаль к грани σ ячейки ω_1 , $\mathbf{x}_1$ - центр ячейки ω_1 , $\mathbf{x}_{\sigma}$ - центр грани σ . Тогда расстояние от центра ячейки ω_1 центра грани σ определяется равенством: $r_1 = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x}_{\sigma} - \mathbf{x}_1)$.

Предположим, что δp линейно меняется в пределах ячейки ω_1 , тогда его градиент $\nabla \delta p$ постоянен в ячейке ω_1 . Определим δp_{σ} на центре грани:

$$\nabla \delta p_1 = \frac{1}{r_1} \mathbf{n} (\delta p_{\sigma} - \delta p_1) + \left(\mathbb{I} - \frac{1}{r_1} \mathbf{n} (\mathbf{x}_{\sigma} - \mathbf{x}_1)^T \right) \nabla \delta p_1. \quad (3.23)$$

Используя разложение (3.23), получим поправку к приближению потока на грани σ со стороны ячейки ω_1 :

$$\mathbb{K} \mathbf{n} \cdot \nabla \delta p|_{\sigma} \approx \mathbb{K}_1 \mathbf{n} \cdot \nabla \delta p_1 \approx \lambda_1 (\delta p_{\sigma} - \delta p_1) + \gamma_1 \cdot \nabla \delta p_1, \quad (3.24)$$

где

$$\lambda_1 = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbb{K}_1 \mathbf{n}}{r_1}, \gamma_1 = \mathbb{K}_1 \mathbf{n} - \lambda_1 (\mathbf{x}_{\sigma} - \mathbf{x}_1)$$

Пусть соседняя ячейка ω_2 с матрицей $\mathbb{K}_2$ имеет общую границу с рассматриваемой ячейкой $\sigma = \omega_1 \cap \omega_2$. Предполагая непрерывность давления в центре ячейки, поправка к приближению потока на грани σ со стороны ячейки ω_2 равна:

$$\mathbf{Kn} \cdot \nabla \delta p|_{\sigma} \approx \mathbb{K}_2 \mathbf{n} \cdot \nabla \delta p_2 \approx \lambda_2 (\delta p_2 - \delta p_{\sigma}) + \gamma_2 \cdot \nabla \delta p_2, \quad (3.25)$$

где

$$\lambda_2 = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbb{K}_2 \mathbf{n}}{r_2}, \quad \gamma_2 = \mathbb{K}_2 \mathbf{n} - \lambda_2 (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_{\sigma}).$$

Далее из соображения непрерывности приближений (3.23) и (3.25) получается выражение:

$$\delta p_{\sigma} = (\lambda_1 + \lambda_2)^{-1} (\lambda_1 \delta p_1 + \lambda_2 \delta p_2 + \gamma_2 \cdot \nabla \delta p_2 - \gamma_1 \cdot \nabla \delta p_1), \quad (3.26)$$

подставляя его в уравнения (3.23) или (3.25) получим поправку по давлению для потока:

$$\mathbf{Kn} \cdot \nabla \delta p|_{\sigma} \approx (\lambda_1 + \lambda_2)^{-1} (\lambda_1 \lambda_2 (\delta p_2 - \delta p_1) + \lambda_2 \gamma_1 \cdot \nabla \delta p_1 + \lambda_1 \gamma_2 \cdot \nabla \delta p_2). \quad (3.27)$$

Пренебрегая вкладом градиентов, получается двуточечная формула:

$$\mathbf{Kn} \cdot \nabla \delta p|_{\sigma} \approx (\lambda_1 + \lambda_2)^{-1} \lambda_1 \lambda_2 (\delta p_2 - \delta p_1). \quad (3.28)$$

3.6 Граничные условия на поправку к давлению

Граничные условия для поправки давления (3.9) параметризуются аналогично скорости:

$$\alpha \delta p + \beta \mathbb{K} \mathbf{n} \cdot \nabla \delta p = \gamma, \quad (3.29)$$

где ненулевые α, β, γ отображают граничные условия Дирихле, Неймана, и правой части соответственно. Граничные условия приближаются соотношением:

$$\alpha \delta p_\sigma + \beta \lambda_1 (\delta p_\sigma - \delta p_1) + \beta \gamma_1 \cdot \nabla \delta p_1 = \gamma, \quad (3.30)$$

откуда можно выразить δp_σ :

$$\delta p_\sigma = (\alpha + \beta \lambda_1)^{-1} (\gamma + \beta \lambda_1 \delta p_1 - \beta \gamma_1 \cdot \nabla \delta p_1). \quad (3.31)$$

Подставляя полученное давление в уравнение (3.24) и, пренебрегая градиентами, получим искомую поправку к потоку на границе σ .

$$\mathbb{K} \mathbf{n} \cdot \nabla \delta|_\sigma \approx \lambda_1 (\delta p_\sigma - \delta p_1), \quad \delta p_\sigma = (\alpha + \beta \lambda_1)^{-1} (\gamma + \beta \lambda_1 \delta p_1) \quad (3.32)$$

3.7 Пошаговый алгоритм численного решения

На каждом шаге по времени в центрах ячеек хранится скорость на предыдущем шаге $\mathbf{v}^{n-1}$ и на текущем $\mathbf{v}^n$, в центрах граней хранятся нормальные компоненты проекции скорости ψ^{n-1} и ψ^n , в ячейках - давление p^n . Причем на первом шаге давление p^n и его градиент предполагаются равными нулю.

В конечном итоге численное решение состоит из следующих этапов:

- Решение уравнение для импульса для получения промежуточной скорости в центре ячейки $\mathbf{v}_i$:

- Расчет поправки градиента давления ∇p_i^n в каждой ячейке ω_i и сборка части дискретизированного уравнения сохранения импульса.
- Сборка слагаемого с дивергенцией в уравнении сохранения импульса для системы с рассчитанными потоками.
- Решение системы для получения $\mathbf{v}_i$ в центрах ячеек.
- Обновление нормальной компоненты проекции скорости ψ .
- Расчет проекции скорости без вклада давления $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v} + \mathbb{K} \nabla p^n$.
- Интерполяция скорости $\bar{\mathbf{v}}_\sigma$ на внутренние грани и на границы.
- Переопределение вклада давления в проекцию $\psi = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_\sigma - \mathbb{K} \mathbf{n} \cdot \nabla p^n$ при помощи потока $\mathbb{K} \mathbf{n} \cdot \nabla p^n$, для определения которого используется p^n вместо δp для корректных граничных условий (3.9).
- Решение уравнение на поправку к давлению для получения δp :
- Сборка и решение системы для уравнения на поправку к давлению (3.8) при помощи потоков через внутренние грани и границы.
- Решение системы для получения поправки давления δp_i в центрах ячеек.
- Расчет давления на $n+1$ -м шаге p^{n+1} , бездивергентной проекции ψ^{n+1} и скорости $\mathbf{v}^{n+1}$:
- Расчет скорости на следующем шаге в каждой ячейке $\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v} - \mathbb{K} \nabla \delta p$.
- Расчет проекций на следующем шаге на каждой грани $\psi^{n+1} = \psi - \mathbb{K} \mathbf{n} \cdot \nabla \delta p$.
- Расчет давлений на следующем шаге в каждой ячейке $p^{n+1} = p^n + \delta p$.

Стоит заметить, что первый и третий шаг требует решения линейной системы, система решается итеративно с многоуровневым предобуславливателем [49; 50].

