На правах рукописи

Новиков Иван Сергеевич

Исследование задачи оптимизации ресурсов и концентрации загрязнений в регионе от локальных источников

05.13.18 — Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2016

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте вычислительной математики Российской академии наук (ИВМ РАН)

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Агошков Валерий Иванович.

Официальные оппоненты: **Булдаев Александр Сергеевич**, доктор физико-математических наук, профессор, ФБГОУ ВПО «Бурятский государственный университет», Научно-образовательный и инновационный центр системных исследований и автоматизации, директор,
Костин Андрей Борисович, кандидат физико-математических наук, кафедра Высшей математики Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», доцент.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики и механики имени Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук.

Защита состоится 23 марта 2016 года в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 002.045.01 при федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте вычислительной математики Российской академии наук (ИВМ РАН), расположенном по адресу: 119333, г. Москва, ул. Губкина, д. 8.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИВМ РАН http://www.inm.ras.ru.

Автореферат разослан _____ _______________ 2016 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.045.01,
доктор физико-математических наук Бочаров Геннадий Алексеевич

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Проблема охраны окружающей среды от загрязнений является одной из актуальных проблем современной науки. В качестве источников загрязнений могут выступать трубы промышленных предприятий и общественный транспорт, причем их влияние становится все более существенным с каждым годом из-за темпов технического прогресса. В летний период (или период засухи) могут возникать лесные и торфяные пожары значительной интенсивности и вносить существенный вклад в загрязнение атмосферы (ярким примером служит лето 2010 года на Европейской территории России). От своевременности и эффективности решения этой проблемы зависит здоровье и благосостояние людей, находящихся в регионе возможных загрязнений, сохранность различных экосистем, а также объем государственных средств (ресурсов), которые необходимо выделить на ликвидацию загрязнений и их последствий.

Следует отметить, что источники загрязнений значительной интенсивности могут возникать в различных зонах рассматриваемого региона на достаточно большом временном интервале и ресурсов может быть недостаточно для устранения всех таких источников. По этой причине важной является проблема оптимального (рационального) распределения имеющихся ресурсов по всему исследуемому региону с целью оптимизации экономического ущерба, возникающего вследствие загрязнения окружающей среды вредными веществами.

Цель диссертационной работы. Основной целью диссертационной работы является постановка задач оптимизации «средней» концентрации загрязнений (или, экономического ущерба) в некотором регионе (на основе математической модели распространения загрязнений в окружающей среде с граничными условиями специального вида), теоретическое исследование поставленных задач, разработка алгоритмов их решения, а также реализация предложенных алгоритмов в виде комплекса программ для численного решения рассматриваемых задач в регионе, представляющем интерес (в настоящей диссертации таким регионом являются Москва, Московская область и некоторые части прилегающих к ней областей).

Научная новизна. Сформулированы и исследованы на разрешимость задачи оптимизации «средней» концентрации загрязнений и экономического ущерба в регионе от локальных источников. Разработаны и обоснованы алгоритмы решения этих задач, позволяющие вычислять «управления» (закономерности, по которым необходимо устранять источники загрязнений для решения поставленных задач) в аналитическом виде. Приводимые в работе алгоритмы учитывают физические свойства решения задачи, например, концентрация загрязнений не может принимать отрицательных значений нигде в исследуемой области на всем рассматриваемом временном интервале, а также ни в один из моментов времени ни из одного источника не может быть удалено больше примеси, чем может распространиться. Предложены методы оптимального распределения ресурсов, выделенных на ликвидацию источников загрязнений, по зонам их локализации с целью оптимизации экономического ущерба в регионе. Разработанные алгоритмы реализованы в виде комплекса программ.

Теоретическая ценность работы состоит в постановке задач оптимизации «средней» концентрации загрязнений и экономического ущерба в регионе от локальных источников, в основе которой лежит математическая модель распространения загрязнений в окружающей среде с «корректными» граничными условиями, исследовании этих задач на разрешимость, а также в разработке и обосновании алгоритмов решения рассматриваемых задач, основанных на методах теории оптимального управления, сопряженных уравнений и «двойственного» представления квадратичного функционала невязки.

Практическая ценность работы заключается в реализации предложенных алгоритмов решения исследуемых задач в виде комплекса программ на языках C++ и Fortran. Разработанный комплекс программ позволяет рассчитать, в каких зонах рассматриваемого региона необходимо удалять локальные источники в первую очередь (рационально распределить имеющиеся ресурсы по локальным источникам), а также оценить величину экономического ущерба («средней» концентрации), до которой возможно уменьшить первоначальный ущерб (концентрацию).

На защиту выносятся следующие результаты и положения. Основной результат — разработаны алгоритмы и комплекс программ для решения класса задач оптимального управления о локальных источниках при интегральном наблюдении. В частности:

- сформулированы задачи оптимизации «средней» концентрации загрязнения и экономического ущерба в регионе от локальных источников (на основе математической модели распространения загрязнений в окружающей среде с «корректными» граничными условиями), проведено их теоретическое исследование;

- разработаны и обоснованы алгоритмы решения рассматриваемых задач, в том числе методы оптимального распределения имеющихся ресурсов по регионам локальных источников;

- предложенные алгоритмы реализованы в виде программного комплекса, проведен ряд численных экспериментов, иллюстрирующих эффективность этих алгоритмов и основные теоретические положения исследуемых задач (в качестве региона, на примере которого производилось численное моделирование, бралась Москва, Московская область и некоторые части прилегающих к ней областей).

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались автором и обсуждались на научных семинарах Института вычислительной математики РАН, РХТУ им. Д.И. Менделеева, МГУ им. М.В. Ломоносова и на следующих конференциях: «Вычислительные и информационные технологии для наук об окружающей среде» CITES-2011 (Томск, 2011); 54-56, 58 научные конференции МФТИ (Москва — Долгопрудный — Жуковский, 2011-2013, 2015); «Риски природных катастроф и методы минимизации их негативных последствий» (Севастополь, 2012); «Тихоновские чтения-2013» (МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 2013); «Ломоносовские чтения-2014» (МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 2014); «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование» (Улан-Удэ—Байкал, 2015).

Результаты работы были отмечены почетным дипломом на 56 научной конференции МФТИ в 2013 году.

Публикации. По теме диссертации опубликованы 12 работ, среди которых 5 статей [1-5] (4 из них входят в перечень ВАК), 2 издания монографии [6,7], а также 5 печатных работ [8-12] в сборниках тезисов и трудов конференций.

Личный вклад автора. Диссертационное исследование является самостоятельным законченным трудом автора. Исследование и разработка алгоритмов решения класса задач о локальных источниках при интегральном наблюдении (без учета физических свойств рассматриваемого класса задач), а также задачи оптимизации «средней» концентрации загрязнения в регионе от локальных источников осуществлены автором совместно с соавторами работ, в которых они опубликованы, вклад соавторов равновелик. Исследование и разработка алгоритмов решения задачи оптимизации экономического ущерба с учетом и без учета ресурсов, выделенных на ликвидацию источников загрязнений, а также реализация комплекса программ для численного решения рассматриваемого в диссертации класса задач, проведены автором лично.

Структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, приложения, списка литературы и списка публикаций автора. Общий объем диссертации 150 страниц, включая 42 рисунка, 3 таблицы и список литературы из 86 наименований.

Благодарности. Автор выражает благодарность профессору, доктору физико-математических наук Агошкову Валерию Ивановичу за научное руководство, а также профессору, доктору физико-математических наук Шутяеву Виктору Петровичу, доктору физико-математических наук Алояну Арташу Еремовичу, доценту, кандидату физико-математичес-

ких наук Пармузину Евгению Ивановичу и аспирантам Рахубе Максиму Владимировичу и Асееву Никите Александровичу за обсуждение результатов работы и полезные замечания.

Краткое содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертационной работы, сформулированы ее цели и задачи, описана структура диссертации.

В **первой главе** даны основные понятия и определения, которые используются в диссертации, приведен краткий обзор литературы о методах исследования и решения задач с локальными источниками. Введен класс задач оптимального управления о локальных источниках при интегральном наблюдении и приведена математическая модель распространения загрязнения, которая используется для описания процессов конвекции и диффузии частиц примеси в окружающей среде, а также для математической постановки каждой задачи рассматриваемого класса. В общем виде дан алгоритм решения описываемого класса задач на основе методов теории сопряженных уравнений (Г.И. Марчук, В.И. Агошков, В.П. Шутяев), «двойственного» представления функционала невязки (Г.И. Марчук, А.Е. Алоян) и теории оптимального управления (Ж.Л. Лионс, В.И. Агошков).

В **параграфе 1.1** введены понятия и определения, используемые в работе. Так, под локальным источником понимается функция, носитель которой есть некоторая ограниченная область (из этой области, к примеру, может происходить распространение загрязняющих веществ). Под «управлением» локальным источником понимается закономерность, по которой необходимо устранять источники загрязнений. Физически «управлением» является скорость устранения единицы примеси с единицы площади источника загрязнения. Интегральное наблюдение — это «осреднение» основной неизвестной по «охраняемому» региону и, возможно, по времени. Под «осреднением» функции понимается интеграл от этой функции с наперед заданным весом, а «охраняемым» регионом называется ограниченная область, в которой производится наблюдение, к примеру, за концентрацией загрязняющих веществ. Также в этом параграфе приведен обзор некоторых методов исследования и решения задач с локальными источниками.

В **параграфе 1.2** введен класс задач о локальных источниках при интегральном наблюдении. В качестве математической модели распространения загрязнений, необходимой для постановки задачи, используем уравнение конвекции-диффузии (1) с граничными условиями

(2)-(3) и начальным условием (4)

$$\begin{gathered}\frac{\partial\phi}{\partial t}+u\frac{\partial\phi}{\partial x}+v\frac{\partial\phi}{\partial y}+w\frac{\partial\phi}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\left(a_{xx}\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)-\\-\frac{\partial}{\partial y}\left(a_{yy}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(a_{zz}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)=f \text{ в } \Omega\times(0,T),\end{gathered} \tag{1}$$

$$U_n^{(-)}\phi+\frac{\partial\phi}{\partial N}=U_n^{(-)}g_{(\Gamma)} \text{ на } (\Gamma/\Gamma_2)\times(0,T), \tag{2}$$

$$\beta\phi-a_{zz}\frac{\partial\phi}{\partial z}=g_{(\Gamma_2)}+\sum_{l=1}^{N_L}m_l(x,y)(\eta_l(t)+g_l^{em}(t)) \text{ на } \Gamma_2\times(0,T), \tag{3}$$

$$\phi=\phi_{(0)} \text{ при } t=0 \text{ в } \Omega. \tag{4}$$

Прежде чем перейти к описанию величин, входящих в уравнения, опишем некоторые допущения и предположения, которые были сделаны при постановке задачи в виде (1)-(4). В одной системе уравнений рассматривается одна группа локальных источников, возникшая в один момент времени (в данном случае в нулевой), предполагается, что от этой группы распространяется лишь один тип поллютанта. Кроме того, мы пренебрегаем взаимодействием примеси из различных источников загрязнений друг с другом, а также процессами нуклеации, конденсации/испарения, коагуляции. Далее, мы считаем, что главные оси тензора диффузии совпадают с осями декартовой системы координат и, тем самым, ограничиваемся учетом лишь диагональных элементов тензора диффузии, а недиагональными элементами пренебрегаем. Наконец, мы не учитываем гравитационное оседание субстанций и орографию местности. Все вышеописанные предположения используются для всех задач оптимизации, исследуемых в диссертации.

Теперь перейдем к описанию величин, входящих в уравнения. Момент времени $t=0$ — время старта каждого из $l=\overline{1,N_L}$ локальных источников, N_L — число источников, T — конечный момент времени. Исследуемая задача рассматривается в декартовой системе координат $(x_1,x_2,x_3)\equiv(x,y,z)$ в области Ω:

$$\Omega=(A_1,A_2)\times(B_1,B_2)\times(C_1,C_2)$$

и на поверхности S, состоящей из границ

$$\begin{aligned}\Gamma_1&=\{(x,y,z)\mid x=A_1,\ B_1<y<B_2,\ C_1<z<C_2\},\\\Gamma_2&=\{(x,y,z)\mid A_1<x<A_2,\ B_1<y<B_2,\ z=C_1\},\\\Gamma_3&=\{(x,y,z)\mid x=A_2,\ B_1<y<B_2,\ C_1<z<C_2\},\end{aligned}$$

$$\Gamma_4 = \{(x,y,z) \mid A_1 < x < A_2,\ B_1 < y < B_2,\ z = C_2\},$$
$$\Gamma_5 = \{(x,y,z) \mid A_1 < x < A_2,\ y = B_1,\ C_1 < z < C_2\},$$
$$\Gamma_6 = \{(x,y,z) \mid A_1 < x < A_2,\ y = B_2,\ C_1 < z < C_2\}.$$

Через $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ обозначается единичный вектор внешней нормали к границе $\Gamma \equiv \equiv \bigcup\limits_{i=1}^{6} \Gamma_i \equiv \partial\Omega$, а через $\dfrac{\partial \phi}{\partial N}$ — «конормальная производная» от концентрации загрязнения ϕ, соответствующая производной второго порядка из (1) (в таком обозначении она присутствует в (2), а также в (3) она имеет вид $-a_{zz}\dfrac{\partial \phi}{\partial z}$).

