

На правах рукописи

Клюшнев Никита Викторович

**Численное исследование устойчивости
поперечно-периодических течений жидкости и
газа**

Специальность 01.01.07 — вычислительная математика

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Москва — 2016

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте вычислительной математики Российской академии наук (ИВМ РАН)

Научный руководитель: **Нечепуренко Юрий Михайлович**
доктор физико-математических наук, доцент.

Официальные оппоненты: **Амосов Андрей Авенирович,**
доктор физико-математических наук, профессор. Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Национальный исследовательский университет МЭИ», заведующий кафедрой математического моделирования.

Ермаков Михаил Константинович,
кандидат физико-математических наук. Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук», старший научный сотрудник.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт автоматизации проектирования Российской академии наук

Защита состоится 15 июня 2016 г. в 14⁰⁰ часов на заседании диссертационного совета Д 002.045.01 при федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте вычислительной математики Российской академии наук (ИВМ РАН), расположенном по адресу: 119333, г. Москва, ул. Губкина, д. 8.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИВМ РАН <http://www.inm.ras.ru>.

Автореферат разослан ____ 2016 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.045.01
доктор физико-математических наук.

Бочаров Г.А.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Оребрение обтекаемой поверхности является эффективным и недорогим способом пассивного управления устойчивостью гидродинамических течений, но для его использования необходимо знать, как от параметров оребрения зависят основные характеристики устойчивости: линейное и энергетическое критические числа Рейнольдса и максимальная амплификация энергии возмущений. В исследованиях течений над оребренными поверхностями доминируют экспериментальные работы, проведение которых чрезвычайно дорого и трудоемко. Для понимания физических механизмов и разработки новых подходов к выбору параметров оребрения необходимы численные исследования, потенциально позволяющие рассмотреть существенно более широкий диапазон параметров. Однако проведению таких исследований препятствует их огромная вычислительная сложность в случае, когда характеристики устойчивости рассчитываются традиционными методами.

В 2010 году А.В. Бойко и Ю.М. Нечепуренко была предложена новая технология численного анализа устойчивости поперечно-периодических течений на базе оригинальных быстрых численных методов анализа и редукции больших дифференциально-алгебраических систем, существенно более эффективная, чем ранее известные подходы. Однако первоначально эта технология была реализована лишь для персональных компьютеров, мощности которых оказалось недостаточно для проведения всех представляющих интерес параметрических расчетов, и имелись некоторые пробелы в ее обосновании. Таким образом, актуальным являлось развитие и обоснование этой технологии, ее реализация для вычислительных кластеров, которая позволила бы проводить массовые численные эксперименты за приемлемое время, и подробное исследование на примере некоторого известного течения зависимостей характеристик устойчивости от параметров оребрения обтекаемой поверхности в широком диапазоне этих параметров.

Целью диссертационной работы является развитие и обоснование технологии численного анализа устойчивости поперечно-периодических течений, предложенной А.В. Бойко и Ю.М. Нечепуренко. Суперкомпьютерный расчет зависимостей характеристик устойчивости от параметров оребрения в широком

диапазоне этих параметров на примере течения Пуазейля. Объяснение полученных зависимостей.

Научная новизна. Для пространственной аппроксимации в задачах анализа устойчивости течений в каналах с волнистым оребрением впервые применен метод Галеркина-коллокаций. Обосновано применение представления Флоке для вычисления характеристик устойчивости. Рассмотрена возможность распространения технологии на случай гребенчатого оребрения.

Выполнена реализация технологии для вычислительных кластеров, позволившая проводить суперкомпьютерные расчеты характеристик устойчивости течений в оребренных каналах в широком диапазоне параметров оребрения.

Впервые показано, что

– в плоском и оребренном каналах энергетическое критическое число Рейнольдса и максимальная амплификация энергии возмущений достигаются на возмущениях с нулевым продольным волновым числом;

– линейная неустойчивость при больших периодах оребрения реализуется на ведущей моде, которой соответствует волна Сквайра плоского канала, устойчивая в плоском канале при любом числе Рейнольдса;

– параметры оребрения можно выбрать так, что по сравнению с плоским каналом увеличатся как энергетическое, так и линейное критические числа Рейнольдса и уменьшится максимальная амплификация энергии возмущений.

Теоретическая ценность работы. До недавнего времени считалось, что оребрение, увеличивая энергетическое критическое число Рейнольдса, обязательно уменьшает линейное. Полученные в работе результаты показывают, что параметры оребрения можно выбрать так, чтобы увеличились оба критических числа Рейнольдса, и, кроме того, что возможны другие комбинации увеличения или уменьшения критических чисел Рейнольдса. Показано, что при большом периоде оребрения становится неустойчивой мода, соответствующая волне Сквайра плоского канала. Для оребренного канала численно установлена справедливость аналога теоремы Сквайра (наиболее неустойчивые моды имеют нулевое поперечное волновое число). Также показано, что в плоском и оребренном каналах энергетическое критическое число Рейнольдса и максимальная амплификация энергии возмущений достигаются на возмущениях с нулевым продольным волновым числом.

Практическая ценность работы. В работе установлено, что продольное оребрение может увеличивать или уменьшать оба критических числа Рейнольдса независимо друг от друга. В том числе, можно увеличить энергетическое и линейное критические числа Рейнольдса, отдалив тем самым как докритический, так и естественный ламинарно-турбулентные переходы. Это, в частности, позволит прокачивать больше жидкости при сохранении ламинарности течения в широком диапазоне чисел Рейнольдса.

Созданная реализация технологии исследования устойчивости течений для вычислительных кластеров, примененная в данной диссертационной работе к исследованию устойчивости течения Пуазейля, может быть использована для суперкомпьютерного анализа влияния оребрения на устойчивость многих других течений, таких как течение Куэтта и течение в пограничном слое.

На защиту выносятся следующие результаты и положения:

1. Развита и обоснована оригинальная технология вычисления характеристик устойчивости для течений в оребренных каналах (энергетического и линейного критических чисел Рейнольдса и максимальной амплификации энергии возмущений). Предложена и реализована версия этой технологии для вычислительных кластеров. Выполнены параметрические расчеты характеристик устойчивости в широком диапазоне параметров оребрения для течения Пуазейля в оребренном канале.
2. Численно установлена справедливость аналога теоремы Сквайра для оребренного канала. Кроме того, численно показано, что в плоском и оребренном каналах энергетическое критическое число Рейнольдса и максимальная амплификация энергии возмущений достигаются на возмущениях с нулевым продольным волновым числом.
3. Получена и объяснена зависимость линейного критического числа Рейнольдса от периода оребрения, высоты и заостренности ребер. Показано, что линейная неустойчивость при больших периодах оребрения реализуется на ведущей моде, которой соответствует волна Сквайра плоского канала.

