

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский Физико-технический институт (государственный университет)»
Факультет управления и прикладной математики

На правах рукописи

Демьянко Кирилл Вячеславович

**Быстрые методы вычисления характеристик гидродинамической
устойчивости**

01.01.07 — «Вычислительная математика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Нечепуренко Юрий Михайлович

Москва – 2014

Содержание

Введение	5
0.1 Актуальность	5
0.2 Цель	7
0.3 Научная новизна	7
0.4 Основные положения, выносимые на защиту	8
0.5 Теоретическая и практическая значимость работы	9
0.6 Апробация работы	10
0.7 Личный вклад	11
0.8 Публикации	11
0.9 Объем и структура работы	11
1 Технология численного анализа устойчивости течений	12
1.1 Введение	12
1.2 Постановка задачи	14
1.3 Предварительные преобразования	15
1.4 Вычисление энергетического критического числа Рейнольдса	18
1.5 Вычисление линейного критического числа Рейнольдса	19
1.6 Использование стандартных процедур	23
1.6.1 Процедура FZERO	23
1.6.2 Процедура FMIN	25
1.7 Выводы	27

2	Анализ устойчивости течения Пуазейля в канале прямоугольного сечения	28
2.1	Введение	28
2.2	Численное исследование устойчивости	31
2.2.1	Постановка задачи	31
2.2.2	Аппроксимация	34
2.2.3	Свойства полученной системы	37
2.2.4	Алгоритм вычисления критического числа Рейнольдса .	42
2.2.5	Численные эксперименты	45
2.2.6	Сравнение с известными результатами	49
2.3	Зависимость критического числа Рейнольдса от отношения длин сторон сечения	51
2.3.1	Теорема Сквайра	51
2.3.2	Течение в канале прямоугольного сечения	54
2.3.3	Одномерная модель течения в канале прямоугольного сечения	57
2.4	Выводы	60
3	Решение частичных проблем собственных значений	61
3.1	Введение	61
3.2	Двусторонний метод Ньютона для решения частичной обычной проблемы собственных значений	66
3.2.1	Двусторонний метод обратных итераций	71
3.2.2	Двусторонний метод Ньютона	73
3.2.3	Численные эксперименты	78
3.2.4	Выводы	86
3.3	Метод Ньютона для решения частичной обобщенной проблемы собственных значений	87
3.3.1	Приближенные обратные итерации	89

3.3.2	Метод Ньютона	91
3.3.3	Решение обобщенного уравнения Сильвестра	93
3.3.4	Приближенный метод Ньютона	94
3.3.5	Тестовая задача	96
3.3.6	Численные эксперименты	98
3.3.7	Выводы	107
3.4	Выводы	108
	Заключение	110
	Список рисунков	113
	Список таблиц	114
	Литература	115

Введение

0.1 Актуальность

Задачи гидродинамической устойчивости возникают, например, при проектировании судов и дозвуковых летательных аппаратов [1–4] и находятся в центре внимания многих исследователей начиная с конца 19-го века благодаря пионерским работам Гельмгольца, Кельвина, Релея, Рейнольдса (см., например, [5–7]).

Основными характеристиками гидродинамической устойчивости являются энергетическое и линейное критические числа Рейнольдса [8]. Их вычисление сводится к решению частных обобщенных проблем собственных значений для систем обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений, возникающих после пространственной аппроксимации линеаризованных уравнений вязкой несжимаемой жидкости. Если течение зависит от одной пространственной переменной или сводится к таковому, то для расчетов достаточно современного ПК и стандартного численного программного обеспечения. Если же скорость основного течения зависит от двух (биглобальная устойчивость) или трех (триглобальная устойчивость) пространственных переменных и/или времени, то, в силу существенно большей алгебраической размерности возникающих вычислительных задач, необходимы специальные алгоритмы, построенные с учетом структуры исследуемых уравнений. Кроме того, актуальна разработка метода вычисления линейного критического числа

Рейнольдса с заданной точностью, чего не позволяют делать известные подходы.

Одной из задач биглобальной устойчивости является зависимость линейного критического числа Рейнольдса течения Пуазейля в бесконечном канале постоянного прямоугольного сечения от величины $Z \geq 1$ отношения длин сторон сечения. Известно, что существует $Z_c > 1$, такое что при $Z < Z_c$ линейное критическое число Рейнольдса бесконечно, а при $Z > Z_c$ – конечно. В работах [9, 10] было численно установлено, что $Z_c \approx 3.2$. Однако используемые в этих работах методы не позволяли судить о погрешности результата. Более того, какого-либо теоретического обоснования данной зависимости до недавнего времени получить не удавалось.