Функция $\phi \equiv \phi(x,y,z,t)$ — концентрация загрязнения, которая возникла в области Ω с нулевого момента времени в результате распространения примеси от N_L непересекающихся локальных источников, $m_l \equiv m_l(x,y)$ — характеристическая функция l-го локального источника на нижней границе Γ_2, $g_l^{em}(t) \in L_2(0,T)$ — концентрация загрязнения, которая распространяется с единицы площади l-го источника на границе Γ_2 (фактически, мощность источника, значение которой постоянно и положительно для конкретного вещества, предполагается, что $g_l^{em}(t) = g^{em}$, $l = \overline{1, N_L}$, $t \in (0,T)$), $\eta_l \equiv \eta_l(t) \in L_2(0,T)$ — «управления» каждым из $l = \overline{1, N_L}$ источников («дополнительные неизвестные»), $f \equiv f(x,y,z,t) \in L_2(\Omega \times (0,T))$ — функция фоновых источников в Ω на интервале $(0,T)$, а $g_{(\Gamma_2)} \equiv g_{(\Gamma_2)}(x,y,t) \in L_2(\Gamma_2 \times (0,T))$ и $g_{(\Gamma)} \in L_2((\Gamma/\Gamma_2) \times (0,T))$ — аналогичные величины на границах Γ_2 и Γ/Γ_2 соответственно, $\phi_{(0)} \equiv \phi_{(0)}(x,y,z) \in L_2(\Omega)$ — концентрация загрязнений в Ω в нулевой момент времени (каждую из функций f, $g_{(\Gamma_2)}$, $g_{(\Gamma)}$ и $\phi_{(0)}$ полагаем неотрицательной). Считаем, что все функции, с которыми автор оперирует в настоящей работе, — вещественные.

Величины $a_{11} \equiv a_{xx}$, $a_{22} \equiv a_{yy}$ — коэффициенты «горизонтальной» диффузии, $a_{33} \equiv a_{zz}$ — коэффициент «вертикальной» диффузии, причем все они предполагаются строго положительными ограниченными функциями, постоянными по времени. Далее, величины u, v, w — проекции вектора скорости ветра на оси Ox, Oy, Oz соответственно, причем выполняется условие $\mathrm{div}\vec{u} = 0$, $\vec{u} \equiv (u_1, u_2, u_3) \equiv (u, v, w)$, u и v иногда будем называть «горизонтальными» скоростями ветра, w — «вертикальной» скоростью. Кроме того, будет предполагаться, что u_i, $i = \overline{1,3}$ и их первые производные по временной и пространственным переменным ограничены. Отмечаем, что $U_n = (\vec{u}, \vec{n})$, а $U_n^{(+)} = \dfrac{|U_n| + U_n}{2}$ (скорость вдоль потока) и $U_n^{(-)} = \dfrac{|U_n| - U_n}{2}$ (скорость против потока), $U_n = U_n^{(+)} - U_n^{(-)}$. Для нижней границы считаем, что «вертикальная» скорость ветра равна нулю, а β — величина, характеризующая взаимодействие загрязняющих примесей с подстилающей поверхностью (постоянная положительная величина).

Для замыкания прямой задачи (1)-(4) введем дополнительное условие вида

$$W = W^{obs}. \tag{5}$$

Здесь W^{obs} — некоторое заданное число (например, «допустимый» уровень «средней» концентрации загрязнений в «охраняемом» регионе Ω_{obs}), а W определяется из соотношения:

$$W \equiv (\phi, g) \equiv (\phi, g)_{L_2(\Omega\times(0,T))} = \int_0^T \int_\Omega \phi g d\Omega dt = \int_0^T \int_{\Omega_{obs}} \phi g d\Omega dt, \tag{6}$$

где $g \equiv g(x,y,z,t) \in L_2(\Omega \times (0,T))$ — некоторая весовая функция, принимающая ненулевые значения на $\Omega_{obs} \times (0,T)$, и равная нулю вне $\Omega_{obs} \times (0,T)$. Отмечаем, что W является интегральным наблюдением.

Исходная постановка обратной задачи о локальных источниках при интегральном наблюдении формулируется следующим образом: найти ϕ, $\vec{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_{N_L})$ такие, что выполняются (1)-(5).

Далее вводится обобщенная постановка обратной задачи: найти $\phi \in W_2^{1,0}(\Omega \times (0,T))$, $\eta_l \in L_2(0,T)$, $l = \overline{1, N_L}$ такие, что выполняются соотношения

$$\begin{gathered}
-\int_0^T \int_\Omega \phi \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} d\Omega dt - \sum_{i=1}^3 \int_0^T \int_\Omega \Big(u_i \phi - a_{ii} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \Big) \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x_i} d\Omega dt + \int_0^T \int_{\Gamma_2} \beta \phi \hat{\phi} d\Gamma_2 dt + \\
+ \int_0^T \int_{\Gamma/\Gamma_2} U_n^{(+)} \phi \hat{\phi} d\Gamma dt = \int_0^T \Big(\int_\Omega f \hat{\phi} d\Omega + \int_{\Gamma_2} \varphi_{(\Gamma_2)} \hat{\phi} d\Gamma_2 \Big) dt + \int_\Omega \phi_{(0)} \hat{\phi}(0) d\Omega + \\
+ \int_0^T \int_{\Gamma/\Gamma_2} U_n^{(-)} g_{(\Gamma)} \hat{\phi} d\Gamma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_2} \sum_{l=1}^{N_L} m_l \eta_l \hat{\phi} d\Gamma_2 dt, \ \forall \hat{\phi} \in \hat{W}_2^1(\Omega \times (0,T)),
\end{gathered} \tag{7}$$

$$W = W^{obs}, \tag{8}$$

где $\varphi_{(\Gamma_2)} \equiv g_{(\Gamma_2)} + \sum\limits_{l=1}^{N_L} m_l g_l^{em}$. Легко проверить, что имеет смысл определять решение $\phi, \vec{\eta}$ задачи (1)-(5) как функции, удовлетворяющие (7), (8). В дальнейшем мы, говоря о решении задачи (1)-(5), подразумеваем, что речь идет о решении в обобщенной постановке. Определения пространств $W_2^{1,0}$, $W_2^{1,1}$, $\hat{W}_2^1$ и V_2 приведены в работах О.А. Ладыженской, следуя которым, доказана теорема существования и единственности решения прямой задачи:

Теорема 1. *Пусть* $\eta_l = 0$, $l = \overline{1, N_L}$. *Тогда задача* (1)-(4) *однозначно разрешима в классе функций* $V_2(\Omega \times (0,T))$ *при любых* $f \in L_2(\Omega \times (0,T))$, $\varphi_{(\Gamma_2)} \in L_2(\Gamma_2 \times (0,T))$, $g_{(\Gamma)} \in$ $\in L_2((\Gamma/\Gamma_2) \times (0,T))$ *и* $\phi_{(0)} \in L_2(\Omega)$ *в предположениях, что коэффициенты* a_{ii}, $i = \overline{1,3}$, β — *строго положительные ограниченные величины, проекции вектора скорости ветра* u_i, $i = \overline{1,3}$ *и их первые производные по временной и пространственным переменным ограничены, а также при выполнении* $\mathrm{div}\vec{u} = 0$.