4 ПОСТАНОВКА ЭКСПЕРИМЕНТОВ

4.1 Течение в двумерной области с аналитическим решением

Для отладки симулятора для определения проницаемости прежде всего необходима геометрия, для которой известно аналитическое соотношение проницаемости и пористости. В данной работе использовалась геометрия с круглыми непроницаемыми участками, расположенными периодически. Конфигурация пор изображена на рис. 1 (а): серым цветом обозначена область, свободная для протекания жидкости, черным цветом изображены непроницаемые участки. Варьируя площадь черных непроницаемых кругов, можно менять параметр пористости среды.

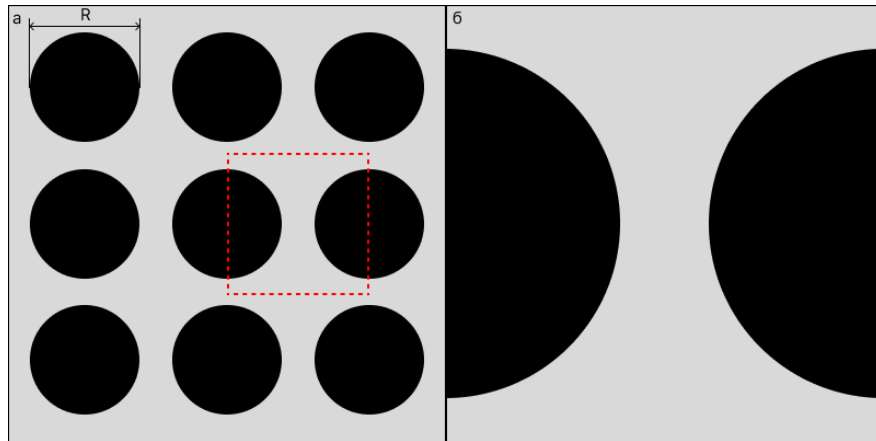


Рисунок 4.1 – Конфигурация пористой среды для сравнения с аналитическим решением (а) и непосредственно расчетный домен (б)

Для такой геометрии существует аналитическое решение Гебарта [20; 21]:

$$\frac{K}{R^2} = C_G \left(\sqrt{\frac{1 - \phi_C}{1 - \phi}} - 1 \right)^{\frac{5}{2}}, \quad (4.1)$$

где R - радиус кругов, $\phi_C = 1 - \frac{\pi}{4}$ - критическая пористость, при достижении которой течение перестанет существовать, C_G - конфигурационная константа, отражающая взаимное расположение кругов, в нашем случае $C_G = \frac{16}{9\pi\sqrt{2}}$.

При получении уравнения (4.1) использовалось предположение о бесконечном размере пористой среды в обоих направлениях. Однако, численно это реализовать невозможно, поэтому в расчетах использовался домен, представленный на рис. 4.1 (б), с граничными условиями непротекания на криволинейных краницах и непротекания на остальных. Более того, для обеспечения корректного учета граничных условий при низких значениях пористости, шаг сетки в узких местах стоит уменьшать, т.е. сетка должна быть адаптивной. Пример такой сетки представлен на рис. 4.2. Без уменьшения шага сетки

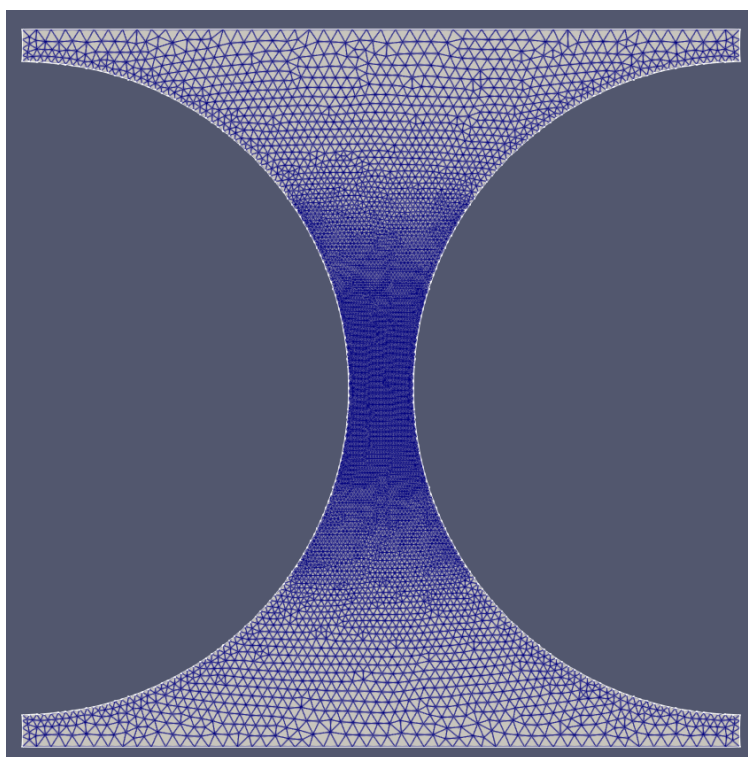


Рисунок 4.2 – Пример расчетной сетки для двумерного случая простой геометрии

в узких участках сетки, которые неизбежно появляются при низких значениях пористости, проекционный метод вносит ошибку в значение скорости в подобных сужениях. Что, в свою очередь, влияет на итоговую рассчитанную проницаемость структуры, и такой расчет нельзя считать валидным. Пример подобного случая при низком значении пористости изображен на рис. 4.3.

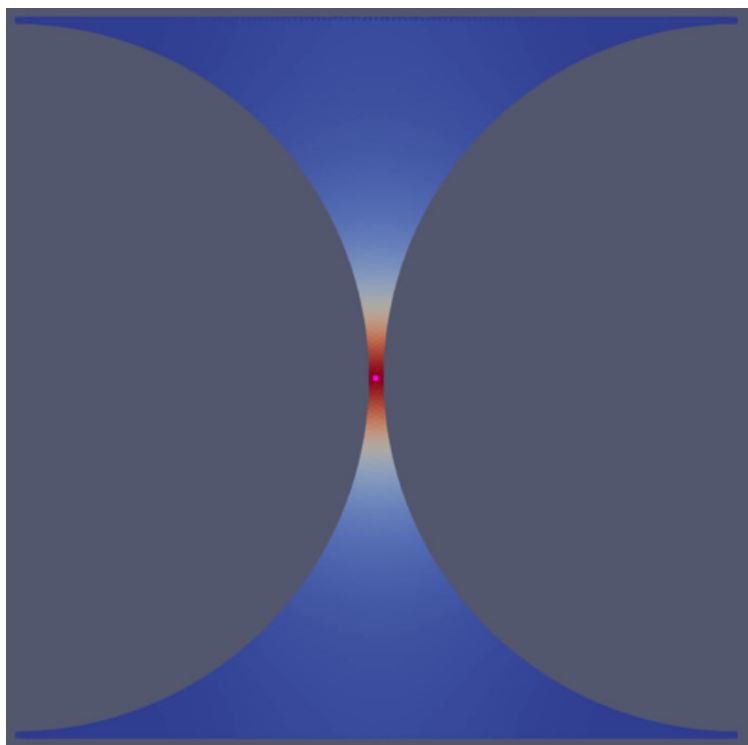


Рисунок 4.3 – Поле скорости на сетке с сужениями при низком значении пористости

Расчетная область имела размеры 1×1 . Граничные условия на левой и правой границе соответствовали условиям неприлипания. При расчете был использован шаг по времени 0.00002 для уменьшения вклада поправки к давлению (3.46) и (3.47). При высоких значениях вязкости наблюдалось существенное отклонение от аналитического решения, пример которого представлен на рис. 4.4. Подобное поведение модели может быть связано с тем, что для проекционный метод дает ошибку, пропорциональную коэффициенту вязкости, у границ расчетной области.