4. Показано, что параметры оребрения можно выбрать так, что по сравнению с плоским каналом увеличатся оба критических числа Рейнольдса и уменьшится максимальная амплификация энергии возмущений.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на семинарах, в том числе, на семинаре Института вычислительной математики РАН и на следующих конференциях: 55-я, 56-я и 57-я научные конференции МФТИ (Москва, 2012-2014); 13-я международная школа-семинар «Модели и методы аэродинамики» (Евпатория, 2013); XX Всероссийская конференция и Молодежная школа-конференция «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики», посвященная памяти К.И. Бабенко (Новороссийск, пос. Абрау-Дюрсо, 2014); XVII Международная конференция по методам аэрофизических исследований (Новосибирск, 2014).

Публикации. Основные результаты диссертации изложены в 12 печатных работах [1–12], из них 3 – в журналах, рекомендованных ВАК [1, 2, 4].

Личный вклад. Диссертационное исследование является самостоятельным законченным трудом автора. Лично автором были выполнены: реализация технологии исследования устойчивости для вычислительных кластеров и параметрические расчеты характеристик устойчивости в широком диапазоне параметров оребрения. Развитие и обоснование технологии исследования устойчивости, анализ и объяснение зависимостей характеристик устойчивости течения Пуазейля от параметров оребрения были выполнены автором совместно с А.В. Бойко и Ю.М. Нечепуренко. Случай гребенчатого оребрения был рассмотрен автором совместно с О.А. Григорьевым.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Полный объем диссертации составляет **135** страниц с **28** рисунками и **7** таблицами. Список литературы содержит **66** наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, формулируется ее цель, а также сфор-

мулированы научная новизна, теоретическая и практическая ценность диссертационной работы.

Первая глава посвящена описанию теоретических основ и обоснованию используемой для исследования устойчивости вычислительной технологии. Вводится терминология, даются постановки задач устойчивости, обосновывается сведение анализа устойчивости исследуемого течения к анализу его устойчивости к элементарным возмущениям с использованием представления Флоке. Кратко приводятся известные результаты по устойчивости течения Пуазейля в плоском канале. В том числе обсуждается теорема Сквайра, которая говорит о том, что наиболее неустойчивые моды имеют нулевое поперечное волновое число, что позволяет при исследовании модовой неустойчивости в плоском канале не рассматривать другие значения этого параметра.

В *разделе 1.2* выводятся уравнения эволюции возмущений, лежащие в основе исследования устойчивости основного течения к малым возмущениям. В декартовых координатах x , y и z рассматривается течение вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном по продольному направлению x канале постоянного сечения, бесконечного и периодического в поперечном направлении z . В качестве нормировки длины выбирается средняя полувысота канала h , определенная по одному периоду поперечного сечения канала, в качестве нормировки скорости — средняя скорость основного течения U_{ref} . Число Рейнольдса определяется как

$$\text{Re} = \frac{U_{\text{ref}} h}{\nu},$$

где ν — коэффициент кинематической вязкости жидкости. При такой нормировке в каналах с одинаковыми числами Рейнольдса через среднюю площадь сечения, приходящуюся на единицу длины по z , за единицу времени будет протекать одно и то же количество жидкости.

В качестве исследуемого *основного* течения в работе было выбрано течение Пуазейля. Соответствующий нормированный профиль $U = U(y, z)$ этого течения не зависит от числа Рейнольдса, и для его вычисления достаточно решить уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -1 \quad (1)$$

в области одного периода поперечного сечения канала

$$\Sigma = \{(y, z) : -\eta_1(z) < y < \eta_2(z), -l < z < l\} \quad (2)$$

с граничными условиями прилипания по y и периодичности по z , и нормировать полученное решение на его среднее значение. Здесь $\eta_j(z)$ — периодические положительные достаточно гладкие функции с полупериодом $l > 0$.

В работе рассматриваются следующие *линеаризованные уравнения эволюции возмущений*:

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = J\mathbf{v}' + \frac{1}{\text{Re}}\Delta\mathbf{v}' - \nabla p', \quad \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0, \quad (3)$$

где $\mathbf{v}' = (u', v', w')^\top$ — вектор скорости с компонентами вдоль x , y и z , p' — давление, а

$$J = - \begin{bmatrix} U\partial/\partial x & \partial U/\partial y & \partial U/\partial z \\ 0 & U\partial/\partial x & 0 \\ 0 & 0 & U\partial/\partial x \end{bmatrix}.$$

Уравнения (3) достаточно рассматривать на одном периоде *допустимого* (бездивергентного достаточно гладкого) начального возмущения, то есть в области

$$\Omega' = \{(x, y, z) : -X < x < X, -\eta_1(z) < y < \eta_2(z), -Z < z < Z\}, \quad (4)$$

где $Z = \varkappa l$, а X и \varkappa — заданные положительное и положительное целое числа, с граничными условиями прилипания по y и периодичности по x и z .

В *разделе 1.3* даются определения характеристик устойчивости. *Средняя плотность кинетической энергии* допустимого возмущения \mathbf{v}' вводится как

$$\mathcal{E}(\mathbf{v}') = \frac{1}{16XZ} \int_{-Z}^Z \int_{-\eta_1(z)}^{\eta_2(z)} \int_{-X}^X \mathbf{v}'(x, y, z) \cdot \mathbf{v}'(x, y, z) dx dy dz.$$

Говорят, что основное течение *монотонно устойчиво*, если средняя плотность кинетической энергии любого допустимого при $t = 0$ возмущения монотонно убывает при $t \rightarrow \infty$, и *линейно устойчиво*, если средняя плотность кинетической энергии любого достаточно малого допустимого при $t = 0$ возмущения стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Точные нижние грани чисел Рейнольдса, при которых основное течение не является монотонно устойчивым и линейно устойчивым, называют *энергетическим* и *линейным критическими числами Рейнольдса*, и в работе они обозначаются через Re_E и Re_L соответственно. Интерес также представляют возмущения, на которых достигаются критические числа

Рейнольдса, такие возмущения называются *критическими*. Для рассматриваемого течения Пуазейля в оребренном канале $Re_L < \infty$ и $Re_E \ll Re_L$ при всех рассматриваемых оребрениях. Можно показать, что величины Re_E и Re_L для полных и линеаризованных уравнений эволюции возмущений совпадают, поэтому для их вычисления в работе используются линеаризованные уравнения эволюции возмущений.