В приведенной выше постановке рассматриваемая обратная задача является некорректно поставленной (некорректность имеет место, например, из-за условия замыкания (5), при наличии которого решение задачи не единственно). Методы исследования и решения обратных задач разработаны в трудах А.Н. Тихонова, М.М. Лаврентьева, В.К. Иванова, А.И. Прилепко, А.М. Денисова и других авторов. В диссертации происходит переход от рассмотрения исходной задачи (1)-(5) к ее обобщенной постановке, в которой (5) понимается «в смысле наименьших квадратов»:

$$\text{Найти } \phi \equiv \phi(\alpha),\ \vec{\eta} \equiv \vec{\eta}(\alpha),\ \text{т.ч. выполняются (1)-(4) и } \inf_{\vec{\eta}} = J_\alpha(\phi, \vec{\eta}), \tag{9}$$

где

$$J_\alpha(\phi, \vec{\eta}) \equiv \frac{\alpha}{2} \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \eta_l^2(t)dt + \frac{1}{2}(W - W^{obs})^2. \tag{10}$$

Первое слагаемое функционала содержит $0 \leq \alpha = \text{const} \ll 1$ — параметр регуляризации А.Н. Тихонова и имеет смысл «стоимости» («штрафа») уменьшения интенсивности всех локальных источников. Второе слагаемое — разность между W и W^{obs} (которые имеют различный физический смысл в зависимости от постановки задачи) «в смысле наименьших квадратов». Система уравнений (9) с функционалом (10) образует класс регуляризованных задач оптимального управления о локальных источниках при интегральном наблюдении. Основы теории оптимального управления заложены в классических работах Л.С. Понтрягина, Н.Н. Красовского, Ж.Л. Лионса, а ее дальнейшее развитие дано в работах Ю.С. Осипова, А.Б. Куржанского, В.И. Максимова, А.И. Егорова, В.И. Агошкова, А.С. Булдаева и других авторов.

В **параграфе 1.3** рассматриваются алгоритмы решения класса задач (9), в частности приводится алгоритм, основанный на методе «двойственного» представления функционала невязки. Для построения алгоритмов решения вводится следующая задача:

$$\begin{gathered}
-\frac{\partial q}{\partial t} - u\frac{\partial q}{\partial x} - v\frac{\partial q}{\partial y} - w\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a_{xx}\frac{\partial q}{\partial x}\right) - \\
-\frac{\partial}{\partial y}\left(a_{yy}\frac{\partial q}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(a_{zz}\frac{\partial q}{\partial z}\right) \equiv g \text{ в } \Omega \times (0,T), \\
U_n^{(+)} q + \frac{\partial q}{\partial N} = 0 \text{ на } (\Gamma/\Gamma_2) \times (0,T), \\
\beta q - a_{zz}\frac{\partial q}{\partial z} = 0 \text{ на } \Gamma_2 \times (0,T),\ q = 0 \text{ при } t = T \text{ в } \Omega,
\end{gathered} \tag{11}$$

где $q \equiv q(x,y,z,t)$— решения задачи (11), имеющее смысл функции «чувствительности» определенной точки в определенный момент времени к загрязнению. Система уравнений

(11) называется «вспомогательной» сопряженной задачей. Обобщенная постановка «вспомогательной» сопряженной задачи имеет вид: найти $q \in \hat{W}_2^1(\Omega \times (0,T))$ такую, что выполняются соотношения

$$
\begin{gathered}
-\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \frac{\partial q}{\partial t} \hat{q} d\Omega dt + \sum_{i=1}^3 \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \left(u_i q + a_{ii} \frac{\partial q}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \hat{q}}{\partial x_i} d\Omega dt + \\
+ \int\limits_0^T \int\limits_{\Gamma/\Gamma_2} U_n^{(-)} q \hat{q} d\Gamma dt + \int\limits_0^T \int\limits_{\Gamma_2} \beta q \hat{q} d\Gamma_2 dt = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega g \hat{q} d\Omega dt, \ \forall \hat{q} \in W_2^{1,0}(\Omega \times (0,T)).
\end{gathered}
\tag{12}
$$

Отметим, что следуя работам О.А. Ладыженской, можно доказать теорему существования и единственности обобщенного решения задачи (12) в классе функций $\hat{W}_2^1(\Omega \times (0,T))$.

Используя решение q «вспомогательной» сопряженной задачи, преобразуем функционал (10) к виду (— «двойственное» представление функционала):

$$
J_\alpha(\phi, \vec{\eta}) = \frac{\alpha}{2} \sum_{l=1}^{N_L} \int\limits_0^T \eta_l^2(t) dt + \frac{1}{2} \left(\sum_{l=1}^{N_L} (m_l \eta_l, q)_{L_2(\Gamma_2 \times (0,T))} - \overline{W}^{obs} \right)^2 , \tag{13}
$$

где

$$
\begin{gathered}
\overline{W}^{obs} = W^{obs} - W^0, \\
W^0 = (f, q) + (\phi_{(0)}, q(0))_{L_2(\Omega)} + (U_n^{(-)} g_{(\Gamma)}, q)_{L_2((\Gamma/\Gamma_2) \times (0,T))} + \left(\varphi_{(\Gamma_2)}, q \right)_{L_2(\Gamma_2 \times (0,T))} .
\end{gathered}
$$

Далее, варьируя функционал (13) по η_l и используя тот факт, что первая вариация функционала равна нулю $\forall \delta \eta_l$, получаем формулу для вычисления «управлений» в явном виде:

$$
\eta_l(t) = \frac{\overline{W}^{obs} \left(\int\limits_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)(t)}{\alpha + \sum\limits_{l=1}^{N_L} \int\limits_0^T \left(\int\limits_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)^2 dt}, \ l = \overline{1, N_L}, \ t \in (0,T). \tag{14}
$$

«Управления» (14) доставляют функционалу (13) глобальный минимум:

$$
J_\alpha = \frac{\alpha (\overline{W}^{obs})^2}{2 \left(\alpha + \sum\limits_{l=1}^{N_L} \int\limits_0^T \left(\int\limits_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)^2 dt \right)}.
$$

Отметим, что для обратной задачи (1)-(5) справедлива следующая

Теорема 2. *При выполнении условия*

(A) $\left(\int\limits_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)(t) \neq 0$

хотя бы для одного l на всем временном интервале $(0,T)$ задача (1)-(5) является плотно разрешимой и не является однозначно разрешимой.