В задачах гидродинамической устойчивости самыми неустойчивыми являются наиболее гладкие возмущения. Поэтому, если исследуется относительно простое течение, то для пространственной аппроксимации часто используют метод коллокаций, который приводит к обобщенной проблеме собственных значений с плотными матрицами не очень большого размера. При исследовании сложных течений, метод коллокаций неприменим из-за слишком высокого размера получающихся плотных матриц. В этом случае приходится использовать конечно-разностные или конечно-элементные методы аппроксимации (см., например, [11, 12]), приводящие к задачам с разреженными матрицами. Наиболее популярными методами решения частичной проблемы собственных значений с большими разреженными матрицами являются метод Арнольди, несимметричный метод Ланцоша и метод Якоби-Дэвидсона (см., например, [13–19]). Существенным недостатком этих методов является высокое требование к объему оперативной памяти, так как приближение к собственному вектору ищется в подпространстве, размерность которого растет на каждом шаге, а для нахождения инвариантного или понижающего подпространства приходится использовать более сложные и вычислительно-емкие блочные варианты этих методов. Таким образом, разработка более эффективных алгоритмов ре-

шения частичных проблем собственных значений с большими разреженными матрицами, по-прежнему остается актуальной задачей.

0.2 Цель

Целью диссертационной работы является разработка, обоснование и реализация быстрых методов вычисления характеристик гидродинамической устойчивости. В том числе, развитие и обоснование предложенной в [20–22] технологии численного анализа систем обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений, полученных после пространственной аппроксимации линеаризованных уравнений вязкой несжимаемой жидкости. Создание специального варианта технологии для исследования устойчивости течений в бесконечных каналах постоянного прямоугольного сечения. Исследование с его помощью устойчивости течения Пуазейля. Разработка, обоснование и реализация методов ньютоновского типа для решения частичных обычных и обобщенных проблем собственных значений с большими разреженными матрицами, возникающих при вычислении критических чисел Рейнольдса.

0.3 Научная новизна

Использование предложенных и обоснованных в диссертационной работе модификаций стандартных процедур FZERO и FMIN, позволяет вычислять линейные критические числа Рейнольдса и строить соответствующие нейтральные кривые с заданной относительной точностью, чего не позволяют делать традиционные подходы.

Разработанный и обоснованный специальный вариант технологии для исследования устойчивости течений в бесконечных каналах постоянного прямоугольного сечения требует существенно меньших вычислительных затрат, по сравнению с общей технологией. Выполненное с его помощью численное

исследование зависимости линейного критического числа Рейнольдса течения Пуазейля от отношения длин сторон сечения канала позволило уточнить известные результаты. Впервые дано теоретическое обоснование этой зависимости, которое хорошо согласуется с результатами численных экспериментов.

Предложены и обоснованы новые методы решения частичной обычной и обобщенной проблем собственных значений: двусторонний метод Ньютона для вычисления спектрального проектора, отвечающего заданной группе изолированных собственных значений большой разреженной матрицы, и метод Ньютона для вычисления понижающего подпространства, отвечающего изолированному подмножеству конечных собственных значений, регулярного матричного пучка с большими разреженными матрицами.

0.4 Основные положения, выносимые на защиту

1. Развита и обоснована предложенная в [20–22] технология численного анализа систем обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений, полученных после пространственной аппроксимации линеаризованных уравнений вязкой несжимаемой жидкости. В частности, обоснованы предварительные преобразования исходной системы, а также предложены и обоснованы модификации стандартных процедур FZERO и FMIN, позволяющие вычислять линейное критическое число Рейнольдса и строить соответствующие нейтральные кривые с заданной относительной точностью.
2. Разработан и обоснован специальный вариант технологии для исследования устойчивости течений в бесконечных каналах постоянного прямоугольного сечения. Численно исследована зависимость линейного критического числа Рейнольдса течения Пуазейля от отношения длин сторон

сечения. Выполненные расчеты позволили уточнить известные результаты.

3. Впервые дано теоретическое обоснование зависимости линейного критического числа Рейнольдса течения Пуазейля в бесконечном канале постоянного прямоугольного сечения от отношения длин сторон сечения.
4. Предложен и обоснован двусторонний метод Ньютона для вычисления спектрального проектора, отвечающего заданной группе изолированных собственных значений большой разреженной матрицы.
5. Предложен и обоснован метод Ньютона для вычисления понижающего подпространства, отвечающего заданному изолированному подмножеству конечных собственных значений, регулярного матричного пучка с большими разреженными матрицами.

0.5 Теоретическая и практическая значимость работы

Теоретическая значимость работы заключается в обосновании предварительных преобразований исходной системы обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений, полученных после пространственной аппроксимации линеаризованных уравнений вязкой несжимаемой жидкости, обосновании предложенных модификаций процедур FZERO и FMIN, обосновании специального варианта метода коллокаций, сохраняющего на дискретном уровне симметричность и отрицательную определенность оператора Лапласа и соотношение $div = -grad^*$, теоретическом обосновании зависимости линейного критического числа Рейнольдса течения Пуазейля в бесконечном канале постоянного прямоугольного сечения от отношения длин сторон сечения, и, кроме того, в обосновании методов ньютоновского типа для ре-

шения частичных проблем собственных значений с большими разреженными матрицами, возникающих при вычислении характеристик гидродинамической устойчивости.