Глобальное энергетическое и линейное критические числа Рейнольдса можно вычислить как

$$Re_E = \inf_{X,Z} Re_E(X, Z), \quad X > 0, \quad Z = \varkappa l, \quad \varkappa \in \mathbb{Z}_+, \quad (5)$$

и

$$Re_L = \inf_{X,Z} Re_L(X, Z), \quad X > 0, \quad Z = \varkappa l, \quad \varkappa \in \mathbb{Z}_+. \quad (6)$$

Максимально возможный при данном числе Рейнольдса $Re < Re_L$ «подскок»

$$\Gamma_{\max}(Re) = \sup \frac{\mathcal{E}(\mathbf{v}'(t))}{\mathcal{E}(\mathbf{v}'(0))} \quad (7)$$

средней плотности кинетической энергии возмущения, где супремум берется по всем допустимым ненулевым начальным возмущениям и всем $t > 0$, называют *максимальной амплификацией средней плотности кинетической энергии возмущений*. Начальное возмущение $\mathbf{v}'(0)$, при котором достигается $\Gamma_{\max}(Re)$, называют *оптимальным возмущением*.

В работе $\Gamma_{\max}(Re)$ также вычисляется для линеаризованных уравнений эволюции возмущений ввиду значительной сложности задачи определения этой характеристики устойчивости для полных уравнений, а также достаточности для моделирования и анализа докритических сценариев ламинарно-турбулентного перехода рассмотрения возмущений, оптимальных в рамках линеаризованных уравнений.

Таким образом,

$$\Gamma_{\max}(Re) = \sup_{X,Z} \Gamma_{\max}(Re; X, Z), \quad X > 0, \quad Z = \varkappa l, \quad \varkappa \in \mathbb{Z}_+, \quad (8)$$

где $\Gamma_{\max}(Re; X, Z)$ — это максимальная амплификация средней плотности кинетической энергии возмущений для уравнений (3), рассматриваемых в области (4)

с граничными условиями прилипания по y и периодичности по x и z . Поскольку $\Gamma_{\max}(\text{Re}) = 1$ при $\text{Re} \leq \text{Re}_E$, максимальную амплификацию имеет смысл вычислять при $\text{Re}_E < \text{Re} < \text{Re}_L$.

В разделе 1.4 характеристики устойчивости предлагается определять через элементарные возмущения. Рассмотрим решение системы (3) вида

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'(x, y, z, t) &= \mathbf{v}''(y, z, t) \exp\{i(\alpha x + \beta z)\}, \\ p'(x, y, z, t) &= p''(y, z, t) \exp\{i(\alpha x + \beta z)\}, \end{aligned} \quad (9)$$

где α — вещественный параметр (продольное волновое число), $\mathbf{v}''(y, z, t)$, $p''(y, z, t)$ — функции, периодические по z с полупериодом l , а $\beta \in [0, \pi/l)$ — параметр расстройки Флоке. Такие решения называются в работе *элементарными возмущениями*, а величина

$$\mathcal{E}(\mathbf{v}') = \frac{1}{8l} \int_{\Sigma} \mathbf{v}''(y, z) \cdot \overline{\mathbf{v}''(y, z)} dy dz = \mathcal{E}(\mathbf{v}''), \quad (10)$$

где Σ означает область (2), называется средней плотностью кинетической энергии элементарного возмущения (9).

Подставляя (9) в (3), приходим к системе уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{v}''}{\partial t} = J_{\alpha} \mathbf{v}'' + \frac{1}{\text{Re}} L_{\alpha\beta} \mathbf{v}'' + G_{\alpha\beta} p'', \quad F_{\alpha\beta} \mathbf{v}'' = 0, \quad (11)$$

где

$$J_{\alpha} = - \begin{bmatrix} i\alpha U & \partial U / \partial y & \partial U / \partial z \\ 0 & i\alpha U & 0 \\ 0 & 0 & i\alpha U \end{bmatrix}, \quad G_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -i\alpha \\ -\partial / \partial y \\ -\partial / \partial z - i\beta \end{bmatrix},$$

$$F_{\alpha\beta} = [i\alpha, \partial / \partial y, \partial / \partial z + i\beta], \quad L_{\alpha\beta} = -\alpha^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2 + 2i\beta \partial / \partial z - \beta^2.$$

Уравнения (11) называются в работе *уравнениями эволюции элементарных возмущений* и рассматриваются в области (2) с граничными условиями прилипания по y и периодичности по z .

Критические числа Рейнольдса $\text{Re}_E^{\alpha\beta}$ и $\text{Re}_L^{\alpha\beta}$ определяются соответственно как точные нижние грани таких положительных Re , при которых существуют решения системы уравнений (11) в области Σ с граничными условиями прилипания по y и периодичности по z , средняя плотность кинетической энергии (10) которых не стремится к нулю строго монотонно и просто не стремится к нулю

при $t \rightarrow \infty$. Через $\Gamma_{\max}^{\alpha\beta}(\text{Re})$ обозначается максимальная амплификация средней плотности кинетической энергии решений этой системы.

Нижеследующая теорема, доказанная в работе, утверждает, что глобальные характеристики устойчивости достигаются на элементарных возмущениях.

Теорема 1.3.1 *Для глобальных характеристик устойчивости (5), (6) и (8) справедливы следующие равенства:*

$$\text{Re}_E = \inf_{\alpha,\beta} \text{Re}_E^{\alpha\beta}, \quad \text{Re}_L = \inf_{\alpha,\beta} \text{Re}_L^{\alpha\beta}, \quad \Gamma_{\max}(\text{Re}) = \sup_{\alpha,\beta} \Gamma_{\max}^{\alpha\beta}(\text{Re}), \quad (12)$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\beta \in [0, \pi/l)$. Более того, в общем случае достаточно ограничиться неотрицательными α и указанными значениями β , а если оребрение и, следовательно, профиль основного течения являются четными функциями по z , то достаточно ограничиться $\alpha \geq 0$ и $\beta \in [0, \pi/(2l)]$.