Из Теоремы 2 следует, что при малых параметрах регуляризации α величина W будет близка к «желаемому» W^{obs}. Алгоритм решения задачи оптимального управления (9) заключается в следующем:

- решаем «вспомогательную» сопряженную задачу (11), находим q;
- задаем «желаемое» число W^{obs}, к которому будем приближать W;
- вычисляем «управления» η_l, $l = \overline{1, N_L}$ по формуле (14);
- решаем задачу (1)-(4) с известными «управлениями», находим ϕ;
- вычисляем величину W по формуле (6) и сравниваем ее с W^{obs}.

Во **второй главе** формулируется задача оптимизации «средней» концентрации загрязнений в регионе от локальных источников, а также предлагается алгоритм ее решения.

В **параграфе 2.1** приводится постановка задачи оптимизации «средней» концентрации загрязнений в регионе от локальных источников. Эта задача входит в класс задач оптимального управления о локальных источниках при интегральном наблюдении. Поэтому, как и в главе 1, в качестве математической модели распространения загрязнений, необходимой для постановки задачи, используем уравнение конвекции-диффузии (1) с граничными условиями (2)-(3) и начальным условием (4).

«Весовая» функция g здесь имеет следующий вид:

$$g(x,y,z,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{mes}(\Omega_{obs})}\dfrac{1}{T}, \ \{(x,y,z) \in \Omega_{obs}\} \bigcap \{t \in (0,T)\}, \\ 0, \ \{(x,y,z) \notin \Omega_{obs}\} \bigcup \{t \notin (0,T)\}. \end{cases} \tag{15}$$

Для замыкания прямой задачи (1)-(4) введем дополнительное условие вида

$$\overline{\phi} = \varphi_{acc}, \tag{16}$$

где φ_{acc} — «допустимый» уровень «средней» концентрации загрязнений в Ω_{obs} на интервале $(0,T)$, $\overline{\phi} \equiv (\phi, g)$ — «средняя» концентрация загрязнений, которая образовалась в «охраняемом регионе» на $(0,T)$ в результате распространения примеси, то есть $\overline{\phi}$ фактически является частным случаем W из первой главы.

Исходная постановка обратной задачи имеет вид: найти ϕ, $\vec{\eta}$ такие, что выполняются (1)-(4), (16).

Обратная задача (1)-(4), (16) в обобщенной постановке имеет следующий вид: найти $\phi \in \in W_2^{1,0}(\Omega \times (0,T))$, $\eta_l \in L_2(0,T)$, $l = \overline{1, N_L}$ такие, что выполняются соотношения (7) и (16). Поскольку для задачи (1)-(4), (16) справедлива Теорема 2, то она является некорректно поставленной, поэтому далее вместо исходной задачи рассматривается регуляризованная обобщенная постановка «в смысле наименьших квадратов» (9) с функционалом

$$J_\alpha(\phi, \vec{\eta}) \equiv \frac{\alpha}{2} \sum_{l=1}^{N_L} \int\limits_0^T \eta_l^2(t) dt + \frac{1}{2}(\overline{\phi} - \varphi_{acc})^2. \tag{17}$$

Первое слагаемое функционала по-прежнему имеет смысл «стоимости» («штрафа») уменьшения интенсивности всех локальных источников, а второе — разность между «средней» концентрацией, полученной в результате использования «управлений», и «допустимым» уровнем «средней» концентрации «в смысле наименьших квадратов». В результате решения задачи оптимизации (9) с функционалом (17) будет получена ϕ и, используя эту функцию, можно будет вычислить «среднюю» концентрацию $\overline{\phi}$, которой возможно достичь, управляя по закономерностям η_l, $l = \overline{1, N_L}$ (т.е. «оптимизировать среднюю концентрацию загрязнений» в интересующем нас регионе).

В **параграфе 2.2** приведен алгоритм решения задачи оптимизации «средней» концентрации загрязнения, а также изложена методика введения ограничений на «управления» интенсивностью локальных источников.

Сначала вводится сопряженная задача (11), а также ее обобщенная постановка (12). Поскольку решение q сопряженной задачи имеет смысл «чувствительности» («ценности», «опасности») определенной точки в определенный момент времени к загрязнению (то есть физически не может быть отрицательной величиной), в дальнейшем мы предполагаем, что $q \geq 0$, $\forall t \in (0,T)$, а также, что $\int\limits_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 > 0$ хотя бы для одного источника на всем временном интервале $(0,T)$. Оба эти предположения справедливы при численном моделировании в силу монотонности используемой схемы дискретизации.

Далее функционал (17) переписывается в «двойственном» представлении, используя которое, получаем формулу для вычисления «управлений» в аналитическом виде:

$$\eta_l(t) = \frac{(\varphi_{acc} - \overline{\phi}_0)\left(\int\limits_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2\right)(t)}{\alpha + \sum\limits_{l=1}^{N_L}\int\limits_0^T \left(\int\limits_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2\right)^2 dt},\ l = \overline{1, N_L},\ t \in (0,T), \tag{18}$$

где $\overline{\phi}_0$ — «средняя» концентрация загрязнений в «охраняемом» регионе до «управлений» (при $\eta_l = 0$, $l = \overline{1, N_L}$), вычисляется из соотношения:

$$\overline{\phi}_0 = (f, q) + (\phi_{(0)}, q(0))_{L_2(\Omega)} + (U_n^{(-)} g_{(\Gamma)}, q)_{L_2((\Gamma/\Gamma_2)\times(0,T))} + \left(\varphi_{(\Gamma_2)}, q\right)_{L_2(\Gamma_2\times(0,T))}.$$

Отмечаем, что «управления», вычисляемые по формуле (18), доставляют функционалу (17) глобальный минимум. Однако в случае $\varphi_{acc} \le \overline{\phi}_0$ «управления» (18) могут оказаться достаточно большими по модулю и отрицательными по значению величинами, что может привести к получению отрицательной концентрации загрязнения (см., например, [5]). Поэтому для случая $\varphi_{acc} \le \overline{\phi}_0$ с помощью Теоремы 3 вводим ограничения на «управления»:

Теорема 3. *Обозначим:* $Lt_{pos} = \{l = \overline{1, N_L},\ t \in (0,T) \mid \left(\int\limits_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2\right)(t) > 0\}$.

Введем условие:

$$(A)\ \overline{\phi}_0 - \frac{g_l^{em}(t)\left(\alpha + \sum\limits_{l=1}^{N_L}\int\limits_0^T \left(\int\limits_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2\right)^2 dt\right)}{\left(\int\limits_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2\right)(t)} \le \varphi_{acc},\ (l,t) \in Lt_{pos}.$$

Ограничение вида

$$(Б)\ |\eta_l(t)| \le g_l^{em}(t),\ \forall l = \overline{1, N_L},\ \forall t \in (0,T)$$

имеет место тогда и только тогда, когда выполнено ограничение (А).

