

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт вычислительной математики Российской академии наук

На правах рукописи

УДК 519.6

Новиков Иван Сергеевич

**Исследование задачи оптимизации ресурсов и
концентрации загрязнений в регионе от локальных
источников**

05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы
программ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор
Агошков В.И.

Москва — 2016

Содержание

Введение	4
Глава 1. Методы исследования и решения класса задач оптимального управления о локальных источниках при интегральном наблюдении	11
§ 1.1. Основные понятия и обзор методов решения задач с локальными источниками	11
§ 1.2. Класс задач оптимального управления о локальных источниках при интегральном наблюдении	22
§ 1.3. Построение и исследование алгоритмов решения рассматриваемого класса задач на основе метода «двойственного» представления функционала невязки	29
Глава 2. Задача оптимизации «средней» концентрации загрязнений в регионе от локальных источников	40
§ 2.1. Постановка задачи оптимизации «средней» концентрации загрязнений в регионе от локальных источников	40
§ 2.2. Алгоритм решения задачи оптимизации «средней» концентрации загрязнений в регионе	42
Глава 3. Задача оптимизации экономического ущерба от загрязнения окружающей среды локальными источниками	50
§ 3.1. Исходные и обобщенные постановки задачи оптимизации экономического ущерба от загрязнения региона локальными источниками	51
§ 3.2. Алгоритм решения задачи оптимизации экономического ущерба от загрязнений региона группами локальных источников, возникающих в различные моменты времени	59

§ 3.3. Алгоритмы решения задачи оптимизации экономического ущерба от загрязнения окружающей среды с учетом ресурсов на устранение локальных источников	66
Глава 4. Схема дискретизации математической модели распространения примеси в регионе	84
§ 4.1. Построение схемы дискретизации математической модели загрязнения окружающей среды	85
§ 4.2. Исследование схемы дискретизации математической модели загрязнения окружающей среды	92
§ 4.3. Результаты тестового численного эксперимента по моделированию распространения загрязнений в регионе	99
Глава 5. Описание программного комплекса по численному решению исследуемых задач и результаты экспериментов	103
§ 5.1. Описание программного комплекса, применяемого для численного решения поставленных задач	103
§ 5.2. Аспекты численной реализации рассматриваемых задач	104
§ 5.3. Результаты численных экспериментов по решению исследуемого класса задач	110
Заключение	126
Список литературы	128
Приложение	137

Введение

Настоящая работа посвящена разработке алгоритмов и комплекса программ для решения задач оптимизации «средней» концентрации загрязнений в регионе от локальных источников и оптимального распределения ресурсов, имеющихся на устранение источников загрязнений. В основе постановки задач лежит математическая модель распространения загрязнений в окружающей среде с математически «корректными» граничными условиями. Под оптимизацией «средней» концентрации загрязнения понимается достижение ее «желаемой», заранее заданной величины, в результате решения задач нахождения глобального минимума квадратичного функционала «стоимости», а под оптимальным распределением ресурсов понимается такое распределение всех имеющихся ресурсов по регионам источников загрязнений, которое позволит достигнуть некоторой заранее заданной «средней» концентрации загрязнения (или, экономического ущерба) в определенном регионе.

Актуальность диссертационной работы. Проблема охраны окружающей среды от загрязнений является одной из актуальных проблем современной науки [1]-[5]. В качестве источников загрязнений могут выступать трубы промышленных предприятий и общественный транспорт, причем их влияние становится все более существенным с каждым годом из-за темпов технического прогресса. В летний период (или период засухи) могут возникать лесные и торфяные пожары значительной интенсивности и вносить существенный вклад в загрязнение атмосферы (ярким примером служит лето 2010 года на Европейской территории России). От своевременности и эффективности решения этой проблемы зависит здоровье и благосостояние людей, находящихся в регионе возможных загрязнений, сохранность различных экосистем, а также объем государственных средств (ресурсов), которые необходимо выделить на ликвидацию загрязнений и их последствий. Следует отметить, что источники загрязнений значительной интенсивности могут возникать в различных зонах рассмат-

риваемого региона на достаточно большом временном интервале и ресурсов может быть недостаточно для устранения всех таких источников. По этой причине важной является проблема оптимального (рационального) распределения имеющихся ресурсов по всему исследуемому региону с целью оптимизации экономического ущерба, возникающего вследствие загрязнения окружающей среды вредными веществами.

Основной целью диссертационной работы является постановка задач оптимизации «средней» концентрации загрязнений (или, экономического ущерба) в некотором регионе (на основе математической модели распространения загрязнений в окружающей среде с граничными условиями специального вида), теоретическое исследование поставленных задач, разработка алгоритмов их решения, а также реализация предложенных алгоритмов в виде комплекса программ для численного решения рассматриваемых задач в регионе, представляющем интерес (в настоящей диссертации таким регионом являются Москва, Московская область и некоторые части прилегающих к ней областей).

Научная новизна. Сформулированы и исследованы на разрешимость задачи оптимизации «средней» концентрации загрязнений и экономического ущерба в регионе от локальных источников. Разработаны и обоснованы алгоритмы решения этих задач, позволяющие вычислять «управления» (закономерности, по которым необходимо устранять источники загрязнений для решения поставленных задач) в аналитическом виде. Приводимые в работе алгоритмы учитывают физические свойства решения задачи, например, концентрация загрязнений не может принимать отрицательных значений нигде в исследуемой области на всем рассматриваемом временном интервале, а также ни в один из моментов времени ни из одного источника не может быть удалено больше примеси, чем может распространиться. Предложены методы оптимального распределения ресурсов, выделенных на ликвидацию источников загрязнений, по зонам их локализации с целью оптимизации экономического ущерба в регионе. Разработанные алгоритмы реализованы в виде комплекса программ.

Теоретическая ценность работы состоит в постановке задач оптимизации «средней» концентрации загрязнений и экономического ущерба в регионе от локальных источников, в основе которой лежит математическая модель распространения загрязнений в окружающей среде с «корректными» граничными условиями, исследовании этих задач на разрешимость, а также в разработке и обосновании алгоритмов решения рассматриваемых задач, основанных на методах теории оптимального управления, сопряженных уравнений и «двойственного» представления квадратичного функционала невязки.

Практическая ценность работы заключается в реализации предложенных алгоритмов решения исследуемых задач в виде комплекса программ на языках C++ и Fortran. Разработанный комплекс программ позволяет рассчитать, в каких зонах рассматриваемого региона необходимо удалять локальные источники в первую очередь (рационально распределить имеющиеся ресурсы по локальным источникам), а также оценить величину экономического ущерба («средней» концентрации), до которой возможно уменьшить первоначальный ущерб (концентрацию).

На защиту выносятся следующие результаты и положения. Основной результат — разработаны алгоритмы и комплекс программ для решения класса задач оптимального управления о локальных источниках при интегральном наблюдении. В частности:

- сформулированы задачи оптимизации «средней» концентрации загрязнения и экономического ущерба в регионе от локальных источников (на основе математической модели распространения загрязнений в окружающей среде с «корректными» граничными условиями), проведено их теоретическое исследование;
- разработаны и обоснованы алгоритмы решения рассматриваемых задач, в том числе методы оптимального распределения имеющихся ресурсов по регионам локальных источников;

- предложенные алгоритмы реализованы в виде программного комплекса, проведен ряд численных экспериментов, иллюстрирующих эффективность этих алгоритмов и основные теоретические положения исследуемых задач (в качестве региона, на примере которого производилось численное моделирование, бралась Москва, Московская область и некоторые части прилегающих к ней областей).

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались автором и обсуждались на научных семинарах Института вычислительной математики РАН, РХТУ им. Д.И. Менделеева, МГУ им. М.В. Ломоносова и на следующих конференциях: «Вычислительные и информационные технологии для наук об окружающей среде» CITES-2011 (Томск, 2011); 54-56, 58 научные конференции МФТИ (Москва — Долгопрудный — Жуковский, 2011-2013, 2015); «Риски природных катастроф и методы минимизации их негативных последствий» (Севастополь, 2012); «Тихоновские чтения-2013» (МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 2013); «Ломоносовские чтения-2014» (МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 2014); «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование» (Улан-Удэ—Байкал, 2015).

Результаты работы были отмечены почетным дипломом на 56 научной конференции МФТИ в 2013 году.

Публикации. По теме диссертации опубликованы 12 работ, среди которых 5 статей [6]-[10] (4 из них входят в перечень ВАК), 2 издания монографии [11, 12], а также 5 печатных работ [13]-[17] в сборниках тезисов и трудов конференций.

Личный вклад автора. Диссертационное исследование является самостоятельным законченным трудом автора. Исследование и разработка алгоритмов решения класса задач о локальных источниках при интегральном наблюдении (без учета физических свойств рассматриваемого класса задач), а также задачи оптимизации «средней» концентрации загрязнения в регионе от локаль-

ных источников осуществлены автором совместно с соавторами работ, в которых они опубликованы, вклад соавторов равновелик. Исследование и разработка алгоритмов решения задачи оптимизации экономического ущерба с учетом и без учета ресурсов, выделенных на ликвидацию источников загрязнений, а также реализация комплекса программ для численного решения рассматриваемого в диссертации класса задач, проведены автором лично.

Структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, приложения, списка литературы и списка публикаций автора. Общий объем диссертации 150 страниц, включая 42 рисунка, 3 таблицы и список литературы из 86 наименований.

Содержание работы. В первой главе даны основные понятия и определения, которые будут использоваться далее в ходе диссертации, в частности понятие локального источника, и приведен краткий обзор литературы о методах исследования и решения задач с локальными источниками. Далее введен класс задач оптимального управления о локальных источниках при интегральном наблюдении и приведена математическая модель распространения загрязнения, которая используется для описания процессов конвекции и диффузии частиц примеси в окружающей среде, а также для математической постановки каждой задачи рассматриваемого класса. В общем виде дан алгоритм решения описываемого класса задач на основе методов теории сопряженных уравнений [18, 19], «двойственного» представления функционала невязки [1] и теории оптимального управления [20, 21].

Во второй главе формулируется и исследуется задача оптимизации «средней» концентрации загрязнений в регионе, приводятся обобщенные постановки рассматриваемой задачи, вводятся квадратичный функционал невязки и «вспомогательная» сопряженная задача. Далее строится «двойственное» представление квадратичного функционала невязки, используя которое в дальнейшем происходит построение алгоритма решения задачи с учетом ее физических свойств (например, неотрицательность концентрации загрязнений).

В третьей главе рассматриваются задачи оптимизации экономического ущерба от загрязнения окружающей среды локальными источниками. В первой задаче предполагается, что источники загрязнений стартуют группами в различные моменты времени, а в другой, что все они стартуют одновременно. Опираясь на формулы, приведенные в монографии [22], а также в статьях [23, 24], получено соотношение для экономического ущерба от загрязнения окружающей среды. По аналогии со второй главой приводятся обобщенные постановки исследуемых задач. Кроме того, здесь формулируются алгоритмы решения приведенных задач. Первый алгоритм учитывает, что локальные источники начинают распространять загрязнения в окружающую среду в различные моменты времени, поэтому вводятся несколько квадратичных функционалов (для всех групп источников загрязнений), для каждого из них строятся «двойственные» представления на основе которых, как и во второй главе, предлагается алгоритм решения. Следует отметить, что первый алгоритм не учитывает возможную нехватку ресурсов, выделенных на ликвидацию источников. Методы решения второй задачи оптимизации построены с учетом имеющегося количества ресурсов на устранение локальных источников и позволяют рационально распределить выделенные ресурсы по регионам, из которых распространяются частицы примеси.

В четвертой главе представлена схема дискретизации математической модели загрязнения окружающей среды. Здесь приводится обоснование ее использования для численного решения поставленной задачи, а именно показано, что схема, полученная методом конечных объемов с точностью до величин первого порядка точности по пространственным переменным совпадает со схемой, получаемой методом интегральных тождеств [25] на прямоугольной сетке с базисными функциями, которые являются произведением трех кусочно-линейных функций. Кроме того, в этой главе доказывается, что построенная схема является монотонной первого порядка точности и абсолютно устойчивой. В конце главы демонстрируются результаты тестового численного эксперимента, кото-

рые иллюстрируют практическую возможность применения построенной схемы для численного моделирования распространения загрязнений в окружающей среде.

В пятой главе приведен программный комплекс, разработанный автором диссертации и используемый для решения поставленных задач оптимизации. Дается описание реализованных в нем программ. Также здесь обсуждаются результаты ряда численных экспериментов, иллюстрирующих эффективность предложенных алгоритмов и основные теоретические положения исследуемых задач.

Заключение содержит основные результаты и выводы диссертации, а также предложения по возможному использованию результатов работы.

В приложении приведены доказательства некоторых теорем, которые не вошли в основное содержание диссертационной работы.

Благодарности. Автор выражает благодарность профессору, доктору физико-математических наук Агошкову Валерию Ивановичу за научное руководство, а также профессору, доктору физико-математических наук Шутяеву Виктору Петровичу, доктору физико-математических наук Алояну Арташу Еремовичу, доценту, кандидату физико-математических наук Пармузину Евгению Ивановичу и аспирантам Рахубе Максиму Владимировичу и Асееву Никите Александровичу за обсуждение результатов работы и полезные замечания.

Глава 1. Методы исследования и решения класса задач оптимального управления о локальных источниках при интегральном наблюдении

В первом параграфе настоящей главы введены основные понятия, используемые далее в диссертации, и приведен краткий обзор литературы о методах исследования и решения задач с локальными источниками (в целом этот обзор схож с тем, что приведен в каждом из изданий монографии [11, 12]). Во втором параграфе введен класс задач оптимального управления о локальных источниках при интегральном наблюдении. Этот класс задач имеет особое значение, поскольку он включает в себя все задачи оптимизации, о которых идет речь в настоящей диссертации. Также в этом параграфе приведена трехмерная математическая модель распространения загрязнения, которая используется для описания процессов конвекции и диффузии частиц примеси в окружающей среде. В заключительном параграфе этой главы предложен алгоритм решения описываемого класса задач на основе методов теории сопряженных уравнений, «двойственного» представления функционала невязки и теории оптимального управления. По аналогии с этим алгоритмом далее будут построены методы решения всех задач рассматриваемого класса, изучаемых в настоящей работе.

§ 1.1. Основные понятия и обзор методов решения задач с локальными источниками

Введем основные понятия и термины, используемые в работе в дальнейшем. Под локальным источником понимается функция, носитель которой есть

некоторая ограниченная область (из этой области, к примеру, может происходить распространение загрязняющих веществ). Наряду с локальными источниками физически определим «точечные» источники (« δ -источники») как источники, локализованные в одной точке. Под «управлением» локальным источником будем понимать закономерность, по которой необходимо устранять источники загрязнений. Физически «управлением» является скорость устранения единицы примеси с единицы площади источника загрязнения. Поскольку в каждой рассматриваемой в работе задаче с локальными источниками помимо основной неизвестной требуется найти еще и «управление» («дополнительное неизвестное»), то необходимо ввести еще одно уравнение, которое будем называть уравнением замыкания. В это уравнение могут входить так называемые локальные или интегральные наблюдения. Локальным наблюдением назовем функцию, носитель которой есть некоторая ограниченная область, где производится наблюдение, к примеру, за концентрацией или массой загрязняющих веществ. Ограниченную область, в которой производится наблюдение, иногда будем называть «охраняемым» регионом. Интегральное наблюдение в настоящей работе — это «осреднение» основной неизвестной по «охраняемому» региону и, возможно, по времени. Под «осреднением» функции будем понимать интеграл от этой функции с наперед заданным весом. В качестве интегрального наблюдения могут выступать, например, «средняя» концентрация загрязнения, или экономический ущерб от загрязнения «охраняемого» региона. Отметим, что в настоящей работе рассматриваются лишь вещественные функции и параметры.

Остановимся более подробно на некоторых понятиях, связанных с концентрацией загрязнения и ущербом. Приводимые здесь понятия взяты из [22, 26, 27]. Предельно допустимая концентрация загрязнений (ПДК) — такая концентрация химического соединения, которая при ежедневном воздействии на человеческий организм в течение длительного времени не вызовет у него каких-либо заболеваний или патологических изменений, обнаруживаемых современными методами исследования, а также не нарушит биологического оптимума для че-

ловека. При установлении ПДК веществ в воздушном бассейне населенных мест или в воздухе рабочей зоны ориентируются на токсикологический показатель вредности или рефлекторную реакцию организма [28]. Для воздушной среды ПДК разделяют на ПДКСС и ПДКМР: ПДКСС — предельно допустимая среднесуточная концентрация вредного токсического вещества в воздухе населенных мест, которая в норме не оказывает вредного воздействия (общетоксического, канцерогенного и др.) в условиях круглосуточного вдыхания (усреднение проводится за период 24 часа); ПДКМР — максимальная разовая концентрация токсического вещества в воздухе населенных мест, которая не должна вызывать рефлекторных реакций в человеческом организме (ощущение запаха, световой чувствительности глаз и пр.) при кратковременном воздействии загрязнителя (в течение 20 минут). В данной диссертации используется понятие «допустимого» уровня «средней» концентрации загрязнения, которое в целом аналогично понятию ПДКСС, с той лишь разницей что осреднение не обязательно производится за одни сутки.

С концентрацией загрязнения воздуха связан эколого-экономический ущерб (который будем для краткости называть экономическим). Под экономическим ущербом понимается мера последствий от воздействия загрязнений на окружающую среду. Это затраты у реципиентов (у тех, на кого оказывается воздействия), направленные на уменьшение негативного воздействия (защиту от него) и/или на компенсацию его последствий. Экономический ущерб выражается в денежных единицах. Кроме того, в работе будут использованы понятия первоначального ущерба, под которым понимается экономический ущерб до принятия мер по ликвидации локальных источников (то есть ущерб, который получится, если не производить «управлений» источниками загрязнений), а также остаточного ущерба, то есть ущерба после принятия мер по устранению источников распространения примеси (после «управления» локальными источниками).

Приведем теперь, не претендуя на полноту описания, краткий обзор лите-

ратуры о методах исследования и решения задач с локальными источниками.

1. Задачи с локальными источниками являются одними из классических задач, изучаемых в математической физике. К таким задачам относятся задачи с « δ -источниками», которые могут быть записаны в виде:

$$L\Phi(x, t) = f(x, t) + g(x, t) \cdot \delta(x - x_0) \cdot \delta(t - t_0), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T),$$

где L — некоторый оператор, $f(x, t)$ — заданная функция (так называемый фоновый источник), $g(x, t)$ — интенсивность «точечного» источника, $\delta(x - x_0)$ и $\delta(t - t_0)$ — дельта-функции Дирака по пространственной и временной переменным соответственно, Ω — некоторая область, например, из \mathbb{R}^1 , $x_0 \in \Omega$, $t_0 \in (0, T)$ — известны ($0 < T < \infty$), $\Phi \equiv \Phi(x, t)$ — решение этой задачи (неизвестная функция, которая физически может быть, например, концентрацией загрязнения).

Как известно, один из разделов этого направления в математике рассматривает проблему построения фундаментальных решений [29]. Так, если рассматривается некоторая эллиптическая задача (1):

$$L\Phi_0(x) = \delta(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^1, \quad (1)$$

то, построив функцию $\Phi_0(x)$, которая является фундаментальным решением оператора L , можно построить решение задачи (2)

$$L\Phi(x) = f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^1 \quad (2)$$

по известной формуле (3):

$$\Phi(x) = \int_{\mathbb{R}^1} \Phi_0(x - \xi) f(\xi) d\xi. \quad (3)$$

Методы построения фундаментального решения широко применяются для определения решения различных классов задач для эллиптических, гиперболических и параболических уравнений.

В свою очередь, фундаментальные решения, как известно, применяются для построения функций Грина и решений достаточно широкого класса начально-краевых задач [30]. Например, если задача является стационарной, т. е. $\Phi \equiv \Phi(x)$, то она может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} l\Phi(x) &= f(x), \quad x \in \Omega, \\ \Gamma\Phi(x) &= g(x), \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^1$ — некоторая область, $\partial\Omega$ — ее граница, а l и Γ — линейные операторы. Решение $\Phi(x)$ задачи (4) при произвольных $f(x)$ и $g(x)$ выражается в виде:

$$\Phi(x) = \int_{\bar{\Omega}} G(x, \xi) \omega(\xi) d\xi, \tag{5}$$

где $\omega(x) = \omega(x, f(x), g(x))$ — стандартизирующая функция, которая определяется при переходе от (4) к задаче с однородными граничными условиями (которая также называется стандартной формой (4)):

$$\begin{aligned} l\tilde{\Phi}(x) &= \omega(x, f(x), g(x)), \quad x \in \Omega, \\ \Gamma\tilde{\Phi}(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{6}$$

а функция Грина $G(x, \xi)$ задачи (6) является решением

$$lG(x, \xi) = \delta(x - \xi), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad \xi \in \bar{\Omega},$$

$$\Gamma G(x, \xi) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad \xi \in \bar{\Omega}.$$

Обобщением метода построений фундаментальных решений и функций Грина является метод построения характеристик [30].

2. «Точечные» источники используются для решения многих практически интересных задач [1, 31]. Пусть, например, рассматривается некоторое уравнение с «точечным» источником, локализованным в точке $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, и постоянной мощностью Q :

$$L\Phi = Q \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \quad \vec{r} \in \mathbb{R}^3,$$

где $\vec{r} = (x, y, z)$, $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x - x_0) \cdot \delta(y - y_0) \cdot \delta(z - z_0)$. Как несложно заметить, решение этой задачи сводится, фактически, к поиску фундаментального решения и умножению его на Q . Используя этот принцип, многие прикладные задачи решают с введением системы « δ -источников».

Рассмотрим сначала одномерное уравнение, описывающее процесс диффузии субстанции в окружающей среде, которое имеет место, когда скорость потока воздушных масс равна нулю (см. [1]):

$$\sigma\Phi = \mu \frac{d^2\Phi}{dx^2} + Q \cdot \delta(x - x_0), \quad -\infty < x < \infty, \quad (7)$$

где σ и μ — некоторые положительные постоянные величины. В качестве граничных условий в этом случае следует использовать предположение об ограниченности решения во всей области определения. Проинтегрировав (7) по отрезку $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ и устремив ε к 0, получим:

$$\mu \left. \frac{d\Phi}{dx} \right|_{x_0+} - \mu \left. \frac{d\Phi}{dx} \right|_{x_0-} + Q = 0,$$

где $x_{0+} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (x_0 + \varepsilon)$, $x_{0-} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (x_0 - \varepsilon)$. Далее, решая две задачи (8) и (9):

$$\begin{aligned} \sigma\Phi_+ &= \mu \frac{d^2\Phi_+}{dx^2}, \quad x_0 \leq x < \infty, \\ \Phi_+ &= 0, \quad x \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sigma\Phi_- &= \mu \frac{d^2\Phi_-}{dx^2}, \quad -\infty < x \leq x_0, \\ \Phi_- &= 0, \quad x \rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (9)$$

связанные между собой соотношением:

$$\mu \frac{d\Phi_+}{dx} - \mu \frac{d\Phi_-}{dx} + Q = 0 \text{ при } x = x_0,$$

а также используя условие (в предположении непрерывности решения во всех точках):

$$\Phi_+ = \Phi_- \text{ при } x = x_0,$$

получим решение задачи (7):

$$\Phi(x) = \frac{Q}{2\sqrt{\sigma\mu}} \exp\left(-\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}|x - x_0|\right).$$

Рассмотрим теперь более общий случай, когда скорость переноса воздушных масс не равна нулю, а само уравнение модели — двумерное:

$$u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \mu \Delta \Phi = Q \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \quad (10)$$

где u, v — заданные постоянные скорости, μ — некоторая постоянная, $\vec{r} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, вектор $\vec{r}_0 \in \mathbb{R}^2$ известен, Q — интенсивность «точечного» источника, Δ — оператор Лапласа. Решение этого уравнения для бесконечной области имеет вид [1]:

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi\mu} \exp\left(\frac{u(x - x_0) + v(y - y_0)}{2\mu}\right) K_0\left(\frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{2\mu}|\vec{r} - \vec{r}_0|\right),$$

где $K_0(x)$ — функция Макдональда:

$$K_0(x) = \int_0^\infty e^{-x \operatorname{ch} y} dy, x > 0.$$

Задачи типа (7), (10), рассматриваемые для случая трех пространственных переменных, часто встречаются при решении практических проблем [1].

Отметим, что задачи с « δ -источниками» использовались в работе [32] для моделирования вероятностного распределения диоксида серы в атмосфере Иркутского региона. «Точечные» источники загрязнений используются также в

гауссовой модели факела, основанной на предположении о том, что примесь распространяется из источника по нормальному закону, поскольку среднее сечение выброса загрязнений (факел) сходно с распределением Гаусса по своему внешнему виду [33, 34]. В [35] приведена усовершенствованная гауссова модель факела, в которой автор дает оценку осредненной концентрации за длительный интервал времени. То есть, источники рассматриваются не как мгновенно действующие, а как непрерывно действующие.

Широкое применение задач с «точечными» (и локальными) источниками находит математическое моделирование лесных пожаров. Так, в [36] подробно описывается вывод уравнений движения контура пожара, основанный на гипотезе «точечного» источника. Более того, эта гипотеза «точечного» источника подтверждается экспериментально и теоретически. Кроме того, в работе [37] описывается методика определения выбросов загрязняющих веществ от пожаров, локализованных на некоторой площади. В статье [38] приведена математическая модель пожара на основе уравнений баланса энергии и топлива, в которой учитывается уменьшение топлива (например, древесины) с некоторой скоростью, а также приведены результаты численных экспериментов, в которых предполагается, что регион пожара локализован в центре области, где производится численное моделирование. Наконец, отметим, что одни из последних исследований и обзоров различных моделей пожаров можно найти, например, в [39, 40, 41].

3. Локальные источники применяются не только для построения решений прямых задач, но и для постановки и решения класса обратных задач, которые исследуются во многих работах (см., например, [42]-[48]). Эти задачи условно записываются в виде:

$$L\Phi(x, t) = f(x, t) + \sum_{i=1}^M \eta_i(t) m_i(x), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T), \quad (11)$$

$$m_{0,j}\Phi = \varphi_{obs,j}, \quad j = \overline{1, N} < \infty, \quad (12)$$

где L — линейный оператор некоторой нестационарной задачи, Ω — область в \mathbb{R}^3 , $f(x, t)$ — заданный источник, $\eta_i(t)m_i(x)$ — локальные источники ($\eta_i(t)$ — интенсивность или «управление» источником $i = \overline{1, M}$, $m_i(x)$ — его характеристическая функция), в качестве которых могут выступать как « δ -функции», так и функции с финитным носителем положительной меры, $m_{0,j}$ — характеристические функции областей наблюдения $\Omega_{0,j}$, $j = \overline{1, N}$, $\varphi_{obs,j}$ — заданные функции. Функции v_i здесь могут рассматриваться как «дополнительные неизвестные».

Сформулированная задача (11), (12) является обратной задачей о локальных источниках и локальных наблюдениях. Отметим, что $\varphi_{obs,j}$ и η_i могут иметь тот или иной физический смысл. Например, можно рассматривать задачу о нахождении таких мощностей источников тепла («управлений») η_i , $i = \overline{1, M}$, чтобы в областях наблюдений $\Omega_{0,j}$ температура Φ равнялась «желаемым» заданным температурам $\varphi_{obs,j}$, $j = \overline{1, N}$. С другой стороны, в качестве $\varphi_{obs,j}$ могут выступать концентрации загрязнений в $\Omega_{0,j}$ и по ним необходимо восстановить мощности (интенсивности) источников загрязнений η_i . Из вышеприведенных примеров видно, что $\varphi_{obs,j}$ могут быть как «желаемыми», так и наблюдаемыми (полученными, например, из данных наблюдений). В этой диссертации будут рассматриваться величины $\varphi_{obs,j}$, которые являются «желаемыми» (теми, которых необходимо достичь в результате действия «управлений» η_i), а не наблюдаемыми, по которым необходимо восстановить интенсивности η_i .

Алгоритмы решения класса обратных задач о локальных источниках и локальных наблюдениях приведены в [20].

4. В качестве более сложного примера обратной задачи о локальных источниках приведем задачу оптимизации выбросов промышленных предприятий [1].

Пусть в заданном регионе $G \in \mathbb{R}^3$ с границей S в точках \vec{r}_i ($i = \overline{1, n}$)

расположены n промышленных объектов A_i , ежесекундно выбрасывающих Q_i аэрозолей. В области G выделим m экологических зон G_k , для каждой из которых заданы ПДК выпавшего за интервал времени $(0, T)$ аэрозоля. Рассмотрим уравнение конвекции-реакции-диффузии субстанций от n объектов со следующими граничными и периодическим начальным условиями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{u}\Phi) + \sigma\Phi &= \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \mu\Delta\Phi + \sum_{i=1}^n Q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i), \\ \Phi &= f_s, \quad x \in \Sigma, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= \alpha\Phi, \quad x \in \Sigma_0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= 0, \quad x \in \Sigma_H, \\ \Phi(\vec{r}, T) &= \Phi(\vec{r}, 0), \end{aligned} \tag{13}$$

где $\vec{r} = (x, y)$, \vec{u} — заданные скорости, $\operatorname{div} \vec{u} = 0$, ν , μ — коэффициенты вертикального и горизонтального турбулентного обмена, α — некоторый коэффициент, Σ_0 — граница области G при $z = 0$, Σ_H — граница G при $z = H$ (H — некоторая высота), $\Sigma = S \setminus \{\Sigma_0 \cup \Sigma_H\}$, f_s — источники аэрозоля на Σ . Отметим, что аналогичное уравнение используется для моделирования распространения загрязняющих веществ в атмосфере в [49, 50, 51].

Рассмотрим функционал

$$Y_k = \int_0^T dt \int_{G_k} p_c \Phi dG, \tag{14}$$

который характеризует санитарную дозу аэрозоля, выпавшего на поверхность земли в области экологической зоны G_k (p_c — некоторая весовая функция). Задача состоит в том, чтобы найти такую совокупность планируемых выбросов аэрозолей Q_i , которая бы обеспечивала ПДК c_k аэрозольного загрязнения, т.е.:

$$Y_k \leq c_k, \quad k = \overline{1, m}, \tag{15}$$

при минимальных экономических затратах на реконструкцию предприятий. На-

ряду с ограничениями (15) необходимо ввести в рассмотрение минимизируемый функционал:

$$I = \sum_{i=1}^n \xi_i (\bar{Q}_i - Q_i), \quad (16)$$

где \bar{Q}_i — исходная, а Q_i — планируемая мощность выбросов, коэффициент ξ_i определяет капитальные вложения в реконструкцию. Функционал (16) представляет полные затраты, необходимые для улучшения технологии всех предприятий при переходе от выбросов \bar{Q}_i к планируемым выбросам Q_i .

В результате приходим к задаче о нахождении таких мощностей выбросов Q_i , $i = \overline{1, n}$ (которые здесь фактически являются «управлениями»), чтобы выполнялись (13) и условия:

$$I = \sum_{i=1}^n \xi_i (\bar{Q}_i - Q_i) = \min, \quad (17)$$

$$Y_k \leq c_k, \quad k = \overline{1, m}.$$

Основное отличие задач типа (13), (17) от задачи (11), (12) состоит во введении ограничения типа неравенств на функционал (14), а не «обычного» условия замыкания в виде равенства (12). Для решения (13), (17) существуют различные подходы, описанные в [1].

Итак, задачи с локальными источниками представляют собой широкий класс прямых и обратных задач, а также задач оптимального управления. Отметим, что функционал (14) фактически является интегральным наблюдением. Класс задач оптимального управления о локальных источниках при интегральном наблюдении будет введен и более подробно рассмотрен в следующем параграфе настоящей главы.

§ 1.2. Класс задач оптимального управления о локальных источниках при интегральном наблюдении

В данном параграфе рассматривается класс задач оптимального управления о локальных источниках при интегральном наблюдении. В качестве математической модели распространения загрязнений, необходимой для постановки задачи, используем уравнение конвекции-диффузии (18) с граничными условиями (19)-(20) и начальным условием (21)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + w \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial y} \left(a_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(a_{zz} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = f \text{ в } \Omega \times (0, T), \end{aligned} \quad (18)$$

$$U_n^{(-)} \phi + \frac{\partial \phi}{\partial N} = U_n^{(-)} g_{(\Gamma)} \text{ на } (\Gamma/\Gamma_2) \times (0, T), \quad (19)$$

$$\beta \phi - a_{zz} \frac{\partial \phi}{\partial z} = g_{(\Gamma_2)} + \sum_{l=1}^{N_L} m_l(x, y) (\eta_l(t) + g_l^{em}(t)) \text{ на } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (20)$$

$$\phi = \phi_{(0)} \text{ при } t = 0 \text{ в } \Omega. \quad (21)$$

Прежде чем перейти к описанию величин, входящих в уравнения, опишем некоторые допущения и предположения, которые были сделаны при постановке задачи в виде (18)-(21). В одной системе уравнений рассматривается одна группа локальных источников, возникшая в один момент времени (в данном случае в нулевой), предполагается, что от этой группы распространяется лишь один тип поллютанта. Кроме того, мы пренебрегаем взаимодействием примеси из различных источников загрязнений друг с другом, а также процессами нуклеации, конденсации/испарения, коагуляции. Далее, мы считаем, что главные оси

тензора диффузии совпадают с осями декартовой системы координат и, тем самым, ограничиваемся учетом лишь диагональных элементов тензора диффузии, а недиагональными элементами пренебрегаем. При этом мы предполагаем, что диагональные элементы тензора диффузии не зависят от атмосферных параметров (температуры, давления, плотности, ...). Наконец, мы не учитываем гравитационное оседание субстанций и орографию местности. Все вышеописанные предположения будем использовать для всех задач оптимизации, исследуемых в диссертации.

Теперь перейдем к описанию величин, входящих в уравнения. Момент времени $t = 0$ — время старта каждого из $l = \overline{1, N_L}$ локальных источников, N_L — число источников, T — конечный момент времени. Исследуемая задача рассматривается в декартовой системе координат $(x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z)$ в области Ω :

$$\Omega = (A_1, A_2) \times (B_1, B_2) \times (C_1, C_2)$$

и на поверхности S , состоящей из границ

$$\Gamma_1 = \{(x, y, z) \mid x = A_1, B_1 < y < B_2, C_1 < z < C_2\},$$

$$\Gamma_2 = \{(x, y, z) \mid A_1 < x < A_2, B_1 < y < B_2, z = C_1\},$$

$$\Gamma_3 = \{(x, y, z) \mid x = A_2, B_1 < y < B_2, C_1 < z < C_2\},$$

$$\Gamma_4 = \{(x, y, z) \mid A_1 < x < A_2, B_1 < y < B_2, z = C_2\},$$

$$\Gamma_5 = \{(x, y, z) \mid A_1 < x < A_2, y = B_1, C_1 < z < C_2\},$$

$$\Gamma_6 = \{(x, y, z) \mid A_1 < x < A_2, y = B_2, C_1 < z < C_2\}.$$

Через $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ обозначается единичный вектор внешней нормали к границе $\Gamma \equiv \bigcup_{i=1}^6 \Gamma_i \equiv \partial\Omega$, а через $\vec{e}_x = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_y = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_z = (0, 0, 1)$ — ортонормированный базис декартовой системы координат.

Функция $\phi \equiv \phi(x, y, z, t)$ — концентрация загрязнения, которая возникла в области Ω с нулевого момента времени в результате распространения примеси от N_L не пересекающихся локальных источников, $m_l \equiv m_l(x, y)$ — характеристическая функция l -го локального источника на нижней границе Γ_2 ,

$g_l^{em}(t) \in L_2(0, T)$ — концентрация загрязнения, которая распространяется с единицы площади l -го источника на границе Γ_2 (фактически, мощность источника, значение которой постоянно и положительно для конкретного вещества, будем предполагать, что $g_l^{em}(t) = g^{em}$, $l = \overline{1, N_L}$, $t \in (0, T)$), $\eta_l \equiv \eta_l(t) \in L_2(0, T)$ — «управления» каждым из $l = \overline{1, N_L}$ источников («дополнительные неизвестные»). $f \equiv f(x, y, z, t) \in L_2(\Omega \times (0, T))$ — функция фоновых источников в Ω на интервале $(0, T)$ ($g_{(\Gamma_2)} \equiv g_{(\Gamma_2)}(x, y, t) \in L_2(\Gamma_2 \times (0, T))$, $g_{(\Gamma)} \in L_2((\Gamma/\Gamma_2) \times (0, T))$ — аналогичные величины на границах Γ_2 и Γ/Γ_2 соответственно), $\phi_{(0)} \equiv \phi_{(0)}(x, y, z) \in L_2(\Omega)$ — концентрация загрязнений в Ω в нулевой момент времени (каждую из функций f , $g_{(\Gamma_2)}$, $g_{(\Gamma)}$ и $\phi_{(0)}$ полагаем неотрицательной). Отметим, что $g_{(\Gamma)}$ определяется следующим образом:

$$g_{(\Gamma)}(x, y, z, t) = \begin{cases} g_{(\Gamma_1)}(y, z, t) \text{ на } \Gamma_1 \times (0, T), \\ g_{(\Gamma_3)}(y, z, t) \text{ на } \Gamma_3 \times (0, T), \\ g_{(\Gamma_4)}(x, y, t) \text{ на } \Gamma_4 \times (0, T), \\ g_{(\Gamma_5)}(x, z, t) \text{ на } \Gamma_5 \times (0, T), \\ g_{(\Gamma_6)}(x, z, t) \text{ на } \Gamma_6 \times (0, T). \end{cases}$$

Считаем, что все функции, с которыми автор оперирует в настоящей работе, — вещественные.

Величины $a_{11} \equiv a_{xx}$, $a_{22} \equiv a_{yy}$ — коэффициенты «горизонтальной» диффузии, $a_{33} \equiv a_{zz}$ — коэффициент «вертикальной» диффузии, причем все они являются строго положительными ограниченными функциями, постоянными по времени. Три этих коэффициента образуют диагональный тензор диффузии:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & a_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & a_{zz} \end{pmatrix}.$$

Обозначим теперь \vec{n}_A — «конормальный вектор», который определяется как

произведение диагонального тензора диффузии на единичный вектор внешней нормали к границе, то есть $\vec{n}_A \equiv \mathbb{A}\vec{n}$. Отмечаем, что через $\frac{\partial\phi}{\partial N}$ обозначается «конормальная производная» от концентрации загрязнения ϕ , соответствующая производной второго порядка из (18) (в таком обозначении она присутствует в (19)). Она определяется как скалярное произведение «конормального вектора» и градиента от концентрации загрязнения ϕ , то есть

$$\frac{\partial\phi}{\partial N} \equiv (\vec{n}_A, \nabla\phi) \equiv \left(\vec{n}_A, \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{e}_z \right).$$

Элементарными вычислениями можно убедиться, что, например, на нижней границе Γ_2 «конормальная производная» $\frac{\partial\phi}{\partial N} = -a_{zz}\frac{\partial\phi}{\partial z}$ (это также видно из (20)).