Стоит отметить, что система (11) допускает существенное упрощение в случае $\beta = 0$ и четного по z оребрения, то есть когда функции $\eta_1(z)$ и $\eta_2(z)$ являются четными. Учитывая, что в этом случае профиль основного течения U также является четной функцией, можно показать, что если пара $\mathbf{v}'' = (u'', v'', w'')$, p'' является решением системы (11), то пары

$$\mathbf{v}'' = (u''_+, v''_+, w''_-), \quad p'' = p''_+ \quad \text{и} \quad \mathbf{v}'' = (u''_-, v''_-, w''_+), \quad p'' = p''_-,$$

где $f_{\pm}(y, z, t) = (f(y, z, t) \pm f(y, -z, t))/2$, также будут являться решениями этой системы. Поэтому решение системы (11) можно сводить к отдельному поиску решений, обладающих указанными выше симметриями, которые в работе обозначаются *I* и *II* соответственно.

В разделе 1.5 доказывается теорема 1.3.1.

В разделе 1.6 рассматривается случай плоского канала, и, в частности, показывается, что, так как в этом случае профиль течения Пуазейля не зависит от z , глобальные характеристики устойчивости можно вычислить, рассматривая в качестве допустимых возмущений возмущения периодические по x и z с произвольными периодами.

В разделе 1.7 описываются волны Толлмина–Шлихтинга и Сквайра. Проблему собственных значений, к которой приводит вычисление линейного критического числа Рейнольдса для плоского течения Пуазейля, можно с помощью

преобразования Сквайра записать в виде системы семи уравнений, три из которых будут представлять собой проблему собственных значений, независимую от остальных четырех уравнений. Поэтому множество решений первоначальной проблемы можно разбить на два непересекающихся подмножества. Каждое решение из первого подмножества соответствует собственному значению и собственной функции независимой проблемы собственных значений, полученной после преобразования. Полученные таким образом решения дают решения для системы (3) вида

$$\mathbf{v}'(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} \tilde{u}'(y) \\ \tilde{v}'(y) \\ \tilde{w}'(y) \end{bmatrix} \exp\{i(\alpha x + \gamma z) + \lambda t\}, \quad (13)$$

$$p'(x, y, z, t) = \tilde{p}'(y) \exp\{i(\alpha x + \gamma z) + \lambda t\},$$

которые называются волнами Толлмина–Шлихтинга. Каждое решение из второго подмножества соответствует тривиальному решению независимой проблемы, и соответствующие решения системы (3) вида (13) называются волнами Сквайра. Линейная устойчивость плоского течения Пуазейля при заданном числе Рейнольдса зависит от устойчивости волн Толлмина–Шлихтинга, а волны Сквайра устойчивы в плоском канале при любом числе Рейнольдса.

Теорема Сквайра говорит о том, что глобальное линейное критическое число Рейнольдса в плоском канале достигается на возмущении с нулевым поперечным волновым числом.

В *разделе 1.8* обсуждается проблема, к которой сводится вычисление линейного критического числа Рейнольдса для оребренного канала при $\beta = 0$, она имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda \tilde{u} &= -i\alpha U \tilde{u} - \frac{\partial U}{\partial y} \tilde{v} - \frac{\partial U}{\partial z} \tilde{w} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \alpha^2 \right) \tilde{u} - i\alpha \tilde{p}, \\ \lambda \tilde{v} &= -i\alpha U \tilde{v} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \alpha^2 \right) \tilde{v} - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y}, \\ \lambda \tilde{w} &= -i\alpha U \tilde{w} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \alpha^2 \right) \tilde{w} - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z}, \\ & i\alpha \tilde{u} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

и рассматривается в области (2) с граничными условиями прилипания по y и периодичности по z .

Учитывая непрерывную зависимость собственных значений проблемы (14) от функций $\eta_1(z)$ и $\eta_2(z)$, главная часть спектра проблемы (14) при $\eta_1(z) \approx 1$ и $\eta_2(z) \approx 1$ будет близка к главной части спектра проблемы (14) с $\eta_1(z) = \eta_2(z) = 1$. Более того, можно ожидать и близость соответствующих инвариантных подпространств, отвечающих группе изолированных собственных значений. В случае плоского канала самая неустойчивая мода является волной Толлмина–Шлихтинга с $\gamma = 0$. Поэтому волны Сквайра и волны Толлмина–Шлихтинга с $\gamma > 0$ при определении линейного критического числа Рейнольдса можно игнорировать. Однако в оребренном канале может оказаться, что мода, сходящаяся при $\eta_1(z) \rightarrow 1$ и $\eta_2(z) \rightarrow 1$ к волне Толлмина–Шлихтинга с $\gamma = 0$ и максимальным $\text{Real}\lambda$, не является самой неустойчивой модой и ведущую роль играют моды, сходящиеся к волнам Толлмина–Шлихтинга с $\gamma > 0$ и даже волнам Сквайра.

Как и система (11) при $\beta = 0$, проблема собственных значений (14) допускает существенное упрощение в случае четного по z оребрения, то есть когда функции $\eta_1(z)$ и $\eta_2(z)$ являются четными. В этом случае решение проблемы (14) можно сводить к отдельному поиску решений, обладающих симметриями I и II .

Во второй главе описываются методы расчета характеристик устойчивости с заданной точностью.

В *разделе 2.2* ставятся слабые постановки уравнения (1) и системы (11) с граничными условиями прилипания по y и периодичности по z .

В *разделе 2.3* описывается аппроксимация этих слабых постановок методом Галеркина–коллокаций. Для этого выбирается гладкое взаимно-однозначное отображение квадрата $\{(r, s) : -1 < r < 1, -1 < s < 1\}$ в исходную область Σ и в слабых постановках делается замена переменных. В квадрате строятся прямоугольные сетки и в качестве базисных функций выбираются интерполяционные полиномы: по направлению r — элементарные интерполяционные полиномы Лагранжа для узлов Гаусса (корни полинома Лежандра) для давления и для узлов Гаусса–Лобатто (корни производной полинома Лежандра и ± 1) для компонент скорости, а по направлению s — тригонометрические интерполяционные полиномы на равномерной сетке.