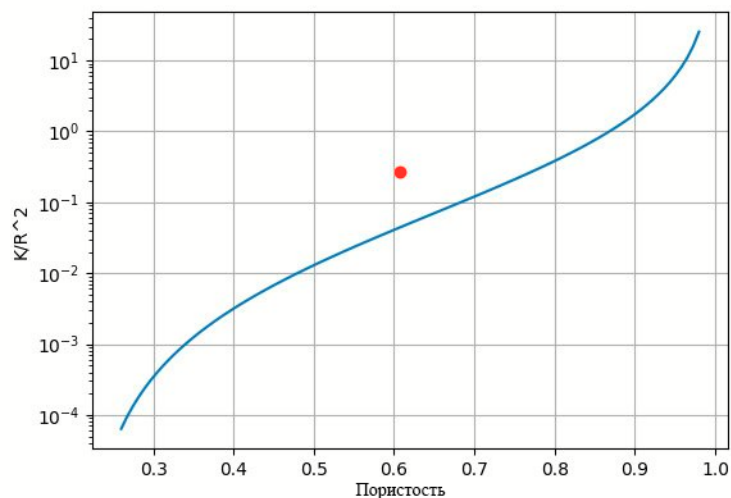


Рисунок 4.4 – Существенное отклонение значения проницаемости от аналитики при вязкости $\mu > 1$

Градиент давления в ходе эксперимента был направлен по оси y и равен 1 (см рис. 4.6). Однако в случае высокой вязкости наблюдалось значительное отклонение диапазона значений давления от заданных - от 0.05 до 1.1 (см. рис. 4.5), что означает, что в части расчетной области градиент давления не являлся равномерным.

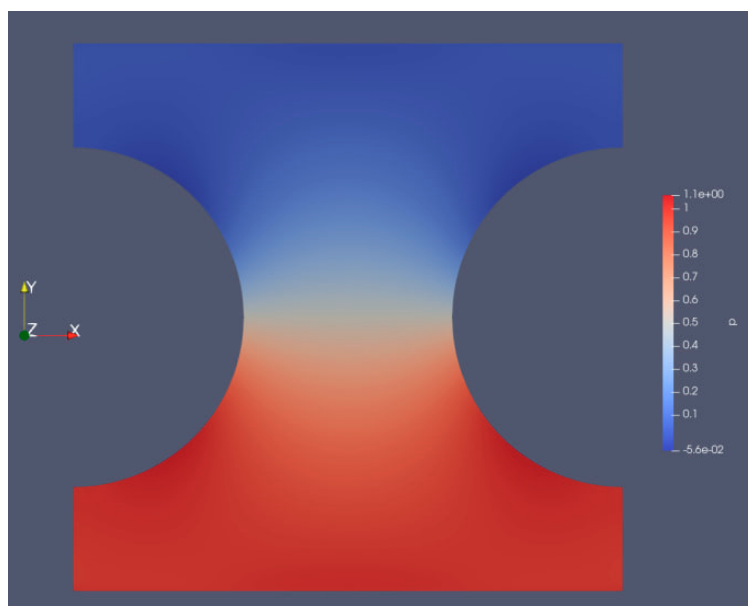


Рисунок 4.5 – Отклонение давления

Но закон Дарси в свою очередь работает в предположении, что градиент давления равномерный и одинаковый во всей области. Таким образом,

решение при больших значениях вязкости требует дальнейшей тонкой юстировки параметров модели.

С другой стороны, слишком маленькая вязкость может существенно замедлить достижение равновесного состояния, поскольку это повысит число Рейнольдса и течение в таком случае станет более турбулентным:

$$Re = \frac{vD_h}{\mu},$$

где v - характерная скорость течения, D_h - гидравлический диаметр.

Таким образом, оптимальным значением вязкости было выбрано $\mu = 1$, при такой вязкости ошибка становится несущественной и становится возможным расчет до равновесия. Далее вклад гравитационной постоянной предполагался нулевым. Расчет проводился до достижения системой равновесного состояния. Параметры ξ и ζ равнялись 1. Пример валидного расчета скорости потока флюида приведен на рис. 4.7.

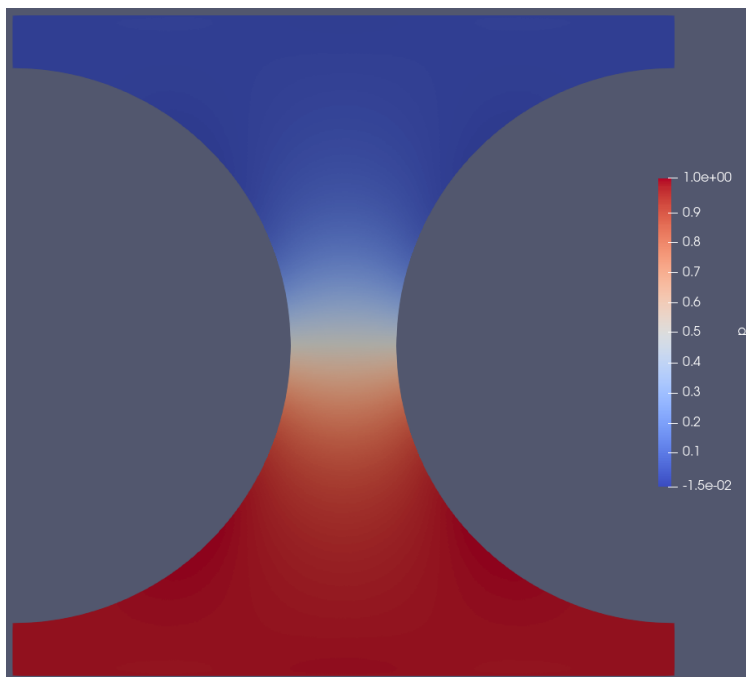


Рисунок 4.6 – Распределение давления на двумерной расчетной области

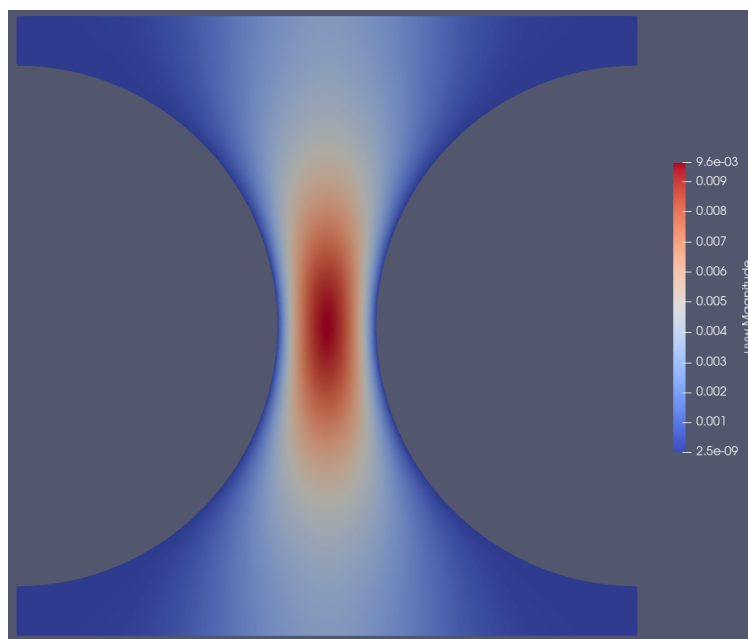


Рисунок 4.7 – Распределение амплитуды скорости на двумерной расчетной области

4.2 Тест в трехмерной области

Для расширения алгоритма расчета проницаемости на трехмерный случай использовалась конфигурация, представляющая из себя периодически расположенные непроницаемые шары. Меняя радиус шаров, можно регулировать пористость среды. Аналогично геометрии из ч. 4.1 выделялся расчетный домен из трехмерной среды. Сетка, построенная на таком домене, должна так же обладать адаптивностью в узких местах для обеспечения корректной обработки граничных условий при расчете. Расчетная сетка для трехмерного случая изображена на рис. 4.8:

Для построения сеток, изображенных на рис. 4.2 и рис. 4.8, использовалась программная платформа GMSH. В обоих случаях расчетная сетка была получена путем логической разности куба и периодически расположенных кругов/шаров. Далее для двумерной сетки использовался алгоритм Frontal-Delaunay, а для трехмерной Delaunay. Адаптивность достигалась путем использования полей размеров, которые основывались на расстояниях до опор-

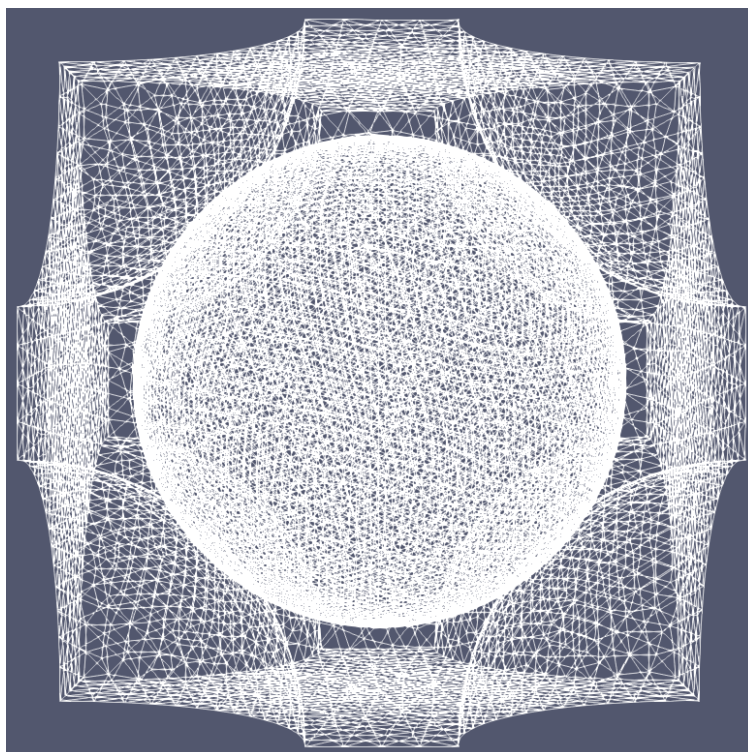


Рисунок 4.8 – Пример расчетной сетки для трехмерного случая
ных кривых/поверхностей.

Для данного кейса нет аналитического решения, поэтому результаты, полученные на такой сетке, сравниваются с литературой. Например, аналогичная конфигурация исследовалась в работе [22]. Граничные условия в данном расчете соответствовали условиям неприлипания на всех границах кроме тех, которые соответствуют входу флюида в область и выходу из неё. Распределение давления изображено на рис. 4.9.

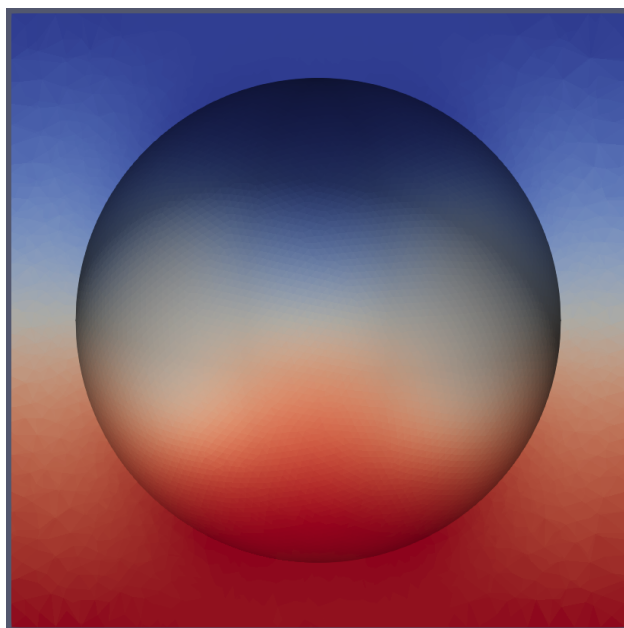


Рисунок 4.9 – Распределение давления на срезе трехмерной расчетной области

Расчетная область имела размеры $1 \times 1 \times 1$. Параметры ξ и ζ аналогично двумерному случаю равнялись 1. Вязкость μ в этом эксперименте аналогично равна 1. При бóльших значениях вязкости, имело место отклонение градиента давления, аналогичное двумерному случаю. Однако в данном случае, ошибка является более наглядной и представлена на рис. 4.10.

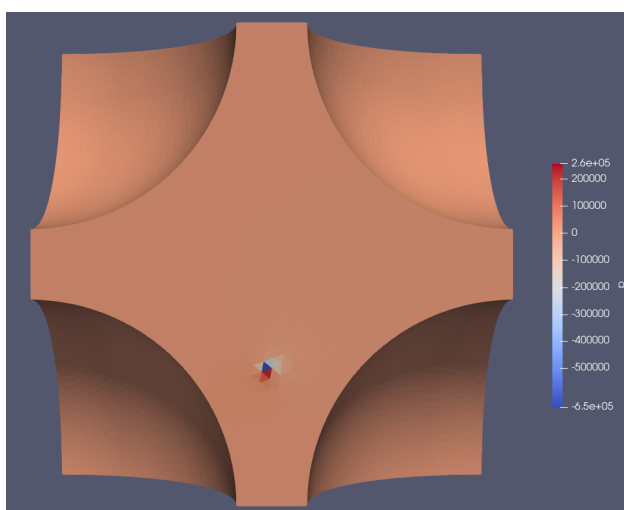


Рисунок 4.10 – Отклонение давления на трехмерной расчетной области

При расчете для уменьшения вклада поправки давления (3.46) и (3.47) необходимо было уменьшить шаг по времени, однако, с другой стороны, достичь по времени равновесного состояния системы. Оптимальным для этого оказался шаг по времени 0.00002. Гравитационная постоянная предполагалась нулевой. Пример расчета скорости жидкости приведен на рис. 4.11.