Далее, величины u , v , w — проекции вектора скорости ветра на оси Ox , Oy , Oz соответственно, причем выполняется условие (до высоты 3 км, см. [5])

$$\operatorname{div}\vec{u} = 0, \quad \vec{u} \equiv (u_1, u_2, u_3) \equiv (u, v, w),$$

u и v иногда будем называть «горизонтальными» скоростями ветра, w — «вертикальной» скоростью. Кроме того, будет предполагаться, что u_i , $i = \overline{1, 3}$ и их первые производные по временной и пространственным переменным ограничены. Отмечаем, что $U_n = (\vec{u}, \vec{n})$, а $U_n^{(+)} = \frac{|U_n| + U_n}{2}$ (скорость вдоль потока) и $U_n^{(-)} = \frac{|U_n| - U_n}{2}$ (скорость против потока), $U_n = U_n^{(+)} - U_n^{(-)}$. Граничные условия с $U_n^{(-)}$ и $U_n^{(+)}$ вводились ранее в работе [52] для уравнения переноса, а в главе 4 настоящей диссертации будут обсуждены достоинства ввода граничных условий с $U_n^{(-)}$ и $U_n^{(+)}$ для уравнения конвекции-диффузии. Отметим, что (19) означает следующее: если скорость направлена внутрь области (против внешней нормали), то поток $\frac{\partial\phi}{\partial N}$ через границу пропорционален разности между концентрацией загрязнения ϕ на границе и некоторой заданной функцией внешних фоновых источников $g(\Gamma)$ на границе, то есть мы учитываем дополнительное внешнее загрязнение (такое граничное условие с точностью до

коэффициентов соответствует условию Робина, см. [53]). В противном случае (если скорость направлена из области, то есть сонаправлена с внешней нормалью) этот поток равен нулю (что соответствует граничному условию Неймана, поставленному для аналогичной задачи распространения загрязнений в [1] при $U_n \geq 0$). Для нижней границы считаем, что «вертикальная» скорость ветра равна нулю, а β — величина, характеризующая взаимодействие загрязняющих примесей с подстилающей поверхностью (постоянная положительная величина). Следует подчеркнуть, что граничные условия (19), (20) являются «корректными» в том смысле, что для задачи (18)-(21) без «управлений» (с $\eta_i = 0$, $l = \overline{1, N_L}$) можно доказать теорему существования и единственности решения в обобщенной постановке (которая будет приведена ниже) без предположений о нулевых скоростях ветра на границах, которые, как правило, делаются для доказательства (см., например, [54]).

Для замыкания прямой задачи (18)-(21) введем дополнительное условие вида

$$W = W^{obs}. \quad (22)$$

Здесь W^{obs} — некоторое заданное число (например, «допустимый» уровень «средней» концентрации загрязнений в «охраняемом» регионе Ω_{obs}), а W определяется из соотношения:

$$W \equiv (\phi, g) \equiv (\phi, g)_{L_2(\Omega \times (0, T))} = \int_0^T \int_{\Omega} \phi g d\Omega dt = \int_0^T \int_{\Omega_{obs}} \phi g d\Omega dt, \quad (23)$$

где $g \equiv g(x, y, z, t) \in L_2(\Omega \times (0, T))$ — некоторая весовая функция, принимающая ненулевые значения на $\Omega_{obs} \times (0, T)$, и равная нулю вне $\Omega_{obs} \times (0, T)$. Отметим, что функционал (23) определяется по аналогии с функционалом (14), а W является интегральным наблюдением. В зависимости от рассматриваемой задачи, W может быть как «средней» концентрацией загрязнения, полученной в результате управлений, так и остаточным экономическим ущербом.

Итак, исходная постановка обратной задачи о локальных источниках при интегральном наблюдении формулируется следующим образом: найти $\phi, \vec{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_{N_L})$ такие, что выполняются (18)-(22). Подчеркнем, что система уравнений (18)-(22) фактически образует класс обратных задач о локальных источниках при интегральном наблюдении.

Сформулируем теперь обобщенную постановку обратной задачи (именно она используется в дальнейшем). Для этого введем следующие пространства функций: $W_2^{1,0}(\Omega \times (0, T))$ — гильбертово пространство, состоящее из элементов ϕ пространства $L_2(\Omega \times (0, T))$, имеющих квадратично суммируемые по $\Omega \times (0, T)$ обобщенные производные $\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$, $i = \overline{1, 3}$ и пространство

$$\hat{W}_2^1(\Omega \times (0, T)) = \{\hat{\phi} \mid \hat{\phi} \in W_2^{1,1}(\Omega \times (0, T)); \hat{\phi}|_{t=T} = 0\},$$

где $W_2^{1,1}(\Omega \times (0, T))$ — гильбертово пространство, состоящее из элементов $L_2(\Omega \times (0, T))$, имеющих обобщенные производные $\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x_i}$, $i = \overline{1, 3}$ и $\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t}$ из $L_2(\Omega \times (0, T))$.

Также введем

$$V_2(\Omega \times (0, T)) = \{\phi \in W_2^{1,0}(\Omega \times (0, T)) \mid \|\phi\|_{V_2(\Omega \times (0, T))} < \infty\},$$

где

$$\|\phi\|_{V_2(\Omega \times (0, T))} \equiv \max_{t \in [0, T]} \|\phi\|_{L_2(\Omega)} + \sqrt{\sum_{i=1}^3 \int_0^T \int_{\Omega} a_{ii} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega dt}.$$

Задача (18)-(22) в обобщенной постановке имеет следующий вид: найти $\phi \in W_2^{1,0}(\Omega \times (0, T))$, $\eta_l \in L_2(0, T)$, $l = \overline{1, N_L}$ такие, что выполняются соотношения

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\Omega} \phi \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} d\Omega dt - \sum_{i=1}^3 \int_0^T \int_{\Omega} \left(u_i \phi - a_{ii} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x_i} d\Omega dt + \int_0^T \int_{\Gamma_2} \beta \phi \hat{\phi} d\Gamma_2 dt + \\ & + \int_0^T \int_{\Gamma/\Gamma_2} U_n^{(+)} \phi \hat{\phi} d\Gamma dt = \int_0^T \left(\int_{\Omega} f \hat{\phi} d\Omega + \int_{\Gamma_2} \varphi_{(\Gamma_2)} \hat{\phi} d\Gamma_2 \right) dt + \int_{\Omega} \phi_{(0)} \hat{\phi}(0) d\Omega + \quad (24) \\ & + \int_0^T \int_{\Gamma/\Gamma_2} U_n^{(-)} g_{(\Gamma)} \hat{\phi} d\Gamma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_2} \sum_{l=1}^{N_L} m_l \eta_l \hat{\phi} d\Gamma_2 dt, \quad \forall \hat{\phi} \in \hat{W}_2^1(\Omega \times (0, T)), \end{aligned}$$

$$W = W^{obs}, \quad (25)$$

где $\varphi_{(\Gamma_2)} \equiv g_{(\Gamma_2)} + \sum_{l=1}^{N_L} m_l g_l^{em}$. Легко проверить, что имеет смысл определять решение $\phi, \vec{\eta}$ задачи (18)-(22) как функции, удовлетворяющие (24), (25). В дальнейшем мы, говоря о решении задачи (18)-(22), будем подразумевать, что речь идет о решении в обобщенной постановке. Кроме того, следуя работам [54]-[58], в Приложении доказана следующая теорема существования и единственности решения прямой задачи:

Теорема 1. Пусть $\eta_l = 0, l = \overline{1, N_L}$. Тогда задача (18)-(21) однозначно разрешима в классе функций $V_2(\Omega \times (0, T))$ при любых $f \in L_2(\Omega \times (0, T)), \varphi_{(\Gamma_2)} \in L_2(\Gamma_2 \times (0, T)), g_{(\Gamma)} \in L_2((\Gamma/\Gamma_2) \times (0, T))$ и $\phi_{(0)} \in L_2(\Omega)$ в предположениях, что коэффициенты $a_{ii}, i = \overline{1, 3}, \beta$ — строго положительные ограниченные величины, проекции вектора скорости ветра $u_i, i = \overline{1, 3}$ и их первые производные по временной и пространственным переменным ограничены, а также при выполнении $\operatorname{div} \vec{u} = 0$.

В приведенной выше постановке рассматриваемая задача является некорректно поставленной (некорректность имеет место, например, из-за условия замыкания (22), при наличии которого решение задачи не единственно, этот факт мы докажем в следующем параграфе настоящей главы). По этой причине перейдем от рассмотрения исходной задачи (18)-(22) к ее обобщенной постановке, в которой (22) понимается «в смысле наименьших квадратов»:

$$\begin{aligned} \text{Найти } \phi \equiv \phi(\alpha), \vec{\eta} \equiv \vec{\eta}(\alpha), \text{ т.ч. выполняются} \\ (18)-(21) \text{ и } \inf_{\vec{\eta}} = J_\alpha(\phi, \vec{\eta}), \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$J_\alpha(\phi, \vec{\eta}) \equiv \frac{\alpha}{2} \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \eta_l^2(t) dt + \frac{1}{2} (W - W^{obs})^2. \quad (27)$$

Первое слагаемое функционала содержит $0 \leq \alpha = \text{const} \ll 1$ — параметр ре-

гуляризации Тихонова и имеет смысл «стоимости» («штрафа») уменьшения интенсивности всех локальных источников. Второе слагаемое — разность между W и W^{obs} (которые имеют различный физический смысл в зависимости от постановки задачи) «в смысле наименьших квадратов». Система уравнений (26) с функционалом (27) образует класс регуляризованных задач оптимального управления о локальных источниках при интегральном наблюдении. Исследованию и решению задач оптимального управления посвящены, например, работы [59]-[67]. Отметим, что задача (26) является корректно поставленной при $\alpha > 0$ и фактически дает приближенное решение (18)-(22) при малых $\alpha > 0$ [20, 42, 47]. В результате решения будет получена функция ϕ , используя которую, по формуле (23) можно вычислить величину W , которой возможно достичь, управляя источниками загрязнений по закономерностям $\eta_l, l = \overline{1, N_L}$ (т.е. «оптимизировать» W в интересующем нас регионе, которая, как отмечалось выше, имеет разный физический смысл для каждой отдельной задачи рассматриваемого класса). В следующем параграфе мы более подробно изучим класс задач (26), а также приведем в общем виде алгоритмы его решения на основе метода «двойственного» представления квадратичного функционала невязки (27).

§ 1.3. Построение и исследование алгоритмов решения рассматриваемого класса задач на основе метода «двойственного» представления функционала невязки

В этом параграфе рассматриваются алгоритмы решения поставленного класса задач (26). В основу первого алгоритма решения положен метод «двойственного» представления функционала невязки, предложенный в работах [1, 4] для линейного функционала. Однако условие замыкания вида (22) с интегральным наблюдением позволяют применить этот метод для решения (26) с квадратичным функционалом (27), а само применение «двойственного» представ-

ления функционала дает возможность найти «управления» в аналитическом виде. Второй алгоритм решения является итерационным, не использует «двойственное» представление функционала и в целом аналогичен тем методам, что приведены в [20]. Третий метод во многом идентичен первому, но является итерационным и позволяет вычислить «управления» итерационно, а не аналитически.

Для построения алгоритмов решения введем следующую задачу:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial q}{\partial t} - u\frac{\partial q}{\partial x} - v\frac{\partial q}{\partial y} - w\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a_{xx}\frac{\partial q}{\partial x}\right) - \\ & -\frac{\partial}{\partial y}\left(a_{yy}\frac{\partial q}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(a_{zz}\frac{\partial q}{\partial z}\right) \equiv g \text{ в } \Omega \times (0, T), \\ & U_n^{(+)}q + \frac{\partial q}{\partial N} = 0 \text{ на } (\Gamma/\Gamma_2) \times (0, T), \\ & \beta q - a_{zz}\frac{\partial q}{\partial z} = 0 \text{ на } \Gamma_2 \times (0, T), \quad q = 0 \text{ при } t = T \text{ в } \Omega, \end{aligned} \quad (28)$$

где $q \equiv q(x, y, z, t)$ — решения задачи (28), имеющее смысл функции «чувствительности» определенной точки в определенный момент времени к загрязнению, g — «весовая» функция, определенная в предыдущем параграфе. Систему уравнений (28) будем называть «вспомогательной» сопряженной задачей. Слово «вспомогательная» употребляем, потому что эта задача не является сопряженной к задаче для малых вариаций, следующей из (26) (то есть не является сопряженной задачей в классическом смысле). Решение (28) используется для получения «двойственного» представления функционала (27).

Обобщенная постановка «вспомогательной» сопряженной задачи имеет следующий вид: найти $q \in \hat{W}_2^1(\Omega \times (0, T))$ такую, что выполняются соотношения

$$\begin{aligned} & -\int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial q}{\partial t} \hat{q} d\Omega dt + \sum_{i=1}^3 \int_0^T \int_{\Omega} \left(u_i q + a_{ii} \frac{\partial q}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \hat{q}}{\partial x_i} d\Omega dt + \int_0^T \int_{\Gamma_2} \beta q \hat{q} d\Gamma dt + \\ & + \int_0^T \int_{\Gamma/\Gamma_2} U_n^{(-)} q \hat{q} d\Gamma dt = \int_0^T \int_{\Omega} g \hat{q} d\Omega dt, \quad \forall \hat{q} \in W_2^{1,0}(\Omega \times (0, T)). \end{aligned} \quad (29)$$

Отметим, что следуя [54]-[58], можно доказать существование и единственность обобщенного решения задачи (29) в классе функций $\hat{W}_2^1(\Omega \times (0, T))$.

Легко заметить, что если положить в (29) $\hat{q} \equiv \phi$, где ϕ — решение задачи (18)-(22), а в (24) положить $\hat{\phi} \equiv q$, где q — решение (29), то справедливы следующие тождества (— соотношения сопряженности):

$$\begin{aligned}
W = & - \int_0^T \int_{\Omega} \phi \frac{\partial q}{\partial t} d\Omega dt - \sum_{i=1}^3 \int_0^T \int_{\Omega} \left(u_i \phi - a_{ii} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) \frac{\partial q}{\partial x_i} d\Omega dt + \\
& + \sum_{i=1}^3 \int_0^T \int_{\Gamma/\Gamma_2} U_n^{(+)} \phi q d\Gamma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_2} \beta \phi q d\Gamma_2 dt = \int_0^T \int_{\Omega} f q d\Omega dt + \\
& + \int_{\Omega} \phi_{(0)} q(0) d\Omega + \int_0^T \int_{\Gamma/\Gamma_2} U_n^{(-)} g_{(\Gamma)} q d\Gamma dt + \\
& + \int_0^T \int_{\Gamma_2} \varphi_{(\Gamma_2)} q d\Gamma_2 dt + \int_0^T \int_{\Gamma_2} \sum_{l=1}^{N_L} m_l \eta_l q d\Gamma_2 dt
\end{aligned} \tag{30}$$

и, следуя подходу из [18], функционал (27) переписывается в виде (— «двойственное» представление функционала):

$$J_{\alpha}(\phi, \vec{\eta}) = \frac{\alpha}{2} \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \eta_l^2(t) dt + \frac{1}{2} \left(\sum_{l=1}^{N_L} (m_l \eta_l, q)_{L_2(\Gamma_2 \times (0, T))} - \overline{W}^{obs} \right)^2, \tag{31}$$

где

$$\overline{W}^{obs} = W^{obs} - W^0,$$

$$W^0 = (f, q) + (\phi_{(0)}, q(0))_{L_2(\Omega)} + (U_n^{(-)} g_{(\Gamma)}, q)_{L_2((\Gamma/\Gamma_2) \times (0, T))} + (\varphi_{(\Gamma_2)}, q)_{L_2(\Gamma_2 \times (0, T))}.$$

Из (23) и (30) видно, что W^0 есть W при $\eta_l = 0$, $l = \overline{1, N_L}$, то есть W^0 — первоначальное число до «управлений» локальными источниками. Из дальнейшего изложения будет видно, что она может иметь смысл «средней» концентрации загрязнений в «охраняемом» регионе до «управлений», либо первоначального

экономического ущерба.

Заметим, что функционал (27), переписанный в виде (31), явно зависит лишь от «управлений» η_l , а зависимости от ϕ в нем нет. Воспользуемся этим для построения первого алгоритма решения задачи (26).

Алгоритм 1. Найдем вектор «управлений» $\vec{\eta}$ в аналитическом виде. Для этого проварьируем функционал (31):

$$\begin{aligned} \delta J_\alpha = & \alpha \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \eta_l \delta \eta_l dt + \left(\sum_{l=1}^{N_L} (m_l \eta_l, q)_{L_2(\Gamma_2 \times (0, T))} - \overline{W}^{obs} \right) \cdot \\ & \cdot \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) \delta \eta_l dt, \quad l = \overline{1, N_L}. \end{aligned}$$

Поскольку $\delta J_\alpha = 0 \quad \forall \delta \eta_l$, то

$$\begin{aligned} 0 = & \alpha \eta_l + \left(\sum_{l=1}^{N_L} (m_l \eta_l, q)_{L_2(\Gamma_2 \times (0, T))} - \overline{W}^{obs} \right) \cdot \\ & \cdot \int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2, \quad l = \overline{1, N_L}, \quad t \in (0, T). \end{aligned} \quad (32)$$

Умножаем последнее равенство на $\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2$, затем интегрируем по времени и суммируем результаты по l :

$$\begin{aligned} & \alpha \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \int_{\Gamma_2} m_l \eta_l q d\Gamma_2 dt + \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)^2 \cdot \\ & \cdot \left(\sum_{l=1}^{N_L} (m_l \eta_l, q)_{L_2(\Gamma_2 \times (0, T))} - \overline{W}^{obs} \right) dt = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \alpha \sum_{l=1}^{N_L} (m_l \eta_l, q)_{L_2(\Gamma_2 \times (0, T))} + \sum_{l=1}^{N_L} (m_l \eta_l, q)_{L_2(\Gamma_2 \times (0, T))} \cdot \\ & \cdot \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)^2 dt = \overline{W}^{obs} \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)^2 dt \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{l=1}^{N_L} (m_l \eta_l, q)_{L_2(\Gamma_2 \times (0, T))} = \frac{\overline{W}^{obs} \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)^2 dt}{\alpha + \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)^2 dt}.$$

Подставляем выражение для $\sum_{l=1}^{N_L} (m_l \eta_l, q)_{L_2(\Gamma_2 \times (0, T))}$ в (32) и получаем следующую формулу для вычисления «управлений»:

$$\eta_l(t) = \frac{\overline{W}^{obs} \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t)}{\alpha + \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)^2 dt}, \quad l = \overline{1, N_L}, \quad t \in (0, T). \quad (33)$$

Поскольку первая вариация функционала (31) равна нулю на таких «управлениях» и функционал — квадратичный, то «управления», вычисляемые по формуле (33), доставляют функционалу (31) глобальный минимум (см. [68]). Подставив «управления» (33) в (31), вычисляем минимум (который достигается!):

$$J_\alpha = \frac{\alpha (\overline{W}^{obs})^2}{2 \left(\alpha + \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)^2 dt \right)}.$$

Отметим, что для класса обратных задач (18)-(22) справедлива следующая

Теорема 2. При выполнении условия

$$(A) \quad \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t) \neq 0$$

хотя бы для одного l на всем временном интервале $(0, T)$ задача (18)-(22) является плотно разрешимой и не является однозначно разрешимой.

Доказательство. Рассмотрим приведенный выше функционал:

$$J_\alpha = \frac{\alpha(\overline{W}^{obs})^2}{2 \left(\alpha + \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)^2 dt \right)}.$$

При выполнении условия (А) имеем: $\lim_{\alpha \rightarrow 0} J_\alpha = 0$. Тогда, согласно одному из определений плотной («аппроксимативной») разрешимости, приведенному в [20] на странице 129, задача (18)-(22) является плотно разрешимой. Для доказательства отсутствия однозначной разрешимости рассмотрим условие замыкания (22), переписанное в виде:

$$\sum_{l=1}^{N_L} (m_l \eta_l, q)_{L_2(\Gamma_2 \times (0, T))} = \overline{W}^{obs}.$$

Для однозначной разрешимости требуется, чтобы при нулевых функциях f , $g_{(\Gamma_2)}$, $\phi_{(0)}$, g_l^{em} , $l = \overline{1, N_L}$ и W^{obs} (то есть и при $\overline{W}^{obs} = 0$) решение ϕ , $\vec{\eta}$ исследуемой задачи было тривиальным. Покажем, что это не так. Поскольку $\overline{W}^{obs} = 0$, то

$$\sum_{l=1}^{N_L} (m_l \eta_l, q)_{L_2(\Gamma_2 \times (0, T))} = 0.$$

Обозначим $\varphi_l(t) \equiv \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t)$, $l = \overline{1, N_L}$ и зафиксируем эти функции.

Тогда из равенства

$$\sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \eta_l(t) \varphi_l(t) = 0$$

следует, что существуют нетривиальные функции $\{\eta_l(t)\}$, ортогональные $\{\varphi_l(t)\}$, а значит рассматриваемая задача (18)-(22) не является однозначно разрешимой.

□

Итак, из Теоремы 2 следует, что рассматриваемая задача не является однозначно разрешимой, однако она гарантирует, что при малых параметрах регуля-

ризации α величина W будет близка к «желаемому» W^{obs} . Алгоритм решения задачи (26) заключается в следующем:

- решаем «вспомогательную» сопряженную задачу (28), находим q ;
- задаем «желаемое» число W^{obs} , к которому будем приближать W ;
- вычисляем «управления» η_l , $l = \overline{1, N_L}$ по формуле (33);
- решаем задачу (18)-(21) с известными «управлениями», находим ϕ .

После нахождения ϕ , вычисляем величину W по формуле (23), а затем сравниваем ее с W^{obs} . Значения этих величин должны быть близки при малых параметрах регуляризации согласно Теореме 2. Как отмечалось выше, решение задачи (26) есть приближенное решение (18)-(22) при малых α в том или ином смысле.

Алгоритм 2. Сформулируем итерационный метод решения (26), аналогичный тем, что приводились в [20] (не использующий «двойственное» представление функционала невязки), а затем на его основе построим итерационный алгоритм, использующий это представление функционала. Для простоты все уравнения будем приводить в классической, а не в обобщенной форме.

Проварьируем функционал (27):

$$\delta J_\alpha = \alpha \int_0^T \eta_l \delta \eta_l dt + (W - W^{obs}) \cdot \int_0^T \int_\Omega g \delta \phi d\Omega dt = 0 \quad \forall \delta \eta_l,$$

где $\delta \phi$ — решение задачи

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \delta \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \delta \phi}{\partial y} + w \frac{\partial \delta \phi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a_{xx} \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} \right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial y} \left(a_{yy} \frac{\partial \delta \phi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(a_{zz} \frac{\partial \delta \phi}{\partial z} \right) = 0 \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \end{aligned} \quad (34)$$

$$U_n^{(-)} \delta \phi + \frac{\partial \delta \phi}{\partial N} = 0 \quad \text{на } (\Gamma/\Gamma_2) \times (0, T), \quad (35)$$

$$\beta\delta\phi - a_{zz}\frac{\partial\delta\phi}{\partial z} = \sum_{l=1}^{N_L} m_l\delta\eta_l \text{ на } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (36)$$

$$\delta\phi = 0 \text{ при } t = 0 \text{ в } \Omega. \quad (37)$$

Введем сопряженную задачу:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial q}{\partial t} - u\frac{\partial q}{\partial x} - v\frac{\partial q}{\partial y} - w\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a_{xx}\frac{\partial q}{\partial x}\right) - \\ & -\frac{\partial}{\partial y}\left(a_{yy}\frac{\partial q}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(a_{zz}\frac{\partial q}{\partial z}\right) \equiv (W - W^{obs})g \text{ в } \Omega \times (0, T), \end{aligned} \quad (38)$$

$$U_n^{(+)}q + \frac{\partial q}{\partial N} = 0 \text{ на } (\Gamma/\Gamma_2) \times (0, T), \quad (39)$$

$$\beta q - a_{zz}\frac{\partial q}{\partial z} = 0 \text{ на } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (40)$$

$$q = 0 \text{ при } t = T \text{ в } \Omega. \quad (41)$$

Подставляя (38) в вариацию функционала и используя граничные и начальные условия задач (34)-(37) и (38)-(41), приводим вариацию функционала к виду:

$$\delta J_\alpha = \alpha \int_0^T \eta_l \delta\eta_l dt + \int_0^T \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) \delta\eta_l dt = 0 \quad \forall \delta\eta_l.$$

Из последнего равенства получим:

$$\alpha\eta_l + \int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 = 0 \text{ на } (0, T).$$

Теперь рассматриваемую задачу можно решать итерационным алгоритмом ви-

да:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \phi^k}{\partial t} + u \frac{\partial \phi^k}{\partial x} + v \frac{\partial \phi^k}{\partial y} + w \frac{\partial \phi^k}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a_{xx} \frac{\partial \phi^k}{\partial x} \right) - \\
& - \frac{\partial}{\partial y} \left(a_{yy} \frac{\partial \phi^k}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(a_{zz} \frac{\partial \phi^k}{\partial z} \right) = f \text{ в } \Omega \times (0, T), \\
& U_n^{(-)} \phi^k + \frac{\partial \phi^k}{\partial N} = U_n^{(-)} g_{(\Gamma)} \text{ на } (\Gamma/\Gamma_2) \times (0, T), \\
& \beta \phi^k - a_{zz} \frac{\partial \phi^k}{\partial z} = g_{(\Gamma_2)} + \sum_{l=1}^{N_L} m_l (\eta_l^k + g_l^{em}) \text{ на } \Gamma_2 \times (0, T), \\
& \phi^k = \phi_{(0)} \text{ при } t = 0 \text{ в } \Omega,
\end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\partial q^k}{\partial t} - u \frac{\partial q^k}{\partial x} - v \frac{\partial q^k}{\partial y} - w \frac{\partial q^k}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a_{xx} \frac{\partial q^k}{\partial x} \right) - \\
& - \frac{\partial}{\partial y} \left(a_{yy} \frac{\partial q^k}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(a_{zz} \frac{\partial q^k}{\partial z} \right) \equiv ((\phi^k, g) - W^{obs})g \text{ в } \Omega \times (0, T), \\
& U_n^{(+)} q^k + \frac{\partial q^k}{\partial N} = 0 \text{ на } (\Gamma/\Gamma_2) \times (0, T), \\
& \beta q^k - a_{zz} \frac{\partial q^k}{\partial z} = 0 \text{ на } \Gamma_2 \times (0, T), \quad q^k = 0 \text{ при } t = T \text{ в } \Omega,
\end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned}
& \eta_l^{k+1} = \eta_l^k - \tau_k (\alpha \eta_l^k + \int_{\Gamma_2} m_l q^k d\Gamma_2), \\
& l = \overline{1, N_L} \text{ на } (0, T), \quad k = 0, 1, \dots
\end{aligned} \tag{44}$$

В приведенном итерационном алгоритме (42)-(44) τ_k — параметр итерационного процесса на k -м шаге, методы выбора которого описаны, например, в [69]. Вектор «управлений» на нулевом шаге итерационного метода можно полагать нулевым: $\vec{\eta}^0 = \vec{0}$.

Следует отметить, что при реализации Алгоритма 2 требуется на каждом шаге решать как прямую, так и сопряженную задачи, в то время как при решении задачи Алгоритмом 1 прямая и «вспомогательная» сопряженная задачи решаются один раз. Кроме того отметим, что решения сопряженных задач в итерационном алгоритме и подходе, основанном на «двойственном» представлении функционала, имеют разный смысл. В первом случае они используются для эффективного вычисления градиента минимизируемого функционала, а

значит, они убывают в итерационном процессе, что может создать трудности при их аппроксимации численными методами. Во втором же подходе сопряженная задача и ее решение «фиксированы», а значит, проводя вычисления один раз, можно их применить для целей исследования или решения задачи при «фиксированных погрешностях» их аппроксимации, не связанных со сходимостью итерационного или «прямого» алгоритма.

В завершении параграфа сформулируем еще один алгоритм решения (26), в котором прямая и «вспомогательная» сопряженная задачи решаются один раз, однако «управления» вычисляются итерационно, а не аналитически.

Алгоритм 3. Пусть рассматривается итерационный алгоритм (42)-(44) и «вспомогательная» сопряженная задача вида (28). Тогда решение q^k задачи (42) есть

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial q^k}{\partial t} - u \frac{\partial q^k}{\partial x} - v \frac{\partial q^k}{\partial y} - w \frac{\partial q^k}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a_{xx} \frac{\partial q^k}{\partial x} \right) - \\ & -\frac{\partial}{\partial y} \left(a_{yy} \frac{\partial q^k}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(a_{zz} \frac{\partial q^k}{\partial z} \right) \equiv ((\phi^k, g) - W^{obs})g \equiv \\ & \equiv ((\phi^k, g) - W^{obs}) \left(-\frac{\partial q}{\partial t} - u \frac{\partial q}{\partial x} - v \frac{\partial q}{\partial y} - w \frac{\partial q}{\partial z} - \right. \\ & \left. -\frac{\partial}{\partial x} \left(a_{xx} \frac{\partial q}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(a_{yy} \frac{\partial q}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(a_{zz} \frac{\partial q}{\partial z} \right) \right), \end{aligned}$$

т. е.:

$$q^k = ((\phi^k, g) - W^{obs})q = \left(\sum_{l=1}^{N_L} (m_l \eta_l^k, q)_{L_2(\Gamma_2 \times (0, T))} - \overline{W}^{obs} \right) q. \quad (45)$$

Подставляем (45) в (44) и получаем:

$$\begin{aligned} \eta_l^{k+1} = \eta_l^k - \tau_k \left(\alpha \eta_l^k + \left(\sum_{l=1}^{N_L} (m_l \eta_l^k, q)_{L_2(\Gamma_2 \times (0, T))} - \overline{W}^{obs} \right) \cdot \right. \\ \left. \cdot \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) \right), \quad l = \overline{1, N_L} \text{ на } (0, T), \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (46)$$

Итак, алгоритм является итерационным и заключается в следующем:

- решаем «вспомогательную» сопряженную задачу (28), находим q ;

- задаем «желаемое» число W^{obs} , к которому будем приближать W ;
- вычисляем «управления» η_l , $l = \overline{1, N_L}$ итерационным методом (46);
- решаем задачу (18)-(21) с известными «управлениями», находим ϕ .

Легко видеть, что Алгоритмы 1 и 3 фактически совпадают, их единственное отличие в том, что в первом случае «управления» вычисляются аналитически, без применения итерационного процесса, а во втором — итерационно. Алгоритм 3 может быть использован, когда вычисление «управлений» по формуле типа (33) затруднительно. В настоящей диссертации для решения класса задач оптимального управления о локальных источниках при интегральном наблюдении будет использоваться Алгоритм 1, поскольку он не является итерационным и позволяет «оригинальным способом» наложить ограничения на «управления», которые необходимы для того, чтобы концентрации загрязнения, полученные в результате численного моделирования, были «физическими» (неотрицательными). Отметим, что здесь *термин «ограничение на управления» означает не наложение дополнительных условий типа неравенств на «управления» в математической постановке задачи, как, например, в работах [59], [69]-[72], а апостериорное наложение неравенств специального вида на «управления» в ходе построения алгоритма решения задачи.* В следующих главах работы будут предложены методы ввода таких ограничений с учетом физических свойств решений задачи, а также конкретных условий замыкания.

Глава 2. Задача оптимизации «средней» концентрации загрязнений в регионе от локальных источников

В данной главе формулируется задача оптимизации «средней» концентрации загрязнений в регионе от локальных источников, а также предлагается алгоритм ее решения. Во многом приводимый здесь метод аналогичен Алгоритму 1 из главы 1 настоящей работы. Однако в том алгоритме не вводились ограничения на «управления» интенсивностями локальных источников, что может привести к отрицательности концентрации загрязнений в некоторых точках региона исследования, что не имеет «физического смысла». Здесь же формулируется алгоритм решения задачи оптимизации «средней» концентрации загрязнений, позволяющий избежать «нефизичности» результатов, а именно здесь предлагается метод введения ограничений на «управления». С такими ограничениями величины «управлений» рассматриваемой задачи уже становятся «корректными» (в том смысле, что не приводят к «нефизичности» решения задачи).

§ 2.1. Постановка задачи оптимизации «средней» концентрации загрязнений в регионе от локальных источников

В этом параграфе приводится постановка задачи оптимизации «средней» концентрации загрязнений в регионе от локальных источников. Эта задача входит в класс задач оптимального управления о локальных источниках при интегральном наблюдении. Поэтому, как и в главе 1, в качестве математической модели распространения загрязнений, необходимой для постановки задачи, используем уравнение конвекции-диффузии (18) с граничными условиями (19)-(20) и начальным условием (21). Все обозначения и предположения о коэффи-

циентах задачи (18)-(21) остаются теми же, что и ранее.

Пусть далее «весовая» функция g , введенная в предыдущей главе, имеет следующий вид:

$$g(x, y, z, t) = \begin{cases} \frac{1}{\text{mes}(\Omega_{obs})} \frac{1}{T}, & \{(x, y, z) \in \Omega_{obs}\} \cap \{t \in (0, T)\}, \\ 0, & \{(x, y, z) \notin \Omega_{obs}\} \cup \{t \notin (0, T)\}. \end{cases} \quad (47)$$

Здесь $\Omega_{obs} \subseteq \Omega$ по-прежнему есть «охраняемый регион». Через $\bar{\phi}$ обозначим «среднюю» концентрацию загрязнений, которая образовалась в «охраняемом регионе» на интервале $(0, T)$ в результате распространения примеси, и будем определять ее из соотношения

$$\bar{\phi} \equiv (\phi, g) = \int_0^T \frac{1}{T} \int_{\Omega_{obs}} \frac{\phi}{\text{mes}(\Omega_{obs})} d\Omega dt.$$

Таким образом, $\bar{\phi}$ фактически является частным случаем W из главы 1.

Для замыкания задачи (18)-(21) введем дополнительное условие вида

$$\bar{\phi} = \varphi_{acc}, \quad (48)$$

где φ_{acc} — «допустимый» уровень «средней» концентрации загрязнений в Ω_{obs} на интервале $(0, T)$. Он может быть определен, например, из санитарных норм, показателей ПДКСС, и т.п. Однако в данной работе φ_{acc} будет определен из специального соотношения, которое будет приведено в ходе дальнейшего изложения.

Исходная постановка обратной задачи имеет практически такой же вид, как и в предыдущей главе: найти $\phi, \vec{\eta}$ такие, что выполняются (18)-(21), (48).

Задача (18)-(21), (48) в обобщенной постановке имеет следующий вид: найти $\phi \in W_2^{1,0}(\Omega \times (0, T))$, $\eta_l \in L_2(0, T)$, $l = \overline{1, N_L}$ такие, что выполняются соотношения (24) и (48). Как и ранее, говоря о решении задачи (18)-(21), (48) будем

подразумевать, что речь идет о решении в обобщенной постановке.

Далее, поскольку система уравнений (18)-(21), (48) входит в класс обратных задач о локальных источниках при интегральном наблюдении (в качестве которого выступает «средняя» концентрация загрязнений) и для этого класса имеет место Теорема 2, то (18)-(21), (48) — некорректно поставленная задача. Поэтому мы вновь переходим от рассмотрения исходной задачи (18)-(21), (48) к ее регуляризованной обобщенной постановке (26) «в смысле наименьших квадратов» с функционалом

$$J_\alpha(\phi, \vec{\eta}) \equiv \frac{\alpha}{2} \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \eta_l^2(t) dt + \frac{1}{2} (\bar{\phi} - \varphi_{acc})^2. \quad (49)$$

Первое слагаемое функционала по-прежнему имеет смысл «стоимости» («штрафа») уменьшения интенсивности всех локальных источников, а второе — разность между «средней» концентрацией, полученной в результате использования «управлений», и «допустимым» уровнем «средней» концентрации «в смысле наименьших квадратов».

В дальнейшем будет рассматриваться задача оптимального управления вида (26) с функционалом (49). В результате решения будет получена ϕ , по которой можно будет вычислить «среднюю» концентрацию $\bar{\phi}$, которой возможно достичь, управляя по закономерностям $\eta_l, l = \overline{1, N_L}$ (т.е. «оптимизировать среднюю концентрацию загрязнений» в интересующем нас регионе).

В следующем параграфе приведем алгоритм решения задачи оптимизации «средней» концентрации загрязнений в регионе от локальных источников.

§ 2.2. Алгоритм решения задачи оптимизации «средней» концентрации загрязнений в регионе

В настоящем параграфе предлагается алгоритм решения задачи оптимизации «средней» концентрации загрязнений, а также изложена методика введения

ограничений на «управления» интенсивностью локальных источников.

Сначала вводим сопряженную задачу (28), а также ее обобщенную постановку (29), для которой справедлива теорема существования и единственности решения $q \in \hat{W}_2^1(\Omega \times (0, T))$. Поскольку решение q сопряженной задачи имеет смысл «чувствительности» («ценности», «опасности») определенной точки в определенный момент времени к загрязнению (то есть физически не может быть отрицательной величиной), в дальнейшем будем предполагать, что $q \geq 0$, $\forall t \in (0, T)$, а также, что $\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 > 0$ хотя бы для одного источника на всем временном интервале $(0, T)$. Оба эти предположения справедливы при численном моделировании в силу монотонности используемой схемы дискретизации (которая будет подробно обсуждаться в главе 4 настоящей диссертации).

Далее, используя соотношения сопряженности, аналогичные (30), переписываем $\bar{\phi}$ в виде:

$$\begin{aligned} \bar{\phi} = & \int_0^T \int_{\Omega} f q d\Omega dt + \int_{\Omega} \phi_{(0)} q(0) d\Omega + \int_0^T \int_{\Gamma/\Gamma_2} U_n^{(-)} g_{(\Gamma)} q d\Gamma dt + \\ & + \int_0^T \int_{\Gamma_2} \varphi_{(\Gamma_2)} q d\Gamma_2 dt + \int_0^T \int_{\Gamma_2} \sum_{l=1}^{N_L} m_l \eta_l q d\Gamma_2 dt, \end{aligned} \quad (50)$$

а также функционал (49) в «двойственном» представлении:

$$J_{\alpha}(\phi, \vec{\eta}) = \frac{\alpha}{2} \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \eta_l^2(t) dt + \frac{1}{2} \left(\sum_{l=1}^{N_L} (m_l \eta_l, q)_{L_2(\Gamma_2 \times (0, T))} - \bar{\varphi}_{acc} \right)^2, \quad (51)$$

где

$$\bar{\varphi}_{acc} = \varphi_{acc} - \bar{\phi}_0,$$

$$\bar{\phi}_0 = (f, q) + (\phi_{(0)}, q(0))_{L_2(\Omega)} + (U_n^{(-)} g_{(\Gamma)}, q)_{L_2((\Gamma/\Gamma_2) \times (0, T))} + (\varphi_{(\Gamma_2)}, q)_{L_2(\Gamma_2 \times (0, T))}.$$

Здесь $\bar{\phi}_0$ — «средняя» концентрация загрязнений в «охраняемом» регионе до

«управлений» (при $\eta_l = 0$, $l = \overline{1, N_L}$), $\bar{\varphi}_{acc}$ — изменение уровня «средней» концентрации до «управлений» на величину φ_{acc} .

Теперь, варьируя функционал (51) по η_l и используя тот факт, что первая вариация функционала равна нулю $\forall \delta\eta_l$, а также делая вычисления аналогичные тем, что проделаны в Алгоритме 1 предыдущей главы, получаем формулу для вычисления «управлений» в явном виде:

$$\eta_l(t) = \frac{\bar{\varphi}_{acc} \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t)}{\alpha + \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)^2 dt}, \quad l = \overline{1, N_L}, \quad t \in (0, T). \quad (52)$$

«Управления», вычисляемые по формуле (52), доставляют функционалу (51) глобальный минимум, так как первая вариация квадратичного функционала (51) равна нулю на таких «управлениях». Подставляем далее «управления» (52) в (51), и вычисляем минимум функционала:

$$J_\alpha = \frac{\alpha(\bar{\varphi}_{acc})^2}{2 \left(\alpha + \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)^2 dt \right)}.$$

Отсюда, и из предположения, что $\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 > 0$ хотя бы для одного l на всем временном интервале $(0, T)$ следует, что $\lim_{\alpha \rightarrow 0} J_\alpha = 0$. Это означает, что при малых α минимум функционала будет близок к нулю, а поскольку два представления (49) и (51) тождественны, то $\bar{\varphi}$ будет близка к φ_{acc} , а при $\alpha = 0$ эти величины будут в точности равны. Таким образом, управляя по закономерностям (52), можно оптимизировать «среднюю» концентрацию загрязнений в интересующем нас регионе.