В результате такой аппроксимации получается следующая система дифференциально-алгебраических уравнений:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = (J_\alpha + \frac{1}{\text{Re}}L_{\alpha\beta})\mathbf{v} + G_{\alpha\beta}p, \quad F_{\alpha\beta}\mathbf{v} = 0, \quad (15)$$

где J_α , $L_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}$ и $F_{\alpha\beta}$ — конечномерные аналоги соответствующих операторов в (11), причем

$$G_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}^*, \quad L_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta}^* < 0, \quad (16)$$

\mathbf{v} и p — векторы, содержащие коэффициенты разложения компонент скорости и давления по базисным функциям. Здесь в вектор \mathbf{v} внесены корни соответствующих квадратурных коэффициентов, и поэтому конечномерный аналог средней плотности кинетической энергии имеет вид

$$\mathcal{E}(\mathbf{v}) = \frac{1}{8l}\|\mathbf{v}\|_2^2. \quad (17)$$

Систему (15) можно упростить, спроектировав ее на подпространство соленоидальных сеточных функций, то есть — на ядро матрицы $F_{\alpha\beta}$, так как из второго уравнения системы следует, что все решения лежат в этом подпространстве. Для этого делается замена переменных $\mathbf{v} = V_{\alpha\beta}\mathbf{u}$, где $V_{\alpha\beta}$ — матрица, столбцы которой образуют ортонормированный базис в ядре матрицы $F_{\alpha\beta}$. В результате получается следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = (H_{\alpha\beta} + \frac{1}{\text{Re}}S_{\alpha\beta})\mathbf{u}, \quad (18)$$

где $H_{\alpha\beta} = V_{\alpha\beta}^*J_\alpha V_{\alpha\beta}$, $S_{\alpha\beta} = V_{\alpha\beta}^*L_{\alpha\beta}V_{\alpha\beta}$.

В разделе 2.4 показывается, что для фиксированной пары параметров (α, β) энергетическое критическое число Рейнольдса может быть вычислено как $\text{Re}_E^{\alpha\beta} = 1/\mu_E^{\alpha\beta}$, где $\mu_E^{\alpha\beta}$ означает максимальное собственное значение эрмитового матричного пучка

$$H_{\alpha\beta} + H_{\alpha\beta}^* + \mu(S_{\alpha\beta} + S_{\alpha\beta}^*). \quad (19)$$

Поскольку матрица при спектральном параметре μ этого пучка отрицательно определенная, вычисление его спектра сводится на основе разложения Холецкого этой матрицы, взятой с обратным знаком, и двусторонних преобразований Хаусхолдера к обычной проблеме собственных значений с эрмитовой трехдиагональной матрицей. Для решения последней можно воспользоваться, например,

специальным вариантом QR-алгоритма. Описанный подход легко реализовать с помощью процедур из известного пакета LAPACK. Глобальное энергетическое критическое число Рейнольдса Re_E можно найти, минимизируя $Re_E^{\alpha\beta}$ по параметрам α и β . Также в разделе описывается вычисление критических возмущений, соответствующих Re_E .

В разделе 2.5 показано, что для вычисления линейного критического числа Рейнольдса $Re_L^{\alpha\beta}$ достаточно найти минимальное Re , при котором матрица

$$H_{\alpha\beta} + \frac{1}{Re} S_{\alpha\beta}$$

имеет хотя бы одно собственное значение с нулевой вещественной частью, и описан метод его вычисления с использованием стандартных процедур нахождения нуля и минимума функции FZERO и FMIN соответственно, и процедуры вычисления всех собственных значений неэрмитовой матрицы из пакета LAPACK. Глобальное линейное критическое число Рейнольдса Re_L находится минимизацией $Re_L^{\alpha\beta}$ по параметрам α и β . Также в разделе описывается вычисление критических возмущений, соответствующих Re_L .

Раздел 2.6 посвящен вычислению максимальной амплификации средней плотности кинетической энергии возмущений. Для некоторого фиксированного числа Рейнольдса Re : $Re_E^{\alpha\beta} < Re < Re_L^{\alpha\beta}$ расчет $\Gamma_{\max}^{\alpha\beta}(Re)$ сводится к вычислению максимальной амплификации квадрата второй нормы решений задач Коши для системы (18), которая равна

$$\Gamma_{\max}^{\alpha\beta}(Re) = \max_{t \geq 0} \|\exp\{tA_{\alpha\beta}\}\|_2^2, \quad (20)$$

где $A_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta} + S_{\alpha\beta}/Re$. Глобальная максимальная амплификация $\Gamma_{\max}(Re)$ вычисляется максимизацией $\Gamma_{\max}^{\alpha\beta}(Re)$ по параметрам α и β . Также в разделе описывается вычисление оптимальных возмущений, на которых достигается $\Gamma_{\max}(Re)$.

В разделе 2.7 рассматривается программная реализация описанной выше технологии исследования устойчивости течений. Эта реализация представляет собой комплекс программ, написанных в среде MATLAB для персонального компьютера (ПК), и на языке Fortran для кластера, оснащенного библиотекой Intel MKL. Рабочее место пользователя находится на ПК, соединенном с кластером по сети. Пользователь работает в среде MATLAB на ПК, но может выбрать режим, в котором основной объем вычислений производится на кластере.

Использование кластера автоматизировано, по завершении вычислений пользователь может обрабатывать результаты так, как если бы вычисления полностью производились на ПК в среде MATLAB.

Благодаря сведению анализа устойчивости основного течения к анализу его устойчивости к элементарным возмущениям (9), предложенная технология обладает значительным параллелизмом. Например, при расчете линий уровня спектральных характеристик (проверка гипотезы об оптимальном и критических возмущениях) для каждой пары параметров (α, β) необходимо решить одну и ту же независимую задачу, отличающуюся только значениями самих параметров. Полностью независимыми являются и любые расчеты при различных значениях параметров оробрения. Это позволяет распределять вычисления на большое количество вычислительных узлов кластера. В разделе описываются свойства реализации, такие как требования к оперативной памяти в зависимости от расчетной сетки, ускорение относительно вычислений на ПК, и делается вывод, что реализация технологии для вычислительных кластеров позволяет проводить массовые параметрические расчеты за приемлемое время.

В *разделе 2.8* описываются результаты совместной О. А. Григорьевым работы, посвященной рассмотрению возможности включения в технологию случая гребенчатого оробрения (бесконечно тонкие продольные пластины на нижней стенке канала) с применением конформного отображения для построения расчетной сетки.