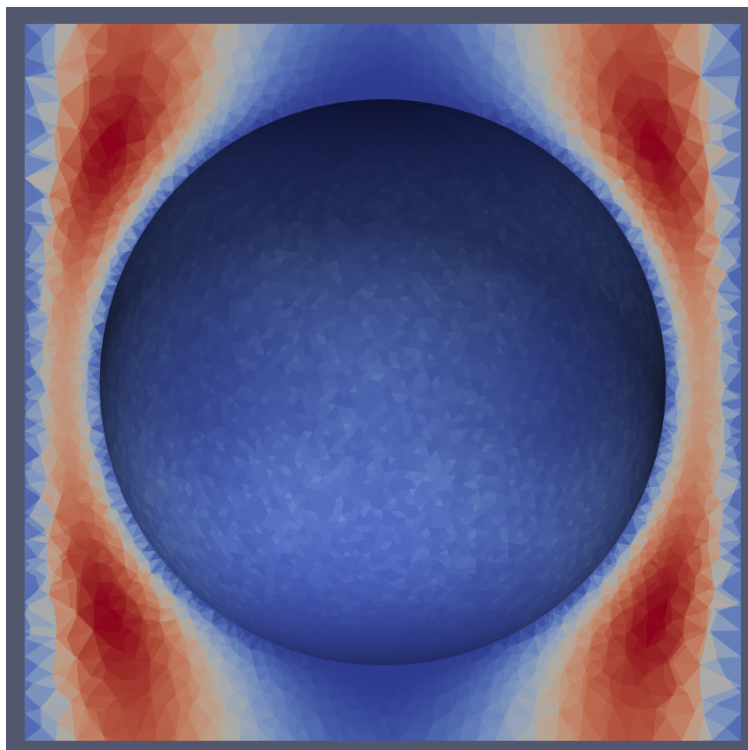


Рисунок 4.11 – Распределение амплитуды скорости на срезе трехмерной расчетной области

4.3 Моделирование потока в песчанике Berea

В ходе работы также проводился расчет на реальной геометрии пористой среды. В качестве образца использовалось сегментированное изображение поровой структуры песчаника Berea, представленное на рис. 4.12.

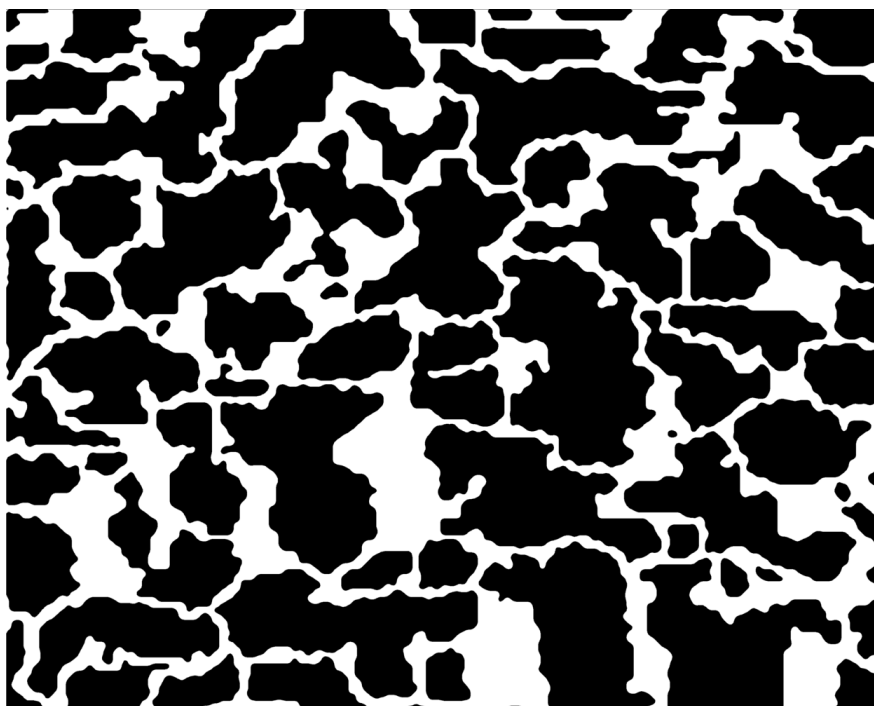


Рисунок 4.12 – Сегментированное изображение поровой структуры песчаника Berea

После оцифровки изображения проводилось выделение замкнутых непроницаемых участков, изображенных на рисунке 4.13. Далее из поверхности, охватывающей всю расчетную область, производилось вычитание полученных поверхностей, соответствующих непроницаемым участкам, и таким образом формировалась структура пор. Адаптивность сетки реализовывалась относительно расстояния между ближайшими границами пористой структуры, т.е. ширины каналов. Итоговая расчетная сетка представлена на рисунке 4.14.