Следует отметить, что «управления» (52), вообще говоря, могут быть достаточно большими отрицательными по значению и положительными по модулю величинами, поскольку $\bar{\varphi}_{acc}$ может оказаться много меньше нуля, что в

результате численного моделирования может привести к получению отрицательной концентрации загрязнения (см, например, [11]). Поэтому для случая $\bar{\varphi}_{acc} \leq 0$ необходимо ввести некоторые ограничения на «управления», что делается ниже.

Итак, рассматриваем случай $\varphi_{acc} \leq \bar{\phi}_0$. Тогда «управления» не могут принимать положительные значения ни в один из моментов времени ни для одного источника (что видно из (52)). Напоминаем, что g_l^{em} — постоянная и положительная величина, предполагается, что $q \geq 0, \forall t \in (0, T)$, а также $\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 > 0$ хотя бы для одного источника на всем временном интервале $(0, T)$. Обозначим:

$$Lt_{zero} = \{l = \overline{1, N_L}, t \in (0, T) \mid \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t) = 0\},$$

$$Lt_{pos} = \{l = \overline{1, N_L}, t \in (0, T) \mid \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t) > 0\}.$$

Очевидно, что множества Lt_{zero} и Lt_{pos} не пересекаются, а их объединение образует множество всех возможных l и t для исследуемой задачи. Поскольку $\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 > 0$ хотя бы для одного источника на всем временном интервале $(0, T)$, то

$$\sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)^2 dt > 0.$$

Введем условие:

$$(A) \quad \bar{\phi}_0 - \frac{g_l^{em}(t) \left(\alpha + \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)^2 dt \right)}{\left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t)} \leq \varphi_{acc}, \quad (l, t) \in Lt_{pos}.$$

Справедлива следующая

Теорема 3. Ограничение вида

$$(B) \quad |\eta_l(t)| \leq g_l^{em}(t), \quad \forall l = \overline{1, N_L}, \quad \forall t \in (0, T)$$

имеет место тогда и только тогда, когда выполнено ограничение (A).

Доказательство. Сначала докажем, что из ограничения (B) следует условие (A). По определению модуля из (B) получаем равносильную систему неравенств:

$$|\eta_l(t)| \leq g_l^{em}(t) \Leftrightarrow \begin{cases} \eta_l(t) \leq g_l^{em}(t), \\ \eta_l(t) \geq -g_l^{em}(t). \end{cases} \quad (53)$$

Используя второе неравенство из (53), а также формулу (52), получаем:

$$\frac{\bar{\varphi}_{acc} \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t)}{\alpha + \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)^2 dt} \geq -g_l^{em}(t), \quad \forall l = \overline{1, N_L}, \quad \forall t \in (0, T).$$

Пусть сначала $(l, t) \in Lt_{zero}$. В этом случае последнее неравенство принимает вид

$$0 \geq -g_l^{em}(t), \quad \forall (l, t) \in Lt_{zero},$$

что верно $\forall \varphi_{acc}$. Теперь рассмотрим ситуацию, когда $(l, t) \in Lt_{pos}$. Поскольку в этом случае $\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 > 0$, то справедлива следующая цепочка равносильных неравенств:

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{\varphi}_{acc} \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t)}{\alpha + \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)^2 dt} \geq -g_l^{em}(t) \Leftrightarrow \\ & g_l^{em}(t) \left(\alpha + \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)^2 dt \right) \\ & \Leftrightarrow \bar{\varphi}_{acc} \geq - \frac{\left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t)}{\left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t)} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \varphi_{acc} \geq \bar{\Phi}_0 - \frac{g_l^{em}(t) \left(\alpha + \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)^2 dt \right)}{\left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t)}. \quad (54)$$

Формула (54) — условие (А). Таким образом, прямое утверждение теоремы доказано.

Теперь докажем обратное утверждение. В случае, если $(l, t) \in Lt_{zero}$, то $\eta_l(t) = 0$, а это означает, что выполняется:

$$|\eta_l(t)| \leq g_l^{em}(t), \quad (l, t) \in Lt_{zero}.$$

В случае, когда $(l, t) \in Lt_{pos}$, имеет место (54). Используя цепочку равносильных неравенств, записанную выше при доказательстве прямого утверждения теоремы, а также (52), получаем:

$$\eta_l(t) \geq -g_l^{em}(t), \quad (l, t) \in Lt_{pos}.$$

Поскольку рассматриваемые «управления» — неположительные (что отмечалось выше), то справедлива система неравенств из (53), равносильная

$$|\eta_l(t)| \leq g_l^{em}(t), \quad (l, t) \in Lt_{pos}.$$

Объединение множеств Lt_{zero} и Lt_{pos} образует множество всех возможных l и t для исследуемой задачи, т.е. выполняется (Б). \square

Замечание 1. Отметим, что для случая $\bar{\varphi}_{acc} > 0$ формулировать теорему, подобную доказанной, смысла нет, поскольку в этом случае «управления» — неотрицательные величины (что следует из (52)), а их значения могут быть больше интенсивностей источников g_l^{em} (т.е. скорость увеличения интенсивности источников может быть больше самого значения интенсивности). Более того, на практике нас не будет интересовать задача с $\bar{\varphi}_{acc} > 0$, поскольку мы оптимизируем «среднюю» концентрацию загрязнений, полагая, что концентрация с «управлениями» будет не больше, чем концентрация без «управлений». \square

Замечание 2. По Теореме 3 условие (А) и ограничение (Б) эквивалентны. Это означает, что выполнение условия (А) гарантирует, что ни из одного источника ни в один из моментов времени не будет удалено больше примеси, чем может распространиться. Фактически, условие (А) дает оценку снизу на значение «допустимого» уровня «средней» концентрации загрязнений φ_{acc} , которого можно достичь в «охраняемом регионе» Ω_{obs} на временном интервале $(0, T)$. Но здесь под словом «допустимый» понимается не уровень санитарных норм, а такой уровень, достижение которого не станет причиной нарушения «физичности» величин исследуемой задачи. \square

Замечание 3. В данной задаче φ_{acc} — «допустимый» уровень «средней» концентрации загрязнений, т.е. число, а не функция. Поэтому на практике на φ_{acc} можно налагать условие вида

$$(B) \quad \bar{\phi}_0 - \min_{l,t} \left(\frac{g_l^{em}}{\left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t)} \right) \left(\alpha + \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)^2 dt \right) \leq \varphi_{acc}.$$

Отмечаем, что выполнение данного условия является достаточным для выполнения условия (А). Поэтому при его введении Теорема 3 остается справедливой. \square

Итак, алгоритм решения задачи оптимизации «средней» концентрации загрязнений от локальных источников в регионе (26) (с функционалом (49)) состоит в следующем:

- решаем «вспомогательную» сопряженную задачу (28), находим q ;
- задаем «допустимый» уровень «средней» концентрации загрязнений φ_{acc} в соответствии с оценкой (B), к этому уровню будем приближать «среднюю» концентрацию $\bar{\phi}$;
- вычисляем «управления» η_l , $l = \overline{1, N_L}$ по формуле (52);

- решаем задачу (18)-(21) с известными «управлениями», находим ϕ .

После нахождения ϕ , вычисляем величину $\bar{\phi}$, а затем сравниваем ее с φ_{acc} . Значения этих величин должны быть близки при малых параметрах регуляризации (см. Теорему 2). Схема дискретизации задач (18)-(21) и (28) приводятся в главе 4, а результаты численных экспериментов по решению исследуемой задачи — в главе 5 настоящей диссертации.

Глава 3. Задача оптимизации экономического ущерба от загрязнения окружающей среды локальными источниками

В данной главе формулируется задача оптимизации экономического ущерба от загрязнения окружающей среды локальными источниками, причем приводятся две постановки задачи: в одной постановке группы локальных источников стартуют не в один, а в различные моменты времени и условие замыкания в целом аналогично тем, что были приведены в главах 1 и 2 настоящей работы; в другой постановке рассматривается лишь одна группа источников, начинающих загрязнять окружающую среду в начальный момент времени, однако вводятся два условия замыкания, отличные от тех, что приводились ранее. Также в этой главе приводятся алгоритмы решения поставленных проблем. Основное отличие алгоритмов в том, что один из них не учитывает количество ресурсов (их возможную нехватку), выделенных на устранение локальных источников, а два других (одношаговый и многошаговый) учитывают. В одношаговом алгоритме «управления» вычисляются за один шаг и он основан на предположении, что ресурсов достаточно лишь для одного шага вычисления «управлений». В многошаговом алгоритме «управления» рассчитываются и уточняются многократно, и предполагается наличие такого количества ресурсов, что вычисление «управлений» за один шаг приводило бы к неполному использованию средств, выделенных на ликвидацию локальных источников (а если бы были использованы все имеющиеся ресурсы, то первоначальный ущерб был бы уменьшен значительно). Алгоритм, не учитывающий возможную нехватку ресурсов, применяется для решения задачи с группами локальных источников, возникающих в различные моменты времени, а одношаговый и многошаговый алгоритмы, учитывающие такую возможную нехватку, используются для решения задачи с одной группой источников, но с двумя условиями замыкания.

§ 3.1. Исходные и обобщенные постановки задачи оптимизации экономического ущерба от загрязнения региона локальными источниками

Приведем исходные и обобщенные постановки задачи, исследуемой в данной главе. Сначала рассмотрим задачу с несколькими группами локальных источников, стартующих в различные моменты времени. Отметим, что большинство функций, величин и предположений относительно них приводились ранее (см. главу 1), поэтому здесь расшифровываются лишь те из них, о которых речь не шла в предыдущих главах.

В качестве математической модели распространения загрязнений используется трехмерное нестационарное уравнение конвекции-диффузии с граничными и начальными условиями вида

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + w \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial y} \left(a_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(a_{zz} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = 0 \text{ в } \Omega \times (t_1, T), \end{aligned} \quad (55)$$

$$U_n^{(-)} \phi + \frac{\partial \phi}{\partial N} = 0 \text{ на } (\Gamma/\Gamma_2) \times (t_1, T), \quad (56)$$

$$\beta \phi - a_{zz} \frac{\partial \phi}{\partial z} = \sum_{k=1}^{N_k} \sum_{l_k=1}^{N_L^k} m_{l_k}^k(x, y, t) (\eta_{l_k}^k(t) + g_{l_k}^{em}(t)) \text{ на } \Gamma_2 \times (t_1, T), \quad (57)$$

$$\phi = 0 \text{ при } t = t_1 \text{ в } \Omega. \quad (58)$$

Через $\phi \equiv \phi(x, y, z, t)$ обозначим суммарную концентрацию загрязнения от локальных источников, стартовавших в разное время (при этом предполагается, что все источники попарно не пересекаются). Будем считать, что ис-

точники загрязнений стартуют группами в определенные моменты времени, от них распространяется лишь один тип поллютанта, а также будем пренебрегать взаимодействием примеси из различных локальных источников друг с другом, начальным загрязнением, фоновым загрязнением в области и на боковых границах. Тогда t_k — время старта каждого из $l_k = \overline{1, N_L^k}$ источников из k -й группы (t_1 — время старта первой группы локальных источников), N_L^k — число источников загрязнений, которое началось в момент времени t_k , N_k — суммарное число моментов времени старта всех групп локальных источников, T — конечный момент времени.

Функция $g_{l_k}^{em} \equiv g_{l_k}^{em}(t) \in L_2(0, T)$ есть концентрация загрязнения, которая распространяется с единицы площади l_k -го источника на границе Γ_2 (интенсивность источника, или коэффициент эмиссии, значение которого постоянно и положительно для конкретного вещества), $\eta_{l_k}^k \equiv \eta_{l_k}^k(t) \in L_2(0, T)$ — «управление» l_k -м источником из k -й группы, $m_{l_k}^k \equiv m_{l_k}^k(x, y, t)$ — характеристическая функция региона l_k -го локального источника из k -й группы на нижней границе (отметим, что $m_{l_k}^k(x, y, t) = 0$ при $t \leq t_k$).

Далее введем следующую «весовую» функцию:

$$g(x, y, z, t) = \begin{cases} \frac{I_t^{\text{Инд.}} \cdot \tilde{Q}_{2003}^{\text{атм.}} \cdot A^{\text{атм.}} \cdot \sigma}{T - t_1}, & \{(x, y, z) \in \Omega_{\text{obs}}\} \cap \{t \in (t_1, T)\}, \\ 0, & \{(x, y, z) \notin \Omega_{\text{obs}}\} \cup \{t \notin (t_1, T)\}. \end{cases}$$

Здесь $I_t^{\text{Инд.}}$ — коэффициент индексации удельного ущерба с учетом инфляции, задаваемый в Законе «О федеральном бюджете на t -й год», $\tilde{Q}_{2003}^{\text{атм.}}$ — удельный экономический ущерб от выброса в атмосферу 1 т условного загрязняющего вещества, приведенный к ценам 2003 г., $A^{\text{атм.}}$ — коэффициент относительной агрессивности выбрасываемого в атмосферу загрязняющего вещества (вообще говоря он свой, для каждого типа поллютанта, информацию по значению коэффициента можно найти, например, в [22], но в нашем случае будет учитываться лишь одно вещество, поэтому и коэффициент тоже один), σ — коэффициент относительной опасности воздействия примесей для разных типов загрязняе-

мых территорий (фактически, «весовой» коэффициент, влияющий на величину ущерба от загрязнения конкретного типа территории). Все приведенные коэффициенты — строго положительные величины.

Обозначим через Q экономический ущерб в «охраняемом регионе» от загрязнений окружающей среды, и будем определять его из следующего соотношения (которое аналогично тому, что приведено в [22]):

$$Q \equiv (\phi, g) \equiv (\phi, g)_{L_2(\Omega \times (t_1, T))} = \int_{t_1}^T \int_{\Omega} \phi g d\Omega dt = \int_{t_1}^T \int_{\Omega_{obs}} \phi g d\Omega dt.$$

Для замыкания задачи (55)-(58) введем дополнительное условие вида

$$Q = Q^{att}, \quad (59)$$

где Q^{att} — ущерб, который возможно достичь, управляя локальными источниками по закономерностям $\eta_{l_k}^k$, $l_k = \overline{1, N_L^k}$, $k = \overline{1, N_k}$. Этот ущерб считается известным и может определяться, например, из экспертных оценок, с помощью санитарных норм. Мы будем определять его с помощью специального соотношения, о котором речь пойдет ниже.

Теперь сформулируем следующую задачу: найти ϕ , $\eta_{l_k}^k$, $l_k = \overline{1, N_L^k}$, $k = \overline{1, N_k}$ такие, что выполняются соотношения (55)-(59). Однако мы не будем исследовать и решать задачу в такой постановке (причины станут ясны из дальнейшего изложения), а поступим следующим образом. Поскольку мы предположили, что локальные источники стартуют группами в определенные моменты времени, от них распространяется лишь один тип поллютанта, взаимодействием примеси из различных источников друг с другом пренебрегаем, а также используя линейность модели распространения загрязнений от локальных источников, разобьем задачу (55)-(59) на N_k независимых подзадач вида:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \phi_k}{\partial t} + u \frac{\partial \phi_k}{\partial x} + v \frac{\partial \phi_k}{\partial y} + w \frac{\partial \phi_k}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a_{xx} \frac{\partial \phi_k}{\partial x} \right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial y} \left(a_{yy} \frac{\partial \phi_k}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(a_{zz} \frac{\partial \phi_k}{\partial z} \right) = 0 \text{ в } \Omega \times (t_k, T), \end{aligned} \quad (60)$$

$$U_n^{(-)} \phi_k + \frac{\partial \phi_k}{\partial N} = 0 \text{ на } (\Gamma/\Gamma_2) \times (t_k, T), \quad (61)$$

$$\beta \phi_k - a_{zz} \frac{\partial \phi_k}{\partial z} = \sum_{l_k=1}^{N_L^k} m_{l_k}^k(x, y, t) (\eta_{l_k}^k(t) + g_{l_k}^{em}(t)) \text{ на } \Gamma_2 \times (t_k, T), \quad (62)$$

$$\phi_k = 0 \text{ при } t = t_k \text{ в } \Omega, \quad (63)$$

$$Q_k = Q_k^{att}, \quad (64)$$

где функция $\phi_k \equiv \phi_k(x, y, z, t)$ — концентрация загрязнения, которая возникла в области Ω с момента времени t_k в результате распространения примеси от N_L^k непересекающихся локальных источников, Q_k^{att} — ущерб, нанесенный «охраняемому региону» k -й группой источников загрязнений, который возможно достичь, управляя локальными источниками по закономерностям $\eta_{l_k}^k$, $l_k = \overline{1, N_L^k}$, Q_k — ущерб от загрязнения окружающей среды локальными источниками, которые начались в момент времени t_k .

Введем «весовые» функции g_k ($k = \overline{1, N_k}$):

$$g_k(x, y, z, t) = \begin{cases} \frac{I_t^{\text{инд.}} \tilde{Q}_{2003}^{\text{атм.}} A^{\text{атм.}} \sigma}{T - t_k}, & \{(x, y, z) \in \Omega_{\text{obs}}\} \cap \{t \in (t_k, T)\}, \\ 0, & \{(x, y, z) \notin \Omega_{\text{obs}}\} \cup \{t \notin (t_k, T)\}. \end{cases} \quad (65)$$

Обозначим

$$(\phi_k, g_k) \equiv (\phi_k, g_k)_{L_2(\Omega \times (t_k, T))} = \int_{t_k}^T \int_{\Omega} \phi_k g_k d\Omega dt = \int_{t_k}^T \int_{\Omega_{\text{obs}}} \phi_k g_k d\Omega dt.$$

Ущерб Q_k , $k = \overline{1, N_k}$ будем определять из соотношений

$$Q_k \equiv (\phi_k, g_k). \quad (66)$$

Наконец, формулируем исходную математическую постановку обратной задачи: найти ϕ_k , $\vec{\eta}_k \equiv (\eta_1^k, \dots, \eta_{N_L^k}^k)$, такие, что выполняются (60)-(64) при $k = \overline{1, N_k}$.

Сформулируем теперь обобщенные постановки N_k обратных задач (именно они используются в дальнейшем): найти $\phi_k \in W_2^{1,0}(\Omega \times (t_k, T))$, $\eta_{l_k}^k \in L_2(t_k, T)$, $l_k = \overline{1, N_L^k}$, $k = \overline{1, N_k}$ такие, что выполняются соотношения

$$\begin{aligned} & - \int_{t_k}^T \int_{\Omega} \phi_k \frac{\partial \hat{\phi}_k}{\partial t} d\Omega dt - \sum_{i=1}^3 \int_{t_k}^T \int_{\Omega} \left(u_i \phi_k - a_{ii} \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \hat{\phi}_k}{\partial x_i} d\Omega dt + \\ & + \int_{t_k}^T \int_{\Gamma/\Gamma_2} U_n^{(+)} \phi_k \hat{\phi}_k d\Gamma dt + \int_{t_k}^T \int_{\Gamma_2} \beta \phi_k \hat{\phi}_k d\Gamma_2 dt = \\ & = \int_{t_k}^T \int_{\Gamma_2} \sum_{l_k=1}^{N_L^k} m_{l_k}^k (\eta_{l_k}^k + g_{l_k}^{em}) \hat{\phi}_k d\Gamma_2 dt, \quad \forall \hat{\phi}_k \in \hat{W}_2^1(\Omega \times (t_k, T)), \\ & Q_k = Q_k^{att}. \end{aligned} \quad (67)$$

Легко проверить, что имеет смысл определять решение ϕ_k , $\vec{\eta}_k$ каждой k -й задачи (60)-(64) как функции, удовлетворяющие (64). В дальнейшем мы, говоря о решении задачи (60)-(64), будем подразумевать, что речь идет о решении в обобщенной постановке. Также в дальнейшем упростим обозначение «управлений»: $\eta_{l_k}^k \equiv \eta_{l_k}$, $l_k = \overline{1, N_L^k}$, $k = \overline{1, N_k}$.

Физически приведенная выше постановка означает следующее: необходимо найти такие «управления», чтобы ущерб Q_k в «охраняемом регионе» Ω_{obs} и на интервале (t_k, T) был равен «достижимому» ущербу Q_k^{att} , $k = \overline{1, N_k}$ по значению. Однако в данной постановке задача, вообще говоря, является некорректной (поскольку каждая k -я рассматриваемая обратная задача входит в класс

обратных задач о локальных источниках при интегральном наблюдении, для которого имеет место Теорема 2). Поэтому далее переходим к регуляризованной обобщенной постановке (60)-(64) «в смысле наименьших квадратов»:

$$\begin{aligned} \text{Найти } \phi_k \equiv \phi_k(\alpha), \vec{\eta}_k \equiv \vec{\eta}_k(\alpha), \text{ т.ч. выполняются} \\ (60)-(63) \text{ и } J_\alpha^k(\phi_k, \vec{\eta}_k) \rightarrow \inf_{\vec{\eta}_k}, \end{aligned} \quad (68)$$

где

$$J_\alpha^k(\phi_k, \vec{\eta}_k) = \frac{\alpha \text{Pr}^2}{2} \sum_{l_k=1}^{N_L^k} \int_{t_k}^T \eta_{l_k}^2(t) dt + \frac{1}{2} (Q_k - Q_k^{att})^2, \quad (69)$$

где $\alpha = \text{const} \geq 0$ — параметр регуляризации, а Pr — стоимость устранения загрязнения с единицы площади (этот коэффициент вводится для того, чтобы размерность обоих слагаемых функционала совпадала, а также чтобы можно было привести размерности «управлений» к денежным единицам). В дальнейшем будут решаться N_k задач оптимизации экономического ущерба вида (68) с функционалами (69). В результате решения будут получены значения ϕ_k , по которым можно будет вычислить экономический ущерб Q_k , которого возможно достичь, управляя по закономерностям $\vec{\eta}_k$ (то есть оптимизировать экономический ущерб в интересующем нас регионе). В следующем параграфе настоящей главы будет приведен алгоритм решения каждой из N_k задач (68).

Рассмотрим теперь еще одну постановку задачи оптимизации экономического ущерба одной группой источников, начинающих загрязнять окружающую среду в начальный момент времени, но с двумя условиями замыкания, отличными от тех, что приводились ранее. Такие условия замыкания, как будет видно в ходе дальнейшего изложения, позволяют сформулировать алгоритм решения задачи оптимизации экономического ущерба с учетом ресурсов, выделенных на устранение локальных источников. В этой постановке в качестве модели распространения загрязнения выступает система уравнений (18)-(21), в которой f , $g(\Gamma_2)$, $g(\Gamma)$ и $\phi(0)$ полагаются равными нулю (то есть фоном загрязнений и

начальным загрязнением пренебрегаем). Для замыкания (18)-(21) введем два дополнительных условия. Первое условие имеет вид:

$$Q = Q_0 - \delta Q, \quad (70)$$

где Q_0 — первоначальный экономический ущерб, δQ — заданное уменьшение первоначального экономического ущерба, Q — остаточный экономический ущерб. Для определения Q_0 и Q введем следующие функции. Через ϕ_0 обозначим решение задачи (18)-(21) при $\eta_l = 0$, $l = \overline{1, N_L}$. Также введем $g \equiv g(x, y, z, t)$ — заданная весовая функция

$$g(x, y, z, t) = \begin{cases} \frac{I_t^{\text{инд.}} \cdot \tilde{Q}_{2003}^{\text{атм.}} \cdot A^{\text{атм.}} \cdot \sigma}{T}, & \{(x, y, z) \in \Omega_{obs}\} \cap \{t \in (0, T)\}, \\ 0, & \{(x, y, z) \notin \Omega_{obs}\} \cup \{t \notin (0, T)\}, \end{cases} \quad (71)$$

такая, что определены функционалы

$$Q \equiv (\phi, g)_{L_2(\Omega \times (0, T))} = \int_0^T \int_{\Omega} \phi g d\Omega dt = \int_0^T \int_{\Omega_{obs}} \phi g d\Omega dt, \quad (72)$$

и

$$Q_0 \equiv (\phi_0, g)_{L_2(\Omega \times (0, T))} = \int_0^T \int_{\Omega} \phi_0 g d\Omega dt = \int_0^T \int_{\Omega_{obs}} \phi_0 g d\Omega dt. \quad (73)$$

Соотношение для определения δQ будет приведено в ходе дальнейшего изложения. Отметим, что Q_0 и δQ — известные неотрицательные величины (то есть под задачей оптимизации экономического ущерба понимается задача уменьшения первоначального ущерба Q_0 на неотрицательную величину δQ).

Далее вводим второе условие замыкания прямой задачи:

$$- \text{Pr} \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \eta_l(t) dt = Res_{av}, \quad (74)$$

в котором Res_{av} — количество ресурсов, имеющееся для устранения N_L локальных источников (заданная величина).

Исходная математическая постановка обратной задачи следующая: найти $\phi, \vec{\eta}$ такие, что выполняются (18)-(21), (70), (74).

В обобщенной постановке обратная задача (18)-(21), (70), (74) имеет следующий вид: найти $\phi \in W_2^{1,0}(\Omega \times (0, T))$, $\eta_l \in L_2(0, T)$, $l = \overline{1, N_L}$ такие, что выполняются соотношения (24) (при нулевых $f, g(\Gamma), g(\Gamma_2)$ и $\phi_{(0)}$) и (70), (74). Как и для всех предыдущих постановок, говоря о решении задачи (18)-(21), (70), (74) будем подразумевать, что речь идет о решении в обобщенной постановке.

Физически приведенная выше постановка означает следующее: используя все имеющееся в наличии количество ресурсов Res_{av} , необходимо найти такие скорости устранения локальных источников («управления»), чтобы остаточный ущерб Q в «охраняемом регионе» Ω_{obs} и на интервале $(0, T)$ был равен разности $Q_0 - \delta Q$ первоначального ущерба и его уменьшения по значению.

Такая постановка задачи, как и все предыдущие, является некорректной, поэтому, как и ранее, переходим от рассмотрения исходной задачи к обобщенной постановке «в смысле наименьших квадратов» с функционалом, состоящим из трех слагаемых (в отличие, например, от (68), в которой функционал (69) включает в себя два слагаемых):

$$\begin{aligned} \text{Найти } \phi \equiv \phi(\alpha), \vec{\eta} \equiv \vec{\eta}(\alpha), \text{ т.ч. выполняются} \\ (18)-(21) \text{ и } J_\alpha(\phi, \vec{\eta}) \rightarrow \inf_{\vec{\eta}} \end{aligned} \quad (75)$$

где

$$\begin{aligned} J_\alpha(\phi, \vec{\eta}) = \frac{\alpha \text{Pr}^2}{2} \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \eta_l^2(t) dt + \frac{1}{2} (Q + \delta Q - Q_0)^2 + \\ + \frac{1}{2} \left(\text{Pr} \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \eta_l(t) dt + Res_{av} \right)^2. \end{aligned} \quad (76)$$

Третье слагаемое в (76) — разность между правой и левой частями (74) «в смысле наименьших квадратов». В дальнейшем будет решаться задача оптимального управления вида (75) с функционалом (76). В результате решения будут получены значения ϕ , по которым можно будет вычислить остаточный экономический ущерб Q , которого возможно достичь, используя все имеющиеся ресурсы Res_{av} , управляя по закономерностям $\vec{\eta}$ (т.е. оптимизировать экономический ущерб в интересующем нас регионе с учетом имеющегося количества ресурсов). В заключительном параграфе этой главы будут приведены алгоритмы решения этой задачи.

§ 3.2. Алгоритм решения задачи оптимизации экономического ущерба от загрязнений региона группами локальных источников, возникающих в различные моменты времени

Рассмотрим алгоритм решения задачи оптимизации экономического ущерба от загрязнений региона группами локальных источников. Сначала вводим N_k «вспомогательных» сопряженных задач ($k = \overline{1, N_k}$):

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial q_k}{\partial t} - u \frac{\partial q_k}{\partial x} - v \frac{\partial q_k}{\partial y} - w \frac{\partial q_k}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a_{xx} \frac{\partial q_k}{\partial x} \right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial y} \left(a_{yy} \frac{\partial q_k}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(a_{zz} \frac{\partial q_k}{\partial z} \right) \equiv g_k \text{ в } \Omega \times (t_k, T), \\ & U_n^{(+)} q_k + \frac{\partial q_k}{\partial N} = 0 \text{ на } (\Gamma/\Gamma_2) \times (t_k, T), \\ & \beta q_k - a_{zz} \frac{\partial q_k}{\partial z} = 0 \text{ на } \Gamma_2 \times (t_k, T), \\ & q_k = 0 \text{ при } t = T \text{ в } \Omega, \end{aligned} \tag{77}$$

где $q_k \equiv q_k(x, y, z, t)$, $k = \overline{1, N_k}$ — решения сопряженных задач. Будем предполагать, как и ранее, что $q_k \geq 0$, $\forall t \in (t_k, T)$, а также, что $\int_{\Gamma_2} m_{l_k}^k q_k d\Gamma_2 > 0$ хотя бы для одного источника на всем временном интервале (t_k, T) , $k = \overline{1, N_k}$. Вели-

чины g_k , $k = \overline{1, N_k}$ — «весовые» функции, введенные в предыдущем параграфе.

Обобщенные постановки «вспомогательных» сопряженных задач имеют следующий вид: найти $q_k \in \hat{W}_2^1(\Omega \times (t_k, T))$, $k = \overline{1, N_k}$ такие, что выполняются соотношения

$$\begin{aligned}
& - \int_{t_k}^T \int_{\Omega} \frac{\partial q_k}{\partial t} \hat{q}_k d\Omega dt + \sum_{i=1}^3 \int_{t_k}^T \int_{\Omega} u_i q_k \frac{\partial \hat{q}_k}{\partial x_i} d\Omega dt + \\
& + \sum_{i=1}^3 \int_{t_k}^T \int_{\Omega} a_{ii} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{q}_k}{\partial x_i} d\Omega dt + \int_{t_k}^T \int_{\Gamma/\Gamma_2} U_n^{(-)} q_k \hat{q}_k d\Omega dt + \\
& + \int_{t_k}^T \int_{\Gamma_2} \beta q_k \hat{q}_k d\Gamma_2 dt = \int_{t_k}^T \int_{\Omega} g_k \hat{q}_k d\Omega dt, \\
& \forall \hat{q}_k \in W_2^{1,0}(\Omega \times (t_k, T)).
\end{aligned} \tag{78}$$

При ограничениях и предположениях о физических коэффициентах задачи, приведенных в параграфе 1.2 главы 1, следуя, например, [54]-[58], можно показать, что обобщенное решение задачи (78) в классе функций $\hat{W}_2^1(\Omega \times (t_k, T))$ существует и единственно.

Выписываем далее соотношения сопряженности, полагая $\hat{q}_k \equiv \phi_k$ в (78), где ϕ_k — решение задачи (60)-(64), а в (67) $\hat{\phi}_k \equiv q_k$, где q_k — решение (78):

$$\begin{aligned}
Q_k &= - \int_{t_k}^T \int_{\Omega} \phi_k \frac{\partial q_k}{\partial t} d\Omega dt - \sum_{i=1}^3 \int_{t_k}^T \int_{\Omega} u_i \phi_k \frac{\partial q_k}{\partial x_i} d\Omega dt + \\
& + \sum_{i=1}^3 \int_{t_k}^T \int_{\Gamma/\Gamma_2} U_n^{(+)} \phi_k q_k d\Gamma dt + \sum_{i=1}^3 \int_{t_k}^T \int_{\Omega} a_{ii} \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} d\Omega dt + \\
& + \int_{t_k}^T \int_{\Gamma_2} \beta \phi_k q_k d\Gamma_2 dt = \left(\sum_{l_k=1}^{N_L^k} m_{l_k}^k g_{l_k}^{em}, q_k \right)_{L_2(\Gamma_2 \times (t_k, T))} + \sum_{l_k=1}^{N_L^k} (m_{l_k}^k \eta_{l_k}, q_k)_{L_2(\Gamma_2 \times (t_k, T))}
\end{aligned}$$

и переписываем функционалы (69) в «двойственном» представлении:

$$J_{\alpha}^k(\phi_k, \vec{\eta}_k) = \frac{\alpha \text{Pr}^2}{2} \sum_{l_k=1}^{N_L^k} \int_{t_k}^T \eta_{l_k}^2(t) dt + \frac{1}{2} \left(\sum_{l_k=1}^{N_L^k} (m_{l_k}^k \eta_{l_k}, q_k)_{L_2(\Gamma_2 \times (t_k, T))} - \overline{Q}_k^{att} \right)^2, \quad k = \overline{1, N_k}, \quad (79)$$

где

$$\overline{Q}_k^{att} = Q_k^{att} - Q_k^0, \quad Q_k^0 = \left(\sum_{l_k=1}^{N_L^k} m_{l_k}^k g_{l_k}^{em}, q_k \right)_{L_2(\Gamma_2 \times (t_k, T))}.$$

Варьируя каждый из функционалов (69) и используя тот факт, что первая вариация равна нулю, а также делая вычисления аналогичные тем, что приведены в Алгоритме 1 главы 1, получаем формулу для вычисления «управлений» при $k = \overline{1, N_k}$ в явном виде:

$$\eta_{l_k}(t) = \frac{\overline{Q}_k^{att} \left(\int_{\Gamma_2} m_{l_k}^k q_k d\Gamma_2 \right) (t)}{\alpha \text{Pr}^2 + \sum_{l_k=1}^{N_L^k} \int_{t_k}^T \left(\int_{\Gamma_2} m_{l_k}^k q_k d\Gamma_2 \right)^2 dt} \quad \text{при } t \in (t_k, T), l_k = \overline{1, N_L^k}. \quad (80)$$

Как и ранее, поскольку первая вариация квадратичного функционала (79) равна нулю на таких «управлениях», то «управления», вычисляемые по формуле (80), доставляют функционалу (79) глобальный минимум:

$$J_{\alpha}^k(\phi_k, \vec{\eta}_k) = \frac{\alpha \text{Pr}^2 \left(\overline{Q}_k^{att} \right)^2}{2 \left(\alpha \text{Pr}^2 + \sum_{l_k=1}^{N_L^k} \int_{t_k}^T \left(\int_{\Gamma_2} m_{l_k}^k q_k d\Gamma_2 \right)^2 dt \right)}.$$

Из последнего равенства вытекает, что $\lim_{\alpha \rightarrow 0} J_{\alpha}^k(\phi_k, \vec{\eta}_k) = 0$. Таким образом, при малых параметрах регуляризации ущерб Q_k , получаемый в результате «управлений», вычисляемых по формуле (80), на практике должен быть близок по значению к Q_k^{att} .

Следует отметить, что «управления» (80), вообще говоря, могут быть достаточно большими отрицательными по значению и положительными по модулю величинами, поскольку \overline{Q}_k^{att} может оказаться меньше нуля, что в результате численного моделирования может привести к получению отрицательной концентрации загрязнения. Поэтому для случая $\overline{Q}_k^{att} \leq 0$, необходимо ввести некоторые ограничения на «управления» тем же образом, как это делалось в предыдущей главе.

Итак, рассматриваем случай $Q_k^{att} \leq Q_k^0$, $k = \overline{1, N_k}$. Тогда «управления» не могут принимать положительные значения ни в один из моментов времени ни для одного источника (что видно из формулы (80)). Напоминаем, что $g_{l_k}^{em}$ — постоянная и положительная величина, предполагается, что $q_k \geq 0$, $\forall t \in (t_k, T)$, $k = \overline{1, N_k}$, а также $\int_{\Gamma_2} m_{l_k}^k q_k d\Gamma_2 > 0$ хотя бы для одного источника на всем временном интервале (t_k, T) . Обозначим:

$$Lt_{zero}^k = \{l_k = \overline{1, N_L^k}, t \in (t_k, T) \mid \left(\int_{\Gamma_2} m_{l_k}^k q_k d\Gamma_2 \right) (t) = 0\}, k = \overline{1, N_k},$$

$$Lt_{pos}^k = \{l_k = \overline{1, N_L^k}, t \in (t_k, T) \mid \left(\int_{\Gamma_2} m_{l_k}^k q_k d\Gamma_2 \right) (t) > 0\}, k = \overline{1, N_k}.$$

Очевидно, что множества Lt_{zero}^k и Lt_{pos}^k , $k = \overline{1, N_k}$ не пересекаются, а их объединение образует множество всех возможных l_k и t для исследуемой задачи. Поскольку $\int_{\Gamma_2} m_{l_k}^k q_k d\Gamma_2 > 0$ хотя бы для одного источника на всем временном интервале (t_k, T) , то

$$\sum_{l_k=1}^{N_L^k} \int_{t_k}^T \left(\int_{\Gamma_2} m_{l_k}^k q_k d\Gamma_2 \right)^2 dt > 0, k = \overline{1, N_k}.$$

Введем условие:

$$(A) \quad Q_k^0 - \frac{g_{l_k}^{em}(t) \left(\alpha \text{Pr}^2 + \sum_{l_k=1}^{N_L^k} \int_{t_k}^T \left(\int_{\Gamma_2} m_{l_k}^k q_k d\Gamma_2 \right)^2 dt \right)}{\left(\int_{\Gamma_2} m_{l_k}^k q_k d\Gamma_2 \right) (t)} \leq Q_k^{att}, \quad (l_k, t) \in Lt_{pos}^k, \quad k = \overline{1, N_k}.$$

Справедлива следующая

Теорема 4. *Ограничение вида*

$$(B) \quad |\eta_{l_k}(t)| \leq g_{l_k}^{em}(t), \quad \forall l_k = \overline{1, N_L^k}, \quad \forall t \in (t_k, T), \quad k = \overline{1, N_k}$$

имеет место тогда и только тогда, когда выполнено ограничение (A).

Доказательство этой теоремы приведено в Приложении. \square

Поскольку в данной задаче Q_k^{att} — «достижимый» экономический ущерб от k -й группы локальных источников, то есть число, а не функция, то на практике на Q_k^{att} , $k = \overline{1, N_k}$, будем налагать условие вида

$$(B) \quad Q_k^0 - \min_{l_k, t} \left(\frac{g_{l_k}^{em}(t)}{\left(\int_{\Gamma_2} m_{l_k}^k q_k d\Gamma_2 \right) (t)} \right) \left(\alpha \text{Pr}^2 + \sum_{l_k=1}^{N_L^k} \int_{t_k}^T \left(\int_{\Gamma_2} m_{l_k}^k q_k d\Gamma_2 \right)^2 dt \right) \leq Q_k^{att}.$$

Отмечаем, что выполнение данного условия является достаточным для выполнения условия (A). Поэтому при его введении сформулированная Теорема 4 остается справедливой.

Заменяя нестрогое неравенство в условии (B) равенством, получаем формулу для вычисления ущерба от N_L^k источников, возникших в момент времени t_k , до

которого возможно уменьшить ущерб Q_k , управляя по закономерностям (80):

$$Q_k^{att} = Q_k^0 - \min_{l_k, t} \left(\frac{g_{l_k}^{em}(t)}{\left(\int_{\Gamma_2} m_{l_k}^k q_k d\Gamma_2 \right) (t)} \right) \cdot \left(\alpha \text{Pr}^2 + \sum_{l_k=1}^{N_L^k} \int_{t_k}^T \left(\int_{\Gamma_2} m_{l_k}^k q_k d\Gamma_2 \right)^2 dt \right). \quad (81)$$

Оценка ущерба по такой формуле в силу сформулированной выше теоремы гарантирует выполнение неравенства ($k = \overline{1, N_k}$)

$$\eta_k(t) + g_{l_k}^{em}(t) \geq 0 \text{ при } t \in (t_k, T), l_k = \overline{1, N_L^k},$$

что обеспечивает «физичность» (неотрицательность) решений ϕ_k в дискретном случае при использовании монотонной разностной схемы для дискретизации (60)-(64) с известными «управлениями» (см., например, [73]). Подробно схема дискретизации будет обсуждаться в главе 4. В дальнейшем, в качестве Q_k^{att} мы будем рассматривать (81).