Третья глава посвящена анализу результатов численного исследования влияния на устойчивость течения Пуазейля трехпараметрического семейства поперечно-периодического волнистого продольного оробрения, нанесенного на нижнюю стенку канала.

В *разделе 3.2*, в частности, описывается исследуемое оробрение, которое имеет следующий вид:

$$\eta_1(z) = 1 - \varepsilon \left(\left| \cos \frac{\pi z}{L} \right|^\rho - h_\rho \right), \quad \eta_2(z) = 1, \quad (21)$$

где $L = 2l$ — период оробрения, $0 \leq \varepsilon < 1$ — высота ребер, $\rho > 0$ — параметр, определяющий их «заостренность», а h_ρ — число, выбираемое так, чтобы обеспечить единичную среднюю полувысоту канала.

В случае $\varepsilon = 0$ канал является плоским (величина ρ при этом роли не играет), а в случае $\varepsilon > 0$ — оребренным. При варьировании z полувысота оребренного канала меняется от $h_{\min}(\varepsilon, \rho) = 1 + \varepsilon(h_\rho - 1)/2 < 1$ до $h_{\max}(\varepsilon, \rho) = 1 + \varepsilon h_\rho/2 > 1$. При $\rho \rightarrow \infty$ величина h_ρ монотонно убывает до 0, а оребрение стремится в поперечном сечении канала к бесконечно тонким вертикальным разрезам высоты ε , расположенным на расстоянии L друг от друга (гребенчатое оребрение).

В *разделе 3.3* численно устанавливается, что для оребренного канала справедливо утверждение, аналогичное теореме Сквайра для плоского канала, а именно: Re_L достигается на возмущениях вида (9) с $\beta = 0$ и неравным нулю α . Кроме того, в разделе показывается, что Re_E и $\Gamma_{\max}(Re)$ при $Re_E < Re < Re_L$ достигаются на возмущениях вида (9) с $\alpha = 0$ и, вообще говоря, неравными нулю β .

В *разделе 3.4* рассмотрены зависимости критических чисел Рейнольдса и критических возмущений от параметров оребрения (21). Во всех расчетах предполагалось, что для течения Пуазейля в оребренном канале справедлива гипотеза об оптимальном и критических возмущениях, и при вычислении каждого из критических чисел Рейнольдса варьировался один из параметров, α либо β , а для второго фиксировалось нулевое значение, что значительно уменьшало вычислительные затраты.

Зависимости Re_E и Re_L от периода оребрения при различных ρ и ε изображены на рис. 3.7, значения характеристик для плоского канала обозначены \widetilde{Re}_E и \widetilde{Re}_L и изображены на рисунке горизонтальными пунктирными линиями. С увеличением как ρ , так и ε отклонение значений характеристик для оребренного канала от значений для плоского канала увеличивается. Вместе с тем, зависимость от периода оребрения каждого из критических чисел Рейнольдса качественно не меняется при варьировании ρ и ε . Анализ рис. 3.7 также показывает, что наряду со случаем, когда оребрение увеличивает энергетическое критическое число Рейнольдса и уменьшает линейное (например, при $L = 0.604$), оно может, при определенных значениях периода, уменьшить оба критических числа Рейнольдса (например, при $L = 1.416$), а также оно может увеличить оба критических числа Рейнольдса (например, при $L = 2.088$ и $\varepsilon = 0.2$), как и уменьшить