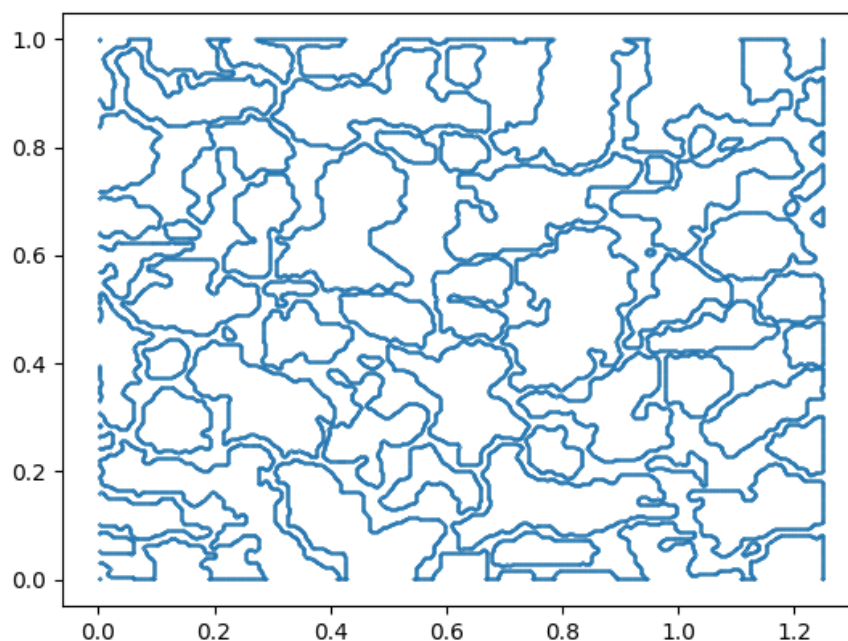


Рисунок 4.13 – Оцифровка границ непроницаемых участков

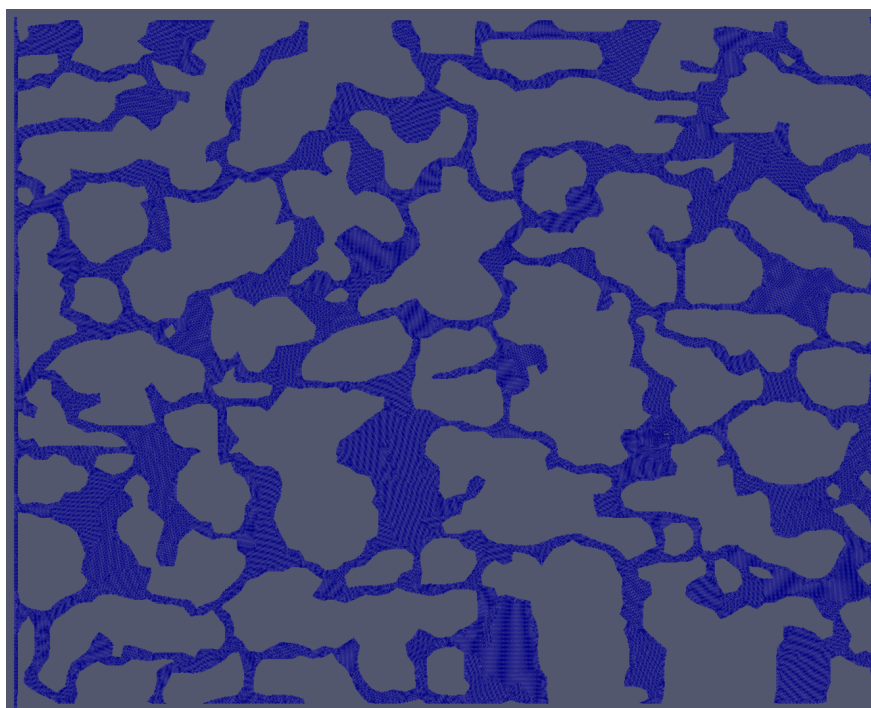


Рисунок 4.14 – Расчетная сетка для песчаника Berea

Градиент давления в этом эксперименте был направлен по x и представлен на рис. 4.15. Граничное условие неприлипания так же использовалось на всех границах, не являющимися границами входящего и исходящего потоков.

Вязкость жидкости аналогично равнялась 1, вклад гравитации не учитывался. Константы ξ и ζ эквивалентно другим расчетам приравнивались к 1. Шаг по времени выбирался аналогично трехмерной сетке. Результаты расчета скорости приведены на рис. 4.16.

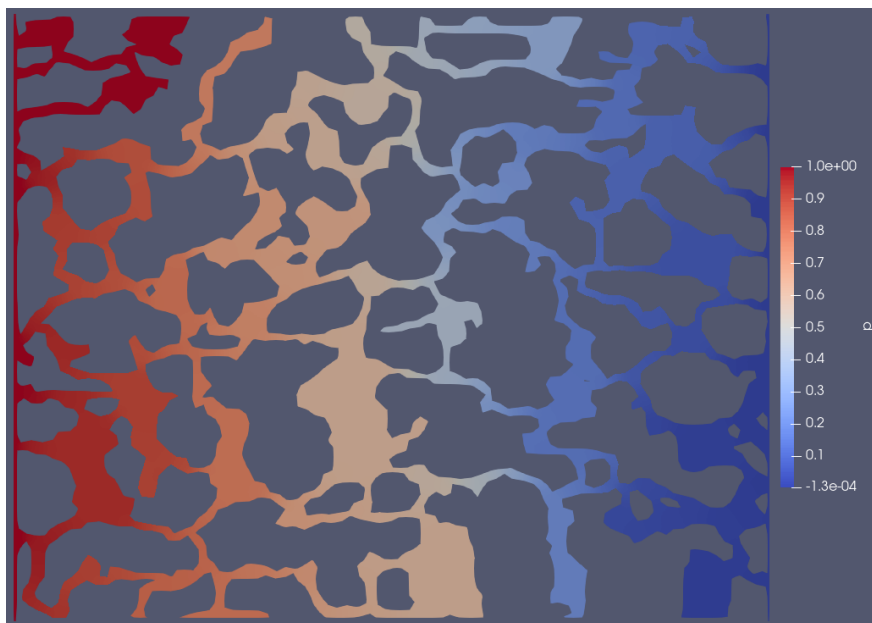


Рисунок 4.15 – Распределение давления на сетке песчаника Berea

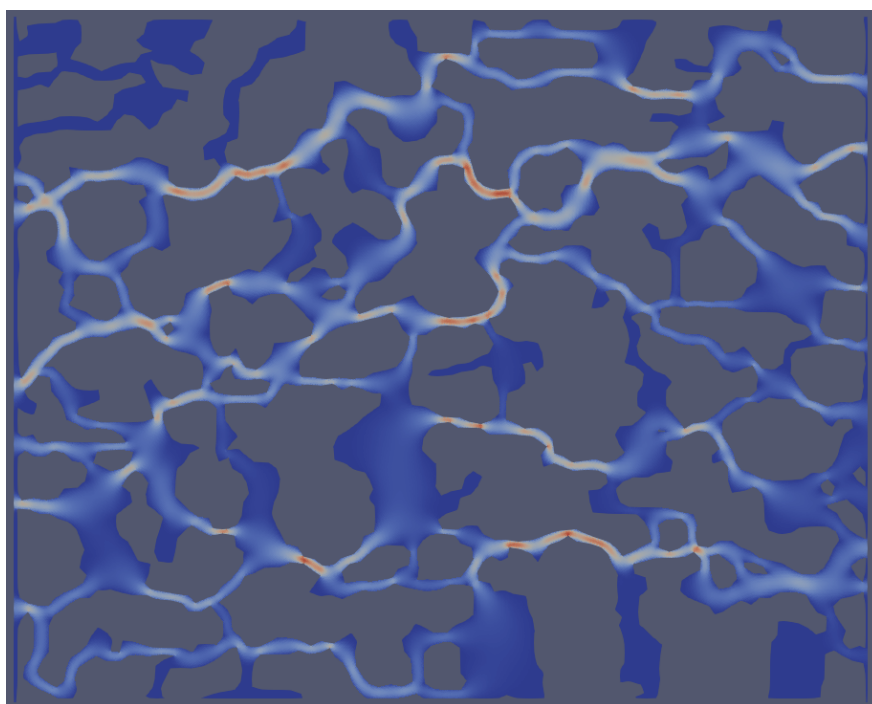


Рисунок 4.16 – Распределение амплитуды скорости на сетке песчаника Berea

5 РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

В первую очередь была проведена верификация модели на простой двумерной геометрии порового пространства. Сравнение результатов расчетов проводилось с известным аналитическим решением Гебарта для такой конфигурации. Сравнение расчетных точек с аналитической кривой изображено на рис. 5.1.

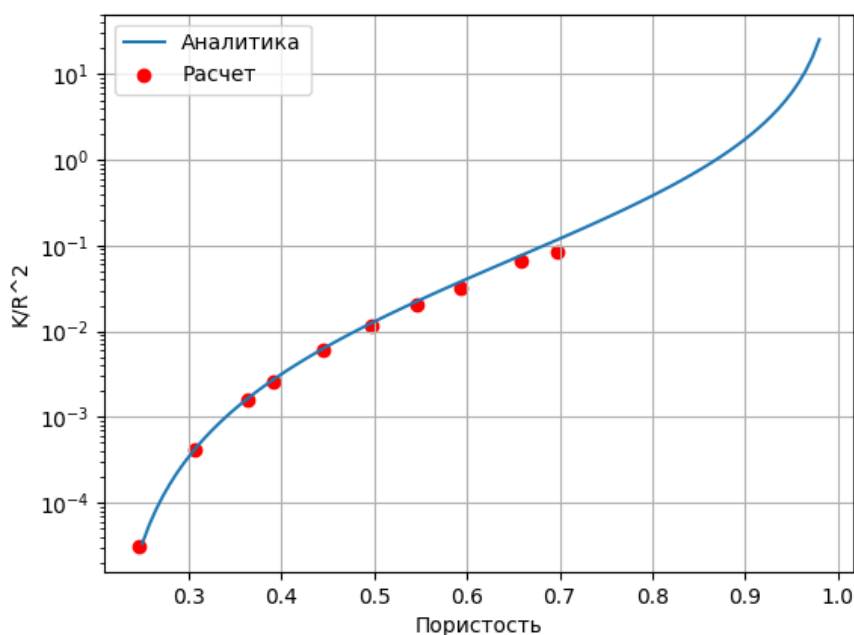


Рисунок 5.1 – Сопоставление значений проницаемости для двумерного случая простой геометрии с аналитикой

Исследование проводилось в диапазоне пористости от 0.24 до 0.7. При меньших значениях пористости поток жидкости не способен пройти через всю исследуемую область. Ограничение сверху обусловлено фактическими значениями пористости, полученными эмпирически. Пористость большинства материалов не превышает 0.65, более того при показателях пористости больше этого значения, среда по сути представляет свободную область с некоторыми препятствиями, а не пористую структуру.