Как отмечалось выше, все N_k задач независимы между собой, поэтому для оценки ущерба на всем временном интервале (t_1, T) (t_1 — время старта первой группы локальных источников) от всех источников достаточно сложить ущербы от всех групп источников, возникших в один и тот же момент времени, то есть

$$Q = \sum_{k=1}^{N_k} Q_k, \quad Q^{att} = \sum_{k=1}^{N_k} Q_k^{att}.$$

Имеет место следующая

Теорема 5. На «управлениях», вычисляемых по формуле (80), выполняется

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} J_\alpha = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha \text{Pr}^2}{2} \sum_{k=1}^{N_k} \sum_{l_k=1}^{N_L^k} \int_{t_k}^T \eta_{l_k}^2(t) dt + \frac{1}{2} (Q - Q^{att})^2 \right) = 0.$$

Доказательство. Распишем выражение в скобках во втором слагаемом функционала J_α с учетом (79), (80):

$$\begin{aligned}
Q - Q^{att} &= \sum_{k=1}^{N_k} (Q_k - Q_k^{att}) = \sum_{k=1}^{N_k} \left(\sum_{l_k=1}^{N_L^k} (m_{l_k}^k \eta_{l_k}, q_k)_{L_2(\Gamma_2 \times (t_k, T))} - \overline{Q}_k^{att} \right) = \\
&= \sum_{k=1}^{N_k} \left(\frac{\overline{Q}_k^{att} \sum_{l_k=1}^{N_L^k} \int_{t_k}^T \left(\int_{\Gamma_2} m_{l_k}^k q_k d\Gamma_2 \right)^2 dt}{\alpha \text{Pr}^2 + \sum_{l_k=1}^{N_L^k} \int_{t_k}^T \left(\int_{\Gamma_2} m_{l_k}^k q_k d\Gamma_2 \right)^2 dt} - \overline{Q}_k^{att} \right) = \\
&= \sum_{k=1}^{N_k} \left(\frac{\alpha \text{Pr}^2 \overline{Q}_k^{att}}{\alpha \text{Pr}^2 + \sum_{l_k=1}^{N_L^k} \int_{t_k}^T \left(\int_{\Gamma_2} m_{l_k}^k q_k d\Gamma_2 \right)^2 dt} \right).
\end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в функционал, убеждаемся, что $\lim_{\alpha \rightarrow 0} J_\alpha = 0$.

□

Итак, алгоритм решения каждой k -й задачи вида (68) состоит в следующем:

- решаем «вспомогательную» сопряженную задачу (77), находим q_k ;
- оцениваем ущерб Q_k^{att} от группы источников, возникших в момент времени t_k , до которого можно уменьшить ущерб Q_k , по формуле (81);
- вычисляем «управления» η_{l_k} , $l_k = \overline{1, N_L^k}$ по формуле (80);
- решаем задачу (60)-(64) с известными «управлениями».

После решения всех N_k независимых задач вычисляем Q_k по формуле (66), а затем суммарный «достижимый» ущерб Q^{att} и ущерб Q , который получился после «управлений» всеми источниками на интервале (t_1, T) и сравниваем их.

В силу Теоремы 5 значения Q и Q^{att} будут близки на практике при малых параметрах α (что иллюстрируется численными экспериментами, приведенными в главе 5).

Замечание 4. Решение задачи оптимизации экономического ущерба с разбиением на подзадачи по группам локальных источников, стартующих в один момент времени, выгоднее, чем решение аналогичной задачи без разбиения, по нескольким причинам. Мы заранее не знаем, в какие моменты времени стартуют локальные источники, поэтому мы не можем сказать, в какие моменты времени следует начать их устранение. Отсюда следует, что правая часть уравнения (57) трудно реализуется при построении численной модели, а вот правую часть уравнения (62) легко реализовать на практике (загрязнение региона локальными источниками и «управление» ими начинаются одновременно). Также отметим, что описанный выше алгоритм решения задачи с разбиением может быть положен в основу решения задачи управления риском загрязнений «охраняемого региона», т.к. вычисляются ущербы Q_k , $k = \overline{1, N_k}$, которые нанесли бы группы источников загрязнений, стартовавших в различные моменты времени (в отличие от алгоритма решения задачи без разбиения, где вычислялся бы лишь один ущерб от всех локальных источников). \square

§ 3.3. Алгоритмы решения задачи оптимизации экономического ущерба от загрязнения окружающей среды с учетом ресурсов на устранение локальных источников

В этом параграфе приводятся алгоритмы решения задачи оптимизации (75) с учетом ресурсов, выделенных на устранение источников загрязнений. Опишем сначала одношаговый метод решения задачи.

Вводим «вспомогательную» сопряженную задачу (28), а также ее обоб-

ценную постановку (29), для которой справедлива теорема существования и единственности решения $q \in \hat{W}_2^1(\Omega \times (0, T))$. По-прежнему считаем, что $q \geq 0$, $\forall t \in (0, T)$, и $\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 > 0$ хотя бы для одного источника на всем временном интервале $(0, T)$.

Далее, используя (29) и (24), выписываем соотношения сопряженности для Q :

$$Q = - \int_0^T \int_{\Omega} \phi \frac{\partial q}{\partial t} d\Omega dt - \sum_{i=1}^3 \int_0^T \int_{\Omega} u_i \phi \frac{\partial q}{\partial x_i} d\Omega dt + \sum_{i=1}^3 \int_0^T \int_{\Gamma/\Gamma_2} U_n^{(+)} \phi q d\Gamma dt + \\ + \sum_{i=1}^3 \int_0^T \int_{\Omega} a_{ii} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial q}{\partial x_i} d\Omega dt + \int_0^T \int_{\Gamma_2} \beta \phi q d\Gamma_2 dt = \left(\sum_{l=1}^{N_L} m_l (\eta_l + g_l^{em}), q \right)_{L_2(\Gamma_2 \times (0, T))} .$$

Полагая в последних равенствах $\phi = \phi_0$ (то есть $\eta_l = 0$, $l = \overline{1, N_L}$), получаем аналогичные соотношения для Q_0 :

$$Q_0 = - \int_0^T \int_{\Omega} \phi_0 \frac{\partial q}{\partial t} d\Omega dt - \sum_{i=1}^3 \int_0^T \int_{\Omega} u_i \phi_0 \frac{\partial q}{\partial x_i} d\Omega dt + \sum_{i=1}^3 \int_0^T \int_{\Gamma/\Gamma_2} U_n^{(+)} \phi_0 q d\Gamma dt + \\ + \sum_{i=1}^3 \int_0^T \int_{\Omega} a_{ii} \frac{\partial \phi_0}{\partial x_i} \frac{\partial q}{\partial x_i} d\Omega dt + \int_0^T \int_{\Gamma_2} \beta \phi_0 q d\Gamma_2 dt = \left(\sum_{l=1}^{N_L} m_l g_l^{em}, q \right)_{L_2(\Gamma_2 \times (0, T))} .$$

Подставляем полученные выражения для Q и Q_0 в функционал (76) и получаем его «двойственное» представление:

$$J_{\alpha}(\phi, \vec{\eta}) = \frac{\alpha \text{Pr}^2}{2} \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \eta_l^2(t) dt + \frac{1}{2} \left(\sum_{l=1}^{N_L} (m_l \eta_l, q)_{L_2(\Gamma_2 \times (0, T))} + \delta Q \right)^2 + \\ + \frac{1}{2} \left(\text{Pr} \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \eta_l(t) dt + Res_{av} \right)^2 . \quad (82)$$

Далее поступаем следующим образом. Вместо того, чтобы как и ранее, варьи-

ровать (82), вычисляем первую вариацию «вспомогательного» функционала

$$J_{\alpha}^{NoRes}(\phi, \vec{\eta}) = \frac{\alpha \text{Pr}^2}{2} \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \eta_l^2(t) dt + \frac{1}{2} \left(\sum_{l=1}^{N_L} (m_l \eta_l, q)_{L_2(\Gamma_2 \times (0, T))} + \delta Q \right)^2 \quad (83)$$

и используя тот факт, что первая вариация равна нулю, а также делая вычисления аналогичные тем, что приведены в Алгоритме 1 главы 1, получаем формулу для вычисления «управлений» в аналитическом виде:

$$\eta_l(t) = - \frac{\delta Q \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t)}{\alpha \text{Pr}^2 + \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)^2 dt} \text{ при } t \in (0, T), l = \overline{1, N_L}. \quad (84)$$

Поскольку функционал (83) — квадратичный и его первая вариация равна нулю на «управлениях» (84), то эти «управления» доставляют функционалу (83) глобальный минимум:

$$J_{\alpha}^{NoRes}(\phi, \vec{\eta}) = \frac{\alpha \text{Pr}^2 \delta Q^2}{2 \left(\alpha \text{Pr}^2 + \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)^2 dt \right)}. \quad (85)$$

Из последнего равенства и предположения, что $\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 > 0$ хотя бы для одного l на всем временном интервале $(0, T)$ следует, что $\lim_{\alpha \rightarrow 0} J_{\alpha}^{NoRes} = 0$. Отсюда следует, что при параметрах регуляризации, близких к нулю, значения величин Q и $Q_0 - \delta Q$ будут близки на практике.

В силу того, что выше предполагалось $\delta Q \geq 0$, «управления» не могут принимать положительные значения ни в один из моментов времени ни для одного источника (что видно из формулы (84)). Поэтому как и при построении алгоритмов решения предыдущих задач, вводим ограничения на «управления»

с помощью теоремы, приведенной ниже (в доказательстве которой Lt_{zero} и Lt_{pos} — множества из главы 2 настоящей работы).

Теорема 6. Введем условие:

$$(A) \quad \delta Q \leq \frac{g_l^{em}(t) \left(\alpha \text{Pr}^2 + \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)^2 dt \right)}{\left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t)}, \quad (l, t) \in Lt_{pos}.$$

Ограничение вида

$$(B) \quad |\eta_l(t)| \leq g_l^{em}(t), \quad \forall l = \overline{1, N_L}, \quad \forall t \in (0, T)$$

имеет место тогда и только тогда, когда выполнено условие (A).

Доказательство этой теоремы см. в Приложении. \square

Поскольку в данной работе δQ — уменьшение первоначального экономического ущерба (число), то в практических расчетах на δQ можно налагать условие вида

$$(B) \quad \delta Q \leq \min_{l,t} \left(\frac{g_l^{em}(t)}{\left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t)} \right) \left(\alpha \text{Pr}^2 + \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)^2 dt \right).$$

Отмечаем, что выполнение данного условия является достаточным для выполнения условия (A), при его введении сформулированная теорема остается справедливой.

Заменяя нестрогое неравенство в условии (B) равенством, получаем формулу для вычисления уменьшения первоначально ущерба от N_L источников:

$$\delta Q = \min_{l,t} \left(\frac{g_l^{em}(t)}{\left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t)} \right) \left(\alpha \text{Pr}^2 + \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)^2 dt \right). \quad (86)$$

Оценка уменьшения ущерба по такой формуле в силу Теоремы 6 гарантирует выполнение неравенства

$$\eta_l(t) + g_l^{em}(t) \geq 0 \text{ при } t \in (0, T), l = \overline{1, N_L}. \quad (87)$$

Далее необходимо учесть в алгоритме количество ресурсов Res_{av} , выделенное на ликвидацию локальных источников. Для этого обозначим Res — количество ресурсов, необходимое для уменьшения первоначального ущерба Q_0 на величину δQ и будем вычислять его по формуле:

$$Res = -Pr \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \eta_l(t) dt = \frac{Pr \delta Q \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 dt}{\alpha Pr^2 + \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)^2 dt}. \quad (88)$$

Подставляя выражение для δQ из (86) в (88), получаем:

$$Res = \min_{l,t} \left(\frac{g_l^{em}(t)}{\left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)(t)} \right) Pr \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 dt. \quad (89)$$

Далее рассмотрим два варианта: либо $Res_{av} \leq Res$, либо $Res < Res_{av} \leq Res_{max}$, где Res_{max} — максимальное количество ресурсов, которое возможно (и более которого не нужно) использовать, сохраняя при этом «физичность» решения задачи. Под «физичностью» в описании Res_{max} понимается такое количество ресурсов, которое возможно использовать, чтобы устранить все локальные источники во все моменты времени до нулевого значения (то есть $\eta_l(t) = -g_l^{em}(t)$ при $l = \overline{1, N_L}, \forall t$), не нарушая при этом неравенство (87). Использование большего количества ресурсов не имеет смысла, поскольку оно нарушит «физичность» решения, так как для какого-то \tilde{l} в некоторый момент времени \tilde{t} будет $\eta_{\tilde{l}}(\tilde{t}) + g_{\tilde{l}}^{em}(\tilde{t}) < 0$. Формула, по которой вычисляется Res_{max} , приведена при

обсуждении результатов численного моделирования в главе 5.

Рассмотрим сначала случай $Res_{av} \leq Res$ и сформулируем одношаговый алгоритм решения исследуемой задачи. Поскольку $Res_{av} \leq Res$, а также Res и δQ связаны соотношением (88) и Res определяется по формуле (89), то если вычислять уменьшение δQ первоначального ущерба Q_0 по формуле

$$\delta Q_{av} = \frac{Res_{av} \left(\alpha Pr^2 + \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)^2 dt \right)}{Pr \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 dt}, \quad (90)$$

то условие (B) (а значит и Теорема 6) будет заведомо выполнено, при этом будут израсходованы все ресурсы Res_{av} . Также отметим, что «управления», вычисляемые по формуле (84), в которой $\delta Q = \delta Q_{av}$, доставляют квадратичному функционалу (82) (который минимизируется в решаемой задаче оптимизации (75)) глобальный минимум, поскольку на таких управлениях первая вариация этого функционала равна нулю. Обращаем внимание, что значение глобального минимума определяется по формуле (85), то есть такие «управления» обращают в нуль третье слагаемое (82). Поэтому сразу формулируем одношаговый алгоритм решения задачи вида (75) с учетом ресурсов, имеющихся на устранение локальных источников. Он состоит в следующем:

- решаем задачу (18)-(21) при $\eta_l = 0$, $l = \overline{1, N_L}$, находим ϕ_0 ;
- решаем «вспомогательную» сопряженную задачу (28), находим q ;
- находим уменьшение δQ первоначального ущерба из соотношения (90), а также первоначальный ущерб Q_0 по формуле (73);
- вычисляем «управления» η_l , $l = \overline{1, N_L}$ по формуле (84);
- решаем задачу (18)-(21) с известными «управлениями», находим ϕ ;

- вычисляем ущерб Q , которого удалось достичь в результате управлений, по формуле (72) и сравниваем с $Q_0 - \delta Q$.

Одношаговый алгоритм не применим для случая $\text{Res} < \text{Res}_{av} \leq \text{Res}_{max}$, поскольку тогда остается неиспользованным количество ресурсов $\text{Res}_{av} - \text{Res}$, а если бы оно было использовано, то первоначальный ущерб Q_0 был бы уменьшен значительно. Поэтому далее приведем многошаговый алгоритм решения задачи вида (75), который применим при $\text{Res} < \text{Res}_{av} \leq \text{Res}_{max}$. Отметим, что случай $\text{Res}_{av} > \text{Res}_{max}$ не имеет смысла рассматривать, поскольку невозможно удалить больше загрязняющего вещества, чем может распространиться из всех локальных источников, а Res_{max} — максимальное количество ресурсов, которое возможно использовать, не нарушая при этом соотношение (87) ни для одного источника.

Многошаговый алгоритм основан на многократном вычислении и уточнении «управлений», однако метод реализуется в «полудискретном» случае, когда временной интервал $(0, T)$ дискретизован и число моментов времени — конечное, а область Ω , в которой рассматривается задача, не обязательно дискретизована (в отличие от одношагового алгоритма, для реализации которого не требуется дискретизации временного интервала). Несмотря на то, что алгоритм не построен для непрерывного по времени случая, он реализуем на практике, поскольку в численных экспериментах происходит дискретизация области и временного интервала.

Пусть временной интервал $(0, T)$, на котором рассматривается задача, дискретизован, N_t — число узлов равномерной сетки, $h_t = \frac{T}{N_t}$ — шаг равномерной сетки. Пусть также некоторая функция $f(t)$ — кусочно постоянная, интегрируемая, $f(t) = f(t_i)$, $t_{i-1} < t \leq t_i$, $i = \overline{1, N_t}$. Тогда интеграл по времени от функции $f(t)$ можно заменить следующим образом:

$$\int_0^T f(t) dt = \sum_{i=1}^{N_t} f(t_i) h_t. \quad (91)$$

В дальнейшем будет подразумеваться, что для $\int_0^T f(t)dt$ выполняется соотношение (91).

Обозначим $\tilde{\eta}_l^0(t_i)$ — «управление» l -м источником в момент t_i на нулевом шаге алгоритма, $\tilde{\eta}_l^1(t_i)$ — «управление» на первом шаге алгоритма, $\tilde{\eta}_l^p(t_i)$ — «управление» на p -м шаге алгоритма. Тогда $g_{l,1}^{em}(t_i) = g_{l,0}^{em}(t_i) + \tilde{\eta}_l^0(t_i)$ — коэффициент эмиссии с учетом управлений на первом шаге алгоритма ($g_{l,0}^{em}(t_i) \equiv g^{em}$), $g_{l,p}^{em}(t_i) = g_{l,p-1}^{em}(t_i) + \tilde{\eta}_l^{p-1}(t_i)$ — коэффициент эмиссии с учетом управлений на p -м шаге. Пусть M_{lt}^0 — множество всех пар (l, t_i) , $l = \overline{1, N_L}$, $i = \overline{1, N_t}$. Тогда

$$\begin{aligned} M_{lt}^1 &= \{(l, t_i) \in M_{lt}^0 : g_{l,1}^{em}(t_i) > 0\}, \\ &\dots, \\ M_{lt}^p &= \{(l, t_i) \in M_{lt}^{p-1} : g_{l,p}^{em}(t_i) > 0\}, \\ &\dots, \\ M_{lt}^{N_p} &= \{(l, t_i) \in M_{lt}^{N_p-1} : g_{l,N_p}^{em}(t_i) > 0\}, \end{aligned}$$

где N_p — последний шаг алгоритма. В дальнейшем будет показано, что

$$M_{lt}^0 \supset M_{lt}^1 \dots \supset M_{lt}^p \dots \supset M_{lt}^{N_p}$$

и число шагов алгоритма всегда конечно.

Введем p -ю задачу оптимизации экономического ущерба: найти $\phi_{p+1} \equiv \phi_{p+1}(\alpha)$, $\tilde{\eta}_l^p(t_i) \equiv \tilde{\eta}_l^p(t_i, \alpha)$, $(l, t_i) \in M_{lt}^p$ такие, что:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_{p+1}}{\partial t} + u \frac{\partial \phi_{p+1}}{\partial x} + v \frac{\partial \phi_{p+1}}{\partial y} + w \frac{\partial \phi_{p+1}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a_{xx} \frac{\partial \phi_{p+1}}{\partial x} \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left(a_{yy} \frac{\partial \phi_{p+1}}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(a_{zz} \frac{\partial \phi_{p+1}}{\partial z} \right) = 0 \text{ в } \Omega \times (0, T), \end{aligned} \quad (92)$$

$$U_n^{(-)} \phi_{p+1} + \frac{\partial \phi_{p+1}}{\partial N} = 0 \text{ на } (\Gamma/\Gamma_2) \times (0, T), \quad (93)$$

$$\beta \phi_{p+1} - a_{zz} \frac{\partial \phi_{p+1}}{\partial z} = \sum_{l=1}^{N_L} m_l(x, y) (\tilde{\eta}_l^p(t_i) + g_{l,p}^{em}(t_i)) \text{ на } \Gamma_2, \quad i = \overline{1, N_t}, \quad (94)$$

$$\phi_{p+1} = 0 \text{ при } t = 0 \text{ в } \Omega, \quad (95)$$

$$J_\alpha(\phi_{p+1}, \vec{\eta}^p) \rightarrow \inf_{\vec{\eta}^p}, \quad (96)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_{p+1}}{\partial t} &= \frac{\phi_{p+1}^i - \phi_{p+1}^{i-1}}{h_t}, \quad i = \overline{1, N_t}, \\ J_\alpha(\phi_{p+1}, \vec{\eta}^p) &= \frac{\alpha \text{Pr}^2}{2} \sum_{\substack{l=1 \\ (l, t_i) \in M_{lt}^p}}^{N_L} \sum_{i=1}^{N_t} (\tilde{\eta}_l^p(t_i))^2 h_t + \frac{1}{2} (Q_{p+1} + \delta Q_p - Q_p)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\text{Pr} \sum_{\substack{l=1 \\ (l, t_i) \in M_{lt}^p}}^{N_L} \sum_{i=1}^{N_t} \tilde{\eta}_l^p(t_i) h_t + Res_p \right)^2, \end{aligned} \quad (97)$$

$$\vec{\eta}^p \equiv \tilde{\eta}^p(t_i) \equiv (\tilde{\eta}_1^p(t_i), \dots, \tilde{\eta}_l^p(t_i), \dots, \tilde{\eta}_{N_L}^p(t_i)), \quad (l, t_i) \in M_{lt}^p,$$

ϕ_{p+1}^i — решение p -й задачи (26)-(30) на i -м шаге по времени, Q_p — первоначальный ущерб на p -м шаге, Q_{p+1} — ущерб после управлений на p -м шаге, δQ_p — уменьшение первоначального ущерба на p -м шаге, Res_p — количество ресурсов, используемое на p -м шаге. Приведем также формулы вычисления Res_p , δQ_p и $\tilde{\eta}_l^p(t_i)$ соответственно, которые будут использованы в ходе построения метода решения ($p = \overline{0, N_p}$):

$$Res_p = \text{Pr} \sum_{\substack{l=1 \\ (l, t_i) \in M_{lt}^p}}^{N_L} \sum_{i=1}^{N_t} \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t_i) h_t \min_{(l, t_i) \in M_{lt}^p} \left(\frac{g_{l,p}^{em}(t_i)}{\left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t_i)} \right), \quad (98)$$

$$\delta Q_p = \frac{Res_p \left(\alpha \text{Pr}^2 + \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t_i) \in M_{lt}^p}}^{N_L} \sum_{i=1}^{N_t} \left(\left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t_i) \right)^2 h_t \right)}{\text{Pr} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t_i) \in M_{lt}^p}}^{N_L} \sum_{i=1}^{N_t} \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t_i) h_t}, \quad (99)$$

$$\tilde{\eta}_l^p(t_i) = - \frac{\delta Q_p \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t_i)}{\alpha \text{Pr}^2 + \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t_i) \in M_{lt}^p}}^{N_L} \sum_{i=1}^{N_t} \left(\left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t_i) \right)^2 h_t}, \quad (l, t_i) \in M_{lt}^p. \quad (100)$$

Также введем соотношение «физичности», которое должно выполняться на каждом шаге алгоритма (по аналогии с (87)):

$$\tilde{\eta}_l^p(t_i) + g_{l,p}^{em}(t_i) \geq 0, \quad (l, t_i) \in M_{lt}^p, \quad p = \overline{0, N_p}. \quad (101)$$

Таким образом, вместо исходной задачи (75) будут рассматриваться N_p задач вида (92)-(96) с функционалами (97). Тем не менее, физическая суть остается той же: пошагово оптимизировать первоначальный ущерб Q_0 до конечного ущерба Q_{N_p+1} , используя при этом все имеющиеся в наличии ресурсы Res_{av} .

В начале решаем «вспомогательную» сопряженную задачу (28), находим ее решение q , а также задачу (18)-(21) при $\eta_l = 0$, $l = \overline{1, N_L}$, находим ϕ_0 . Кроме того, вычисляем первоначальный ущерб Q_0 из соотношения (73). Далее будем пошагово формулировать алгоритм решения.

Нулевой шаг. На данном шаге решается 0-я задача оптимизации экономического ущерба (92)-(96) при $p = 0$. Все ссылки на формулы (92)-(101) даются на этом шаге для $p = 0$. Поставленную задачу решаем поэтапно. Сначала вычисляем количество ресурсов Res_0 , которое может быть использовано, по формуле (98). Случай $Res_0 \geq Res_{av}$ рассмотрен в одношаговом алгоритме. Здесь

предполагается, что $Res_0 < Res_{av}$, поэтому на нулевом шаге используем количество ресурсов, вычисленное по формуле (98). Далее рассчитываем уменьшение δQ_0 первоначального ущерба Q_0 на нулевом шаге из соотношения (99). По аналогии с тем, как это было показано в одношаговом алгоритме, здесь можно показать, что при выполнении (99) будет справедливо (101), что обеспечит «физичность» решений задачи (92)-(96). Следующий этап данного шага — вычисление «управлений» по формуле (100). Наконец, решаем задачу (92)-(95) с известными «управлениями», находим ϕ_1 . Полагая $\phi \equiv \phi_1$ в формуле (72), вычисляем ущерб Q_1 и сравниваем его с величиной $Q_0 - \delta Q_0$. По аналогии с тем, как было показано ранее, можно доказать, что $\lim_{\alpha \rightarrow 0} J_\alpha(\phi_1, \tilde{\eta}^0) = 0$. Выполнение последнего соотношения гарантирует, что Q_1 и $Q_0 - \delta Q_0$ будут близки на практике по значению.

Первый шаг. Сначала вычисляем $g_{l,1}^{em}(t_i)$ и строим множество M_{lt}^1 . Покажем, что $M_{lt}^1 \subset M_{lt}^0$. Пусть

$$\left(\frac{g_{\tilde{l},0}^{em}(\tilde{t}_i)}{\left(\int_{\Gamma_2} m_{\tilde{l}} q d\Gamma_2 \right) (\tilde{t}_i)} \right) = \min_{(l,t_i) \in M_{lt}^0} \left(\frac{g_{l,0}^{em}(t_i)}{\left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t_i)} \right).$$

Тогда из соотношений (98)-(100) при $p = 0$ получаем, что $\tilde{\eta}_{\tilde{l}}^0(\tilde{t}_i) = -g^{em}$, поэтому $g_{\tilde{l},1}^{em}(\tilde{t}_i) = 0$, следовательно $(\tilde{l}, \tilde{t}_i) \notin M_{lt}^1$, но $(\tilde{l}, \tilde{t}_i) \in M_{lt}^0$. Итак, $M_{lt}^1 \subset M_{lt}^0$. Также важно подчеркнуть, что на каждом шаге из рассмотрения исключается хотя бы по одному локальному источнику на одном временном интервале, поэтому число шагов описываемого здесь алгоритма будет конечным даже при наличии достаточно большого количества ресурсов, имеющегося в наличии для решения задачи оптимизации экономического ущерба.

На первом шаге решается 1-я задача оптимизации экономического ущерба (92)-(96) при $p = 1$. Метод ее решения практически дословно повторяет алгоритм решения 0-й задачи оптимизации (только на данном шаге ссылки на (92)-(101) даются при $p = 1$). Сначала вычисляем количество ресурсов, которое мо-

жет быть использовано для решения (92)-(96) по формуле (98). Отмечаем, что суммирование, как и поиск минимума в (98) происходит только по $(l, t_i) \in M_{lt}^1$. Если $Res_1 + Res_0 \geq Res_{av}$, то полагаем $Res_1 = Res_{av} - Res_0$ и решаем задачу с этим количеством ресурсов. Заметим, что в таком случае первый шаг алгоритма будет последним. Если же оказывается, что $Res_1 + Res_0 < Res_{av}$, то на первом шаге используем количество ресурсов, вычисленное по формуле (98), а первый шаг алгоритма не будет последним.

Затем рассчитываем уменьшение δQ_1 первоначального ущерба Q_1 на первом шаге, используя (99), которая гарантирует выполнение соотношения «физичности» (101). Первоначальный ущерб Q_1 — это ущерб после управлений на нулевом шаге алгоритма, он известен. Следующий этап данного шага — вычисление «управлений» из соотношения (100). Наконец, решаем задачу (92)-(95) с известными «управлениями», находим ϕ_2 . По формуле (72) (при $\phi \equiv \phi_2$), вычисляем ущерб Q_2 и сравниваем его с величиной $Q_1 - \delta Q_1$. На практике эти две величины должны быть близки, поскольку $\lim_{\alpha \rightarrow 0} J_\alpha(\phi_2, \vec{\eta}^1) = 0$ (по аналогии с доказанным ранее).

N_p -й шаг. Как и на предыдущих N_p шагах вычисляем $g_{l, N_p}^{em}(t_i)$, строим множество $M_{lt}^{N_p}$. Пусть нами доказано, что $M_{lt}^{N_p-1}$ вложено во все построенные ранее множества M_{lt}^p , $p = \overline{0, N_p - 2}$. Покажем, что $M_{lt}^{N_p} \subset M_{lt}^{N_p-1}$. Пусть

$$\left(\frac{g_{\hat{l}, N_p-1}^{em}(\hat{t}_i)}{\left(\int_{\Gamma_2} m_{\hat{l}} q d\Gamma_2 \right)(\hat{t}_i)} \right) = \min_{(l, t_i) \in M_{lt}^{N_p-1}} \left(\frac{g_{l, N_p-1}^{em}(t_i)}{\left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)(t_i)} \right).$$

Тогда из (98)-(100) при $p = N_p - 1$, получаем, что $\tilde{\eta}_{\hat{l}}^{N_p-1}(\hat{t}_i) = -g_{\hat{l}, N_p-1}^{em}(\hat{t}_i)$, поэтому $g_{\hat{l}, N_p}^{em}(\hat{t}_i) = 0$, следовательно $(\hat{l}, \hat{t}_i) \notin M_{lt}^{N_p}$, но $(\hat{l}, \hat{t}_i) \in M_{lt}^{N_p-1}$. Итак, $M_{lt}^{N_p} \subset M_{lt}^{N_p-1}$.

На данном шаге решается N_p -я задача вида (92)-(96) при $p = N_p$, ссылки на (92)-(101) даются при $p = N_p$. Для ее решения сначала вычисляем макси-

мальное количество ресурсов, которое может быть использовано для решения задачи, по формуле (98). Поскольку ранее предполагалось, что N_p -й шаг алгоритма — последний, то $\sum_{p=0}^{N_p} Res_p \geq Res_{av}$ и количество ресурсов, необходимое для решения задачи на N_p -м шаге находим из уравнения:

$$Res_{N_p} = Res_{av} - \sum_{p=0}^{N_p-1} Res_p. \quad (102)$$

Если бы использовалось количество ресурсов, полученное из соотношения (98), то мог бы быть перерасход ресурсов Res_{av} , имеющихся в наличии, что недопустимо.

На следующем этапе рассчитываем уменьшение δQ_{N_p} первоначального ущерба Q_{N_p} из (99) (при этом используется Res_{N_p} , вычисленное по формуле (102), которое меньше максимального числа ресурсов, которое может быть использовано на данном шаге для выполнения (101), поэтому расчет δQ_{N_p} по (99) и в данном случае обеспечивает справедливость (101)). Первоначальный ущерб Q_{N_p} является ущербом после управлений на $(N_p - 1)$ -м шаге алгоритма, он известен. Далее вычисляем «управления» по формуле (100). Наконец, решаем задачу (92)-(95) с известными «управлениями», находим ϕ_{N_p+1} , вычисляем ущерб Q_{N_p+1} и сравниваем его с величиной $Q_{N_p} - \delta Q_{N_p}$. На практике эти две величины должны быть близки, поскольку как и на всех предыдущих шагах $\lim_{\alpha \rightarrow 0} J_\alpha(\phi_{N_p+1}, \vec{\eta}^{N_p}) = 0$.

Итак, многошаговый алгоритм решения задачи оптимизации экономического ущерба с учетом ресурсов на устранение источников загрязнений состоит в многократных вычислениях «управлений» $\tilde{\eta}_i^p(t_i)$, $p = \overline{0, N_p}$ и многократных решениях задач вида (92)-(95), он позволяет уменьшить первоначальный ущерб Q_0 до значения Q_{N_p+1} за конечное число шагов, использовав при этом все выделенные ресурсы Res_{av} . Самый затратный в вычислительном плане этап на каждом шаге — решение задач вида (92)-(95) с известными «управлениями».

Отметим, что максимально $N_p = N_t \cdot N_L - 1$ (если на каждом шаге исключается лишь по одному источнику на одном временном отрезке), поэтому алгоритм, сформулированный выше, может оказаться трудно применимым на практике при $N_p \gg 1$. Обсудим далее модификацию многошагового алгоритма, в которой решаются не множество задач (92)-(95), $p = \overline{0, N_p}$, а один раз решается система уравнений, аналогичная (18)-(21). Эта модификация может оказаться полезной при численных расчетах.

Отметим, что после проведения численных расчетов нас, как правило, интересует конечный ущерб Q , до которого был уменьшен первоначальный ущерб Q_0 . В терминах алгоритма, сформулированного ранее, $Q \equiv Q_{N_p+1}$, а Q_0 вычисляется по формуле (73). Далее, «управления» локальными источниками будем вычислять из соотношения:

$$\eta_l(t_i) = \sum_{p=0}^{N_p} \tilde{\eta}_l^p(t_i), \quad l = \overline{1, N_L}, \quad i = \overline{1, N_t}, \quad (103)$$

уменьшение первоначального ущерба вычисляется по формуле:

$$\delta Q = \sum_{p=0}^{N_p} \delta Q_p. \quad (104)$$

Для расчета δQ_p и $\tilde{\eta}_l^p(t_i)$, $p = \overline{0, N_p}$ используются соотношения (99) и (100) соответственно. Из формулы (102) делаем вывод, что

$$Res_{av} = \sum_{p=0}^{N_p} Res_p.$$

Далее введем следующий функционал:

$$J_\alpha(\phi, \vec{\eta}) = \frac{\alpha \text{Pr}^2}{2} \sum_{l=1}^{N_L} \sum_{i=1}^{N_t} \eta_l^2(t_i) h_t + \frac{1}{2} (Q + \delta Q - Q_0)^2 + \frac{1}{2} \left(\text{Pr} \sum_{l=1}^{N_L} \sum_{i=1}^{N_t} \eta_l(t_i) h_t + Res_{av} \right)^2, \quad (105)$$

где

$$\vec{\eta} \equiv \vec{\eta}(t_i) \equiv (\eta_1(t_i), \dots, \eta_l(t_i), \dots, \eta_{N_L}(t_i)) \text{ на } (0, T).$$

Распишем более подробно выражение в скобках во втором слагаемом функционала (105):

$$\begin{aligned} Q + \delta Q - Q_0 &= Q_{N_p+1} + \sum_{p=0}^{N_p} \delta Q_p - Q_0 = \\ &= Q_{N_p+1} \pm \sum_{p=1}^{N_p} Q_p + \sum_{p=0}^{N_p} \delta Q_p - Q_0 = \sum_{p=0}^{N_p} (Q_{p+1} + \delta Q_p - Q_p). \end{aligned}$$

Далее отметим, что

$$\begin{aligned} Q_{p+1} - Q_p &= \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t_i) \in M_{t_i}^p}}^{N_L} \sum_{i=1}^{N_t} \left(\int_{\Gamma_2} m_l \tilde{\eta}_i^p q d\Gamma_2 \right) (t_i) h_t = \\ &= \frac{\delta Q_p \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t_i) \in M_{t_i}^p}}^{N_L} \sum_{i=1}^{N_t} \left(\left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t_i) \right)^2 h_t}{\alpha \text{Pr}^2 + \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t_i) \in M_{t_i}^p}}^{N_L} \sum_{i=1}^{N_t} \left(\left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t_i) \right)^2 h_t}. \end{aligned}$$

Следовательно:

$$\sum_{p=0}^{N_p} (Q_{p+1} + \delta Q_p - Q_p) = \sum_{p=0}^{N_p} \left(\delta Q_p - \frac{\delta Q_p \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t_i) \in M_{t_i}^p}}^{N_L} \sum_{i=1}^{N_t} \left(\left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t_i) \right)^2 h_t}{\alpha \text{Pr}^2 + \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t_i) \in M_{t_i}^p}}^{N_L} \sum_{i=1}^{N_t} \left(\left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t_i) \right)^2 h_t} \right) =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_p} \left(\frac{\alpha \text{Pr}^2 \delta Q_p}{\alpha \text{Pr}^2 + \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t_i) \in M_{lt}^p}}^{N_L} \sum_{i=1}^{N_t} \left(\left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t_i) \right)^2 h_t} \right).$$

Распишем теперь выражение в скобках в третьем слагаемом функционала (105):

$$\begin{aligned} \text{Pr} \sum_{l=1}^{N_L} \sum_{i=1}^{N_t} \eta_l(t_i) h_t + \text{Res}_{av} &= \sum_{p=0}^{N_p} \left(\text{Pr} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t_i) \in M_{lt}^p}}^{N_L} \sum_{i=1}^{N_t} \tilde{\eta}_l^p(t_i) h_t + \text{Res}_p \right) = \\ &= \sum_{p=0}^{N_p} \left(- \frac{\text{Res}_p \text{Pr} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t_i) \in M_{lt}^p}}^{N_L} \sum_{i=1}^{N_t} \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t_i) h_t}{\text{Pr} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t_i) \in M_{lt}^p}}^{N_L} \sum_{i=1}^{N_t} \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t_i) h_t} + \text{Res}_p \right) = 0. \end{aligned}$$

Функционал (105), таким образом, принимает вид:

$$\begin{aligned} J_\alpha(\phi, \vec{\eta}) &= \frac{\alpha \text{Pr}^2}{2} \sum_{l=1}^{N_L} \sum_{i=1}^{N_t} \eta_l^2(t_i) h_t + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\sum_{p=0}^{N_p} \left(\frac{\alpha \text{Pr}^2 \delta Q_p}{\alpha \text{Pr}^2 + \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t_i) \in M_{lt}^p}}^{N_L} \sum_{i=1}^{N_t} \left(\left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t_i) \right)^2 h_t} \right) \right)^2. \end{aligned} \quad (106)$$

Из (106) следует

Теорема 7. В предположении, что $\left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t_i) \neq 0$ хотя бы для одной пары (l, t_i) , выполняется $\lim_{\alpha \rightarrow 0} J_\alpha(\phi, \vec{\eta}) = 0$.

Итак, модификация многошагового алгоритма, которая может оказаться

полезной при численных расчетах, состоит из следующих этапов:

- решаем задачу (18)-(21) при $\eta_l = 0$, $l = \overline{1, N_L}$, находим ϕ_0 ;
- решаем «вспомогательную» сопряженную задачу (28), находим q ;
- вычисляем величины Q_0 , Res_0 , δQ_0 и $\tilde{\eta}_l^0(t_i)$ по формулам (73), (98)-(100) (при $p = 0$) соответственно;
- производим следующий цикл по p , начиная с $p = 1$, вводя при этом величину Res_{sum} (суммарное количество ресурсов за все совершенные шаги цикла), $Res_{sum} = Res_0$:
 (начало описания цикла по p)
 $p_{cur} = p$ (текущий шаг алгоритма),
 вычисляем Res_p из соотношения (98),
 если $Res_{sum} + Res_p \geq Res_{av}$, то $N_p = p$ (последний шаг алгоритма),
 $Res_{N_p} = Res_{av} - Res_{sum}$,
 пересчитываем $Res_{sum} = \sum_{\tilde{p}=0}^p Res_{\tilde{p}}$,
 вычисляем δQ_p , $\tilde{\eta}_l^p(t_i)$ из уравнений (99) и (100) соответственно,
 пересчитываем $p = p_{cur} + 1$ (фактически, увеличиваем p на единицу).
 (конец описания цикла по p)
 Описанный цикл по p проводим до тех пор, пока $Res_{sum} \neq Res_{av}$ (в конце каждого шага цикла проверяем, выполняется ли это неравенство и если оно справедливо, то переходим к следующему шагу), а как только $Res_{sum} = Res_{av}$, завершаем цикл;
- вычисляем «управления» $\eta_l(t_i)$, $l = \overline{1, N_L}$, $i = \overline{1, N_t}$ по формуле (103) и уменьшение δQ первоначального ущерба по формуле (104);
- решаем задачу (18)-(21) с известными «управлениями», находим ϕ ;
- вычисляем ущерб Q , которого удалось достичь в результате управлений,

по формуле (72) и сравниваем с $Q_0 - \delta Q$ (на практике эти величины должны быть близки в силу Теоремы 7).