Отмечаем, что в данной задаче φ_{acc} — «допустимый» уровень «средней» концентрации загрязнений, т.е. число, а не функция. По этой причине на практике на φ_{acc} следует налагать условие вида

$$(\mathrm{B})\ \overline{\phi}_0 - \min_{l,t}\left(\frac{g_l^{em}}{\left(\int\limits_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2\right)(t)}\right)\left(\alpha + \sum\limits_{l=1}^{N_L}\int\limits_0^T \left(\int\limits_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2\right)^2 dt\right) \le \varphi_{acc}.$$

Выполнение данного условия является достаточным для выполнения условия (А). Поэтому при его введении условие (Б) заведомо выполняется.

Таким образом, оценив φ_{acc} из (B) и вычислив «управления» по формуле (18), решаем прямую задачу (1)-(4) с известными «управлениями», находим ϕ и тем самым решаем задачу оптимального управления (9) с функционалом (17).

В **третьей главе** формулируется задача оптимизации экономического ущерба от загрязнения окружающей среды локальными источниками, причем рассматриваются две математические постановки задачи. Также в этой главе предложены алгоритмы решения поставленных проблем.

В **параграфе 3.1** приведены постановки двух задач оптимизации экономического ущерба. В одной постановке рассматриваются обратные задачи с несколькими группами локальных источников, стартующих в различные моменты времени, причем процесс распространения загрязнений описывается N_k системами уравнений, аналогичными (1)-(4), в каждой из которых все источники из одной группы начинают загрязнение атмосферы одновременно. Условия замыкания каждой из N_k задач типа (1)-(4) имеют вид:

$$Q_k = Q_k^{att},\ k = \overline{1, N_k}. \tag{19}$$

Уравнения (19) по-прежнему содержат интегральное наблюдение, в качестве которого выступает остаточный экономический ущерб Q_k, вычисляемый из специального соотношения, построенного на основе результатов из монографии Н.П. Тарасовой и др., 2012 (в это соотношение входит концентрация загрязнений). Также здесь введено обозначение Q_k^{att} — «достижимый» экономический ущерб, то есть ущерб, который возможно достичь в интересующем нас регионе, управляя локальными источниками. Предполагается, что взаимодействием частиц примеси из различных источников можно пренебречь, а также, что экономические ущербы от всех групп источников рассчитываются независимо (то есть, все N_k задач можно решать независимо). Далее вводятся соответствующие обобщенные постановки всех рассматриваемых обратных задач и N_k регуляризованных задач оптимизации экономического ущерба от различных групп локальных источников (в каждой из которых минимизируется соответствующий квадратичный функционал). Отмечаем, что в такой постановке не учитывается возможная нехватка ресурсов, выделенных на устранение источников.

В другой постановке рассматривается лишь одна система (1)-(4) с одной группой N_L источников (при нулевых f, $g_{(\Gamma)}$, $g_{(\Gamma_2)}$, $\phi_{(0)}$), начинающих загрязнять окружающую среду в начальный момент времени, однако вводятся два условия замыкания, несколько отличные от тех, что использовались ранее. Первое условие имеет вид:

$$Q = Q_0 - \delta Q, \tag{20}$$

где Q_0 — первоначальный экономический ущерб (до начала действия «управлений» на источники), δQ — заданное уменьшение первоначального экономического ущерба, Q — остаточный экономический ущерб (после действия «управлений» на источники). Для определения Q_0 и Q вводятся следующие функции. Через ϕ_0 обозначается решение задачи (1)-(4) при $\eta_l = 0$, $l = \overline{1, N_L}$. Также вводится $g \equiv g(x, y, z, t)$ — заданная «весовая» функция (коэффициенты $I_t^{\text{инд.}}$, $\tilde{Q}_{2003}^{\text{атм.}}$, $A^{\text{атм.}}$ и σ описаны в работе Н.П. Тарасовой и др., 2012):

$$g(x,y,z,t) = \begin{cases} \dfrac{I_t^{\text{инд.}} \tilde{Q}_{2003}^{\text{атм.}} A^{\text{атм.}} \sigma}{T}, \ \{(x,y,z) \in \Omega_{obs}\} \bigcap \{t \in (0,T)\}, \\ 0, \ \{(x,y,z) \notin \Omega_{obs}\} \bigcup \{t \notin (0,T)\}, \end{cases} \tag{21}$$

такая, что определены функционалы $Q \equiv (\phi, g)_{L_2(\Omega \times (0,T))}$ и $Q_0 \equiv (\phi_0, g)_{L_2(\Omega \times (0,T))}$.
Второе условие замыкания прямой задачи (1)-(4):

$$-\Pr \sum_{l=1}^{N_L} \int\limits_0^T \eta_l(t) dt = Res_{av}, \tag{22}$$

в котором Res_{av} — количество ресурсов, имеющееся для устранения N_L локальных источников (заданная величина), $\Pr$ — стоимость устранения загрязнения с единицы площади.

Исходная математическая постановка обратной задачи следующая: найти ϕ, $\vec{\eta}$, такие, что выполняются (1)-(4), (20), (22).

Далее в этом параграфе формулируется соответствующая обобщенная постановка (1)-(4), (20), (22), а также задача оптимизации экономического ущерба с учетом ресурсов на устранение локальных источников вида (9) с функционалом:

$$J_\alpha(\phi, \vec{\eta}) = \frac{\alpha \Pr^2}{2} \sum_{l=1}^{N_L} \int\limits_0^T \eta_l^2(t) dt + \frac{1}{2}(Q + \delta Q - Q_0)^2 + \frac{1}{2} \left(\Pr \sum_{l=1}^{N_L} \int\limits_0^T \eta_l(t) dt + Res_{av} \right)^2, \tag{23}$$

то есть здесь функционал состоит из трех слагаемых, и каждое из условий замыкания (20), (22) понимается как разность «в смысле наименьших квадратов» в функционале (23).

В **параграфе 3.2** описан алгоритм решения задачи оптимизации экономического ущерба от нескольких групп локальных источников, который аналогичен алгоритму из параграфа 2.2. В частности, здесь приводится аналитическое выражение для вычисления «управлений» каждой группой источников, доставляющих глобальный минимум N_k соответствующим функционалам. Далее формулируется **Теорема 4** (схожая с Теоремой 3) об ограничениях на «управления». Эти ограничения гарантируют «физичность» (неотрицательность) концентрации загрязнений, получаемую в результате решения системы (1)-(4) с известными «управлениями». Наконец, здесь доказана **Теорема 5**, гарантирующая, что суммарный остаточный ущерб $Q = \sum\limits_{k=1}^{N_k} Q_k$ и суммарный «достижимый» ущерб $Q^{att} = \sum\limits_{k=1}^{N_k} Q_k^{att}$ близки по значению при малых параметрах регуляризации.