Как видно из графика, значения проницаемости совпадают с аналитическим решением, с увеличением ошибки с ростом пористости. Это может

быть связано с тем, что при бóльших значениях пористости системе требуется значительно больше времени для достижения равновесного состояния. Таким образом для расчетов проницаемости при пористости больше 0.65 требуется увеличить время расчета.

Для трехмерного случая аналогичной геометрии пористого пространства нет аналитического решения, поэтому сравнение проводилось с литературными источниками, в частности с результатами из работы [22], где аналогичная структура исследовалась методом LBM. Путем оцифровки графиков из этой статьи были получены референсные значения проницаемости и пористости. Далее при соответствующих значениях пористости проведен расчет на трехмерной сетке. Результаты сопоставления представлены на рис. 5.2. Результат для трехмерного случая аналогичен двумерному. При росте пори-

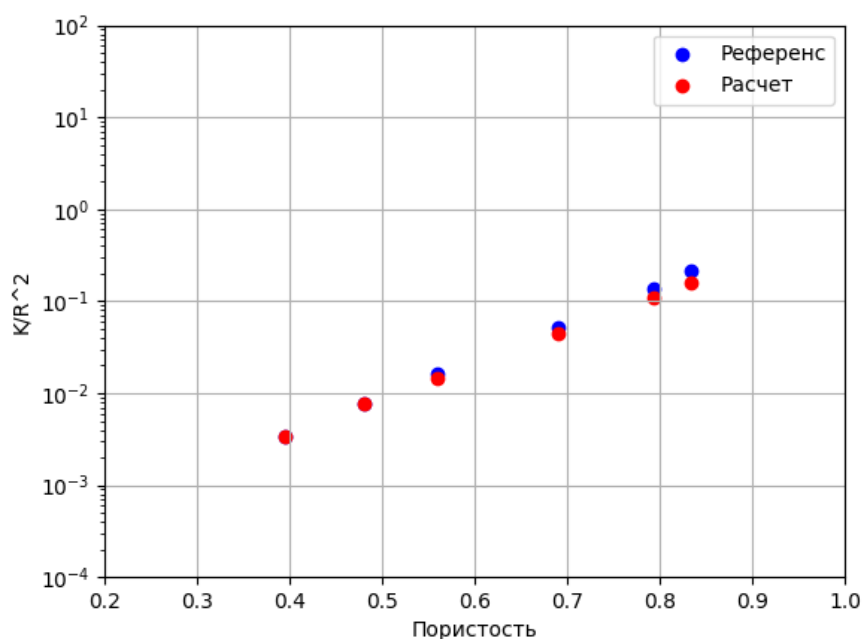


Рисунок 5.2 – Сопоставление значений проницаемости для трехмерного случая с литературой

стости также наблюдается увеличение отклонения расчетных значений от референсных точек, что также может быть связано с равновесием системы.

Для расчетной сетки порового пространства песчаника Berea проводилось сравнение абсолютного значения проницаемости для данной поро-

вой структуры. В качестве референсного значения был взят результат работы [47]. В данной работе проводились аналогичные исследования проницаемости этого материала, и итоговая проницаемость составила $1.45e^{-8}$ см². При моделировании на сетке, изображенной на рис. 4.14, значение проницаемости составило $3.19e^{-8}$ см², т.е. отличается в 2.2 раза. Ошибка в данном случае может быть связана с неточностями при преобразовании изображения в сетку, а также недостаточно мелким разбиением сетки. Однако, несмотря на допущенные неточности при обработке изображения и разбиении сетки, модель представила реалистичный результат, и, таким образом, может быть использована не только на аналитических тестах, но и для оценки проницаемости реального порового пространства.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем:

- Разработан и отлажен механизм определения абсолютной проницаемости пористой структуры при помощи симулятора *inmost-floctree*.
- Проведена верификация модели на известном аналитическом решении для простой геометрии. Осуществлено сравнение значений проницаемости простой геометрии пор в трехмерном случае с литературой.
- Проведен расчет проницаемости на реальной поровой структуре на примере песчаника Berea, а также сравнение проницаемости с литературой для этого материала.

По итогам работы можно сделать вывод, что алгоритм определения проницаемости при помощи симулятора *inmost-floctree*, в котором решается модель несжимаемой жидкости проекционным методом, является валидным и может использоваться для построения зависимости проницаемости от пористости для различных материалов. Однако необходимо осуществить правильную настройку модели, в том числе, подобрать шаг по времени таким образом, чтобы с одной стороны обеспечить равновесное состояние системы, а с другой уменьшить относительный вклад поправки к давлению, появляющейся из-за специфики проекционного метода.

Список использованных источников

1. *Hocking G., Forbes L.* The lens of freshwater in a tropical island—2d withdrawal // *Computers & fluids*. — 2004. — Т. 33, № 1. — С. 19—30.
2. Lattice Boltzmann simulation of viscous fingering phenomenon of immiscible fluids displacement in a channel / B. Dong, Y. Yan, W. Li, Y. Song // *Computers & Fluids*. — 2010. — Т. 39, № 5. — С. 768—779.
3. *Doughty C., Pruess K.* Modeling supercritical carbon dioxide injection in heterogeneous porous media // *Vadose Zone Journal*. — 2004. — Т. 3, № 3. — С. 837—847.
4. Flow characterization through a network cell using particle image velocimetry / B. Zeraï [и др.] // *Transport in porous media*. — 2005. — Т. 60. — С. 159—181.
5. *Parseval Y. D., Pillai K., Advani S. G.* A simple model for the variation of permeability due to partial saturation in dual scale porous media // *Transport in porous media*. — 1997. — Т. 27. — С. 243—264.
6. Simulation and optimization of trapping processes for CO₂ storage in saline aquifers / L. Nghiem [и др.] // *Journal of Canadian Petroleum Technology*. — 2010. — Т. 49, № 08. — С. 15—22.
7. *Bear J.* Dynamics of fluids in porous media. — 2013.
8. *Zhang X. e. a.* Advanced Porous Materials for Filtration Applications. — 2015.
9. Tissue engineering: biomedical applications / R. Langer [и др.] // *Tissue engineering*. — 1995. — Т. 1, № 2. — С. 151—161.
10. *Dake L. P.* Fundamentals of reservoir engineering. — 1983.
11. *Carreau P. J., De Kee D. C., Chhabra R. P.* Rheology of polymeric systems: principles and applications. — 2021.