Замечание 5. Методы решения класса задач оптимального управления о локальных источниках при интегральном наблюдении, приведенные в этой и предыдущей главах, могут быть распространены на случай нескольких интегральных наблюдений (или, нескольких «охраняемых» регионов) как, например, в работах [11, 12]. Кроме того, вышеописанные алгоритмы можно применять для решения задачи оптимизации ущерба в «охраняемой» (экологически значимой) зоне при условии, что ущерб во всем рассматриваемом регионе должен быть равен некоторому заданному значению (или, принадлежать некоторому отрезку). Такая задача обсуждается, например, в [4]. \square

В главе 5 будут приведены результаты реализации предложенного многошагового алгоритма решения задачи оптимизации экономического ущерба, а в следующей главе обсудим подробно схему дискретизации (18)-(21), которая также используется и для численного решения (28).

Глава 4. Схема дискретизации математической модели распространения примеси в регионе

Данная глава диссертации посвящена построению и исследованию схемы дискретизации трехмерной математической модели распространения примеси в регионе. В первом параграфе описан непосредственно процесс построения схем для каждого уравнения системы (18)-(20) с начальным условием (21). Эти же схемы применяются для численного решения «вспомогательной» сопряженной задачи (28). Построение схем проводится таким же методом, как и в монографии [25], с той лишь разницей, что для приближения интегральных тождеств используется квадратурная формула прямоугольников, а не разложение приближенного решения по базисным функциям. Во втором параграфе исследуются свойства построенных схем, в частности доказывается, что полученные схемы являются монотонными (по аналогии с тем, как это проделано в работе [73]), абсолютно устойчивыми и аппроксимируют дифференциальные операторы системы уравнений (18)-(21) (а также (28)) с первым порядком точности по временной и пространственным переменным. Свойство монотонности является важным, поскольку при построении алгоритмов решения всех задач предполагалась неотрицательность решения «вспомогательной» сопряженной задачи, которая обеспечивается монотонностью схемы. В заключительном параграфе демонстрируются результаты тестового численного эксперимента, которые иллюстрируют практическую возможность применения построенной схемы для численного моделирования распространения загрязнений в регионе.

§ 4.1. Построение схемы дискретизации математической модели загрязнения окружающей среды

Для построения схем дискретизации трехмерной математической модели распространения загрязнений введем прямоугольную сетку: по Ox с шагом $h_1 \equiv h_x = \frac{A_2 - A_1}{N_x}$, где $N_x + 1$ — число узлов сетки и $A_1 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N_x-1} < x_{N_x} = A_2$; по Oy с шагом $h_2 \equiv h_y = \frac{B_2 - B_1}{N_y}$, где $N_y + 1$ — число узлов сетки и $B_1 = y_0 < y_1 < \dots < y_{N_y-1} < y_{N_y} = B_2$; по Oz с шагом $h_3 \equiv h_z = \frac{C_2 - C_1}{N_z}$, где $N_z + 1$ — число узлов сетки и $C_1 = z_0 < z_1 < \dots < z_{N_z-1} < z_{N_z} = C_2$. Также введем шаг сетки по временной переменной t : $h_t = \frac{T}{N_t}$, где $N_t + 1$ — число узлов сетки и $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N_t-1} < t_{N_t} = T$. Кроме того, обозначим $\hat{\phi}_{ijk}(x, y, z) = \varphi_i(x)\varphi_j(y)\varphi_k(z)$ — базисные три-линейные функции, где

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h_x}, & x \in (x_{i-1}, x_i), \\ \frac{x_{i+1} - x}{h_x}, & x \in (x_i, x_{i+1}), \\ 0, & x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}), \quad i = \overline{1, N_x - 1}; \end{cases}$$

$$\varphi_j(y) = \begin{cases} \frac{y - y_{j-1}}{h_y}, & y \in (y_{j-1}, y_j), \\ \frac{y_{j+1} - y}{h_y}, & y \in (y_j, y_{j+1}), \\ 0, & y \notin (y_{j-1}, y_{j+1}), \quad j = \overline{1, N_y - 1}; \end{cases}$$

$$\varphi_k(z) = \begin{cases} \frac{z - z_{k-1}}{h_z}, & z \in (z_{k-1}, z_k), \\ \frac{z_{k+1} - z}{h_z}, & z \in (z_k, z_{k+1}), \\ 0, & z \notin (z_{k-1}, z_{k+1}), \quad k = \overline{1, N_z - 1}; \end{cases}$$

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{h_x}, & x \in (x_0, x_1), \\ 0, & x \notin (x_0, x_1); \end{cases} \quad \varphi_0(y) = \begin{cases} \frac{y_1 - y}{h_y}, & y \in (y_0, y_1), \\ 0, & y \notin (y_0, y_1); \end{cases}$$

$$\varphi_0(z) = \begin{cases} \frac{z_1 - z}{h_z}, & z \in (z_0, z_1), \\ 0, & z \notin (z_0, z_1); \end{cases} \quad \varphi_{N_x}(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{N_x-1}}{h_x}, & x \in (x_{N_x-1}, x_{N_x}), \\ 0, & x \notin (x_{N_x-1}, x_{N_x}); \end{cases}$$

$$\varphi_{N_y}(y) = \begin{cases} \frac{y - y_{N_y-1}}{h_y}, & y \in (y_{N_y-1}, y_{N_y}), \\ 0, & y \notin (y_{N_y-1}, y_{N_y}); \end{cases} \quad \varphi_{N_z}(z) = \begin{cases} \frac{z - z_{N_z-1}}{h_z}, & z \in (z_{N_z-1}, z_{N_z}), \\ 0, & z \notin (z_{N_z-1}, z_{N_z}). \end{cases}$$

Умножим обе части (18) в конечномерном пространстве на $\hat{\phi}_{ijk}(x, y, z)$ и проинтегрируем на отрезках $[x_{i-1}, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_{j+1}] \times [z_{k-1}, z_{k+1}]$ при $i = \overline{1, N_x - 1}$, $j = \overline{1, N_y - 1}$, $k = \overline{1, N_z - 1}$:

$$\begin{aligned} & \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \int_{z_{k-1}}^{z_{k+1}} \frac{\partial \phi_h}{\partial t} \hat{\phi}_{ijk} dx dy dz + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \int_{z_{k-1}}^{z_{k+1}} u^{n+1} \frac{\partial \phi_h^{n+1}}{\partial x} \hat{\phi}_{ijk} dx dy dz + \\ & + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \int_{z_{k-1}}^{z_{k+1}} v^{n+1} \frac{\partial \phi_h^{n+1}}{\partial y} \hat{\phi}_{ijk} dx dy dz + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \int_{z_{k-1}}^{z_{k+1}} w^{n+1} \frac{\partial \phi_h^{n+1}}{\partial z} \hat{\phi}_{ijk} dx dy dz - \\ & - \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \int_{z_{k-1}}^{z_{k+1}} \frac{\partial}{\partial x} \left(a_{xx} \frac{\partial \phi_h^{n+1}}{\partial x} \right) \hat{\phi}_{ijk} dx dy dz - \\ & - \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \int_{z_{k-1}}^{z_{k+1}} \frac{\partial}{\partial y} \left(a_{yy} \frac{\partial \phi_h^{n+1}}{\partial y} \right) \hat{\phi}_{ijk} dx dy dz - \\ & - \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \int_{z_{k-1}}^{z_{k+1}} \frac{\partial}{\partial z} \left(a_{zz} \frac{\partial \phi_h^{n+1}}{\partial z} \right) \hat{\phi}_{ijk} dx dy dz = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \int_{z_{k-1}}^{z_{k+1}} f^{n+1} \hat{\phi}_{ijk} dx dy dz, \\ & i = \overline{1, N_x - 1}, \quad j = \overline{1, N_y - 1}, \quad k = \overline{1, N_z - 1}, \quad n = \overline{0, N_t - 1}. \end{aligned} \tag{107}$$

Распишем теперь в явном виде каждое интегральное слагаемое левой части.

Слагаемое с производной по времени преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \int_{z_{k-1}}^{z_{k+1}} \frac{\partial \phi_h}{\partial t} \hat{\phi}_{ijk} dx dy dz &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \frac{\partial \phi_h}{\partial t} \frac{x - x_{i-1}}{h_x} \frac{y - y_{j-1}}{h_y} \frac{z - z_{k-1}}{h_z} dx dy dz + \\ &+ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \frac{\partial \phi_h}{\partial t} \frac{x_{i+1} - x}{h_x} \frac{y - y_{j-1}}{h_y} \frac{z - z_{k-1}}{h_z} dx dy dz + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \frac{\partial \phi_h}{\partial t} \frac{x - x_{i-1}}{h_x} \frac{y_{j+1} - y}{h_y} \frac{z - z_{k-1}}{h_z} dx dy dz + \\
& + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \frac{\partial \phi_h}{\partial t} \frac{x_{i+1} - x}{h_x} \frac{y_{j+1} - y}{h_y} \frac{z - z_{k-1}}{h_z} dx dy dz + \\
& + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \frac{\partial \phi_h}{\partial t} \frac{x - x_{i-1}}{h_x} \frac{y - y_{j-1}}{h_y} \frac{z_{k+1} - z}{h_z} dx dy dz + \\
& + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \frac{\partial \phi_h}{\partial t} \frac{x_{i+1} - x}{h_x} \frac{y - y_{j-1}}{h_y} \frac{z_{k+1} - z}{h_z} dx dy dz + \\
& + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \frac{\partial \phi_h}{\partial t} \frac{x - x_{i-1}}{h_x} \frac{y_{j+1} - y}{h_y} \frac{z_{k+1} - z}{h_z} dx dy dz + \\
& + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \frac{\partial \phi_h}{\partial t} \frac{x_{i+1} - x}{h_x} \frac{y_{j+1} - y}{h_y} \frac{z_{k+1} - z}{h_z} dx dy dz \approx \\
& \approx h_x h_y h_z \left(\frac{\partial \phi_{ijk}}{\partial t} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial \phi_{ijk}}{\partial t} + \frac{\partial \phi_{ijk}}{\partial t} \right) \approx 8 h_x h_y h_z \frac{\phi_{ijk}^{n+1} - \phi_{ijk}^n}{h_t}.
\end{aligned}$$

Здесь использованы формулы правых и левых прямоугольников для приближенного интегрирования функций, а также аппроксимация первой производной по времени. Перейдем к рассмотрению первого из конвективных членов:

$$\begin{aligned}
& \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \int_{z_{k-1}}^{z_{k+1}} u^{n+1} \frac{\partial \phi_h^{n+1}}{\partial x} \hat{\phi}_{ijk} dx dy dz = \\
& = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \int_{z_{k-1}}^{z_{k+1}} u^{n+1} \frac{\partial \phi_h^{n+1}}{\partial x} \frac{x - x_{i-1}}{h_x} \varphi_j(y) \varphi_k(z) dx dy dz + \\
& + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \int_{z_{k-1}}^{z_{k+1}} u^{n+1} \frac{\partial \phi_h^{n+1}}{\partial x} \frac{x_{i+1} - x}{h_x} \varphi_j(y) \varphi_k(z) dx dy dz \approx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\approx h_x \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \int_{z_{k-1}}^{z_{k+1}} u^{n+1}(x_i, y, z) \frac{\partial \phi_h^{n+1}(x, y, z)}{\partial x} \Big|_i \varphi_j(y) \varphi_k(z) dy dz + \\
&+ h_x \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \int_{z_{k-1}}^{z_{k+1}} u^{n+1}(x_i, y, z) \frac{\partial \phi_h^{n+1}(x, y, z)}{\partial x} \Big|_i \varphi_j(y) \varphi_k(z) dy dz \approx \\
&\approx 8h_x h_y h_z u^{n+1}(x_i, y_j, z_k) \frac{\partial \phi^{n+1}(x, y_j, z_k)}{\partial x} \Big|_i \approx \\
&\approx 8h_x h_y h_z \left(u^{(+),n+1}(x_i, y_j, z_k) \frac{\phi_{ijk}^{n+1} - \phi_{i-1jk}^{n+1}}{h_x} + u^{(-),n+1}(x_i, y_j, z_k) \frac{\phi_{i+1jk}^{n+1} - \phi_{ijk}^{n+1}}{h_x} \right).
\end{aligned}$$

При интегрировании здесь, как и выше, использовались формулы правых и левых прямоугольников. Также отметим, что здесь

$$u^{(+),n+1}(x_i, y_j, z_k) = \frac{|u^{n+1}(x_i, y_j, z_k)| + u^{n+1}(x_i, y_j, z_k)}{2},$$

$$u^{(-),n+1}(x_i, y_j, z_k) = \frac{u^{n+1}(x_i, y_j, z_k) - |u^{n+1}(x_i, y_j, z_k)|}{2},$$

$u^{n+1}(x_i, y_j, z_k) = u^{(+),n+1}(x_i, y_j, z_k) + u^{(-),n+1}(x_i, y_j, z_k)$ и производная $\frac{\partial \phi_h^{n+1}(x, y_j, z_k)}{\partial x} \Big|_i$

аппроксимируется в зависимости от знака $u^{n+1}(x_i, y_j, z_k)$. В дальнейшем условимся обозначать: $u^{(+),n+1}(x_i, y_j, z_k) \equiv u_{ijk}^{(+)}$, $u^{(-),n+1}(x_i, y_j, z_k) \equiv u_{ijk}^{(-)}$. Аналогичным образом преобразуем два других конвективных слагаемых:

$$\begin{aligned}
&\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \int_{z_{k-1}}^{z_{k+1}} v^{n+1} \frac{\partial \phi_h^{n+1}}{\partial y} \hat{\phi}_{ijk} dx dy dz \approx \\
&\approx 8h_x h_y h_z \left(v_{ijk}^{(+),n+1} \frac{\phi_{ijk}^{n+1} - \phi_{ij-1k}^{n+1}}{h_y} + v_{ijk}^{(-),n+1} \frac{\phi_{ij+1k}^{n+1} - \phi_{ijk}^{n+1}}{h_y} \right), \\
&\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \int_{z_{k-1}}^{z_{k+1}} w^{n+1} \frac{\partial \phi_h^{n+1}}{\partial z} \hat{\phi}_{ijk} dx dy dz \approx
\end{aligned}$$

$$\approx 8h_x h_y h_z \left(w_{ijk}^{(+),n+1} \frac{\phi_{ijk}^{n+1} - \phi_{ijk-1}^{n+1}}{h_z} + w_{ijk}^{(-),n+1} \frac{\phi_{ijk+1}^{n+1} - \phi_{ijk}^{n+1}}{h_z} \right).$$

Наконец, применяя формулы левых и правых прямоугольников и аппроксимируя частные производные в диффузионных слагаемых, преобразуем их к виду (напоминаем, что a_{xx} и a_{yy} — постоянные величины, а a_{zz} — переменная по пространству):

$$\begin{aligned} & - \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \int_{z_{k-1}}^{z_{k+1}} \frac{\partial}{\partial x} \left(a_{xx} \frac{\partial \phi_h^{n+1}}{\partial x} \right) \hat{\phi}_{ijk} dx dy dz \approx -8h_x h_y h_z a_{xx} \frac{\phi_{i+1jk}^{n+1} - 2\phi_{ijk}^{n+1} + \phi_{i-1jk}^{n+1}}{h_x^2}, \\ & - \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \int_{z_{k-1}}^{z_{k+1}} \frac{\partial}{\partial y} \left(a_{yy} \frac{\partial \phi_h^{n+1}}{\partial y} \right) \hat{\phi}_{ijk} dx dy dz \approx -8h_x h_y h_z a_{yy} \frac{\phi_{ij+1k}^{n+1} - 2\phi_{ijk}^{n+1} + \phi_{ij-1k}^{n+1}}{h_y^2}, \\ & - \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \int_{z_{k-1}}^{z_{k+1}} \frac{\partial}{\partial z} \left(a_{zz} \frac{\partial \phi_h^{n+1}}{\partial z} \right) \hat{\phi}_{ijk} dx dy dz \approx -8h_x h_y h_z a_{zz,ijk} \frac{\phi_{ijk+1}^{n+1} - 2\phi_{ijk}^{n+1} + \phi_{ijk-1}^{n+1}}{h_z^2}. \end{aligned}$$

После всех проведенных преобразований (107) переписывается в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\phi_{ijk}^{n+1} - \phi_{ijk}^n}{h_t} + u_{ijk}^{(+)} \frac{\phi_{ijk}^{n+1} - \phi_{i-1jk}^{n+1}}{h_x} + u_{ijk}^{(-)} \frac{\phi_{i+1jk}^{n+1} - \phi_{ijk}^{n+1}}{h_x} + \\ & + v_{ijk}^{(+)} \frac{\phi_{ijk}^{n+1} - \phi_{ij-1k}^{n+1}}{h_y} + v_{ijk}^{(-)} \frac{\phi_{ij+1k}^{n+1} - \phi_{ijk}^{n+1}}{h_y} + \\ & + w_{ijk}^{(+)} \frac{\phi_{ijk}^{n+1} - \phi_{ijk-1}^{n+1}}{h_z} + w_{ijk}^{(-)} \frac{\phi_{ijk+1}^{n+1} - \phi_{ijk}^{n+1}}{h_z} - \\ & - a_{xx} \frac{\phi_{i+1jk}^{n+1} - 2\phi_{ijk}^{n+1} + \phi_{i-1jk}^{n+1}}{h_x^2} - a_{yy} \frac{\phi_{ij+1k}^{n+1} - 2\phi_{ijk}^{n+1} + \phi_{ij-1k}^{n+1}}{h_y^2} - \\ & - a_{zz,ijk} \frac{\phi_{ijk+1}^{n+1} - 2\phi_{ijk}^{n+1} + \phi_{ijk-1}^{n+1}}{h_z^2} = \\ & = \frac{1}{8h_x h_y h_z} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \int_{z_{k-1}}^{z_{k+1}} f^{n+1} \hat{\phi}_{ijk} dx dy dz, \end{aligned} \tag{108}$$

$$i = \overline{1, N_x - 1}, \quad j = \overline{1, N_y - 1}, \quad k = \overline{1, N_z - 1}, \quad n = \overline{0, N_t - 1}.$$

Как мы видим, левая часть соответствует классической семиточечной схеме, которая имеет точно такой же вид при использовании метода конечных объемов на прямоугольной сетке и противопотоковой аппроксимации конвективного члена. Именно метод конечных объемов применялся для дискретизации (18)-(21). Основное отличие (108) от системы уравнений, которая получилась бы при использовании метода конечных объемов, в правой части. Интеграл имеет особый вид. Но отметим, что и этот интеграл можно выписать в явном виде с помощью квадратурной формулы прямоугольников. По аналогии со слагаемым, содержащим производную по времени $\frac{1}{8h_x h_y h_z} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \int_{z_{k-1}}^{z_{k+1}} f^{n+1} \hat{\phi}_{ijk} dx dy dz \approx f_{ijk}^{n+1}$. В итоге схема, которая получилась после расписывания всех интегралов, в первом приближении соответствует методу конечных объемов. Также отметим, что в качестве начального приближения (при $n = 0$) выступает (21).

Распишем теперь для примера граничные условия (19)-(20) на верхней границе Γ_4 ($k = N_z$) и нижней границе Γ_2 ($k = 0$) при $i = \overline{1, N_x - 1}$, $j = \overline{1, N_y - 1}$. Те же условия на остальных границах Γ_1 , Γ_3 , Γ_5 , Γ_6 расписывать не будем, поскольку вид схем такой же, как и схемы для граничного условия на Γ_4 с точностью до знаков и обозначений, а рассуждения при получении схем абсолютно те же. Сначала рассмотрим одно из уравнений (19):

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \left(-w^{(-)} \phi_h^{n+1} + a_{zz} \frac{\partial \phi_h^{n+1}}{\partial z} \right) \Big|_{k=N_z} \varphi_i(x) \varphi_j(y) dx dy \approx 4h_x h_y \left(-w_{ijN_z}^{(-)} \phi_{ijN_z}^{n+1} + a_{zz, ijN_z} \frac{\phi_{ijN_z}^{n+1} - \phi_{ijN_z-1}^{n+1}}{h_z} \right) = - \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} w^{(-)} g_{(\Gamma_4)}^{n+1} \varphi_i(x) \varphi_j(y) dx dy,$$

ИЛИ

$$\begin{aligned} & -w_{ijN_z}^{(-)} \phi_{ijN_z}^{n+1} + a_{zz, ijN_z} \frac{\phi_{ijN_z}^{n+1} - \phi_{ijN_z-1}^{n+1}}{h_z} = \\ & = - \frac{1}{4h_x h_y} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} w^{(-)} g_{(\Gamma_4)}^{n+1} \varphi_i(x) \varphi_j(y) dx dy. \end{aligned} \tag{109}$$

Такими же образом получим схему дискретизации (20):

$$\begin{aligned} & \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \left(\beta \phi_h^{n+1} - a_{zz} \frac{\partial \phi_h^{n+1}}{\partial z} \right) \Big|_{k=0} \varphi_i(x) \varphi_j(y) dx dy \approx \\ & \approx 4h_x h_y \left(\beta \phi_{ij0}^{n+1} - a_{zz,ij0} \frac{\phi_{ij1}^{n+1} - \phi_{ij0}^{n+1}}{h_z} \right) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \varphi_{(\Gamma_2)}^{n+1} \varphi_i(x) \varphi_j(y) dx dy, \end{aligned}$$

где $\varphi_{(\Gamma_2)}^{n+1} \equiv g_{(\Gamma_2)}^{n+1} + \sum_{l=1}^{N_L} m_l (\eta_l^{n+1} + g_l^{em,n+1})$. В итоге получим равенство:

$$\beta \phi_{ij0}^{n+1} - a_{zz,ij0} \frac{\phi_{ij1}^{n+1} - \phi_{ij0}^{n+1}}{h_z} = \frac{1}{4h_x h_y} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \varphi_{(\Gamma_2)}^{n+1} \varphi_i(x) \varphi_j(y) dx dy. \quad (110)$$

Как мы видим, левые части (109) и (110), также как и левая часть (108), соответствуют классическим схемам дискретизации, которые имеют тот же вид при использовании метода конечных объемов. Правые части в (109) и (110) можно приближенно переписать в виде:

$$-\frac{1}{4h_x h_y} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} w^{(-)} g_{(\Gamma_4)}^{n+1} \varphi_i(x) \varphi_j(y) dx dy \approx -w_{ijN_z}^{(-)} g_{(\Gamma_4),ij}^{n+1},$$

$$\frac{1}{4h_x h_y} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \varphi_{(\Gamma_2)}^{n+1} \varphi_i(x) \varphi_j(y) dx dy \approx \varphi_{(\Gamma_2),ij}^{n+1}.$$

Итак, в данном параграфе приведен метод дискретизации системы уравнений (18)-(21) и, в результате, получены схемы дискретизации этой системы. Отметим, что те же схемы могут быть использованы и для численного решения «вспомогательной» сопряженной задачи (28), поскольку в ней присутствуют те же граничные условия третьего рода (разница в том, что вместо $U_n^{(-)}$ — скорость против потока, в них стоит $U_n^{(+)}$ — скорость вдоль потока, которая также

как и $U_n^{(-)}$ — неотрицательная величина), уравнение конвекции-диффузии, но с противоположными знаками перед первыми производными по пространству (однако знак перед скоростью ветра в области не влияет на построение численной схемы), а также сопряженная задача решается, начиная с $n = N_t - 1$ по времени (поэтому знак минус перед производной по времени не имеет значения в процессе построения численной схемы). В следующем параграфе исследуем свойства построенных схем.

§ 4.2. Исследование схемы дискретизации

математической модели загрязнения окружающей среды

Исследуем некоторые свойства построенных ранее схем дискретизации математической модели загрязнения окружающей среды. Сначала покажем, что схема (108) при $i = \overline{1, N_x - 1}$, $j = \overline{1, N_y - 1}$, $k = \overline{1, N_z - 1}$ является монотонной, то есть решение ϕ_{ijk}^{n+1} — неотрицательно ($i = \overline{1, N_x - 1}$, $j = \overline{1, N_y - 1}$, $k = \overline{1, N_z - 1}$, $n = \overline{0, N_t - 1}$) при $f^{n+1} \geq 0$ и $\phi_{ijk}^0 = \phi_{(0)}(x_i, y_j, z_k) \geq 0$ (см. [73]). Перепишем (108) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{h_t} + \frac{u_{ijk}^{(+)} - u_{ijk}^{(-)}}{h_x} + \frac{v_{ijk}^{(+)} - v_{ijk}^{(-)}}{h_y} + \frac{w_{ijk}^{(+)} - w_{ijk}^{(-)}}{h_z} + \frac{2a_{xx}}{h_x^2} + \frac{2a_{yy}}{h_y^2} + \right. \\
& \left. + \frac{2a_{zz,ijk}}{h_z^2} \right) \phi_{ijk}^{n+1} + \left(\frac{u_{ijk}^{(-)}}{h_x} - \frac{a_{xx}}{h_x^2} \right) \phi_{i+1jk}^{n+1} - \left(\frac{u_{ijk}^{(+)}}{h_x} + \frac{a_{xx}}{h_x^2} \right) \phi_{i-1jk}^{n+1} + \\
& \quad + \left(\frac{v_{ijk}^{(-)}}{h_y} - \frac{a_{yy}}{h_y^2} \right) \phi_{ij+1k}^{n+1} - \left(\frac{v_{ijk}^{(+)}}{h_y} + \frac{a_{yy}}{h_y^2} \right) \phi_{ij-1k}^{n+1} + \\
& \quad + \left(\frac{w_{ijk}^{(-)}}{h_z} - \frac{a_{zz,ijk}}{h_z^2} \right) \phi_{ijk+1}^{n+1} - \left(\frac{w_{ijk}^{(+)}}{h_z} + \frac{a_{zz,ijk}}{h_z^2} \right) \phi_{ijk-1}^{n+1} = \frac{1}{h_t} \phi_{ijk}^n + \\
& \quad + \frac{1}{8h_x h_y h_z} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \int_{z_{k-1}}^{z_{k+1}} f^{n+1} \hat{\phi}_{ijk} dx dy dz, \\
& \quad i = \overline{1, N_x - 1}, \quad j = \overline{1, N_y - 1}, \quad k = \overline{1, N_z - 1}, \quad n = \overline{0, N_t - 1}.
\end{aligned} \tag{111}$$

Рассмотрим случай $n = 0$. Допустим, что в некоторых (i, j, k) могут быть отрицательные значения концентрации и $\phi_{\hat{i}\hat{j}\hat{k}}^1$ — наименьшее из них. Тогда, поскольку все коэффициенты при $\phi_{\hat{i}\pm 1\hat{j}\hat{k}}^1$, $\phi_{\hat{i}\hat{j}\pm 1\hat{k}}^1$ и $\phi_{\hat{i}\hat{j}\hat{k}\pm 1}^1$ меньше нуля и значения каждой из этих функций больше $\phi_{\hat{i}\hat{j}\hat{k}}^1$, то левая часть (111) при $i = \hat{i}$, $j = \hat{j}$, $k = \hat{k}$ оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{h_t} + \frac{u_{ijk}^{(+)} - u_{ijk}^{(-)}}{h_x} + \frac{v_{ijk}^{(+)} - v_{ijk}^{(-)}}{h_y} + \frac{w_{ijk}^{(+)} - w_{ijk}^{(-)}}{h_z} + \frac{2a_{xx}}{h_x^2} + \frac{2a_{yy}}{h_y^2} + \right. \\ & \left. + \frac{2a_{zz,ijk}}{h_z^2} \right) \phi_{ijk}^1 + \left(\frac{u_{ijk}^{(-)}}{h_x} - \frac{a_{xx}}{h_x^2} \right) \phi_{i+1jk}^1 - \left(\frac{u_{ijk}^{(+)}}{h_x} + \frac{a_{xx}}{h_x^2} \right) \phi_{i-1jk}^1 + \\ & + \left(\frac{v_{ijk}^{(-)}}{h_y} - \frac{a_{yy}}{h_y^2} \right) \phi_{ij+1k}^1 - \left(\frac{v_{ijk}^{(+)}}{h_y} + \frac{a_{yy}}{h_y^2} \right) \phi_{ij-1k}^1 + \left(\frac{w_{ijk}^{(-)}}{h_z} - \frac{a_{zz,ijk}}{h_z^2} \right) \phi_{ijk+1}^1 - \\ & - \left(\frac{w_{ijk}^{(+)}}{h_z} + \frac{a_{zz,ijk}}{h_z^2} \right) \phi_{ijk-1}^1 < \frac{1}{h_t} \phi_{ijk}^1. \end{aligned}$$

Тогда из (111) следует

$$\frac{1}{h_t} \phi_{ijk}^0 + \frac{1}{8h_x h_y h_z} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \int_{z_{k-1}}^{z_{k+1}} f^1 \hat{\phi}_{ijk} dx dy dz < \frac{1}{h_t} \phi_{ijk}^1,$$

то есть неотрицательное число строго меньше отрицательного числа, чего не может быть. Следовательно, $\phi_{\hat{i}\pm 1\hat{j}\hat{k}}^1$ не может быть наименьшим отрицательным значением. Аналогичным образом рассматриваются остальные возможные отрицательные значения и доказывается, что $\phi_{ijk}^1 \geq 0$ при $i = \overline{1, N_x - 1}$, $j = \overline{1, N_y - 1}$, $k = \overline{1, N_z - 1}$. Далее рассматриваются $n = \overline{1, N_t - 1}$ и тем же методом доказывается, что $\phi_{ijk}^{n+1} \geq 0$.

Неотрицательность $\phi_{ijN_z}^{n+1}$ при $i = \overline{1, N_x - 1}$, $j = \overline{1, N_y - 1}$ сразу следует из (109), доказательство приводить не будем. Рассмотрим (110) и докажем, что $\phi_{ij0}^{n+1} \geq 0$, $i = \overline{1, N_x - 1}$, $j = \overline{1, N_y - 1}$ в предположениях $g_{(\Gamma_2)}^{n+1} \geq 0$ и $\sum_{l=1}^{N_L} m_l (\eta_l^{n+1} + g_l^{em, n+1}) \geq 0$. Отметим, что второе предположение следует из Теорем 3, 4 и 6 настоящей

диссертации. Допустим, что в некоторых (i, j) концентрация загрязнений может быть отрицательной и $\phi_{i\hat{j}0}$ — наименьшее отрицательное значение. Перепишем (110) при $i = \hat{i}$, $j = \hat{j}$ в виде:

$$\left(\beta + \frac{a_{zz,ij0}}{h_z}\right) \phi_{ij0}^{n+1} - \frac{a_{zz,ij0}}{h_z} \phi_{ij1}^{n+1} = \frac{1}{4h_x h_y} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \varphi_{(\Gamma_2)}^{n+1} \varphi_i(x) \varphi_j(y) dx dy. \quad (112)$$

Поскольку $\frac{a_{zz,ij0}}{h_z} > 0$ и $\phi_{ij0}^{n+1} < \phi_{ij1}^{n+1}$, то из (112) следует:

$$\frac{1}{4h_x h_y} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \varphi_{(\Gamma_2)}^{n+1} \varphi_i(x) \varphi_j(y) dx dy = \left(\beta + \frac{a_{zz,ij0}}{h_z}\right) \phi_{ij0}^{n+1} - \frac{a_{zz,ij0}}{h_z} \phi_{ij1}^{n+1} < \beta \phi_{ij0}^{n+1},$$

то есть неотрицательное число строго меньше отрицательного, чего не может быть. Точно так же можно показать, что $\phi_{ij0}^{n+1} \geq 0$, $i = \overline{1, N_x - 1}$, $j = \overline{1, N_y - 1}$. Таким образом доказано, что построенные схемы дискретизации уравнений модели конвекции-диффузии являются монотонными и при численном решении не могут быть получены отрицательные концентрации загрязнения ϕ и функции «чувствительности» q нигде ни в области, ни на границе. По этой причине, как уже отмечалось в главе 2 настоящей работы, предположения $q \geq 0$ и $\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 > 0$ хотя для одного источника на всем временном интервале, сделанные при построении алгоритмов решения различных задач, правомерны.

Отметим далее, что схемы (108)-(110) обладают свойствами аппроксимации и абсолютной устойчивости. Доказательство этих фактов здесь приводить не будем (оно дано в Приложении), а лишь подчеркнем, что справедлива следующая

Теорема 8. *Разностные схемы (108)-(110):*

- аппроксимируют дифференциальные операторы (18)-(20) в предположении, что решение (18)-(21) — гладкое класса $C^{3,1}$, с первым порядком точности по пространственным и временной переменным, при этом начальное

условие определяется уравнением (21);

- являются абсолютно устойчивыми;
- обладают свойством монотонности.

Теорема 8, помимо свойства монотонности, достоинство которого обсуждалось выше, дает в силу теоремы Филиппова-Рябенского [74] сходимость решения ϕ_{ijk}^n разностных уравнений к решению ϕ дифференциальных уравнений при достаточно больших N_x , N_y , N_z и N_t (при малых шагах сетки). Ниже приведем три замечания, в которых обсуждаются еще несколько преимуществ постановки задачи с граничными условиями, в которых присутствуют $U_n^{(-)}$ и $U_n^{(+)}$, а также построенной схемы дискретизации.

Замечание 6. Следует отметить, что математическая модель (18)-(20) с начальным условием (21), используемая для описания процесса распространения примеси в регионе, а также схемы дискретизации (108)-(110) этой системы уравнений могут быть применены для решения исследуемой задачи оптимального управления в случае $a_{pp} = 0$, $p = 1, 2$. Предположим для простоты, что вектор скорости ветра — постоянный. Уравнение конвекции-диффузии (18) при нулевых коэффициентах «горизонтальной» диффузии «переходит» в уравнение

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + w \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(a_{zz} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = f \text{ в } \Omega \times (0, T), \quad (113)$$

а граничные условия третьего рода (19) на $\Gamma/(\Gamma_2 \cup \Gamma_4)$ преобразуются следующим образом:

$$U_n^{(-)} \phi = U_n^{(-)} g_{(\Gamma)} \text{ на } (\Gamma/(\Gamma_2 \cup \Gamma_4)) \times (0, T). \quad (114)$$

Повторяя рассуждения, приведенные выше, легко видеть, что для дискретизации (113) может быть использована (108), а для (114) (например, на Γ_1 при

$j = \overline{1, N_y - 1}, k = \overline{1, N_z - 1}$):

$$\phi_{0jk}^{n+1} = \frac{1}{4h_y h_z} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \int_{z_{k-1}}^{z_{k+1}} g_{(\Gamma_1)}^{n+1} \varphi_j(y) \varphi_k(z) dy dz \approx g_{(\Gamma_1),jk}^{n+1}, \quad u > 0 \quad (115)$$

а также, что для схем (108) (при $a_{pp} = 0, p = 1, 2$) и (115) справедлива Теорема 8. \square

Замечание 7. Модель (18)-(21) и схемы дискретизации (108)-(110) не могут применяться для решения рассматриваемых в работе задач оптимизации в случае $a_{pp} = 0, p = \overline{1, 3}$ даже при постоянных скоростях ветра из-за вида условия (20) на нижней границе и поскольку управление происходит на Γ_2 . В случае $a_{zz} = 0$ уравнение (20) преобразуется к виду

$$\beta\phi = g_{(\Gamma_2)} + \sum_{l=1}^{N_L} m_l(x, y)(\eta_l(t) + g_l^{em}(t)) \text{ на } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (116)$$

а аналогичное условие для задачи (28) становится следующим:

$$\beta q = 0 \text{ на } \Gamma_2 \times (0, T). \quad (117)$$

Поскольку ранее предполагалось, что $U_n = 0$ на Γ_2 , а также поскольку рассматривается постоянный вектор скорости ветра, то для корректной постановки (18)-(21) и (28) не требуется задавать никаких граничных условий на Γ_2 (см. [75]). Если же предположить, что $U_n \neq 0$, то одно из граничных условий (116) или (117) будет некорректным для прямой, или для сопряженной задачи соответственно (см., например, [76]). Далее, если вместо граничного условия (20) для (18)-(21) ставить условие

$$U_n^{(-)}\phi - a_{zz}\frac{\partial\phi}{\partial z} = U_n^{(-)} \left(g_{(\Gamma_2)} + \sum_{l=1}^{N_L} m_l(x, y)(\eta_l(t) + g_l^{em}(t)) \right) \text{ на } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (118)$$

то на этой же границе для сопряженной задачи получим

$$U_n^{(+)}q - a_{zz} \frac{\partial q}{\partial z} = 0 \text{ на } \Gamma_2 \times (0, T). \quad (119)$$

Так как $a_{zz} = 0$, то (118) и (119) принимают вид (что согласуется с работой [52]):

$$U_n^{(-)}\phi = U_n^{(-)} \left(g_{(\Gamma_2)} + \sum_{l=1}^{N_L} m_l(x, y)(\eta_l(t) + g_l^{em}(t)) \right) \text{ на } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (120)$$

$$U_n^{(+)}q = 0 \text{ на } \Gamma_2 \times (0, T). \quad (121)$$

Поскольку вектор скорости ветра для простоты полагается постоянным, то либо не нужно задавать граничное условие (120) для прямой задачи (что приводит к невозможности сформулировать задачу оптимального управления), либо не нужно задавать граничное условие (121) (тогда нельзя вычислить решение сопряженной задачи на нижней границе и, как следствие, «управления»).

Тем не менее отметим, что если в (18)-(21) условие на нижней границе заменять уравнением (120) и положить $\eta_l = 0$, $l = \overline{1, N_L}$ (то есть рассматривать задачу распространения загрязнений в регионе, а не задачу оптимального управления), то схемы (108)-(110) применимы для дискретизации исследуемой задачи при $a_{pp} = 0$, $p = \overline{1, 3}$ (этот факт можно обосновать точно так же, как в Замечании 6 обосновывается применимость построенных схем при нулевых коэффициентах «горизонтальной» диффузии). Легко заметить, что, например, «классическое» граничное условие третьего рода

$$\sigma\phi + \frac{\partial\phi}{\partial N} = \sigma g_{(\Gamma)} \text{ на } \Gamma \times (0, T),$$

где $\sigma > 0$, неприменимо в случае $a_{pp} = 0$, $p = \overline{1, 3}$, поскольку, как упоминалось выше, оно будет некорректным на некоторых границах даже при постоянном векторе скорости ветра. Недостатки использования еще одного «классического»

граничного условия — условия Неймана (которое используется, например, в [77]) — приведены в монографии [11]. \square

Замечание 8. Отметим, что матрица \hat{A}_N , $N = (N_x + 1) \cdot (N_y + 1) \cdot (N_z + 1)$, которая получается в результате дискретизации системы уравнений (18)-(21) и (28) и используется при решении СЛАУ, обладает диагональным преобладанием, поскольку для ее элементов \hat{a}_{pm} , $p = \overline{1, N}$, $m = \overline{1, N}$, выполняются неравенства:

$$|\hat{a}_{mm}| > \sum_{p \neq m, p=1}^{p=N} |\hat{a}_{pm}|, \quad m = \overline{1, (N_x + 1) \cdot (N_y + 1)},$$

$$|\hat{a}_{mm}| \geq \sum_{p \neq m, p=1}^{p=N} |\hat{a}_{pm}|, \quad m = \overline{(N_x + 1) \cdot (N_y + 1) + 1, N}.$$

Строгое неравенство следует из (112), в справедливости нестрогого неравенства можно убедиться, например, из (109), (111). Поскольку \hat{A}_N является матрицей с диагональным преобладанием, то она является невырожденной (см. [78, 79]). Так как полученная матрица — несимметричная, невырожденная и разреженная, а получаемая СЛАУ — большой размерности ($N_x \gg 2$, $N_y \gg 2$ и $N_z \gg 2$), то для решения этой СЛАУ применялся стабилизированный метод бисопряженных градиентов, который сходится для матриц типа \hat{A}_N (его суть см., например, в [80, 81, 82]). \square

Итак, в этом параграфе исследованы важные свойства построенных схем дискретизации и дано теоретическое обоснование их использования для численного моделирования распространения загрязнений в регионе. В следующем параграфе приводятся результаты тестового эксперимента, которые дают практическое обоснование использования построенных схем для математического моделирования решаемых в диссертации задач.