Параграф 3.3 посвящен обсуждению алгоритмов решения задачи оптимизации экономического ущерба с учетом ресурсов на устранение локальных источников. Первый алгоритм — одношаговый, в нем «управления» вычисляются за один шаг по формуле:

$$\eta_l(t) = -\frac{\delta Q \left(\int\limits_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)(t)}{\alpha \Pr^2 + \sum\limits_{l=1}^{N_L} \int\limits_0^T \left(\int\limits_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)^2 dt} \text{ при } t \in (0,T), l = \overline{1, N_L}, \tag{24}$$

в которой уменьшение первоначального ущерба рассчитывается из соотношения:

$$\delta Q = \min_{l,t} \left(\frac{g_l^{em}(t)}{\left(\int\limits_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)(t)} \right) \left(\alpha \Pr^2 + \sum\limits_{l=1}^{N_L} \int\limits_0^T \left(\int\limits_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)^2 dt \right). \tag{25}$$

Оценка уменьшения первоначального ущерба по формуле (25) в силу **Теоремы 6**, приведенной в данном параграфе, гарантирует выполнение неравенства (— соотношения «физичности»):

$$\eta_l(t) + g_l^{em}(t) \geq 0 \text{ при } t \in (0,T),\ l = \overline{1, N_L}. \tag{26}$$

Далее вводится обозначение Res — количество ресурсов, необходимое для уменьшения первоначального ущерба Q_0 на величину δQ и вычисляемое по формуле:

$$\text{Res} = -\Pr \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \eta_l(t) dt = \frac{\Pr \delta Q \sum\limits_{l=1}^{N_L} \int\limits_0^T \int\limits_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 dt}{\alpha \Pr^2 + \sum\limits_{l=1}^{N_L} \int\limits_0^T \left(\int\limits_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)^2 dt}. \tag{27}$$

Подставляя выражение для δQ из (25) в (27), получаем:

$$\mathrm{Res} = \min_{l,t} \left(\frac{g_l^{em}(t)}{\left(\int\limits_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)(t)} \right) \mathrm{Pr} \sum_{l=1}^{N_L} \int\limits_0^T \int\limits_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 dt. \tag{28}$$

В одношаговом алгоритме предполагается, что $Res_{av} \leq \mathrm{Res}$. Учитывая это предположение, а также, что Res и δQ связаны соотношением (27) и Res определяется по формуле (28), то если вычислять уменьшение δQ первоначального ущерба Q_0 по формуле

$$\delta Q_{av} = \frac{Res_{av} \left(\alpha\, \mathrm{Pr}^2 + \sum\limits_{l=1}^{N_L} \int\limits_0^T \left(\int\limits_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)^2 dt \right)}{\mathrm{Pr} \sum\limits_{l=1}^{N_L} \int\limits_0^T \int\limits_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 dt}, \tag{29}$$

то соотношение «физичности» (26) будет заведомо выполнено, при этом будут израсходованы все ресурсы Res_{av}. Также отметим, что «управления», вычисляемые по формуле (24), в которой $\delta Q = \delta Q_{av}$, доставляют квадратичному функционалу (23) (который минимизируется в решаемой задаче оптимизации (9)) глобальный минимум.

Таким образом, одношаговый алгоритм решения задачи оптимизации экономического ущерба с учетом ресурсов на ликвидацию источников загрязнений заключается в следующем:

- решаем «вспомогательную» сопряженную задачу (11), в которой g имеет вид (21), находим q;
- находим уменьшение δQ первоначального ущерба из соотношения (29), а также первоначальный ущерб Q_0;
- вычисляем «управления» η_l, $l = \overline{1, N_L}$ по формуле (24);
- решаем задачу (1)-(4) с известными «управлениями», находим ϕ;
- вычисляем остаточный ущерб Q и сравниваем с $Q_0 - \delta Q$.

Также в этом параграфе приведен многошаговый алгоритм решения рассматриваемой задачи, который используется при условии $Res_{av} > \mathrm{Res}$, то есть в случае, когда вычисление «управлений» за один шаг приводит либо к нарушению условия (26), либо к неполному использованию имеющихся ресурсов, что влечет за собой недостижимость глобального минимума функционала (23). Этот алгоритм основан на последовательном решении N_p задач оптимизации вида (9) с функционалами типа (23). Каждая из этих задач решается вышеописанным одношаговым алгоритмом. Кроме того, в этом параграфе доказано, что число шагов алгоритма N_p всегда конечно, а также приведена модификация многошагового алгоритма, позволяющая вычислять «управления» за N_p шагов, однако решать при этом прямую задачу (1)-(4) с известными «управлениями» один раз. Эта модификация может оказаться полезной при численных расчетах. Наконец, здесь доказана **Теорема 7**, гарантирующая, что остаточный ущерб Q и разность $Q_0 - \delta Q$ близки по значению при малых параметрах регуляризации.

Четвертая глава посвящена построению и исследованию схемы дискретизации трехмерной математической модели распространения примеси в регионе.

В **параграфе 4.1** описан непосредственно процесс построения схем для каждого уравнения системы (1)-(3) с начальным условием (4). Эти же схемы применяются для численного решения «вспомогательной» сопряженной задачи (11). Для построения схем вводится прямоугольная сетка и базисные три-линейные функции, а сами схемы строятся методом интегральных тождеств.

В **параграфе 4.2** исследуются свойства построенных схем, в частности формулируется **Теорема 8**, которая утверждает, что построенные схемы аппроксимируют дифференциальные операторы (1)-(3) (при том, что начальное условие определяется из соотношения (4)) с первым порядком точности по временной и пространственным переменным, являются абсолютно устойчивыми и обладают свойством монотонности (в терминологии А.А. Самарского). Отмечаем, что под монотонностью схемы здесь понимается то, что она сохраняет неотрицательность дискретного решения, то есть неотрицательность концентрации загрязнения, в случае, если решается прямая задача (1)-(4) и неотрицательность решения сопряженной задачи (функции «чувствительности»), если схема применяется для дискретизации (11).

В **параграфе 4.3** представлены результаты тестового численного эксперимента по моделированию распространения загрязнений в регионе. Эксперимент направлен на тестирование схем дискретизации системы уравнений (1)-(4) при $m_l = 0$, $l = \overline{1, N_L}$ (то есть без учета локальных источников) и на гладком решении. Результаты эксперимента проиллюстрировали справедливость всех утверждений Теоремы 8.

В **пятой главе** описан программный комплекс, разработанный автором диссертации и используемый для решения поставленных задач оптимизации. Также здесь обсуждаются результаты ряда численных экспериментов, иллюстрирующих эффективность предложенных алгоритмов и основные теоретические положения исследуемых задач.

В **параграфе 5.1** описан комплекс программ, применяемый для численного решения исследуемых в диссертации задач оптимизации.

В **параграфе 5.2** приведены аспекты численной реализации рассматриваемых задач, в частности описаны размерности и значения физических коэффициентов, область, в которой производилось численное моделирование, а также параметры расчетной сетки.