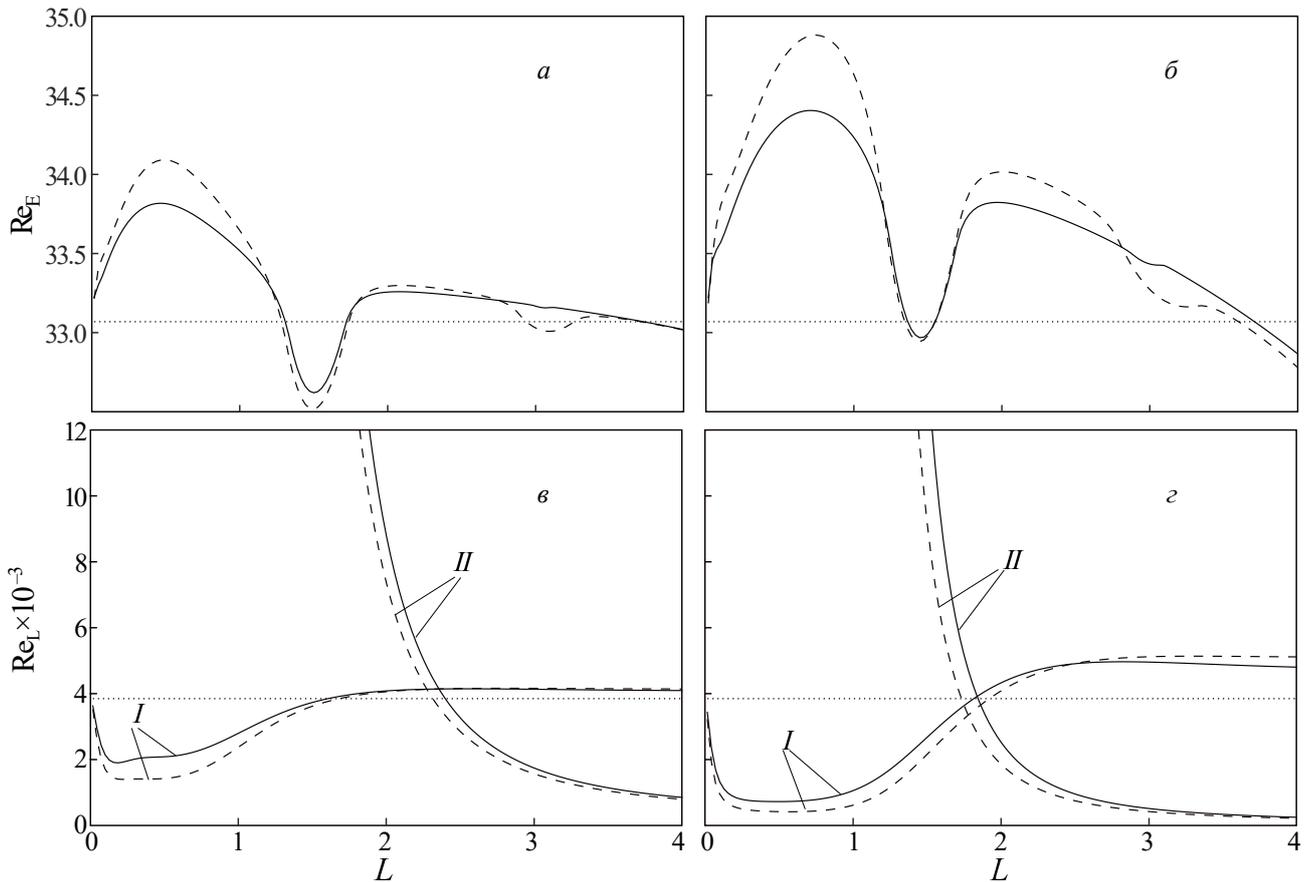


Рисунок 3.7: Зависимости Re_E (сверху) и Re_L (снизу) от периода оребрения для $\varepsilon = 0.2$ (слева) и 0.4 (справа) при $\rho = 2$ (—) и 4 (- -); $\widetilde{Re}_E \approx 33.07$, $\widetilde{Re}_L \approx 3.848 \times 10^3$ (\cdots).

энергетическое критическое число Рейнольдса и увеличить линейное (например, при $L = 1.696$ и $\varepsilon = 0.2$).

В разделе 3.4.1 подробно рассматривается зависимость Re_E от периода оребрения. Из рис. 3.7 видно, что в большей части рассмотренного интервала периодов оребрения Re_E оребренного канала в соответствии с данными предшествующих работ превосходит \widetilde{Re}_E . Кривые $Re_E(L)$ имеют в этом интервале глобальный (слева) и локальный (справа) максимумы и локальный минимум между ними. Увеличение высоты ребер ε приводит главным образом к увеличению Re_E в целом, а увеличение параметра ρ заостренности ребер — к увеличению разброса значений Re_E .

Критические возмущения представляют собой противовращающиеся в плоскости сечения канала продольные вихревые пары, поперечный период Λ которых слабо зависит от параметров оребрения и составляет 2.7–3.2 (в случае плоского канала $\Lambda \approx 3.0$). Минимум Re_E достигается, когда размер одного такого вихря из пары близок к периоду оребрения, то есть наиболее «бла-

гоприятный» по отношению к критическим возмущениям период орбления $L_{\min} \approx \Lambda/2$.

При «благоприятном» периоде орбления каждый вихрь расположен между выступающими в поток гребнями ребер и граница канала «охватывает» нижнюю пристенную часть вихрей, поэтому «кажущаяся» или эффективная полувысота канала по отношению к вихрям примерно равна $h_{\max}(\varepsilon, \rho)$, что несколько больше полувысоты плоского канала, равной единице. Такое «углубление» канала по отношению к вихрям означает увеличение эффективного числа Рейнольдса, поскольку средняя скорость основного течения в сравниваемых каналах одинаковая. Как следствие, течение в орбренном канале при $L = L_{\min}$ теряет монотонную устойчивость при меньшем числе Рейнольдса.

Масштаб вихревой структуры в поперечном направлении слабо зависит от периода орбления и остается примерно таким же, как и в плоском канале, поэтому при значениях L , отличных от L_{\min} , возникает расстройка между размерами вихрей, обеспечивающих Re_E , и периодом орбления, что ведет к увеличению Re_E .

В разделе 3.4.2 подробно рассматривается зависимость Re_L от периода орбления. Из рис. 3.7 видно, что в большей части рассмотренного диапазона периодов орбления L , в соответствии с данными предшествующих работ, Re_L значительно меньше \widetilde{Re}_L . Это связано с наличием перегибов в профиле скорости основного течения — при небольших периодах орбления профиль имеет значительную перегибность по y , а при больших — по z , перегибность по y при этом исчезает. Такая структура основного течения является причиной неустойчивости и ряда других пространственно модулированных сдвиговых течений.

При фиксированных параметрах орбления L и ρ с уменьшением ε кривая I стремится к горизонтальной линии, показывающей значение \widetilde{Re}_L , а кривая II смещается вправо. В работе сделано естественное предположение, что $Re_L^I \rightarrow \widetilde{Re}_L$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а ведущая нейтрально устойчивая мода симметрии I , отвечающая Re_L^I , стремится к нейтрально устойчивой волне Толлмина–Шлихтинга плоского канала. Справедливость этого предположения демонстрируется в работе поведением продольной компоненты скорости этой моды.

В то же время $Re_L^{II} \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и ведущая нейтрально устойчивая мода симметрии II , отвечающая Re_L^{II} , стремится к невязкому пределу вол-

ны Сквайра плоского канала с поперечным волновым числом $\gamma = 2\pi/L$. Это также демонстрируется в работе поведением продольной компоненты скорости этой моды. Из сказанного можно заключить, что ведущая нейтрально устойчивая мода оребренного канала в рассмотренном диапазоне периодов оребрения при небольших периодах близка по структуре к волне Толлмина–Шлихтинга плоского канала, а при больших — к волне Сквайра.

Напомним, что в соответствии с существующими представлениями об устойчивости плоских течений наличие точки перегиба

$$y_s : \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(y_s) = 0$$

профиля скорости $U(y)$ является необходимым условием возникновения неустойчивости при пренебрежимо малой вязкости (так называемый механизм возникновения «невязкой неустойчивости»). При этом в случае нейтральной устойчивости ($Re = Re_L$) точка перегиба должна совпадать с «критической» точкой y_c , в которой скорость основного течения равна фазовой скорости c ведущей моды: $U(y_c) = c$.

Стоит отметить, что $Re_L \rightarrow \widetilde{Re}_L$ при $L \rightarrow 0$ по той же причине, по которой $Re_E \rightarrow \widetilde{Re}_E$: оребренный канал становится эквивалентен плоскому с меньшей полувисотой и во столько же большей средней скоростью основного течения. С ростом L механизм невязкой неустойчивости начинает проявлять себя резким уменьшением величин Re_L . Анализ распределений U , $\partial^2 U / \partial y^2$ и модуля $|u'|$ продольной компоненты скорости ведущей моды при $Re = Re_L$ показывает, что в этом случае имеются точки (y, z) , в которых

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(y, z) = 0, \quad U(y, z) = c.$$

Эти точки расположены в области наибольших значений $|u'|$, что согласуется с данными для пограничных слоев. При дальнейшем увеличении L перегибы по y постепенно исчезают, а величина Re_L для моды симметрии I при $L \gtrsim 2.5$ выходит на постоянный уровень.