§ 4.3. Результаты тестового численного эксперимента по моделированию распространения загрязнений в регионе

В данном параграфе обсуждаются результаты тестового численного эксперимента по моделированию распространения загрязнений в регионе. Эксперимент направлен на тестирование схем дискретизации системы уравнений (18)-(21) при $m_l(x, y) = 0$ (то есть без учета локальных источников). Отметим, что в данном эксперименте все параметры и их величины полагаются безразмерными.

Область, на которой производились расчеты, выбиралась следующей

$$\Omega = (0, 5) \times (0, 5) \times (0, 5),$$

где

$$A_1 = B_1 = C_1 = 0, \quad A_2 = B_2 = C_2 = 5,$$

а временной интервал

$$(0, T) = (0, 1).$$

Каждая из компонент вектора скорости полагалась постоянной по пространству и переменной по времени:

$$(u, v, w) = (-0.2t, -0.3t, -0.005t).$$

Все коэффициенты диффузии брались постоянными:

$$a_{xx} = a_{yy} = 0.001, \quad a_{zz} = 0.0001.$$

Функции фоновых источников f , $g_{(\Gamma_2)}$, $g_{(\Gamma)}$ в области Ω и на границах Γ_2 и Γ/Γ_2 соответственно, а также начальное значение концентрации загрязнения $\phi_{(0)}$ в области Ω определялись из уравнений (18)-(21) путем подстановки в них гладкой тестовой функции:

$$\phi_{test} = 0.1t \operatorname{ch}(x) \operatorname{ch}(y) \operatorname{ch}(z)$$

и, с учетом отрицательности вектора скорости ветра, получились следующими:

$$f = 0.1(1 - (a_{xx} + a_{yy} + a_{zz})t)\text{ch}(x)\text{ch}(y)\text{ch}(z) + 0.1t(\text{ush}(x)\text{ch}(y)\text{ch}(z) + \\ + v\text{ch}(x)\text{sh}(y)\text{ch}(z) + w\text{ch}(x)\text{ch}(y)\text{sh}(z)),$$

$$g_{(\Gamma_2)} = 0.1\beta t\text{ch}(x)\text{ch}(y), \quad \phi_{(0)} = 0,$$

$$g_{(\Gamma)}(x, y, z, t) = \begin{cases} 0 \text{ на } \Gamma_1 \times (0, T), \\ 0.1t\text{ch}(1)\text{ch}(y)\text{ch}(z) - \frac{0.1a_{xx}t}{v}\text{sh}(1)\text{ch}(y)\text{ch}(z) \text{ на } \Gamma_3 \times (0, T), \\ 0.1t\text{ch}(1)\text{ch}(x)\text{ch}(y) - \frac{0.1a_{zz}t}{v}\text{sh}(1)\text{ch}(x)\text{ch}(y) \text{ на } \Gamma_4 \times (0, T), \\ 0 \text{ на } \Gamma_5 \times (0, T), \\ 0.1t\text{ch}(1)\text{ch}(x)\text{ch}(z) - \frac{0.1a_{yy}t}{w}\text{sh}(1)\text{ch}(x)\text{ch}(z) \text{ на } \Gamma_6 \times (0, T). \end{cases}$$

Из значений коэффициентов диффузии и скоростей ветра видно, что все функции f , $g_{(\Gamma_2)}$, $g_{(\Gamma)}$ и $\phi_{(0)}$ принимают неотрицательные значения, а поскольку для дискретизации задачи (18)-(20) с начальным условием (21) использовались монотонные схемы, то в результате численного решения будет получена неотрицательная функция, что видно ниже, непосредственно из результатов эксперимента.

Перейдем теперь к обсуждению результатов эксперимента. В таблице 1 приведена зависимость числа узлов сетки по Ox от относительной ошибки численного решения в « C -норме», под которой понимается

$$\|err\|_C = \frac{\max_{i,j,k,n} |\phi_{ijk}^n - \phi(x_i, y_j, z_k, t_n)|}{\max_{i,j,k,n} |\phi(x_i, y_j, z_k, t_n)|},$$

при фиксированном числе узлов сетки по Oy , Oz и по времени, а на рисунке 1 — аналогичная графическая зависимость. Из таблицы и графика видно, что относительная ошибка решения обратно пропорциональна числу узлов сетки (с увеличением их числа в два раза ошибка убывает приблизительно в три раза), что иллюстрирует первый порядок аппроксимации по пространственным переменным. Поскольку эксперимент проводился на гладком решении, то не

требуется брать большое число узлов сетки, чтобы достичь приемлемой точности результата.

В таблице 2 и на рисунке 2 дана зависимость числа узлов сетки по времени от ошибки численного решения в « C -норме» при фиксированном числе узлов сетки по пространству. Из этой таблицы и графика можно сделать те же выводы, что делались выше: относительная ошибка решения обратно пропорциональна числу узлов сетки по времени (только при увеличении числа узлов сетки в два раза ошибка убывает также приблизительно в два раза), что является практическим подтверждением первого порядка аппроксимации по временной переменной. Наконец, на рисунках 3-6 изображены дискретные решения ϕ (слева) и тестовые аналитические решения ϕ_{test} (справа) в области Ω на нижнем и верхнем уровнях для $N_x = N_y = N_z = 12$, $N_t = 20$. Поскольку эксперимент проводился с гладким тестовым решением, то графики слева практически идентичны графикам справа. Также отметим, что ни на одном из графиков с дискретными решениями нет отрицательных значений, что иллюстрирует монотонность построенной схемы дискретизации.

Таблица 1: Зависимость относительной ошибки численного решения в « C -норме» от числа узлов сетки по Ox при $N_y = N_z = 8$, $N_t = 10$.

N_x	2	4	8	16	32
$\ err\ _C \cdot 10^{-6}$	8.8	2.8	0.9	0.3	0.1

Таблица 2: Зависимость относительной ошибки численного решения в « C -норме» от числа узлов сетки по времени при $N_x = N_y = N_z = 12$.

N_t	5	10	20	40	80
$\ err\ _C \cdot 10^{-6}$	2.4	1.1	0.5	0.25	0.12

Итак, в этой главе предложена схема дискретизации уравнений математической модели загрязнения окружающей среды, исследованы ее свойства и

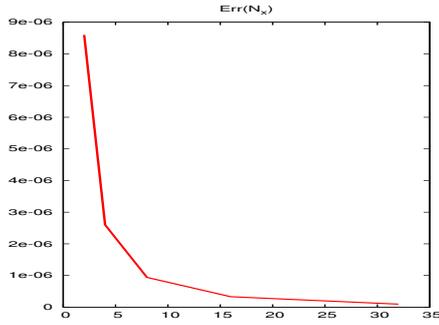


Рис. 1: Зависимость $\|err\|_C$ от N_x при $N_y = N_z = 8$, $N_t = 10$.

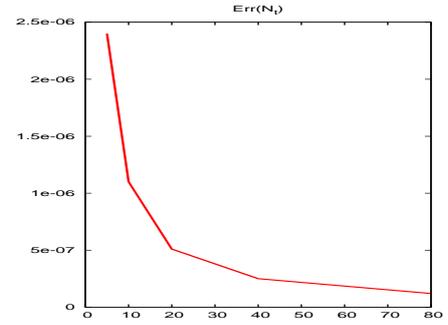


Рис. 2: Зависимость $\|err\|_C$ от N_t при $N_x = N_y = N_z = 12$.

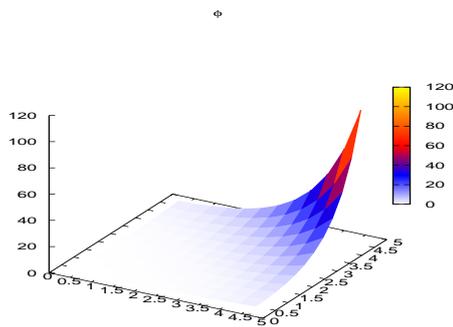


Рис. 3: Дискретное решение ϕ при $z \approx 0.42$ в момент времени $t = 0.25$.

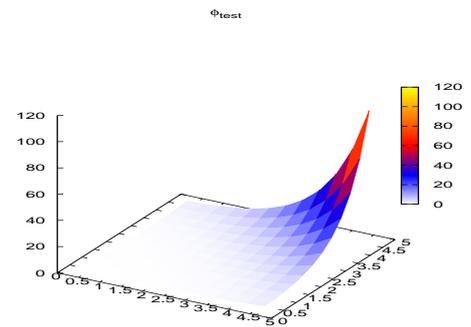


Рис. 4: Тестовое решение ϕ_{test} при $z \approx 0.42$ в момент времени $t = 0.25$.

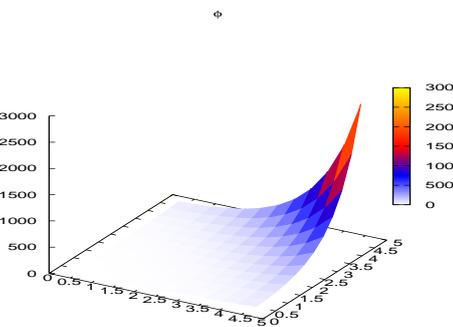


Рис. 5: Дискретное решение ϕ при $z \approx 4.58$ в момент времени $t = 0.25$.

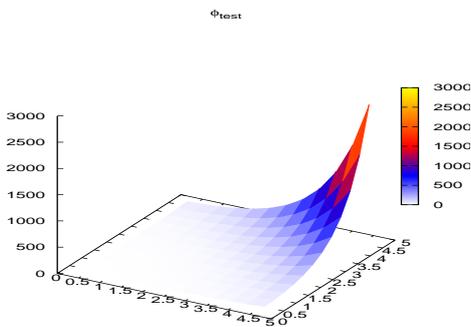


Рис. 6: Тестовое решение ϕ_{test} при $z \approx 4.58$ в момент времени $t = 0.25$.

даны теоретическое и практическое обоснования ее применения. В следующей главе будет описан комплекс программ, применяемый для численного решения рассматриваемого в диссертации класса задач, а также приведены результаты численных экспериментов по решению задач, описываемых ранее.

Глава 5. Описание программного комплекса по численному решению исследуемых задач и результаты экспериментов

В этой главе описан программный комплекс, созданный для численного решения задач оптимизации «средней» концентрации загрязнений и экономического ущерба (с учетом и без учета ресурсов, выделенных на ликвидацию локальных источников) от загрязнения окружающей среды, а также приведены результаты численных экспериментов по решению этих задач, которые иллюстрируют основные теоретические положения каждой из них.

§ 5.1. Описание программного комплекса, применяемого для численного решения поставленных задач

Теоретические основы комплекса составляет математическая модель распространения примеси в регионе, приведенная в главе 1 и дискретизованная с помощью схем (108)-(110) (глава 4), а также алгоритмы решения различных задач оптимизации, приведенные в главах 2 и 3. Программный комплекс имеет модульную структуру и решает следующие задачи:

- (а) оптимизация «средней» концентрации загрязнений от локальных источников в регионе;
- (б) оптимизация экономического ущерба от групп локальных источников, возникающих в различные моменты времени;
- (в) оптимизация экономического ущерба от группы источников загрязнений, возникающих в один момент времени, с учетом ресурсов, выделенных на устранение локальных источников.

Для каждой из задач создана отдельная директория, каждая из которых находится на репозитории https://bitbucket.org/Novikov_Ivan. Названия директорий:

```
adj_pl_direct_monot_scheme/,
damage_monotonic_scheme/,
damage_and_resources/
```

для решения задач (а), (б) и (в) соответственно. В каждой из этих директорий содержится приблизительно одинаковый набор файлов-подпрограмм и Makefile для сборки каждой из подпрограмм и создания исполняемого файла (main). Запуск происходит из командной строки и имеет вид: ./main. Большинство модулей написано на языке C++, модуль решения СЛАУ — на Fortran, модули визуализации результатов моделирования — на gnuplot. Названия модулей и их назначения приведены в таблице 3. Кроме того, в каждой директории имеются текстовые файлы с параметрами сетки, некоторыми физическими коэффициентами и координатами локальных источников (которые считаются известными). В следующем параграфе настоящей главы будут описаны значения величин этих параметров и коэффициентов.

§ 5.2. Аспекты численной реализации рассматриваемых задач

В данном параграфе приведем параметры, коэффициенты и некоторые их величины, которые совпадают при численной реализации всех задач (а), (б) и (в).

Сначала приведем размерности всех величин и функций задач (18)-(21), (60)-(63). Если величина постоянная, то будем приводить ее значение. Концентрация загрязнений ϕ (а также ϕ_k и концентрация загрязнений в нулевой момент времени $\phi_{(0)}$) измеряется в $\frac{\text{мг}}{\text{м}^3}$, вектор «управлений» $\vec{\eta}$ (и $\vec{\eta}_k$) — в $\frac{\text{мг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$.

Таблица 3: Модули программного комплекса.

Название модуля	Назначение
main.cpp	Головной модуль программного комплекса, отвечает за межмодульную связь, взаимодействие модулей и вычисление интегральных наблюдений
read_and_write.cpp	Чтение/запись данных из/в файлы
gen_diff.cpp	Вычисление коэффициента «вертикальной» диффузии
read_or_gen_vel.cpp	Чтение/генерация вектора скорости ветра в области
gen_mask.cpp	Генерация масок областей/регионов локальных источников, маски «охраняемого» региона (для всех задач), а также коэффициентов σ (для задач (б) и (в))
gen_matr_idx.cpp	Генерация индексов ненулевых элементов матрицы (CSR-формат)
gen_vel_bc.cpp	Генерация вектора скорости ветра на границе
gen_matr.cpp	Генерация значений ненулевых элементов матрицы (CSR-формат)
gen_rhs.cpp	Генерация правой части СЛАУ
integration.cpp	Интегрирование функций
solveSPARSKIT2.f90	Решение СЛАУ с помощью пакета SPARSKIT2
gen_control.cpp	Генерация вектора «управлений»
plot_2_u.p	Отрисовка вектора «управлений»
plot_3_3d.p	Отрисовка концентрации загрязнения (3d)
plot_3_2d.p	Отрисовка концентрации загрязнения (2d)

Единица измерения функции фоновых источников f в области Ω — $\frac{\text{мг}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}}$ и аналогичных величин $g_{(\Gamma)}$ на границах Γ/Γ_2 , $g_{(\Gamma_2)}$ на границе Γ_2 — $\frac{\text{мг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$. Коэффициент эмиссии измеряется в тех же величинах, что и «управления» с функцией фоновых источников на Γ_2 , причем он постоянный во все моменты времени. Поскольку расчеты проводятся на примере СО (оксид углерода), то этот коэффициент принимает постоянное значение и $g^{em} = 270 \frac{\text{мг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$. Величины $u, v, w, U_n^{(-)}, U_n^{(+)}$ и β измеряются в $\frac{\text{м}}{\text{с}}$, причем $\beta = 0.05 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ (значение взято

из [5]). Коэффициенты «горизонтальной» диффузии постоянны по величине и $a_{xx} = a_{yy} = 2000 \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$, а коэффициент «вертикальной» диффузии $a_{zz} = 2 \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$ в задаче (а) и переменный, в задачах (б) и (в), его значения здесь не приводим, а лишь отметим, что он много меньше коэффициентов «горизонтальной» диффузии.

Далее, «весовая» функция g , вычисляемая по формуле (47) (для задачи оптимизации «средней» концентрации загрязнений), измеряется в $\frac{1}{\text{м}^3\text{с}}$. Отсюда, а также из вида задач (18)-(21), (28) и формулы для вычисления «средней» концентрации загрязнений, приведенной в главе 2, следует, что размерность g — $\frac{1}{\text{м}^3}$, а $\bar{\phi}$ и φ_{acc} — $\frac{\text{мг}}{\text{м}^3}$.

Теперь опишем размерности величин и коэффициентов, входящих в сопряженную задачу (77), а также в определение экономического ущерба (66). $I_t^{\text{инд.}} \approx 2.2$ (на конец 2013 года) — безразмерная величина, $\tilde{Q}_{2003}^{\text{атм.}} = 144 \frac{\text{руб.}}{\text{усл.т.}}$, $A^{\text{атм.}} = 1 \frac{\text{усл.т.}}{\text{т}}$ (для СО), σ — переменный безразмерный коэффициент. Отметим, что при численном моделировании тонны переводились в мг. Учитывая, что временные параметры (t_k, T, \dots) измеряются в секундах и, вспоминая что g_k вычисляется по формуле (65) (которая является правой частью сопряженной задачи (66)), получаем, что g_k измеряется в $\frac{\text{руб.}}{\text{мг} \cdot \text{с}}$. Из этой размерности и из вида «вспомогательной» сопряженной задачи получаем, что величина измерения q_k — $\frac{\text{руб.}}{\text{мг}}$, экономического ущерба Q_k — руб. Наконец, стоимость тушения пожара средней интенсивности $\text{Pr} \approx 0.557 \frac{\text{руб.}}{\text{мг}/\text{м}^2}$ (на основе информации взятой с сайта о лесной промышленности <http://www.lesonline.ru/news/?id=210600> $\text{Pr} \approx 4.3 \frac{\text{руб.}}{\text{мг}/\text{м}^2}$, но конкретного вещества не указано, поэтому происходил перевод этой стоимости в аналогичную для СО). Параметр регуляризации α для каждой из задач (а), (б) и (в) оценивался из специальных соотношений, которые будут приведены в ходе описания численных экспериментов. В завершении обсуждения величин отметим, что все коэффициенты и функции, входящие в (28) с правой часть g , вычисляемой по формуле (71) (для задачи оптимизации эконо-

номического ущерба с учетом ресурсов на устранение локальных источников), имеют те же размерности, что и величины в задаче (77).

Приведем далее параметры области и расчетной сетки. Область выбиралась следующей:

$$\Omega = (35^\circ \text{ E}, 42^\circ \text{ E}) \times (54^\circ \text{ N}, 57^\circ \text{ N}) \times (0 \text{ км}, 1 \text{ км}),$$

где

$$A_1 = 35^\circ \text{ E}, A_2 = 42^\circ \text{ E}, B_1 = 54^\circ \text{ N}, B_2 = 57^\circ \text{ N}, C_1 = 0 \text{ км}, C_2 = 1 \text{ км}.$$

Отметим, что при численных расчетах все эти величины переводились в метры, приближенные значения перевода данных величин показаны ниже:

$$A_1 = 2225000 \text{ м}, A_2 = 2670000 \text{ м}, B_1 = 5994000 \text{ м}, B_2 = 6327000 \text{ м}, \\ C_1 = 0 \text{ м}, C_2 = 1000 \text{ м}.$$

Расчет проводился со следующими параметрами сетки по пространству и времени:

$$h_x = (A_2 - A_1)/N_x, N_x = 147, h_x \approx 3000 \text{ м}, \\ h_y = (B_2 - B_1)/N_y, N_y = 110, h_y \approx 3000 \text{ м}, \\ h_z = (C_2 - C_1)/N_z, N_z = 20, h_z = 50 \text{ м}, \\ h_t = T/N_t, T = 259200 \text{ с}, N_t = 72, h_t = 3600 \text{ с}.$$

Для дальнейшего описания нам потребуются следующие обозначения (для «охраняемого» региона Ω_{obs}):

$$A_{o,max} \text{ — максимальная координата по } Ox, \\ A_{o,min} \text{ — минимальная координата по } Ox, \\ B_{o,max} \text{ — максимальная координата по } Oy, \\ B_{o,min} \text{ — минимальная координата по } Oy.$$

В качестве «охраняемой» зоны Ω_{obs} в задаче (а) бралась вся область Ω , а в задачах (б) и (в) — регион Москвы и Московской области (рисунок 7), приближенный прямоугольниками (см. рисунок 8). На рисунке 9 приведена карта регионов возникновения пожаров (красные круги) в Московской области и в смежных с ней областях за период с 15 июля по 15 августа 2010 года и их количество (цифры в кругах). На основе этой и аналогичных карт возникновения пожаров, взятых с сайта <http://fires.kosmosnimki.ru/>, были выбраны три зоны (см. рисунки 10-12), в которых могут возникать локальные источники (территории лесов и торфяников). Из рисунка 8 видно, что в данном случае $A_{o,min} = 35^{\circ}19'48''$ E, $A_{o,max} = 39^{\circ}52'48''$ E, $B_{o,min} = 54^{\circ}16'12''$ N, $B_{o,max} = 56^{\circ}57'00''$ N.

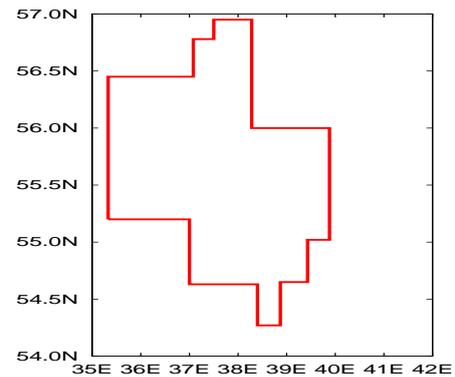


Рис. 7: Регион Москвы и Московской области («охраняемый» регион в задачах (б) и (в)).

Рис. 8: Нижняя граница «охраняемого» региона Ω_{obs} , приближенная прямоугольниками (задачи (б) и (в)).

В завершении описания параметров задачи оговорим, что при численном моделировании значения коэффициентов σ брались не из монографии [22], а задавались следующим соотношением (при $(x, y) \in \Omega_{obs}$):

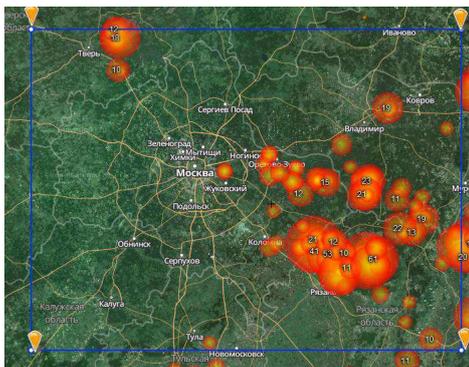


Рис. 9: Карта возникновения регионов локальных источников за период с 15.07.2010 по 15.08.2010.

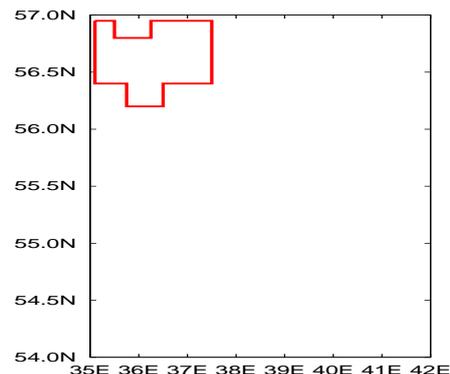


Рис. 10: Первая зона лесов и торфяников.

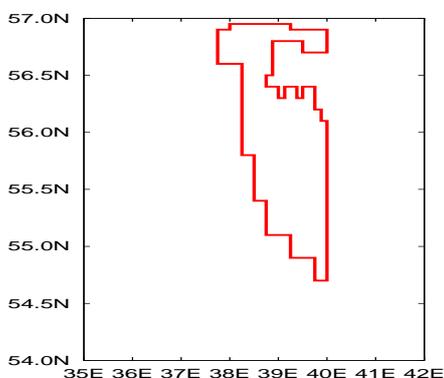


Рис. 11: Вторая зона лесов и торфяников.

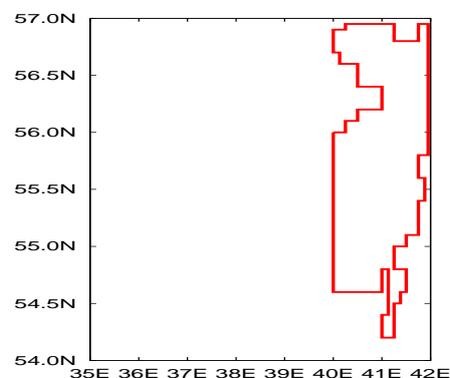


Рис. 12: Третья зона лесов и торфяников.

$$\sigma(x, y) = \begin{cases} 1.2, & \text{при } A_{o,min} \leq x < \frac{A_{o,max} + A_{o,min}}{2}, \\ & B_{o,min} \leq y < \frac{B_{o,max} + B_{o,min}}{2}; \\ 3.0, & \text{при } \frac{A_{o,max} + A_{o,min}}{2} \leq x \leq A_{o,max}, \\ & B_{o,min} \leq y < \frac{B_{o,max} + B_{o,min}}{2}; \\ 2.0, & \text{при } A_{o,min} \leq x < \frac{A_{o,max} + A_{o,min}}{2}, \\ & \frac{B_{o,max} + B_{o,min}}{2} \leq y \leq B_{o,max}; \\ 0.7, & \text{при } \frac{A_{o,max} + A_{o,min}}{2} \leq x \leq A_{o,max}, \\ & \frac{B_{o,max} + B_{o,min}}{2} \leq y \leq B_{o,max}. \end{cases}$$

По порядку величины эти тестовые коэффициенты совпадают с теми, что приведены в [22]. Как отмечалось выше, при численном решении задачи использу-

ется монотонная схема первого порядка точности, построенная в главе 4 настоящей диссертации. В следующем параграфе этой главы перейдем к обсуждению результатов численных экспериментов по решению рассматриваемого класса задач.

§ 5.3. Результаты численных экспериментов по решению исследуемого класса задач

В данном параграфе демонстрируются результаты численного решения задач (а), (б) и (в).

Эксперимент (а). В данном эксперименте обсуждаются результаты численного решения задачи оптимизации «средней» концентрации загрязнений в регионе. Эксперимент направлен в основном на тестирование комплекса программ, созданного для решения класса задач о локальных источниках при интегральном наблюдении. Вектор скорости ветра брался постоянным:

$$(u, v, w) = (-6.0, -4.0, -0.005). \quad (122)$$

Для такого вектора скорости ветра выполняется соотношение $\operatorname{div} \vec{u} = 0$ в области Ω . Функции фоновых источников f , $g_{(\Gamma_2)}$, $g_{(\Gamma)}$ в области Ω и на границах Γ_2 и Γ/Γ_2 соответственно, а также начальное значение концентрации загрязнения $\phi_{(0)}$ в области Ω будем определять из уравнений (18)-(21), подставив в них $\eta_l = g_l^{em} = 0$, $l = \overline{1, N_L}$, $N_L = 168$ (число локальных источников) и «тестовую» концентрацию загрязнения ϕ_{test} , имеющую вид:

$$\begin{aligned} \phi_{test} = \frac{t}{10h_t} & \left(\cos^2 \left(\frac{\pi(x - A_1)}{4(A_2 - A_1)} \right) + \cos^2 \left(\frac{\pi(y - B_1)}{4(B_2 - B_1)} \right) + \right. \\ & \left. + \cos^2 \left(\frac{\pi(z - C_1)}{4(C_2 - C_1)} \right) \right). \end{aligned}$$

Функции фоновых источников, а также начальная концентрация загрязнений,

после подстановки ϕ_{test} в (18)-(21) брались следующими:

$$f = \frac{1}{10h_t} \left(\cos^2 \left(\frac{\pi(x - A_1)}{4(A_2 - A_1)} \right) + \cos^2 \left(\frac{\pi(y - B_1)}{4(B_2 - B_1)} \right) + \cos^2 \left(\frac{\pi(z - C_1)}{4(C_2 - C_1)} \right) \right) -$$

$$- \frac{t\pi}{40h_t} \left(u \frac{\sin \left(\frac{\pi(x - A_1)}{2(A_2 - A_1)} \right)}{A_2 - A_1} + v \frac{\sin \left(\frac{\pi(y - B_1)}{2(B_2 - B_1)} \right)}{B_2 - B_1} + w \frac{\sin \left(\frac{\pi(z - C_1)}{2(C_2 - C_1)} \right)}{C_2 - C_1} \right) +$$

$$+ \frac{t\pi^2}{80h_t} \left(a_{xx} \frac{\cos \left(\frac{\pi(x - A_1)}{2(A_2 - A_1)} \right)}{(A_2 - A_1)^2} + a_{yy} \frac{\cos \left(\frac{\pi(y - B_1)}{2(B_2 - B_1)} \right)}{(B_2 - B_1)^2} + a_{zz} \frac{\cos \left(\frac{\pi(z - C_1)}{2(C_2 - C_1)} \right)}{(C_2 - C_1)^2} \right),$$

$$g_{(\Gamma_2)} = \frac{\beta t}{10h_t} \left(\cos^2 \left(\frac{\pi(x - A_1)}{4(A_2 - A_1)} \right) + \cos^2 \left(\frac{\pi(y - B_1)}{4(B_2 - B_1)} \right) + 1 \right),$$

$$\phi_{(0)} = 0,$$

$$g_{(\Gamma)}(x, y, z, t) = \begin{cases} 0 \text{ на } \Gamma_1 \times (0, T), \\ \frac{t}{10h_t} \left(\frac{1}{2} + \cos^2 \left(\frac{\pi(y - B_1)}{4(B_2 - B_1)} \right) + \cos^2 \left(\frac{\pi(z - C_1)}{4(C_2 - C_1)} \right) + \right. \\ \left. + \frac{a_{xx}\pi}{4u(A_2 - A_1)} \right) \text{ на } \Gamma_3 \times (0, T), \\ \frac{t}{10h_t} \left(\cos^2 \left(\frac{\pi(x - A_1)}{4(A_2 - A_1)} \right) + \cos^2 \left(\frac{\pi(y - B_1)}{4(B_2 - B_1)} \right) + \frac{1}{2} + \right. \\ \left. + \frac{a_{zz}\pi}{4w(C_2 - C_1)} \right) \text{ на } \Gamma_4 \times (0, T), \\ 0 \text{ на } \Gamma_5 \times (0, T), \\ \frac{t}{10h_t} \left(\cos^2 \left(\frac{\pi(x - A_1)}{4(A_2 - A_1)} \right) + \frac{1}{2} + \cos^2 \left(\frac{\pi(z - C_1)}{4(C_2 - C_1)} \right) + \right. \\ \left. + \frac{a_{yy}\pi}{4v(B_2 - B_1)} \right) \text{ на } \Gamma_6 \times (0, T). \end{cases}$$

Все функции f , $g_{(\Gamma_2)}$, $g_{(\Gamma)}$ и $\phi_{(0)}$ — неотрицательные (что видно из значений коэффициентов и параметров данного эксперимента). Поскольку имеет место ограничение (Б) из Теоремы 3 и для дискретизации уравнения конвекции-диффузии и граничных условий использовались монотонные схемы, то в результате численного решения будет получена неотрицательная концентрация загрязне-

ний (что имеет физический смысл и будет проиллюстрировано результатами этого эксперимента).

Параметр регуляризации α оценивался экспериментально из неравенства

$$\alpha \ll \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)^2 dt,$$

то есть выбирался настолько малым, чтобы первое слагаемое в знаменателе из формулы (52) для вычисления «управлений» было много меньше второго слагаемого. В приводимом численном эксперименте $\alpha = 10^{-12}$ с.

Перейдем теперь непосредственно к описанию результатов эксперимента. Средняя концентрация загрязнений по всей области Ω , которая получалась бы на $(0, T)$ без «управлений», $\bar{\phi}_0 \approx 14.78 \frac{\text{МГ}}{\text{М}^3}$ в данном случае. Минимальное значение средней концентрации загрязнения, которого возможно достичь, вычислялось из условия (В) (неравенство заменялось фактически равенством) и имело значение $\varphi_{acc} \approx 7.95 \frac{\text{МГ}}{\text{М}^3}$.

Обсудим некоторые результаты численных расчетов. На рисунках 13-16 приведена зависимость «управлений» от времени, когда m_l заданы в некоторых регионах. Координаты регионов следующие:

$$\begin{aligned} (\tilde{A}_1, \tilde{B}_1) &= (41^\circ 28' 21'' \text{ E}, 54^\circ 41' 17'' \text{ N}), \\ (\tilde{A}_2, \tilde{B}_2) &= (39^\circ 01' 38'' \text{ E}, 55^\circ 14' 18'' \text{ N}), \\ (\tilde{A}_3, \tilde{B}_3) &= (39^\circ 16' 01'' \text{ E}, 56^\circ 03' 51'' \text{ N}), \\ (\tilde{A}_4, \tilde{B}_4) &= (36^\circ 17' 40'' \text{ E}, 56^\circ 31' 55'' \text{ N}). \end{aligned}$$

Из графиков видно, что «управления» по модулю не превосходят интенсивностей локальных источников ни в один момент времени и ни в одном регионе, благодаря выполнению ограничения (Б) из Теоремы 3. «Управления» зависят от решения q сопряженной задачи, которое в частности определяется скоростью ветра. Поскольку вектор скорости ветра постоянный в данном эксперименте, то и графики «управлений» имеют похожий вид. Стремление «управлений» к

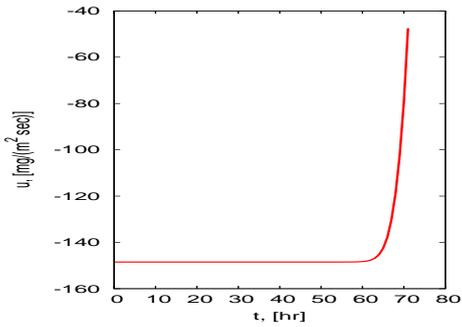


Рис. 13: «Управление» η в регионе с координатой $(\tilde{A}_1, \tilde{B}_1)$.

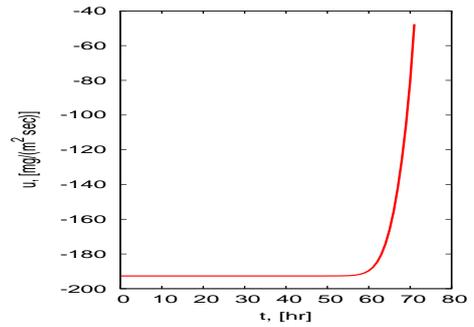


Рис. 14: «Управление» η в регионе с координатой $(\tilde{A}_2, \tilde{B}_2)$.

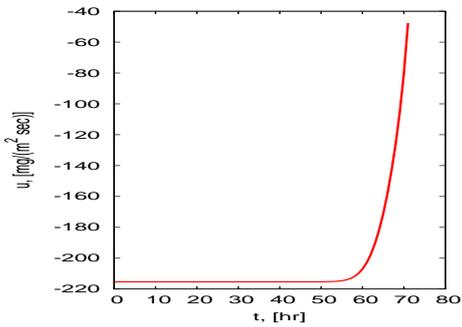


Рис. 15: «Управление» η в регионе с координатой $(\tilde{A}_3, \tilde{B}_3)$.

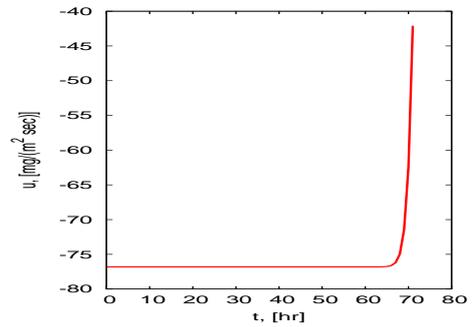


Рис. 16: «Управление» η в регионе с координатой $(\tilde{A}_4, \tilde{B}_4)$.

нулю в конце временного интервала $(0, T)$ объясняется видом задачи (28), в постановке которой $q|_{t=T} = 0$, то есть решение (28) в конечный момент времени равно нулю. Также отметим, что «управления» принимают не положительные значения, поскольку $\bar{\varphi}_{acc} = \varphi_{acc} - \bar{\phi}_0 < 0$.

На рисунках 17-22 показаны значения концентрации ϕ в исследуемой области на высотах 50, 500 и 950 метров в случае, когда задача решалась с «управлениями», вычисляемыми по формуле (52) (рисунки 17, 19, 21 соответственно) и без «управлений» (рисунки 18, 20, 22 соответственно). Как и следовало ожидать, значение концентраций на графиках слева меньше, чем та же величина справа, а скорость ее устранения в конкретном месте в конкретный момент времени зависит от «управлений». Также отметим, что чем меньше высота, тем больше эффект от «управлений» (что опять же является ожидаемым результатом, поскольку управления локальными источниками происходили лишь на

нижней границе). «Средняя» концентрация загрязнений, которая получилась в области Ω в результате управлений $\bar{\phi} \approx 8.54 \frac{\text{МГ}}{\text{М}^3}$, то есть ее удалось уменьшить приблизительно в два раза (по отношению к $\bar{\phi}_0$), а ее значение близко к значению φ_{acc} (различие составляет приблизительно 7 %). Отметим, что величины $\bar{\phi}$ и φ_{acc} не равны в точности, поскольку имеют место ошибки вычисления, а также параметр регуляризации α брался ненулевым. Однако близость значений $\bar{\phi}$ и φ_{acc} иллюстрирует справедливость равенства $\lim_{\alpha \rightarrow 0} J_\alpha = 0$ для функционала (49).

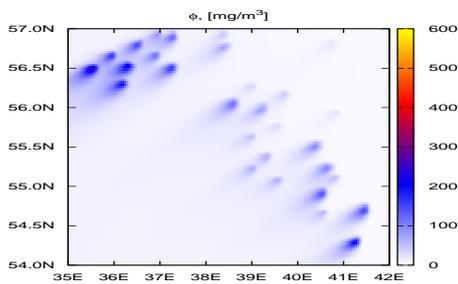


Рис. 17: Концентрация ϕ на высоте 50 м в момент времени $t = 48$ ч (задача с «управлениями»).

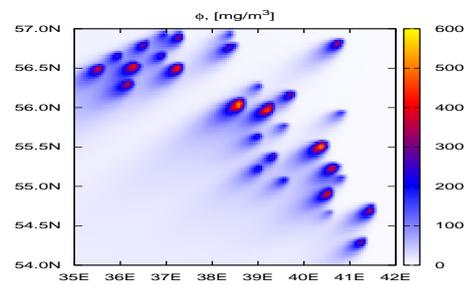


Рис. 18: Концентрация ϕ на высоте 50 м в момент времени $t = 48$ ч (задача без «управлений»).

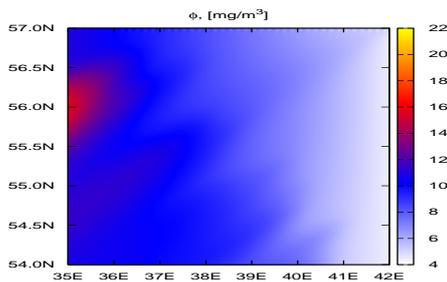


Рис. 19: Концентрация ϕ на высоте 500 м в момент времени $t = 48$ ч (задача с «управлениями»).

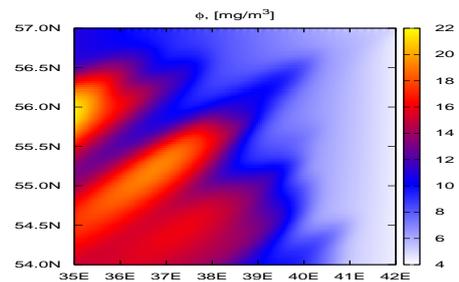


Рис. 20: Концентрация ϕ на высоте 500 м в момент времени $t = 48$ ч (задача без «управлений»).