12. Pore structure and fluid distribution of tight sandstone by the combined use of SEM, MICP and X-ray micro-CT / Y. Su [и др.] // Journal of Petroleum Science and Engineering. — 2022. — Т. 208. — С. 109241.
13. *Juang C. H., Holtz R. D.* Fabric, pore size distribution, and permeability of sandy soils // Journal of Geotechnical Engineering. — 1986. — Т. 112, № 9. — С. 855—868.
14. *Kargarpour M. A.* Carbonate reservoir characterization: an integrated approach // Journal of Petroleum Exploration and Production Technology. — 2020. — Т. 10, № 7. — С. 2655—2667.
15. Micropore network modelling from 2D confocal imagery: Impact on reservoir quality and hydrocarbon recovery / T. Jobe [и др.] // Petroleum Geoscience. — 2018. — Т. 24, № 3. — С. 323—334.
16. Microporosity in arab formation carbonates, Saudi Arabia / D. L. Cantrell, R. M. Hagerty [и др.] // GeoArabia. — 1999. — Т. 4, № 2. — С. 129—154.
17. *Menke H. P., Maes J., Geiger S.* Upscaling the porosity–permeability relationship of a microporous carbonate for Darcy-scale flow with machine learning // Scientific reports. — 2021. — Т. 11, № 1. — С. 2625.
18. *Clerke E. A.* Permeability, Relative Permeability, Microscopic Displacement Efficiency and Pore Geometry of M₁ Bimodal Pore Systems in Arab D Limestone // SPE Journal. — 2009. — Т. 14, № 03. — С. 524—531.
19. *Kaczmarek S. E., Fullmer S. M., Hasiuk F. J.* A universal classification scheme for the microcrystals that host limestone microporosity // Journal of Sedimentary Research. — 2015. — Т. 85, № 10. — С. 1197—1212.
20. *Gebart B. R.* Permeability of unidirectional reinforcements for RTM // Journal of composite materials. — 1992. — Т. 26, № 8. — С. 1100—1133.
21. *Nabovati A., Llewellyn E. W., Sousa A. C.* Through-thickness permeability prediction of three-dimensional multifilament woven fabrics //

Composites Part A: Applied Science and Manufacturing. — 2010. — T. 41, № 4. — C. 453—463.

22. *Khabbazi A. E., Ellis J., Bazylak A.* Developing a new form of the Kozeny–Carman parameter for structured porous media through lattice-Boltzmann modeling // *Computers & Fluids*. — 2013. — T. 75. — C. 35—41.

23. *Ahmed T., McKinney P.* Advanced reservoir engineering. — 2011.

24. *Jerauld G., Salter S.* The effect of pore-structure on hysteresis in relative permeability and capillary pressure: pore-level modeling // *Transport in porous media*. — 1990. — T. 5. — C. 103—151.

25. *Bryant S., Blunt M.* Prediction of relative permeability in simple porous media // *Physical review A*. — 1992. — T. 46, № 4. — C. 2004.

26. *Dana E., Skoczylas F.* Gas relative permeability and pore structure of sandstones // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. — 1999. — T. 36, № 5. — C. 613—625.

27. Two-dimensional reactive transport modeling of CO₂ injection in a saline aquifer at the Sleipner site, North Sea / P. Audigane [и др.] // *American journal of science*. — 2007. — T. 307. — C. 974—1008.

28. CO₂ injection into saline carbonate aquifer formations I / O. Izgec, B. Demiral, H. Bertin, S. Akin // *Transport in porous media*. — 2008. — T. 72. — C. 1—24.

29. *Ji C., Ahmadi G., Smith D. H.* Experimental and computational studies of fluid flow phenomena in carbon dioxide sequestration in brine and oil fields. — 2001.

30. Impact of relative permeability hysteresis on geological CO₂ storage / R. Juanes, E. Spiteri, F. Orr Jr, M. Blunt // *Water resources research*. — 2006. — T. 42, № 12.

31. *Benson S. M.* CO₂ injection for enhanced gas production and carbon sequestration. — 2001.

32. Relative permeability calculations from two-phase flow simulations directly on digital images of porous rocks / T. Ramstad, N. Idowu, C. Nardi, P.-E. Øren // *Transport in Porous Media*. — 2012. — T. 94, № 2. — C. 487—504.
33. *Mavko G., Nur A.* The effect of a percolation threshold in the Kozeny-Carman relation // *Geophysics*. — 1997. — T. 62, № 5. — C. 1480—1482.
34. *Bourbié T., Coussy O., Zinszner B.* Acoustics of porous media. — 1987.
35. *Panda M. N., Lake L. W.* Estimation of single-phase permeability from parameters of particle-size distribution // *AAPG bulletin*. — 1994. — T. 78, № 7. — C. 1028—1039.
36. *Koponen A., Kataja M., Timonen J.* Permeability and effective porosity of porous media // *Physical Review E*. — 1997. — T. 56, № 3. — C. 3319.
37. *Xu P., Yu B.* Developing a new form of permeability and Kozeny-Carman constant for homogeneous porous media by means of fractal geometry // *Advances in water resources*. — 2008. — T. 31, № 1. — C. 74—81.
38. *Wildenschild D., Sheppard A. P.* X-ray imaging and analysis techniques for quantifying pore-scale structure and processes in subsurface porous medium systems // *Advances in Water resources*. — 2013. — T. 51. — C. 217—246.
39. *Cnudde V., Boone M. N.* High-resolution X-ray computed tomography in geosciences: A review of the current technology and applications // *Earth-Science Reviews*. — 2013. — T. 123. — C. 1—17.
40. Direct numerical simulation of pore-scale flow in a bead pack: Comparison with magnetic resonance imaging observations / X. Yang [и др.] // *Advances in water resources*. — 2013. — T. 54. — C. 228—241.
41. Particle velocimetry analysis of immiscible two-phase flow in micromodels / S. Roman [и др.] // *Advances in Water Resources*. — 2016. — T. 95. — C. 199—211.
42. A new SiC/SOI-based PWM generator for SiC-based power converters in high temperature environments / O. Mostaghimi [и др.]. — 2012.

43. *Alhashmi Z., Blunt M., Bijeljic B.* Predictions of dynamic changes in reaction rates as a consequence of incomplete mixing using pore scale reactive transport modeling on images of porous media // *Journal of contaminant hydrology.* — 2015. — T. 179. — C. 171—181.

44. *Pereira Nunes J. P., Blunt M., Bijeljic B.* Pore-scale simulation of carbonate dissolution in micro-CT images // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth.* — 2016. — T. 121, № 2. — C. 558—576.

45. *Acharya R., Van der Zee S., Leijnse A.* Approaches for modeling longitudinal dispersion in pore-networks // *Advances in water resources.* — 2007. — T. 30, № 2. — C. 261—272.

46. *Menke H. P., Maes J., Geiger S.* Upscaling the porosity–permeability relationship of a microporous carbonate for Darcy-scale flow with machine learning // *Scientific reports.* — 2021. — T. 11, № 1.

47. *Menke H. P., Maes J., Geiger S.* Upscaling the porosity–permeability relationship of a microporous carbonate for Darcy-scale flow with machine learning // *Scientific reports.* — 2021. — T. 11, № 1.

48. *Terekhov K. M.* Pressure-correction projection method for modelling the incompressible fluid flow in porous media // *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling.* — 2023. — T. 38, № 4. — C. 241—265.

49. *Terekhov K.* Parallel multilevel linear solver within INMOST platform. — 2020.

50. *Terekhov K.* Greedy dissection method for shared parallelism in incomplete factorization within INMOST platform. — 2021.