Вместе с тем, при $L \gtrsim 1.8$ – 2.4 (в зависимости от параметров оребрения) глобальное Re_L обеспечивается модой симметрии II . Эта мода имеет большую фазовую скорость, чем мода симметрии I , примерно равную средней скорости основного течения в центре канала. Она становится неустойчивой при малых

числах Рейнольдса, когда возникает перегиб по z в центре канала. Максимум модуля продольной компоненты скорости моды симметрии II также располагается в центре канала. При дальнейшем увеличении L перегибы по z в центре канала не исчезают, поэтому эти соображения продолжают оставаться актуальными.

В *разделе 3.5* подробно рассматривается зависимость $\Gamma_{\max}(Re)$ от периода орбления при $Re = 400$. Эта зависимость объясняется видом оптимальных возмущений, представляющих собой (также, как критические возмущения, на которых достигается Re_E) противовращающиеся в плоскости сечения канала пары продольных вихрей. Отклонение $\Gamma_{\max}(Re)$ от $\tilde{\Gamma}_{\max}(Re)$ для плоского канала при варьировании периода орбления и других его параметров обратно по знаку и почти пропорционально по величине отклонению Re_E от \tilde{Re}_E . В работе делается вывод, что зависимость $\Gamma_{\max}(Re)$ от параметров орбления можно с хорошей точностью оценить по известной зависимости Re_E от этих параметров. Поскольку расчет последней является существенно более простой вычислительной задачей, в инженерных приложениях, связанных с оптимизацией обтекания, имеет смысл ограничиться только детальным расчетом зависимости Re_E от параметров орбления и контрольными расчетами $\Gamma_{\max}(Re)$ при небольшом числе значений параметров.

В **заключении** сформулирован основной результат работы — развита и обоснована оригинальная технология вычисления характеристик устойчивости для течений в орбренных каналах (энергетического и линейного критических чисел Рейнольдса и максимальной амплификации энергии возмущений), получены зависимости характеристик устойчивости течения Пуазейля от параметров орбления в широком диапазоне этих параметров, эти зависимости проанализированы и объяснены, в том числе:

1. Предложена и реализована версия технологии вычисления характеристик устойчивости для вычислительных кластеров. Особенности данной технологии являются, в частности, применение для аппроксимации метода Галеркина-коллокаций и использование представления Флоке.
2. Численно показана справедливость для орбренного канала аналога теоремы Сквайра, которая для плоского канала говорит о том, что наиболее

неустойчивые моды имеют нулевое поперечное волновое число. Кроме того, численно показано, что в плоском и оребренном каналах энергетическое критическое число Рейнольдса и максимальная амплификация энергии возмущений достигаются на возмущениях с нулевым продольным волновым числом.

3. Впервые показано, что линейная неустойчивость при больших периодах оребрения реализуется на ведущей моде, которой соответствует волна Сквайра плоского канала.
4. Впервые показано, что параметры оребрения можно выбрать так, что по сравнению с плоским каналом увеличатся оба критических числа Рейнольдса и уменьшится максимальная амплификация энергии возмущений, что отдалит как докритический и естественный ламинарно-турбулентные переходы. Кроме того, показано, что оребрение может отдалить докритический ламинарно-турбулентный переход и приблизить естественный, может приблизить и докритический и естественный ламинарно-турбулентные переходы, а может приблизить докритический и отдалить естественный.

Публикации автора по теме диссертации

1. Ключнев Н. В. Высокопроизводительный анализ устойчивости поперечно-периодических течений жидкости и газа // Математическое моделирование. 2013. Т. 25, № 11. С. 111–120.
2. Григорьев О. А., Ключнев Н. В. Применение численно-аналитического метода конформного отображения для построения сетки в оребренном канале // Вычислительные методы и программирование. 2014. Т. 15. С. 487–498.
3. Бойко А. В., Ключнев Н. В., Нечепуренко Ю. М. Об устойчивости течения Пуазейля в оребренном канале // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. М., 2014. № 89. 20 с.
4. Boiko A. V., Klyushnev N. V., Nechipurenko Y. M. On stability of Poiseuille flow in grooved channels // EPL (Europhysics Letters). 2015. Vol. 111, no. 1. P. 14001.p1–14001.p6.

5. Бойко А. В., Ключнев Н. В., Нечепуренко Ю. М. Устойчивость течения жидкости над оребренной поверхностью. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016. 123 с.
6. Бойко А. В., Ключнев Н. В., Нечепуренко Ю. М. Технология численного анализа устойчивости поперечно-периодических течений // Тезисы докладов XX Всероссийской конференции и Молодежной школы-конференции «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики». М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2014. С. 30–31.
7. Бойко А. В., Ключнев Н. В., Нечепуренко Ю. М. Влияние волнистого оребрения на устойчивость сдвиговых течений // Тезисы докладов XX Всероссийской конференции и Молодежной школы-конференции «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики». М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2014. С. 31–32.
8. Nечepurenko Y. M., Boiko A. V., Klyshnev N. V. Effect of wavy grooves on stability of shear flows // International Conference on the Methods of Aerophysical Research: June 30–July 6, 2014, Novosibirsk, Russia. Abstracts / Ed. by V. M. Fomin. Novosibirsk: Avtograf, 2014. Vol. 1. P. 161–162.
9. Бойко А. В., Ключнев Н. В., Нечепуренко Ю. М. Влияние волнистого оребрения на устойчивость сдвиговых течений // Модели и методы аэродинамики: Материалы Тринадцатой Международной школы-семинара / под ред. И. И. Липатова. М.: МЦНМО, 2013. С. 35–36.
10. Ключнев Н. В. Высокопроизводительная реализация численного анализа устойчивости поперечно-периодических течений жидкостей и газов // Труды 55-й научной конференции МФТИ. М.: МФТИ, 2012. С. 164.
11. Ключнев Н. В. Влияние волнистого оребрения на устойчивость течения Пуазейля // Труды 56-й научной конференции МФТИ. М.: МФТИ, 2013. С. 134.
12. Ключнев Н. В. Влияние периода оребрения на характеристики устойчивости течения Пуазейля // Труды 57-й научной конференции МФТИ. М.: МФТИ, 2014. С. 65.