Кроме того, отметим, что в данном эксперименте «средняя» концентрация загрязнений уменьшена приблизительно в два раза и не более, поскольку про-

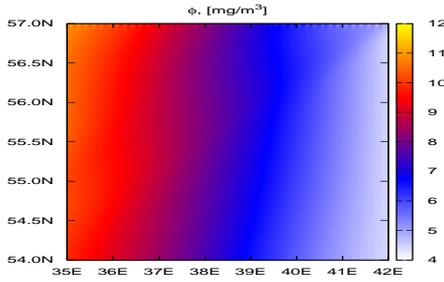


Рис. 21: Концентрация ϕ на высоте 950 м в момент времени $t = 48$ ч (задача с «управлениями»).

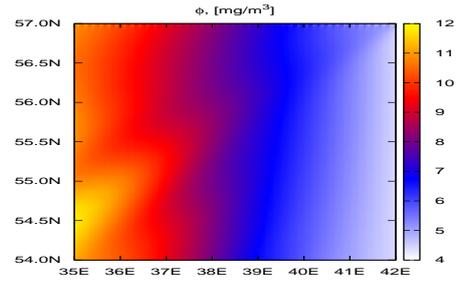


Рис. 22: Концентрация ϕ на высоте 950 м в момент времени $t = 48$ ч (задача без «управлений»).

исходит управление лишь интенсивностями локальных источников на нижней границе, а «управлений» в области, на боковых и верхней границах не происходит. Поэтому можно сделать предположение: чтобы уменьшить «среднюю» концентрацию загрязнения в случае присутствия фоновых источников значительнее, необходимо вводить дополнительные «управления» другого типа.

Эксперимент (б). В этом эксперименте описаны результаты решения N_k задач (60)-(64) с группами локальных источников, возникающих в различные моменты. Всего решались $N_k = 4$ прямых и сопряженных задач, источники загрязнений стартовали в следующие моменты времени:

$$t_1 = 0 \text{ часов, } t_2 = 18 \text{ часов, } t_3 = 36 \text{ часов, } t_4 = 54 \text{ часа.}$$

В каждый из приведенных выше моментов времени всего $N_L^k = 42$ источника загрязнений одновременно начинали загрязнять окружающую среду (суммарно было 168 локальных источников как и в эксперименте (а)). Расчет производился со следующими проекциями вектора скорости ветра:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= -40 \cdot \frac{T - 4t}{4T} \cdot \frac{A_2 + A_1 - 2x}{2(A_2 - A_1)}, \\ v(x, y, z, t) &= 50 \cdot \frac{T - 4t}{4T} \cdot \frac{B_2 + B_1 - 2y}{2(A_2 - A_1)}, \\ w(x, y, z, t) &= -10 \cdot \frac{T - 4t}{4T} \cdot \frac{C_2 + C_1 - 2z}{2(A_2 - A_1)}. \end{aligned}$$

Для них выполняется соотношение бездивергентности, но они переменные по времени и по пространству в отличие от Эксперимента (а). Параметр регуляризации α выбирался по тем же принципам, что и в Эксперименте (а), но оценивался из другого неравенства

$$\alpha \ll \frac{\min_{k=1, N_k} \left(\sum_{l_k=1}^{N_L^k} \int_{t_k}^T \left(\int_{\Gamma_2} m_{l_k}^k q_k d\Gamma_2 \right)^2 dt \right)}{\text{Pr}^2}$$

и брался в итоге $\alpha = 10^{-5}$ с.

Приведем далее некоторые графики. На рисунках 23-26 приведена зависимость «управлений» от времени, когда $m_{l_k}^k$ заданы в регионах с теми же координатами, как и в предыдущем эксперименте. Графики 23-26 значительно отличаются от графиков 13-16 (даже несмотря на то, что $m_{l_k}^k$ заданы в регионах с теми же координатами, что и ранее), поскольку, как отмечалось выше, «управления» в значительной степени зависят от вектора скорости ветра, который здесь переменный, а не постоянный, и графики «управлений» не схожи по виду. Также отметим, что управление локальными источниками начинается в момент времени их старта. Кроме того, в этом эксперименте в качестве «охраняемого» региона бралась не вся область Ω , а Ω_{obs} , описанная в предыдущем параграфе. Поэтому помимо направления и значения скорости ветра (если он направлен в сторону «охраняемого региона», то устранять локальные источники нужно с большей скоростью, чем в противном случае), значения «управлений» определяются месторасположением локальных источников: чем ближе источник загрязнений к «охраняемому региону» (или месту региона, коэффициент σ в котором наибольший), тем с большей скоростью его надо устранять. Из этих рисунков следует, что решая поставленную задачу по алгоритму, приведенному в главе 3, можно оценить на какие из регионов необходимо тратить наибольшее количество ресурсов.

На рисунках 27-30 показаны значения концентрации ϕ_1 от источников, стартовавших в момент t_1 в исследуемой области на высоте 50 метров в раз-

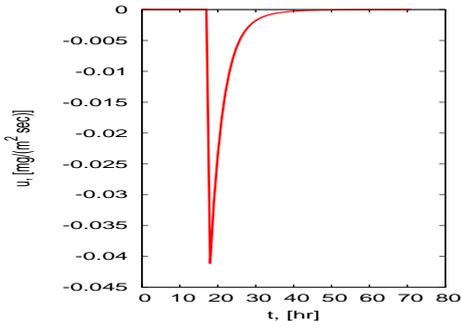


Рис. 23: «Управление» η в регионе с координатой $(\tilde{A}_1, \tilde{B}_1)$, t_2 — время старта источника.

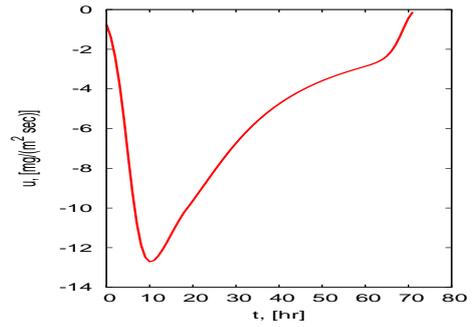


Рис. 24: «Управление» η в регионе с координатой $(\tilde{A}_2, \tilde{B}_2)$, t_1 — время старта источника.

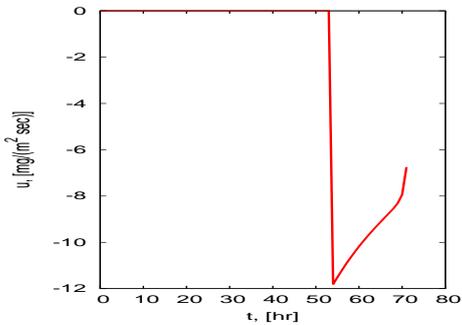


Рис. 25: «Управление» η в регионе с координатой $(\tilde{A}_3, \tilde{B}_3)$, t_4 — время старта источника.

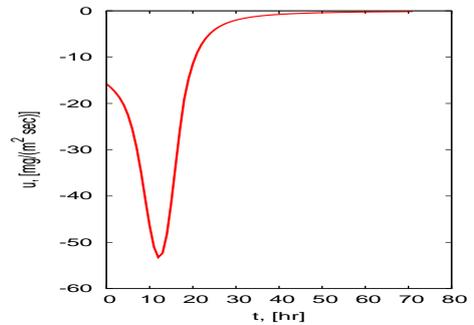


Рис. 26: «Управление» η в регионе с координатой $(\tilde{A}_4, \tilde{B}_4)$, t_1 — время старта источника.

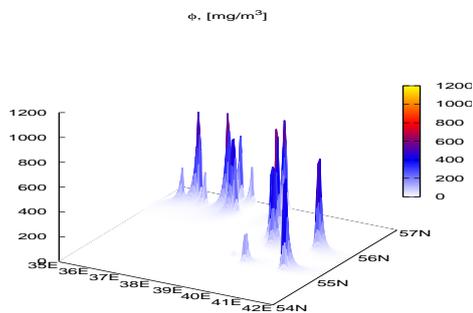


Рис. 27: Концентрация ϕ_1 на высоте 50 м в момент времени $t = 12$ ч (задача с «управлениями»).

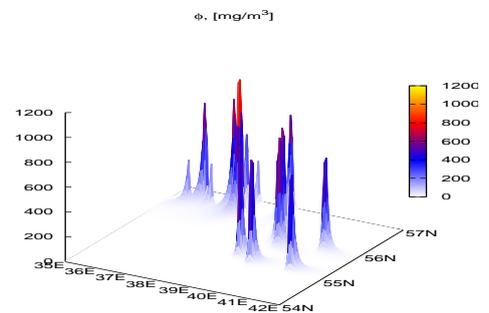


Рис. 28: Концентрация ϕ_1 на высоте 50 м в момент времени $t = 12$ ч (задача без «управлений»).

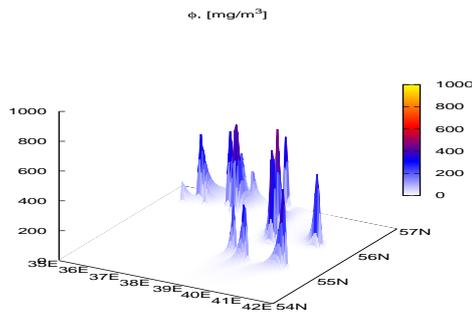


Рис. 29: Концентрация ϕ_1 на высоте 50 м в момент времени $t = 36$ ч (задача с «управлениями»).

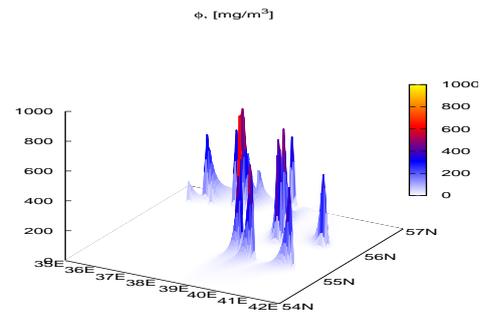


Рис. 30: Концентрация ϕ_1 на высоте 50 м в момент времени $t = 36$ ч (задача без «управлений»).

ные моменты времени в случае, когда задача решалась с «управлениями» (80) (рисунки 27 и 29) и без «управлений» (рисунки 28 и 30). Аналогично Эксперименту (а), значение концентраций на графиках слева меньше, чем та же величина справа. Графики концентрации на больших высотах здесь не приводим, поскольку, как отмечалось в предыдущем эксперименте, «управления» происходят на нижней границе и не оказывают существенного влияния на концентрации на верхних уровнях.

Теперь приведем значения ущербов и количества ресурсов, необходимого на устранение локальных источников. Результаты получились следующими:

$$\begin{aligned} Q_1^{att} &\approx 70.8 \text{ млн. руб.}, & Q_1 &\approx 71.1 \text{ млн. руб.}, \\ Q_2^{att} &\approx 37.7 \text{ млн. руб.}, & Q_2 &\approx 31.9 \text{ млн. руб.}, \\ Q_3^{att} &\approx 34.2 \text{ млн. руб.}, & Q_3 &\approx 35.0 \text{ млн. руб.}, \\ Q_4^{att} &\approx 15.4 \text{ млн. руб.}, & Q_4 &\approx 13.6 \text{ млн. руб.}, \\ Q^{att} &\approx 158.1 \text{ млн. руб.}, & Q &\approx 151.6 \text{ млн. руб.} \end{aligned}$$

Из приведенных величин следует, что значения «достижимого» ущерба и остаточного ущерба совпадают с точностью до второго знака. Равенства между ними быть не может (как и в Эксперименте (а)), поскольку в расчетах использовалась схема первого порядка точности, на каждом шаге вычислений (например, решений СЛАУ) имеют место ошибки и параметр регуляризации брался

положительным, не нулевым. Тем не менее все приведенные величины близки по значению, а близость Q и Q^{att} иллюстрирует справедливость Теоремы 5, которая была сформулирована и доказана в главе 3 настоящей диссертации. Первоначальные ущербы принимали значения:

$$\begin{aligned} Q_1 &\approx 136.1 \text{ млн. руб.}, & Q_2 &\approx 103.9 \text{ млн. руб.}, \\ Q_3 &\approx 105.8 \text{ млн. руб.}, & Q_4 &\approx 37.3 \text{ млн. руб.}, \\ Q &\approx 383.1 \text{ млн. руб.} \end{aligned}$$

Как видим, в данном случае суммарный первоначальный ущерб удалось уменьшить на 231.5 млн. рублей (приблизительно в два с половиной раза).

Количество ресурсов, необходимое для решения поставленной задачи, вычислялось по формуле

$$Res = -Pr \sum_{k=1}^{N_k} \sum_{l_k=1}^{N_L^k} \int_{t_k}^T \eta_{l_k}(t) dt$$

и получилось равным $Res \approx 676.7$ млн. рублей. Отметим, что если бы устранялись все источники, причем с максимально возможными «управлениями» (по модулю равными значению g^{em}), то $Res \approx 4.1$ млрд. рублей (приблизительно в шесть раз больше). Отсюда можно сделать следующий вывод: вычисление «управлений» с помощью функции «чувствительности» позволяет значительно сэкономить ресурсы по сравнению с тем, если бы они оценивались через коэффициенты эмиссии без учета «чувствительности». Также экономия средств на устранение локальных источников важна в свете того, что количество ресурсов может быть, вообще говоря, недостаточным для решения проблемы. В следующем эксперименте как раз описываются результаты численного решения задачи оптимизации экономического ущерба с учетом ресурсов, выделенных на ликвидацию локальных источников.

Эксперимент (в1). Приведем результаты первого численного эксперимента по решению задачи (в) (реализовывался многошаговый алгоритм). В рассматриваемом эксперименте расчет производился со следующими скоростями ветра:

$$\begin{aligned}
u(x, y, z, t) &= -30 \cdot \frac{T - 4t}{4T} \cdot \frac{A_2 + A_1 - 2x}{2(A_2 - A_1)}, \\
v(x, y, z, t) &= 40 \cdot \frac{T - 4t}{4T} \cdot \frac{B_2 + B_1 - 2y}{2(A_2 - A_1)}, \\
w(x, y, z, t) &= -10 \cdot \frac{T - 4t}{4T} \cdot \frac{C_2 + C_1 - 2z}{2(A_2 - A_1)}.
\end{aligned}$$

Предполагалось, что все локальные источники стартовали в момент $t = 0$ и их число $N_L = 50$.

На рисунках 31-34 приведена зависимость «управлений» от времени, когда m_l заданы в некоторых точках. Координаты точек следующие:

$$\begin{aligned}
(\tilde{A}_5, \tilde{B}_5) &= (39^\circ 33' 18'' \text{ E}, 55^\circ 06' 00'' \text{ N}), \\
(\tilde{A}_6, \tilde{B}_6) &= (39^\circ 39' 00'' \text{ E}, 55^\circ 47' 24'' \text{ N}), \\
(\tilde{A}_7, \tilde{B}_7) &= (37^\circ 21' 00'' \text{ E}, 56^\circ 31' 48'' \text{ N}), \\
(\tilde{A}_8, \tilde{B}_8) &= (36^\circ 57' 54'' \text{ E}, 56^\circ 42' 00'' \text{ N}).
\end{aligned}$$

Здесь «управления» зависят не только от направления и значения скорости ветра, месторасположения локальных источников, но и от количества ресурсов Res_{av} , выделенного на ликвидацию источников загрязнений.

На рисунках 35-36 показаны значения концентрации ϕ в исследуемой области на высоте 50 метров в случае, когда задача решалась с «управлениями», вычисляемыми по формуле (103) (рисунок 35) и без «управлений» (рисунок 36). Как и следовало ожидать, значение концентраций на графиках слева меньше, чем та же величина справа, а скорость ее устранения в конкретном месте в конкретный момент времени зависит от «управлений» (например, две группы источников, которые находятся в «охраняемом регионе», устраняются практически до нуля, поскольку модуль величины «управлений» наибольший в этих регионах).

Количество ресурсов, которое было выделено на устранение локальных источников в данном эксперименте $Res_{av} = 500$ млн. рублей. Отметим, что мак-

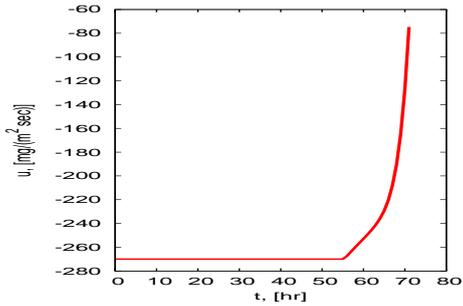


Рис. 31: «Управление» η в регионе с координатой $(\tilde{A}_5, \tilde{B}_5)$ в зависимости от времени t .

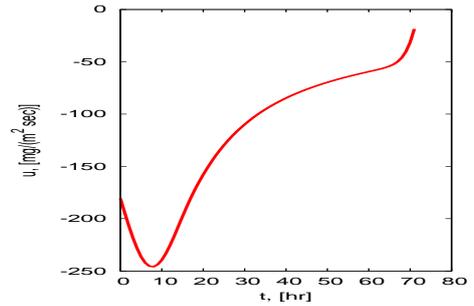


Рис. 32: «Управление» η в регионе с координатой $(\tilde{A}_6, \tilde{B}_6)$ в зависимости от времени t .

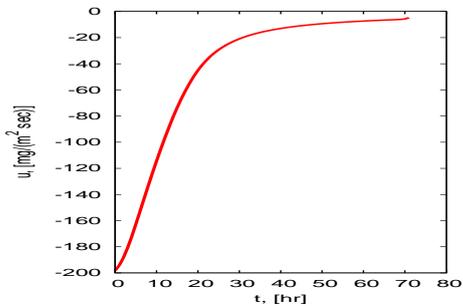


Рис. 33: «Управление» η в регионе с координатой $(\tilde{A}_7, \tilde{B}_7)$ в зависимости от времени t .

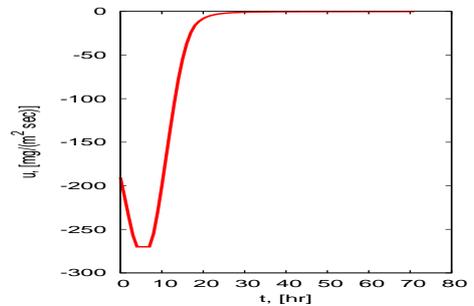


Рис. 34: «Управление» η в регионе с координатой $(\tilde{A}_8, \tilde{B}_8)$ в зависимости от времени t .

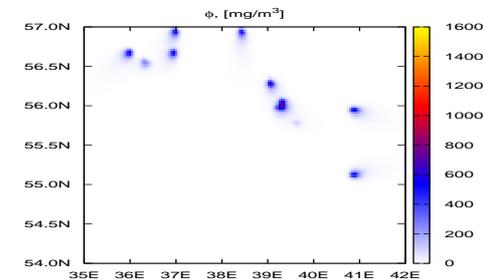


Рис. 35: Концентрация ϕ на высоте 50 м в момент времени $t = 12$ ч (задача с «управлениями»).

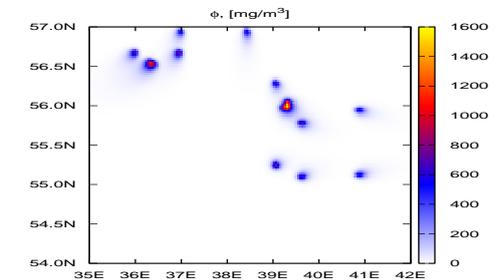


Рис. 36: Концентрация ϕ на высоте 50 м в момент времени $t = 12$ ч (задача без «управлений»).

симальное количество ресурсов Res_{max} вычислялось из соотношения

$$Res_{max} = \Pr \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T g_l^{em}(t) dt \approx \Pr \sum_{l=1}^{N_L} \sum_{i=1}^{N_t} g_l^{em}(t_i) h_t$$

и получилось равным $Res_{max} \approx 1.95$ млрд. рублей (то есть имеет место неравенство $Res_{av} \leq Res_{max}$). Уменьшение первоначального ущерба вычислялось по формуле (104) и его значение $\delta Q \approx 112.6$ млн. рублей. Первоначальный ущерб и остаточный ущерб рассчитывались из соотношений (73) и (72) соответственно, $Q_0 \approx 133.8$ млн. рублей и $Q \approx 20.7$ млн. рублей. Разность $Q_0 - \delta Q \approx 21.2$ млн. рублей, что достаточно близко к величине Q (различие составляет приблизительно 2.5%). Равенства между этими величинами быть не может по тем же причинам, что и в экспериментах (а) и (б). Тем не менее значения этих величин близки и результаты эксперимента иллюстрируют справедливость Теоремы 7 из главы 3. Отметим, что в данном эксперименте первоначальный ущерб был уменьшен приблизительно в шесть с половиной раз.

Помимо расчета с «управлениями», вычисляемыми по формуле (103), здесь проводился еще один расчет. Количество ресурсов $Res_{av} = 500$ млн. рублей 50 раз случайным образом распределялось по N_L регионам источников загрязнений, то есть выбирались 50 «случайных» векторов «управлений» и с ними численно решалась задача (18)-(21). Отмечаем, что программная реализация процессов построения 50 векторов «управлений» и решения 50 задач вида (18)-(21) осуществлялась с использованием технологии OpenMP, поскольку процессы построения «управлений» и решений трехмерных нестационарных уравнений конвекции-диффузии независимы. Вышеописанный расчет проводился с целью демонстрации того факта, что «управления» (103) действительно являются оптимальными и распределение ресурсов Res_{av} случайным образом по регионам локальных источников не приводит к решению задачи (в). Это утверждение проиллюстрировано на рисунках 37-38. Значения «случайных» оста-

точных ущербов, а также функционалов со «случайными» векторами «управлений» существенно больше значений аналогичных величин с «управлениями» (103) (при $NumExper = 26$), то есть глобальный минимум функционала (76) не достигается на «случайных» векторах «управлений».

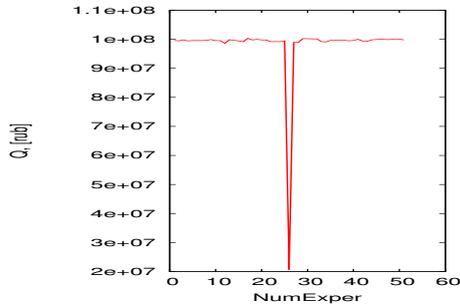


Рис. 37: Остаточные ущербы Q , полученные в результате решения задачи со случайными векторами «управлений» и с вектором «управлений» (103) ($NumExper = 26$).

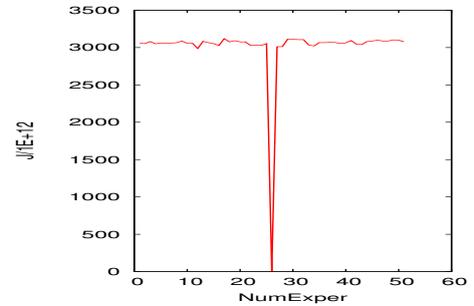


Рис. 38: Нормированные значения функционала $J_\alpha/10^{12}$, полученные в результате решения задачи с оптимальным (103) и случайными векторами «управлений» ($NumExper = 26$).

Эксперимент (в2). Опишем результаты еще одного численного эксперимента по решению задачи (в). Здесь расчет проводился с постоянным вектором скорости ветра (122), но выбирались $N_L = 100$ источников загрязнений таким образом, чтобы загрязнение от каждого из них попадало в «охраняемый» регион в случае, если не происходит управлений локальными источниками (см. рисунок 39). В данном эксперименте $Res_{av} = 3$ млрд. рублей при том, что $Res_{max} \approx 3.9$ млрд. рублей. Вектор «управлений» помимо стандартного способа (по формуле (103) с помощью функции «чувствительности», которая приведена на рисунке 40) вычислялся еще одним способом. Поскольку загрязнение от всех источников попадет в «охраняемый» регион и мощность источников одинаковая, то ресурсы распределяются равномерно по всем регионам, то есть «управления» рассчитываются из соотношения:

$$u_l^{NotOpt}(t) = -\frac{Res_{av}}{Pr \cdot N_L \cdot T} \approx -207.6 \frac{\text{МГ}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}, \quad l = \overline{1, N_L}, \quad t \in (0, T). \quad (123)$$

Подобный способ распределения ресурсов не научный, а «разумный» при описанных выше условиях. Далее сравниваются результаты решения задачи (18)-(21) с $u_l(t)$ и $u_l^{NotOpt}(t)$. На рисунках 41-42 изображены концентрации загрязне-

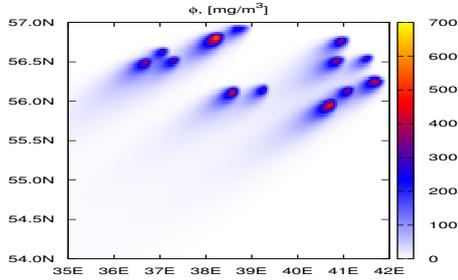


Рис. 39: Концентрация ϕ на высоте 50 м в момент времени $t = 24$ ч (задача без «управлений»).

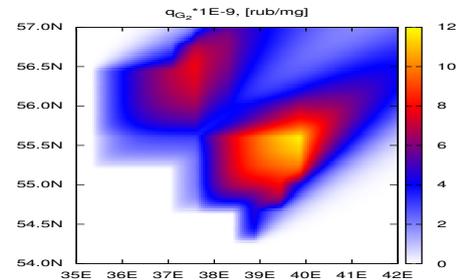


Рис. 40: Функция «чувствительности» q на нижней границе в момент времени $t = 24$ ч.

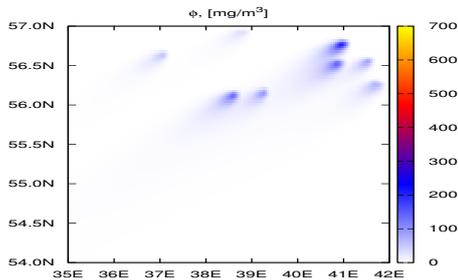


Рис. 41: Концентрация ϕ на высоте 50 м в момент времени $t = 24$ ч (задача с «управлениями» u_l).

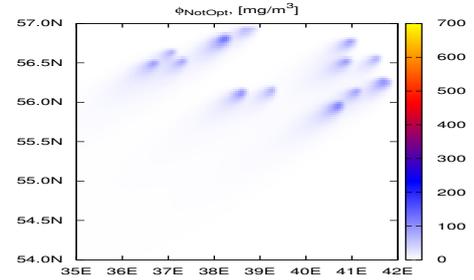


Рис. 42: Концентрация ϕ на высоте 50 м в момент времени $t = 24$ ч (задача с «управлениями» u_l^{NotOpt}).

ний ϕ на высоте 50 м после действия «управлений», рассчитанных по формулам (103) и (123) соответственно. Из этих полей концентраций загрязнений видно, что максимальное значение ϕ на рисунке 41 (после оптимальных «управлений», $\phi_{max} \approx 250 \frac{\text{мг}}{\text{м}^3}$) больше, чем аналогичное значение на рисунке 42 (после «неоптимальных управлений», $\phi_{max} \approx 160 \frac{\text{мг}}{\text{м}^3}$). Это объясняется видом функции «чувствительности» q (см. рисунок 40) и формулой (103) вычисления оптимальных «управлений». В тех местах, где функция «чувствительности» ми-

нимальна, «управления» также минимальны по модулю и, следовательно, концентрация загрязнений максимальна и может быть больше, чем аналогичная величина, полученная в результате решения задачи с «управлениями» (123), которые не зависят от q . Однако первоначальный ущерб $Q_0 \approx 279.9$ млн. рублей в случае решения задачи с u_l был уменьшен до величины $Q \equiv Q^{Opt} \approx 38.4$ млн. рублей, а в случае решения с u_l^{NotOpt} — до величины $Q \equiv Q^{NotOpt} \approx 58.2$ млн. рублей, что приблизительно в 1.5 раза больше, чем Q^{Opt} . Кроме того, нормированное значение функционала (76) на «управлениях» (103) $J_\alpha/10^{12} \approx 0.6$, в то время как на «управлениях» (123) аналогичная величина $J_\alpha/10^{12} \approx 174.9$, то есть глобальный минимум достигается именно на оптимальных «управлениях».

Итак, результаты этого эксперимента проиллюстрировали, что важно вычислять именно оптимальные «управления» с помощью функции «чувствительности», а не строить их из неких «разумных» соображений даже при относительно простом (постоянном) векторе скорости ветра.

Заключение

Диссертационная работа посвящена исследованию задач оптимизации «средней» концентрации загрязнений в регионе от локальных источников и оптимального распределения ресурсов, имеющихся на устранение источников загрязнений, а также построению алгоритмов их решения. Основным результатом работы: разработаны алгоритмы и комплекс программ для решения класса задач оптимального управления о локальных источниках при интегральном наблюдении. Получены следующие частные результаты:

- сформулированы задачи оптимизации «средней» концентрации загрязнения и экономического ущерба в регионе от локальных источников (на основе математической модели распространения загрязнений в окружающей среде с «корректными» граничными условиями), проведено их теоретическое исследование;
- разработаны и обоснованы алгоритмы решения рассматриваемых задач, позволяющие вычислять «управления» в аналитическом виде, а также оптимально распределять имеющиеся ресурсы по регионам источников загрязнения;
- предложенные алгоритмы реализованы в виде программного комплекса, проведен ряд численных экспериментов, иллюстрирующих эффективность этих алгоритмов и основные теоретические положения исследуемых задач (в качестве региона, на примере которого производилось численное моделирование, бралась Москва, Московская область и некоторые части прилегающих к ней областей).

Полученные теоретические результаты и созданный комплекс программ могут быть основой для исследования и численного решения задачи управления риском загрязнений Московского региона локальными источниками, поскольку

ку в данной диссертации разработан алгоритм решения задачи оптимизации экономического ущерба, а согласно определению, приведенному, например, в [83, 84, 85], под риском понимается произведение вероятности нежелательного события на ущерб (его последствия). Кроме того, используя методы данной работы, можно исследовать и численно решать задачи оптимизации концентрации загрязнений или экономического ущерба не только в Московском регионе, но и в любом регионе с простой орографией и достаточно большой площадью лесов, или торфяников (например, в регионе Западной Сибири).

Список литературы

- [1] Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 319 с.
- [2] Пененко В.В., Алоян А.Е. Модели и методы для задач охраны окружающей среды. Новосибирск: Наука, 1985. 256 с.
- [3] Пененко В.В. Методы численного моделирования атмосферных процессов. Л.: Гидрометеиздат, 1981. 352 с.
- [4] Алоян А.Е. Динамика и кинетика газовых примесей и аэрозолей в атмосфере / Курс лекций. М.: ИВМ РАН, 2002. 201 с.
- [5] Алоян А.Е. Моделирование динамики и кинетики газовых примесей и аэрозолей. М.: Наука, 2008. 415 с.
- [6] Агошков В.И., Новиков И.С. Задача минимизации концентрации загрязнений от пожаров в регионе // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа: Сб. научн. тр. Вып. 26, том 2, НАН Украины, МГИ, ИГН, ОФ ИнБЮМ, Севастополь, 2012. С. 321-338.
- [7] Novikov I.S. Problem of minimization of pollution concentration related to fires in Moscow region // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2013. Vol. 28, No. 1, pp. 13-35.
- [8] Новиков И.С. Решение задачи оптимизации экономического ущерба от загрязнения окружающей среды локальными источниками // Сиб. журн. вычисл. математики РАН. Сиб. отд-ние. Новосибирск, 2015. Т.18, No. 4. С. 407-424.

- [9] Новиков И.С. Алгоритмы решения задачи оптимизации экономического ущерба от загрязнения окружающей среды с учетом ресурсов на устранение локальных источников // Вычислительные технологии, 2015. Т.20, No. 4. С. 56-82.
- [10] Агошков В.И., Новиков И.С. Решение задачи оптимизации концентрации загрязнений с ограничениями на интенсивность источников // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2016. Т.56, No. 1. С. 29-46.
- [11] Агошков В.И., Асеев Н.А., Новиков И.С. Методы исследования и решения задач о локальных источниках при локальных или интегральных наблюдениях. М.: ИВМ РАН, 1-е изд., 2012. 151 с.
- [12] Агошков В.И., Асеев Н.А., Новиков И.С. Методы исследования и решения задач о локальных источниках при локальных или интегральных наблюдениях. М.: ИВМ РАН, 2-е изд., 2015. 174 с.
- [13] Новиков И.С., Агошков В.И. Об одной задаче о локальных источниках и локальных наблюдениях. Томск: Избранные труды Международной молодежной школы и конференции CITIES-2011, 2011, С. 40-43.
- [14] Новиков И.С., Агошков В.И. Задача минимизации концентрации загрязнений от пожаров в Московском регионе // Труды 55-й научной конференции МФТИ, 2012. С. 165.
- [15] Новиков И.С., Агошков В.И. Исследование и решение задачи минимизации концентрации загрязнений в Московском регионе с ограничениями на интенсивность источников // Труды 56-й научной конференции МФТИ, 2013. С. 135.
- [16] Новиков И.С., Агошков В.И. Исследование и численное решение задачи

- минимизации экономического ущерба от локальных источников // Сб. тез. конф. «Ломоносовские чтения 2014», Москва, 2014. С. 45.
- [17] Новиков И.С. Алгоритм решения задачи оптимизации экономического ущерба от загрязнения в регионе с учетом ресурсов на устранение локальных источников // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование: Тезисы докладов / Улан-Удэ: Изд-во ВСГУТУ, 2015. С. 212-213.
- [18] Марчук Г.И. Сопряженные уравнения. М.: ИВМ РАН, 2000. 175 с.
- [19] Марчук Г.И., Агошков В.И., Шутяев В.П. Сопряженные уравнения и методы возмущений в нелинейных задачах математической физики. М.: Физматлит, 1993. 224 с.
- [20] Агошков В.И. Методы оптимального управления и сопряженных уравнений в задачах математической физики. М.: Институт вычислительной математики РАН, 2003. 256 с.
- [21] Лионс Ж.Л. Оптимальное управление системами описываемыми дифференциальными уравнениями в частных производных. М.: Мир, 1972. 414 с.
- [22] Тарасова Н.П., Ермоленко Б.В., Зайцев В.А., Макаров С.В. Оценка воздействия промышленных предприятий на окружающую среду. М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2012. 230 с.
- [23] Joseph V. Spadaro, Ari Rabl. Estimates of real damage from air pollution: site dependence and simple impact indices for LCA // Int. J. LCA. 1999. Vol. 4, No. 4, pp. 229-243.
- [24] Curtiss P.S., Rabl A. Impacts of air pollution: general relationships and site dependence // Atmospheric Environment. 1996. Vol. 30, No. 19, pp. 3331-3347.
- [25] Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981. 416 с.

- [26] Берлянд М.Е. Прогноз и регулирование загрязнения атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1985. 272 с.
- [27] Голдовская Л.Ф. Химия окружающей среды. М.: Мир; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. 295 с.
- [28] Беспмятников Г.П. Предельно допустимые концентрации вредных веществ в воздухе или воде. Л., Химия, 1975. 456 с.
- [29] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
- [30] Бутковский А.Г. Характеристики систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1979. 224 с.
- [31] Берлянд М.Е. Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнения атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1975. 448 с.
- [32] Аргучинцев В.К., Аргучинцева А.В. Моделирование мезомасштабных гидротермодинамических процессов и переноса антропогенных примесей в атмосфере и гидросфере региона оз. Байкал. Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 2007. 255 с.
- [33] Бызова Н.Л., Гаргер Е.К., Иванов В.И. Экспериментальные исследования атмосферной диффузии и расчеты рассеяния примеси. Л.: Гидрометеиздат, 1989. 280 с.
- [34] Оникул Р.И. и др. Результаты анализа экспериментальных данных, характеризующих распределение атмосферных загрязнений вблизи тепловых электростанций // Метеорологические аспекты загрязнения атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1971. С.70-81.
- [35] Roland R. Draxler. An improved Gaussian model for long-term average air

- concentration estimates // Atmospheric Environment. 1980. Vol. 14, No. 5, pp. 597-601.
- [36] Доррер Г.А. Динамика лесных пожаров. Ин-т вычислительного моделирования СО РАН, М-во образования и науки РФ, Федеральное агентство по образованию, Сиб. гос. технологический ун-т — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2008. 404 с.
- [37] Гришин А.М., Долгов А.А., Цимбалюк А.Ф. Методика определения и расчета выбросов загрязняющих веществ от лесных пожаров. Д.: Государственное научно-внедренческое предприятие «Огонь и экология», 1997. 14 с.
- [38] Jan Mandel et al. A wildland fire model with data assimilation // Mathematics and Computers in Simulation. 2008. Vol. 79, No. 3, pp. 584-606.
- [39] D. Morvan et al. Behaviour modelling of wildland fires: a state of the art, euro-mediterranean wildland fire laboratory, a "wall-less" laboratory for wildland fire sciences and technologies in the euro-mediterranean region, 2002. 35 p.
- [40] E. Pastor, L. Zarate, E. Planas, J. Arnaldos. Mathematical models and calculations systems for the study of wildland fire behavior // Prog. in Energy Combust. Sci. 2003. Vol. 29, No. 2, pp. 139-153.
- [41] F.J. Seron, D. Gutierrez, J. Magallon, L. Ferragut, M.I. Asensio. The evolution of a wildland forest fire front // The Visual Computer. 2005. Vol. 21, No. 3, pp. 152-169.
- [42] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Главная редакция физико-математической литературы, Наука, 1979. 285 с.
- [43] Иванов В.К. О некорректно поставленных задачах // Мат. сб. 1963. Т. 61, No. 2. С. 211-223.

- [44] Лаврентьев М.М. О постановке некорректных задач математической физики // Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск: Наука, 1956. С. 258-276.
- [45] Isakov V. Inverse source problems. Providence: Amer. Math. Soc., 1990. 193 p.
- [46] Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. N.Y.: Marcel Dekker, Inc., 1999. 709 p.
- [47] Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. Учеб. пособие. М.: Изд-во МГУ, 1994. 208 с.
- [48] Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984. 264 с.
- [49] Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Ч. 1. Механика турбулентности. М.: Наука, 1965. 641 с.
- [50] Косов В.И., Мяков С.Б. Торфяные пожары. Геэкологические проблемы, техносферная безопасность. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. 318 с.
- [51] Пискунов В.Н. Динамика аэрозолей. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 296 с.
- [52] V. Agoshkov. Boundary value problems for transport equations. Birkhauser Boston, 1998. 278 p.
- [53] S. Flotron, J. Rappaz. Conservation schemes for convection-diffusion equations with Robin boundary conditions //Esaim-Mathematical Modelling And Numerical Analysis-Modelisation Mathematique Et Analyse Numerique. 2013. Vol. 47, No. 6, pp. 1765-1781.
- [54] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Главная редакция физико-математической литературы, Наука, 1973. 407 с.

- [55] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Главная редакция физико-математической литературы, Наука, 1967. 736 с.
- [56] Плотников В.И. Теоремы единственности, существования и априорные свойства обобщенных решений. //ДАН СССР, 1965. Т. 165, No. 1. С. 1405-1407.
- [57] Плотников В.И. Об одной задаче оптимального управления стационарными системами с распределенными параметрами. //ДАН СССР, 1966. Т. 170, No. 2. С. 290-293.
- [58] Плотников В.И. О сходимости конечномерных приближений (в задаче об оптимальном нагреве неоднородного тела произвольной формы). //ЖВМ и МФ, 1968. Т. 8, No. 1. С. 136-157.
- [59] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкредидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. 392 с.
- [60] Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
- [61] Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. Inverse problem of ordinary differential equations: dynamical solutions. L.: Gordon and Breach, 1995. 763 p.
- [62] Максимов В.И. Об устойчивом решении обратных задач для нелинейных распределенных систем // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, No. 12. С. 2059-2067.
- [63] Кряжимский А.В., Максимов В.И., Осипов Ю.С. О реконструкции экстремальных возмущений в параболических уравнениях // ЖВМ и МФ. 1997. Т. 37, No. 3. С. 291-301.