Параграф 5.3 посвящен описанию результатов численных экспериментов по решению задач оптимизации, описанных во второй и третьей главах диссертации. Эти результаты проиллюстрировали эффективность предложенных алгоритмов и основные теоретические положения исследуемых задач. Результаты численного эксперимента по решению задачи оптимизации экономического ущерба с учетом ресурсов на устранение источников загрязнений проиллюстрированы на рисунках 1-4. Отмечаем, что графики концентрации загрязнения и функции «чувствительности» приведены при постоянной скорости ветра для наглядности, расчеты проводились и с переменными скоростями (см., например, рисунок 4).

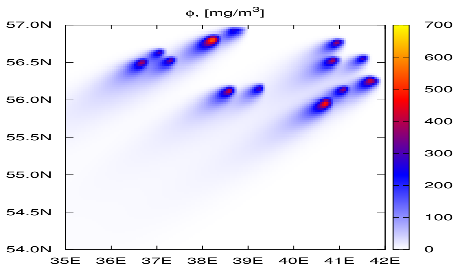

Рис. 1: Концентрация ϕ на высоте 50 м до начала действия «управлений» с вектором скорости ветра $\vec{u} = (-6.0, -4.0, -0.005)$.

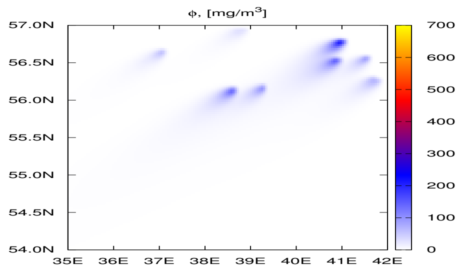

Рис. 2: Концентрация ϕ на высоте 50 м после действия «управлений» с вектором скорости ветра $\vec{u} = (-6.0, -4.0, -0.005)$.

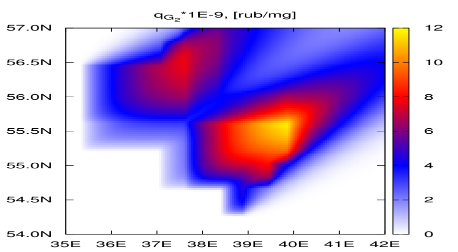

Рис. 3: Функция «чувствительности» q на нижней границе с вектором скорости ветра $\vec{u} = (-6.0, -4.0, -0.005)$.

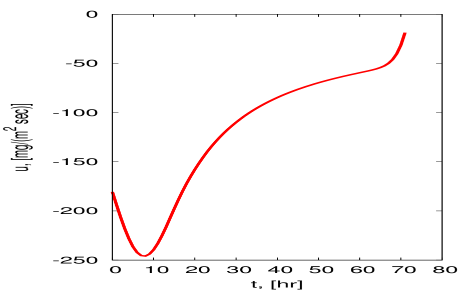

Рис. 4: Пример графика «управления» в регионе с координатой $(39°39'00'' \text{ E}, 55°47'24'' \text{ N})$ при переменном векторе скорости ветра.

Заключение содержит основные результаты и выводы диссертации, а также предложения по возможному использованию результатов работы.

В **приложении** приведены доказательства некоторых теорем, которые не вошли в основное содержание диссертационной работы.

Основные результаты работы

Основной результат работы: разработаны алгоритмы и комплекс программ для решения класса задач оптимального управления о локальных источниках при интегральном наблюдении. Получены следующие частные результаты:

- сформулированы задачи оптимизации «средней» концентрации загрязнения и экономического ущерба в регионе от локальных источников (на основе математической модели распространения загрязнений в окружающей среде с «корректными» граничными условиями), проведено их теоретическое исследование;

- разработаны и обоснованы алгоритмы решения рассматриваемых задач, позволяющие вычислять «управления» в аналитическом виде, а также оптимально распределять имеющиеся ресурсы по регионам источников загрязнения;

- предложенные алгоритмы реализованы в виде программного комплекса, проведен ряд численных экспериментов, иллюстрирующих эффективность этих алгоритмов и основные теоретические положения исследуемых задач (в качестве региона, на примере которого производилось численное моделирование, бралась Москва, Московская область и некоторые части прилегающих к ней областей).

Основные публикации по теме диссертации

1. Novikov I.S. Problem of minimization of pollution concentration related to fires in Moscow region // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2013. Vol. 28, No. 1, pp. 13-35.

2. Новиков И.С. Решение задачи оптимизации экономического ущерба от загрязнения окружающей среды локальными источниками //Сиб. журн. вычисл. математики РАН. Сиб. отд-ние. Новосибирск, 2015. Т.18, No. 4. С. 407-424.

3. Новиков И.С. Алгоритмы решения задачи оптимизации экономического ущерба от загрязнения окружающей среды с учетом ресурсов на устранение локальных источников // Вычислительные технологии, 2015. Т.20, No. 4. С. 56-82.

4. Агошков В.И., Новиков И.С. Решение задачи оптимизации концентрации загрязнений с ограничениями на интенсивность источников // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2016. Т.56, No. 1. С. 29-46.

5. Агошков В.И., Новиков И.С. Задача минимизации концентрации загрязнений от пожаров в регионе // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа: Сб. научн. тр. Вып. 26, том 2, НАН Украины, МГИ, ИГН, ОФ ИнБЮМ, Севастополь, 2012. С. 321-338.

6. Агошков В.И., Асеев Н.А., Новиков И.С. Методы исследования и решения задач о локальных источниках при локальных или интегральных наблюдениях. М.: ИВМ РАН, 1-е изд., 2012. 151 с.

7. Агошков В.И., Асеев Н.А., Новиков И.С. Методы исследования и решения задач о локальных источниках при локальных или интегральных наблюдениях. М.: ИВМ РАН, 2-е изд., 2015. 174 с.

8. Новиков И.С., Агошков В.И. Об одной задаче о локальных источниках и локальных наблюдениях. Томск: Избранные труды Международной молодежной школы и конференции CITIES-2011, 2011, С. 40-43.

9. Новиков И.С., Агошков В.И. Задача минимизации концентрации загрязнений от пожаров в Московском регионе // Труды 55-й научной конференции МФТИ, 2012. С. 165.

10. Новиков И.С., Агошков В.И. Исследование и решение задачи минимизации концентрации загрязнений в Московском регионе с ограничениями на интенсивность источников // Труды 56-й научной конференции МФТИ, 2013. С. 135.

11. Новиков И.С., Агошков В.И. Исследование и численное решение задачи минимизации экономического ущерба от локальных источников // Сб. тез. конф. «Ломоносовские чтения 2014», Москва, 2014. С. 45.

12. Новиков И.С. Алгоритм решения задачи оптимизации экономического ущерба от загрязнения в регионе с учетом ресурсов на устранение локальных источников // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование: Тезисы докладов / Улан-Удэ: Изд-во ВСГУТУ, 2015. С. 212-213.