- [64] Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
- [65] Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978. 464 с.
- [66] Булдаев А.С. К оптимизации квадратичных по состоянию динамических систем // Изв. вузов. Матем. 2002. Т. 46, No. 12. С. 30-38.
- [67] Балакришнан А. Введение в теорию оптимизации в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1974. 260 с.
- [68] Вайнберг М.М. Функциональный анализ. М.: Просвещение, 1979. 128 с.
- [69] Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 552 с.
- [70] Гурин Л.С., Дымарский Я.С., Меркулов А.Д. Задачи и методы оптимального распределения ресурсов. М.: Изд-во «Советское радио», 1968. 463 с.
- [71] Фурсиков А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Новосибирск: Научная книга, 1999. 352 с.
- [72] Barbu V. Analysis and control of nonlinear infinite dimensional systems. Boston: Academic Press, 1993. 476 p.
- [73] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977. 656 с.
- [74] Рябенский В.С., Филиппов А.Ф. Об устойчивости разностных уравнений. М.: Государственное изд-во технико-теоретической литературы, 1956. 172 с.
- [75] Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Разностные схемы для уравнения переноса. I // Дифференциальные уравнения, 1998. Т. 34, No. 12. С. 1675-1685.

- [76] Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. 512 с.
- [77] Афанасьева Н.М., Вабищевич П.Н., Васильева М.В. Безусловно устойчивые схемы для задач конвекции-диффузии // Известия вузов. Математика, 2013. No. 3. С. 3-15.
- [78] Икрамов Х.Д. Несимметричная проблема собственных значений. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. 240 с.
- [79] Тыртышников Е.Е. Матричный анализ и линейная алгебра. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 480 с.
- [80] Баландин М.Ю., Шурина Э.П. Методы решения СЛАУ большой размерности. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2000. 70 с.
- [81] Van der Vorst, H. A. Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of non-symmetric linear systems // SIAM J. Sci. Stat. Comp. 1992. Vol. 13, No. 2, pp. 631-644.
- [82] Henk A. Van der Vorst, Tony F. Chan. Linear system solvers: sparse iterative methods // Parallel Numerical Algorithms. 1997. Vol. 4, pp. 91-118.
- [83] Ваганов П.А., Им М.-С. Экологические риски. СПб.: СПбГУ, 2001. 154 с.
- [84] Вишняков Я.Д., Радаев Н.Н. Общая теория рисков. М.: Издательский центр «Академия», 2008. 368 с.
- [85] Marc Bonazountas et al. Forest fire risk analysis // Human and Ecological Risk Assessment: An International Journal. 2005. Vol. 11, No. 3, pp. 617-626.
- [86] Сиковский Д.Ф. Методы вычислительной теплофизики: учеб. пособие. Новосибир. гос. ун-т. Новосибирск, 2013. 98 с.

Приложение

Доказательство теоремы 1. Введем обозначение:

$$\tilde{y} \equiv \tilde{y}(x, y, z) \equiv \max_{t \in [0, T]} \|\phi(x, y, z, t)\|_{L_2(\Omega)}.$$

Уравнение энергетического баланса для задачи (18)-(21) имеет вид (получается умножением (18) на ϕ и интегрированием по $\Omega \times (0, T)$):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \phi^2(T) d\Omega + \sum_{i=1}^3 \int_0^T \int_{\Omega} a_{ii} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega dt + \int_0^T \int_{\Gamma_2} \beta \phi^2 d\Gamma_2 dt + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma/\Gamma_2} (U_n^{(+)} + U_n^{(-)}) \phi^2 d\Gamma dt = \int_0^T \int_{\Omega} f \phi d\Omega dt + \\ & + \int_0^T \int_{\Gamma/\Gamma_2} U_n^{(-)} g_{(\Gamma)} \phi d\Gamma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_2} \varphi_{(\Gamma_2)} \phi d\Gamma_2 dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \phi_{(0)}^2 d\Omega. \end{aligned} \quad (124)$$

Оценивая обе части (124), получаем следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \phi^2(T) d\Omega + \sum_{i=1}^3 \int_0^T \int_{\Omega} a_{ii} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega dt + \int_0^T \int_{\Gamma_2} \beta \phi^2 d\Gamma_2 dt \leq \\ & \leq \sqrt{T} \left(\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|\varphi_{(\Gamma_2)}\|_{L_2(\Gamma_2 \times (0, T))} + \right. \\ & \left. + \|U_n^{(-)} g_{(\Gamma)}\|_{L_2((\Gamma/\Gamma_2) \times (0, T))} \right) \tilde{y} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \phi_{(0)}^2 d\Omega. \end{aligned} \quad (125)$$

Из неравенства (125) получаем два следующих неравенства:

$$\begin{aligned} \tilde{y}^2 & \leq 2\sqrt{T} \left(\|f\|_{L_2(\Omega \times (0, T))} + \|\varphi_{(\Gamma_2)}\|_{L_2(\Gamma_2 \times (0, T))} + \right. \\ & \left. + \|U_n^{(-)} g_{(\Gamma)}\|_{L_2((\Gamma/\Gamma_2) \times (0, T))} \right) \tilde{y} + \|\phi_{(0)}\|_{L_2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^3 \int_0^T \int_{\Omega} a_{ii} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega dt \leq \sqrt{T} \left(\|f\|_{L_2(\Omega \times (0,T))} + \|\varphi_{(\Gamma_2)}\|_{L_2(\Gamma_2 \times (0,T))} + \right. \\ \left. + \|U_n^{(-)} g_{(\Gamma)}\|_{L_2((\Gamma/\Gamma_2) \times (0,T))} \right) \tilde{y} + \frac{1}{2} \|\phi_{(0)}\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Учитывая, что

$$\|\phi_{(0)}\|_{L_2(\Omega)} \leq \tilde{y}, \quad \tilde{y} \leq \|\phi\|_{V_2(\Omega \times (0,T))}$$

переписываем два предыдущих неравенства в виде:

$$\tilde{y}^2 \leq 2 \left(\sqrt{T} \left(\|f\|_{L_2(\Omega \times (0,T))} + \|\varphi_{(\Gamma_2)}\|_{L_2(\Gamma_2 \times (0,T))} + \right. \right. \\ \left. \left. + \|U_n^{(-)} g_{(\Gamma)}\|_{L_2((\Gamma/\Gamma_2) \times (0,T))} \right) + \frac{1}{2} \|\phi_{(0)}\|_{L_2(\Omega)} \right) \|\phi\|_{V_2(\Omega \times (0,T))}, \\ \sum_{i=1}^3 \int_0^T \int_{\Omega} a_{ii} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega dt \leq \left(\sqrt{T} \left(\|f\|_{L_2(\Omega \times (0,T))} + \|\varphi_{(\Gamma_2)}\|_{L_2(\Gamma_2 \times (0,T))} + \right. \right. \\ \left. \left. + \|U_n^{(-)} g_{(\Gamma)}\|_{L_2((\Gamma/\Gamma_2) \times (0,T))} \right) + \frac{1}{2} \|\phi_{(0)}\|_{L_2(\Omega)} \right) \|\phi\|_{V_2(\Omega \times (0,T))}.$$

Наконец, извлекая квадратные корни из обоих неравенств, складывая их, сокращая обе части на $\|\phi\|_{V_2(\Omega \times (0,T))}^{1/2}$ и возводя результат в квадрат, получаем оценку решения ϕ в норме $\|\cdot\|_{V_2(\Omega \times (0,T))}$:

$$\|\phi\|_{V_2(\Omega \times (0,T))} \leq (1 + \sqrt{2})^2 \left(\sqrt{T} \left(\|f\|_{L_2(\Omega \times (0,T))} + \|\varphi_{(\Gamma_2)}\|_{L_2(\Gamma_2 \times (0,T))} + \right. \right. \\ \left. \left. + \|U_n^{(-)} g_{(\Gamma)}\|_{L_2((\Gamma/\Gamma_2) \times (0,T))} \right) + \frac{1}{2} \|\phi_{(0)}\|_{L_2(\Omega)} \right). \quad (126)$$

Дальнейший ход исследования заключается в следующем. Для доказательства существования обобщенного решения задачи (18)-(21) с нулевым вектором «управлений» возьмем фундаментальную систему функций $\{\varphi_k(x)\} \equiv \equiv \{\varphi_k(x, y, z)\}$ в $W_2^1(\Omega)$ и будем считать ее ортонормированной в $L_2(\Omega)$. Будем

искать приближенные решения $\phi^N(x, y, z, t) \equiv \phi^N(x, t)$ в виде

$$\phi^N(x, t) = \sum_{k=1}^N c_k^N(t) \varphi_k(x)$$

из системы соотношений:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial \phi^N(x, t)}{\partial t} \varphi_l(x) d\Omega - \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} u_i \phi^N(x, t) \frac{\partial \varphi_l(x)}{\partial x_i} d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma/\Gamma_2} U_n^{(+)} \phi^N(x, t) \varphi_l(x) d\Gamma + \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} a_{ii} \frac{\partial \phi^N(x, t)}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_l(x)}{\partial x_i} d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_2} \beta \phi^N(x, t) \varphi_l(x) d\Gamma_2 = \int_{\Omega} f \varphi_l(x) d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma/\Gamma_2} U_n^{(-)} g_{(\Gamma)} \varphi_l(x) d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \varphi_{(\Gamma_2)} \varphi_l(x) d\Gamma_2, \quad l = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (127)$$

$$c_l^N(0) = \int_{\Omega} \phi_{(0)} \varphi_l(x) d\Omega, \quad l = \overline{1, N}. \quad (128)$$

Полученная система (127), (128) однозначно определяет абсолютно непрерывные на $[0, T]$ функции $c_l^N(t)$. Умножая каждое из (127) на свое c_l , суммируя по всем l и интегрируя по времени, приходим к (124) с $\phi = \phi^N$. Аналогично тому, как доказывается выше, получаем неравенство:

$$\begin{aligned} \|\phi^N\|_{V_2(\Omega \times (0, T))} & \leq (1 + \sqrt{2})^2 \left(\sqrt{T} \left(\|f\|_{L_2(\Omega \times (0, T))} + \|\varphi_{(\Gamma_2)}\|_{L_2(\Gamma_2 \times (0, T))} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \|U_n^{(-)} g_{(\Gamma)}\|_{L_2(\Gamma/\Gamma_2 \times (0, T))} \right) + \frac{1}{2} \|\phi^N(x, 0)\|_{L_2(\Omega)} \right). \end{aligned} \quad (129)$$

Из (128) следует, что

$$\|\phi^N(x, 0)\|_{L_2(\Omega)} \leq \|\phi_{(0)}\|_{L_2(\Omega)},$$

поэтому

$$\|\phi^N\|_{V_2(\Omega \times (0, T))} \leq \tilde{c},$$

причем \tilde{c} не зависит от N . Поэтому из последовательности $\{\phi^N\}$, $N = 1, 2, \dots$ можно выделить подпоследовательность $\{\phi^{N_k}\}$, $N_k = 1, 2, \dots$, слабо сходящуюся в $L_2(\Omega \times (0, T))$ вместе с производными $\frac{\partial \phi^{N_k}}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, 3$ к некоторому элементу $\phi \in W_2^{1,0}(\Omega \times (0, T))$. Покажем, что этот ϕ и есть желаемое обобщенное решение (18)-(21) с нулевым вектором «управлений». Для этого (127) умножаем на любую абсолютно непрерывную функцию $d_l(t)$ с $d_l'(t) \in L_2(0, T)$ и $d_l(T) = 0$, сложим полученные равенства по всем l от 1 до N и результат проинтегрируем по t от 0 до T . В итоге получим следующее тождество:

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\Omega} \phi^N \frac{\partial \Phi}{\partial t} d\Omega dt - \sum_{i=1}^3 \int_0^T \int_{\Omega} u_i \phi^N \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} d\Omega dt + \\ & + \int_0^T \int_{\Gamma/\Gamma_2} U_n^{(+)} \phi^N \Phi d\Gamma dt + \sum_{i=1}^3 \int_0^T \int_{\Omega} a_{ii} \frac{\partial \phi^N}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} d\Omega dt + \\ & + \int_0^T \int_{\Gamma_2} \beta \phi^N \Phi d\Gamma_2 dt = \int_0^T \int_{\Omega} f \Phi d\Omega dt + \int_0^T \int_{\Gamma/\Gamma_2} U_n^{(-)} g_{(\Gamma)} \Phi d\Gamma dt + \\ & + \int_{\Omega} \phi^N(0) \Phi(0) d\Omega + \int_0^T \int_{\Gamma_2} \varphi_{(\Gamma_2)} \Phi d\Gamma_2 dt, \end{aligned} \tag{130}$$

в котором $\Phi = \sum_{l=1}^N d_l(t) \varphi_l(x)$. Обозначим через M_N множество всех Φ с указанными выше свойствами $d_l(t)$. Совокупность $\bigcup_{p=1}^{\infty} M_p$ плотна в подпространстве $\hat{W}_2^1(\Omega \times (0, T))$ пространства $W_2^1(\Omega \times (0, T))$. При фиксированном $\Phi \in M_N$ в (130) можно перейти к пределу по выбранной выше подпоследовательности, начиная с $N_k \geq p$. В результате получим (24) для $\phi \in W_2^{1,0}(\Omega \times (0, T))$ с $\hat{\phi} = \Phi \in M_N$. А поскольку совокупность $\bigcup_{p=1}^{\infty} M_p$ плотна в $\hat{W}_2^1(\Omega \times (0, T))$, то $\hat{\phi} \in \hat{W}_2^1(\Omega \times (0, T))$ можно представить в виде предела последовательности из

$\bigcup_{p=1}^{\infty} M_p$, то есть (24) будет справедливо $\forall \hat{\phi} \in \hat{W}_2^1(\Omega \times (0, T))$, а это означает, что $\phi \in W_2^{1,0}(\Omega \times (0, T))$ действительно есть обобщенное решение задачи (18)-(21) с нулевым вектором «управлений». Таким образом, существование обобщенного решения доказано.

Единственность этого решения следует из (126). Если бы было два решения ϕ_1 и ϕ_2 , то мы получили бы неравенство (126) с $\phi = \phi_2 - \phi_1$ и нулевой правой частью. Из него бы следовало, что $\phi = 0$, т.е. $\phi_2 = \phi_1$, что доказывает единственность решения и завершает доказательство теоремы 1. \square

Доказательство теоремы 4. Сначала докажем, что из (Б) следует условие (А). По определению модуля из условия (Б) получаем равносильную систему неравенств:

$$|\eta_{l_k}(t)| \leq g_{l_k}^{em}(t) \Leftrightarrow \begin{cases} \eta_{l_k}(t) \leq g_{l_k}^{em}(t), \\ \eta_{l_k}(t) \geq -g_{l_k}^{em}(t). \end{cases} \quad (131)$$

Используя второе неравенство из (131), а также формулу (80), получаем:

$$\frac{\overline{Q}_k^{att} \left(\int_{\Gamma_2} m_{l_k}^k q_k d\Gamma_2 \right) (t)}{\alpha \text{Pr}^2 + \sum_{l_k=1}^{N_L^k} \int_{t_k}^T \left(\int_{\Gamma_2} m_{l_k}^k q_k d\Gamma_2 \right) dt} \geq -g_{l_k}^{em}(t), \quad \forall l_k = \overline{1, N_L^k}, \quad \forall t \in (t_k, T), \quad k = \overline{1, N_k}.$$

Пусть сначала $(l_k, t) \in Lt_{zero}^k$, $k = \overline{1, N_k}$. В этом случае последнее неравенство принимает вид

$$0 \geq -g_{l_k}^{em}(t), \quad \forall (l_k, t) \in Lt_{zero}^k, \quad k = \overline{1, N_k},$$

что верно $\forall Q_k^{att}$, $k = \overline{1, N_k}$. Теперь рассмотрим ситуацию, когда $(l_k, t) \in Lt_{pos}^k$. Поскольку в этом случае $\int_{\Gamma_2} m_{l_k}^k q_k d\Gamma_2 > 0$, то справедлива следующая цепочка

равносильных неравенств ($k = \overline{1, N_k}$):

$$\begin{aligned}
& \frac{\overline{Q}_k^{att} \left(\int_{\Gamma_2} m_{l_k}^k q_k d\Gamma_2 \right) (t)}{\alpha \text{Pr}^2 + \sum_{l_k=1}^{N_L^k} \int_{t_k}^T \left(\int_{\Gamma_2} m_{l_k}^k q_k d\Gamma_2 \right)^2 dt} \geq -g_{l_k}^{em}(t) \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \overline{Q}_k^{att} \geq - \frac{g_{l_k}^{em}(t) \left(\alpha \text{Pr}^2 + \sum_{l_k=1}^{N_L^k} \int_{t_k}^T \left(\int_{\Gamma_2} m_{l_k}^k q_k d\Gamma_2 \right)^2 dt \right)}{\left(\int_{\Gamma_2} m_{l_k}^k q_k d\Gamma_2 \right) (t)} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow Q_k^{att} \geq \tilde{C}_k - \frac{g_{l_k}^{em}(t) \left(\alpha \text{Pr}^2 + \sum_{l_k=1}^{N_L^k} \int_{t_k}^T \left(\int_{\Gamma_2} m_{l_k}^k q_k d\Gamma_2 \right)^2 dt \right)}{\left(\int_{\Gamma_2} m_{l_k}^k q_k d\Gamma_2 \right) (t)}. \quad (132)
\end{aligned}$$

Формула (132) — условие (А). Таким образом, прямое утверждение теоремы доказано.

Теперь докажем обратное утверждение. В случае, если $(l_k, t) \in Lt_{zero}^k$, то $\eta_{l_k}(t) = 0$, $k = \overline{1, N_k}$, а это означает, что выполняется:

$$|\eta_{l_k}(t)| \leq g_{l_k}^{em}(t), \quad (l_k, t) \in Lt_{zero}^k, \quad k = \overline{1, N_k}.$$

В случае, когда $(l_k, t) \in Lt_{pos}^k$, имеет место (132). Используя цепочку равносильных неравенств, записанную выше при доказательстве прямого утверждения теоремы, а также формулу (80), получаем:

$$\eta_{l_k}(t) \geq -g_{l_k}^{em}(t), \quad (l_k, t) \in Lt_{pos}^k, \quad k = \overline{1, N_k}.$$

Поскольку рассматриваемые «управления» — неположительные (что отмеча-

лось выше), то справедлива система неравенств из (131), равносильная

$$|\eta_k(t)| \leq g_{l_k}^{em}(t), \quad (l_k, t) \in Lt_{pos}^k, \quad k = \overline{1, N_k}.$$

Объединение множеств Lt_{zero}^k и Lt_{pos}^k образует множество всех возможных l_k и t для исследуемой задачи, т.е. выполняется ограничение (Б). \square

Доказательство теоремы 6. Сначала докажем, что из (Б) следует условие (А). По определению модуля из условия (Б) получаем равносильную систему неравенств:

$$|\eta_l(t)| \leq g_l^{em}(t) \Leftrightarrow \begin{cases} \eta_l(t) \leq g_l^{em}(t), \\ \eta_l(t) \geq -g_l^{em}(t). \end{cases} \quad (133)$$

Используя второе неравенство из (133), а также формулу (84), получаем:

$$-\frac{\delta Q \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t)}{\alpha \text{Pr}^2 + \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)^2 dt} \geq -g_l^{em}(t), \quad \forall l = \overline{1, N_L}, \quad \forall t \in (0, T). \quad (134)$$

Пусть сначала $(l, t) \in Lt_{zero}$. В этом случае последнее неравенство принимает вид

$$0 \geq -g_l^{em}(t), \quad \forall (l, t) \in Lt_{zero},$$

что верно $\forall \delta Q$. Теперь рассмотрим ситуацию, когда $(l, t) \in Lt_{pos}$. Поскольку в этом случае $\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 > 0$, то из (134) получаем условие (А). Таким образом, прямое утверждение теоремы доказано.

Теперь докажем обратное утверждение. В случае, если $(l, t) \in Lt_{zero}$, то $\eta_l(t) = 0$, а это означает, что выполняется:

$$|\eta_l(t)| \leq g_l^{em}(t), \quad (l, t) \in Lt_{zero}.$$

В случае, когда $(l, t) \in Lt_{pos}$, имеет место условие (А). Переходя от неравенства (А) к (134), а также используя формулу (84), получаем:

$$\eta_l(t) \geq -g_l^{em}(t), \quad (l, t) \in Lt_{pos}.$$

Поскольку рассматриваемые «управления» — неположительные (что отмечалось выше), то справедлива система неравенств из (133), равносильная

$$|\eta_l(t)| \leq g_l^{em}(t), \quad (l, t) \in Lt_{pos}.$$

Объединение множеств Lt_{zero} и Lt_{pos} образует множество всех возможных l и t для исследуемой задачи, т.е. выполняется ограничение (Б). \square

Доказательство свойства аппроксимации в теореме 8. Покажем, что схемы дискретизации аппроксимируют (108)-(110) дифференциальные операторы (18)-(20) с первым порядком точности по пространственным и временной переменным, где начальное условие определяется уравнением (21). Доказательство проведем для гладких функций ϕ класса $C^{3,1}$ (то есть трижды непрерывно дифференцируемых по пространственным переменным и непрерывно дифференцируемых по временной переменной). Разложим решение ϕ в ряд Тейлора в окрестности (x_i, y_j, z_k, t_{n+1}) :

$$\phi_{i\pm 1jk}^{n+1} = \phi_{ijk}^{n+1} \pm h_x(\phi_{ijk}^{n+1})_x + \frac{h_x^2}{2}(\phi_{ijk}^{n+1})_{xx} \pm \frac{h_x^3}{6}(\phi_{ijk}^{n+1})_{xxx} + O(h_x^4),$$

$$\phi_{ij\pm 1k}^{n+1} = \phi_{ijk}^{n+1} \pm h_y(\phi_{ijk}^{n+1})_y + \frac{h_y^2}{2}(\phi_{ijk}^{n+1})_{yy} \pm \frac{h_y^3}{6}(\phi_{ijk}^{n+1})_{yyy} + O(h_y^4),$$

$$\phi_{ijk\pm 1}^{n+1} = \phi_{ijk}^{n+1} \pm h_z(\phi_{ijk}^{n+1})_z + \frac{h_z^2}{2}(\phi_{ijk}^{n+1})_{zz} \pm \frac{h_z^3}{6}(\phi_{ijk}^{n+1})_{zzz} + O(h_z^4),$$

$$\phi_{ijk}^n = \phi_{ijk}^{n+1} - h_t(\phi_{ijk}^{n+1})_t + O(h_t^2).$$

Далее вычисляем погрешность аппроксимации ψ_{ijk}^{n+1} в C -норме при $i = \overline{1, N_x - 1}$,

$j = \overline{1, N_y - 1}$, $k = \overline{1, N_z - 1}$, $n = \overline{0, N_t - 1}$:

$$\begin{aligned} \|\psi_{ijk}^{n+1}\|_C &\equiv \max_{i,j,k,n} |\psi_{ijk}^{n+1}| = \max_{i,j,k,n} \left| f_{ijk}^{n+1} - \left(\frac{h_t(\phi_{ijk}^{n+1})_t + O(h_t^2)}{h_t} + u_{ijk}^{(+)} \frac{h_x(\phi_{ijk}^{n+1})_x + O(h_x^2)}{h_x} + \right. \right. \\ &+ u_{ijk}^{(-)} \frac{h_x(\phi_{ijk}^{n+1})_x + O(h_x^2)}{h_x} + v_{ijk}^{(+)} \frac{h_y(\phi_{ijk}^{n+1})_y + O(h_y^2)}{h_y} + v_{ijk}^{(-)} \frac{h_y(\phi_{ijk}^{n+1})_y + O(h_y^2)}{h_y} + \\ &+ w_{ijk}^{(+)} \frac{h_z(\phi_{ijk}^{n+1})_z + O(h_z^2)}{h_z} + w_{ijk}^{(-)} \frac{h_z(\phi_{ijk}^{n+1})_z + O(h_z^2)}{h_z} - a_{xx} \frac{h_x^2(\phi_{ijk}^{n+1})_{xx} + O(h_x^4)}{h_x^2} - \\ &\left. - a_{yy} \frac{h_y^2(\phi_{ijk}^{n+1})_{yy} + O(h_y^4)}{h_y^2} - a_{zz,ijk} \frac{h_z^2(\phi_{ijk}^{n+1})_{zz} + O(h_z^4)}{h_z^2} \right) \Big| = \max_{i,j,k,n} \left| f_{ijk}^{n+1} - \left((\phi_{ijk}^{n+1})_t + \right. \right. \\ &+ O(h_t) + u_{ijk}((\phi_{ijk}^{n+1})_x + O(h_x)) + v_{ijk}((\phi_{ijk}^{n+1})_y + O(h_y)) + w_{ijk}((\phi_{ijk}^{n+1})_z + O(h_z)) - \\ &\left. - a_{xx}((\phi_{ijk}^{n+1})_{xx} + O(h_x^2)) - a_{yy}((\phi_{ijk}^{n+1})_{yy} + O(h_y^2)) - a_{zz,ijk}((\phi_{ijk}^{n+1})_{zz} + O(h_z^2)) \right) \Big| = \\ &= O(h_x + h_y + h_z + h_t). \end{aligned}$$

Таким образом, схема (108) аппроксимирует (18) с первым порядком точности как по временной, так и по пространственной переменным. Покажем теперь, что то же утверждение справедливо для схем (109), (110). При $k = 0$, $i = \overline{1, N_x - 1}$, $j = \overline{1, N_y - 1}$, $n = \overline{0, N_t - 1}$:

$$\begin{aligned} \|\psi_{ij0}^{n+1}\|_C &\equiv \max_{i,j,n} |\psi_{ij0}^{n+1}| = \max_{i,j,n} \left| g_{(\Gamma_2),ij}^{n+1} + \sum_{l=1}^{N_L} m_{l,ij}(\eta_l^{n+1} + g_l^{em,n+1}) - \beta \phi_{ij0}^{n+1} + \right. \\ &\left. + a_{zz,ij0} \frac{h_z(\phi_{ij0}^{n+1})_z + O(h_z^2)}{h_z} \right| = O(h_z) \end{aligned}$$

и, аналогично, при $k = N_z$, $i = \overline{1, N_x - 1}$, $j = \overline{1, N_y - 1}$, $n = \overline{0, N_t - 1}$:

$$\begin{aligned} \|\psi_{ijN_z}^{n+1}\|_C &\equiv \max_{i,j,n} |\psi_{ijN_z}^{n+1}| = \max_{i,j,n} \left| -w_{ijN_z}^{(-)} g_{(\Gamma_4),ij}^{n+1} + w_{ijN_z}^{(-)} \phi_{ijN_z}^{n+1} - \right. \\ &\left. - a_{zz,ijN_z} \frac{h_z(\phi_{ijN_z}^{n+1})_z + O(h_z^2)}{h_z} \right| = O(h_z), \end{aligned}$$

то есть (110) аппроксимирует (20), а (109) аппроксимирует (19) на Γ_4 с первым порядком точности по пространственной переменной z . Как отмечалось в главе 4, можно аналогичным образом построить схемы дискретизации (19) на $\Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_5$ и Γ_6 и показать, что эти схемы аппроксимируют соответствующие уравнения с первым порядком точности, однако в настоящей диссертации этого не делается, поскольку вид схем такой же, как (109) с точностью до обозначений, а рассуждения при доказательстве абсолютно те же. \square

Доказательство абсолютной устойчивости в теореме 8. Докажем абсолютную устойчивость (108)-(110), используя метод разделения переменных, описанный, например, в [76, 86], а также применим принцип суперпозиции решений, справедливый для линейных уравнений [73, 76]. Представим решение ϕ задачи (18)-(21) в виде суммы $\phi = \tilde{\phi} + \tilde{\tilde{\phi}}$, где $\tilde{\phi}$ — решение (18)-(21) при нулевых $f, g(\Gamma), g(\Gamma_2)$ (для краткости будем называть эту систему «задачей с нулевыми внешними источниками»), а $\tilde{\tilde{\phi}}$ — решение (18)-(21) при $\phi_{(0)} = 0$ («задача с нулевым начальным загрязнением»). Для дискретизации обеих задач будем применять (108)-(110) и сначала докажем абсолютную устойчивость (108) для «задачи с нулевыми внешними источниками». Положим

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{ijk}^n &= e^{\tilde{i}qx_i} e^{\tilde{i}qy_j} e^{\tilde{i}qz_k}, \quad \tilde{\phi}_{i\pm 1jk}^{n+1} = \rho_q e^{\pm \tilde{i}qh_x} \tilde{\phi}_{ijk}^n, \quad \tilde{\phi}_{ij\pm 1k}^{n+1} = \rho_q e^{\pm \tilde{i}qh_y} \tilde{\phi}_{ijk}^n, \\ \tilde{\phi}_{ijk\pm 1}^{n+1} &= \rho_q e^{\pm \tilde{i}qh_z} \tilde{\phi}_{ijk}^n, \quad \tilde{\phi}_{ijk}^{n+1} = \rho_q \tilde{\phi}_{ijk}^n, \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{aligned} \quad (135)$$

где $\tilde{i} = \sqrt{-1}$ — мнимая единица, ρ_q — множитель роста q -й гармоники при переходе со слоя (по времени) на слой. Подставляем (135) в (108) (при $f = 0$) и получаем:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{ijk}^n &\left(\frac{\rho_q - 1}{h_t} + u_{ijk}^{(+)} \rho_q \frac{1 - e^{-\tilde{i}qh_x}}{h_x} + u_{ijk}^{(-)} \rho_q \frac{e^{\tilde{i}qh_x} - 1}{h_x} + v_{ijk}^{(+)} \rho_q \frac{1 - e^{-\tilde{i}qh_y}}{h_y} + \right. \\ &\left. + v_{ijk}^{(-)} \rho_q \frac{e^{\tilde{i}qh_y} - 1}{h_y} + w_{ijk}^{(+)} \rho_q \frac{1 - e^{-\tilde{i}qh_z}}{h_z} + w_{ijk}^{(-)} \rho_q \frac{e^{\tilde{i}qh_z} - 1}{h_z} - a_{xx} \rho_q \frac{e^{\tilde{i}qh_x} - 2 + e^{-\tilde{i}qh_x}}{h_x^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -a_{yy}\rho_q \frac{e^{\tilde{i}qh_y} - 2 + e^{-\tilde{i}qh_y}}{h_y^2} - a_{zz,ijk}\rho_q \frac{e^{\tilde{i}qh_z} - 2\phi_{ijk}^{n+1} + e^{-\tilde{i}qh_z}}{h_z^2} = 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \tilde{\phi}_{ijk}^{n+1} \left(1 + \frac{u_{ijk}^{(+)} h_t}{h_x} (1 - \cos(qh_x) + \tilde{i}\sin(qh_x)) + \frac{u_{ijk}^{(-)} h_t}{h_x} (\cos(qh_x) + \tilde{i}\sin(qh_x) - 1) + \right. \\
& \quad + \frac{v_{ijk}^{(+)} h_t}{h_y} (1 - \cos(qh_y) + \tilde{i}\sin(qh_y)) + \frac{v_{ijk}^{(-)} h_t}{h_y} (\cos(qh_y) + \tilde{i}\sin(qh_y) - 1) + \\
& \quad + \frac{w_{ijk}^{(+)} h_t}{h_z} (1 - \cos(qh_z) + \tilde{i}\sin(qh_z)) + \frac{w_{ijk}^{(-)} h_t}{h_z} (\cos(qh_z) + \tilde{i}\sin(qh_z) - 1) - \\
& \quad \left. - \frac{2a_{xx} h_t}{h_x^2} (\cos(qh_x) - 1) - \frac{2a_{yy} h_t}{h_y^2} (\cos(qh_y) - 1) - \frac{2a_{zz,ijk} h_t}{h_z^2} (\cos(qh_z) - 1) \right) = \tilde{\phi}_{ijk}^n \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \tilde{\phi}_{ijk}^{n+1} = \frac{\tilde{\phi}_{ijk}^n}{\left(1 + 2h_t \sum_{p=1}^3 \frac{\left(u_{p,ijk}^{(+)} - u_{p,ijk}^{(-)} + \frac{2a_{pp}}{h_p} \right)}{h_p} \sin^2 \left(\frac{qh_p}{2} \right) + \tilde{i}h_t \sum_{p=1}^3 \frac{u_{p,ijk} \sin(qh_p)}{h_p} \right)}.
\end{aligned}$$

Обозначим

$$R_q^{ijk} \equiv \left(1 + 2h_t \sum_{p=1}^3 \frac{\left(u_{p,ijk}^{(+)} - u_{p,ijk}^{(-)} + \frac{2a_{pp}}{h_p} \right)}{h_p} \sin^2 \left(\frac{qh_p}{2} \right) + \tilde{i}h_t \sum_{p=1}^3 \frac{u_{p,ijk} \sin(qh_p)}{h_p} \right).$$

Заметим далее, что $|R_q^{ijk}| > 1$ вне зависимости от n и при любых (i, j, k) , поскольку каждое из слагаемых вещественной части — положительное число (из-за положительности коэффициентов диффузии), а также одно из слагаемых вещественной части — единица. Поэтому, после взятия модуля и максимума по всем (i, j, k) обеих частей последнего уравнения и соответствующей оценки знаменателя, получаем следующую цепочку неравенств:

$$|\tilde{\phi}_{ijk}^{n+1}| < |\tilde{\phi}_{ijk}^n| \Rightarrow \|\tilde{\phi}^{n+1}\|_C \equiv \max_{i,j,k} |\tilde{\phi}_{ijk}^{n+1}| < \|\tilde{\phi}^n\|_C \equiv \max_{i,j,k} |\tilde{\phi}_{ijk}^n| \Rightarrow \|\tilde{\phi}^{n+1}\|_C < \|\phi_{(0)}\|_C.$$

Последнее неравенство доказывает абсолютную устойчивость (108) по началь-

ным данным (для «задачи с нулевыми внешними источниками») при $i = \overline{1, N_x - 1}$, $j = \overline{1, N_y - 1}$, $k = \overline{1, N_z - 1}$, $n = \overline{0, N_t - 1}$. Поскольку правые части в (109), (110) для «задачи с нулевыми внешними источниками» равны нулю, то заключаем, что

$$\|\tilde{\phi}^{n+1}\|_C < \|\phi_{(0)}\|_C \quad (136)$$

при $i = \overline{0, N_x}$, $j = \overline{0, N_y}$, $k = \overline{0, N_z}$, $n = \overline{0, N_t - 1}$, то есть (108)-(110) — абсолютно устойчивы по начальным данным.

Теперь докажем абсолютную устойчивость (108)-(110) для «задачи с нулевым начальным загрязнением». Рассмотрим случай $n = 0$ для (108). Поскольку $\tilde{\phi}_{ijk}^0 = 0$, то, подставляя (135) в (108) и проводя вычисления, аналогичные приведенным выше, а также используя $|R_q^{ijk}| > 1$ вне зависимости от n и при любых (i, j, k) , убеждаемся в справедливости неравенства

$$|\tilde{\phi}_{ijk}^1| < h_t |f_{ijk}^1|. \quad (137)$$

Далее полагаем $n = 1$, производим те же операции, что и ранее и, используя (137), получаем

$$|\tilde{\phi}_{ijk}^2| < |\tilde{\phi}_{ijk}^1| + h_t |f_{ijk}^2| < h_t (|f_{ijk}^1| + |f_{ijk}^2|).$$

Продолжаем рассуждение по индукции и убеждаемся, что имеет место:

$$|\tilde{\phi}_{ijk}^{n+1}| < h_t \sum_{p=0}^{n+1} |f_{ijk}^p|. \quad (138)$$

Подставляем теперь (135) в (109) при $k = N_z$ и $-w_{ijN_z}^{(-)} > 0$:

$$\tilde{\phi}_{ijN_z}^{n+1} \left(1 - \frac{a_{zz,ijN_z}}{h_z w_{ijN_z}^{(-)}} (1 - e^{-\tilde{i}qh_z}) \right) = g_{(\Gamma_4),ij}^{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tilde{\phi}_{ijN_z}^{n+1} = \frac{g_{(\Gamma_4),ij}^{n+1}}{\left(1 - \frac{2a_{zz,ijN_z}}{h_z w_{ijN_z}^{(-)}} \sin^2\left(\frac{qh_z}{2}\right) + \frac{\tilde{i}a_{zz,ijN_z}}{h_z w_{ijN_z}^{(-)}} \sin(qh_z)\right)}.$$

Здесь, как и ранее, модуль знаменателя больше единицы вне зависимости от n и при любых (i, j, k) , поэтому выполняется

$$|\tilde{\phi}_{ijN_z}^{n+1}| < |g_{(\Gamma_4),ij}^{n+1}|. \quad (139)$$

Для случая $-w_{ijN_z}^{(-)} = 0$ получим $|\tilde{\phi}_{ijN_z}^{n+1}| = 0 < |g_{(\Gamma_4),ij}^{n+1}|$.

Наконец, подставляем (135) в (109) при $k = 0$:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{ij0}^{n+1} \left(1 + \frac{a_{zz,ij0}}{h_z \beta} (1 - e^{-\tilde{i}qh_z})\right) &= \varphi_{(\Gamma_2),ij}^{n+1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \tilde{\phi}_{ij0}^{n+1} &= \frac{\varphi_{(\Gamma_2),ij}^{n+1}}{\left(1 + \frac{2a_{zz,ij0}}{h_z \beta} \sin^2\left(\frac{qh_z}{2}\right) + \frac{\tilde{i}a_{zz,ij0}}{h_z \beta} \sin(qh_z)\right)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow |\tilde{\phi}_{ij0}^{n+1}| < |\varphi_{(\Gamma_2),ij}^{n+1}|. \end{aligned} \quad (140)$$

Далее заметим, что каждую из правых частей (138)-(140) можно оценить сверху суммой

$$h_t \sum_{p=1}^{n+1} \|f^p\|_C + \|\varphi_{(\Gamma_2)}^{n+1}\|_C + \sum_{p=1, p \neq 2}^6 \|g_{(\Gamma_p)}^{n+1}\|_C,$$

то есть получим неравенство:

$$|\tilde{\phi}_{ijk}^{n+1}| < h_t \sum_{p=1}^{n+1} \|f^p\|_C + \|\varphi_{(\Gamma_2)}^{n+1}\|_C + \sum_{p=1, p \neq 2}^6 \|g_{(\Gamma_p)}^{n+1}\|_C.$$

Выбирая тройку (i, j, k) , $i = \overline{0, N_x}$, $j = \overline{0, N_y}$, $k = \overline{0, N_z}$, на которой $|\tilde{\phi}_{ijk}^{n+1}|$

достигает максимума, окончательно получаем

$$\|\tilde{\phi}^{n+1}\|_C < h_t \sum_{p=1}^{n+1} \|f^p\|_C + \|\varphi_{(\Gamma_2)}^{n+1}\|_C + \sum_{p=1, p \neq 2}^6 \|g_{(\Gamma_p)}^{n+1}\|_C. \quad (141)$$

Таким образом доказана абсолютная устойчивость (108)-(110) для «задачи с нулевым начальным загрязнением». Наконец, используя $\phi = \tilde{\phi} + \tilde{\check{\phi}}$ и (136), (141), устанавливаем абсолютную устойчивость (108)-(110) при ненулевых f , $g_{(\Gamma)}$, $g_{(\Gamma_2)}$ и $\phi(0)$:

$$\begin{aligned} \|\phi^{n+1}\|_C &= \|\tilde{\phi}^{n+1} + \tilde{\check{\phi}}^{n+1}\|_C \leq \|\tilde{\phi}^{n+1}\|_C + \|\tilde{\check{\phi}}^{n+1}\|_C < h_t \sum_{p=1}^{n+1} \|f^p\|_C + \\ &+ \|\varphi_{(\Gamma_2)}^{n+1}\|_C + \sum_{p=1, p \neq 2}^6 \|g_{(\Gamma_p)}^{n+1}\|_C + \|\phi(0)\|_C. \quad \square \end{aligned}$$