Практическая значимость работы состоит в создании нового метода вычисления критических чисел Рейнольдса, применимого как в случае плотных, так и в случае разреженных матриц. В отличие от традиционных подходов, этот метод позволяет вычислять линейные критические числа Рейнольдса и строить соответствующие нейтральные кривые с заданной относительной точностью, а также является более экономичным. Кроме того, разработаны надежные, экономичные и относительно простые методы ньютоновского типа для решения частичных обычных и обобщенных проблем собственных значений с большими разреженными матрицами.

0.6 Апробация работы

Основные результаты работы докладывались на: международной конференции «Модели и методы аэродинамики» (Евпатория, 2011), международной конференции «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики» (Москва, 2014), XX всероссийской конференции «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов и решения задач математической физики» (Новороссийск, пос. Абрау-Дюрсо, 2014), всероссийских конференциях МФТИ (Москва, 2011-2013 г.г.). Результаты диссертации также обсуждались на научных семинарах Института вычислительной математики РАН и Института прикладной математики РАН им. М.В. Келдыша.

Результаты работы были отмечены почетным дипломом на научной конференции МФТИ-56 в 2013-м году.

0.7 Личный вклад

Все теоретические результаты, представленные в работах [23–27], получены совместно с Ю.М. Нечепуренко. Результаты, представленные в [28], получены совместно с Ю.М. Нечепуренко и М. Садканом (Франция).

Реализация описанных в работах [23–28] алгоритмов и подготовка и проведение соответствующих численных экспериментов была выполнена автором диссертации самостоятельно.

0.8 Публикации

Основные результаты диссертации изложены в 9 печатных работах [23–31], из них 3 – в журналах, рекомендованных ВАК [23–25].

0.9 Объем и структура работы

Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Полный объем диссертации составляет **122** страницы с **12** рисунками и **9** таблицами. Список литературы содержит **73** наименования.

Глава 1

Технология численного анализа устойчивости течений

1.1 Введение

В работах [20–22] предложена технология численного анализа систем обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений, полученных после аппроксимации по пространственным переменным линейризованных уравнений вязкой несжимаемой жидкости (см., например, [32]), однако ее обоснования дано не было. В настоящей главе дается обоснование этой технологии. В частности, в разделе 1.3 обоснованы предварительные преобразования, позволяющие свести исходную систему обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с матрицами меньшего порядка. В разделах 1.4 и 1.5 обоснованы методы вычисления энергетического и линейного критических чисел Рейнольдса Re_E и Re_L [8], соответственно. В разделе 1.6 предложены и обоснованы используемые при вычислении Re_L модификации стандартных

процедур FZERO и FMIN [33], позволяющие находить Re_L с заданной относительной точностью.

В рамках предложенной технологии поиск Re_E сводится к однократному вычислению максимального собственного значения эрмитового матричного пучка [34, 35] со знакоопределенной матрицей при спектральном параметре. Вычисление Re_L сводится к решению частичных обычных проблем собственных значений, зависящих от параметра $\mu = 1/\text{Re}$. С помощью предложенных модификаций процедур FZERO и FMIN, с заданной точностью ищется максимальный положительный корень μ_L уравнения $r(\mu) = 0$, где $r(\mu)$ – максимальная вещественная часть собственных значений рассматриваемой проблемы, тогда $\text{Re}_L = 1/\mu_L$. Такой подход не только позволяет вычислять Re_L с заданной относительной точностью, как это показано в разделе 1.5, но и является более экономичным, чем другие подходы: так в работах [9, 10] вычисление $r(\mu)$ сводится к решению обобщенных, а не обычных, как в данной технологии, проблем собственных значений и для поиска корней уравнения $r(\mu) = 0$ вводится сетка по Re и ищутся интервалы, на концах которых $r(\mu)$ имеет перемену знаков. В этом случае для нахождения Re_L приходится вычислять значительно больше значений $r(\mu)$, чем в предложенной технологии.

Отметим, что в главе 1 при описании технологии предполагается, что после пространственной аппроксимации получается система обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений с матрицами общего вида не очень большого размера. В этом случае, для сокращения вычислительных затрат, выполняются упомянутые выше преобразования данной системы, обоснованные в разделе 1.3. Если же аппроксимация приводит к задачам с большими разреженными матрицами, то применение этих преобразований невозможно, поскольку они приводят к плотным матрицам. Однако, наиболее важные элементы технологии – методы вычисления критических чисел Рейнольдса – останутся без изменений. Так, например, поиск Re_L с заданной относительной точностью будет выполняться по той же схеме, только для вычисления $r(\mu)$

нужно будет решать частичные обобщенные проблемы собственных значений с большими разреженными матрицами. Методы решения таких проблем собственных значений обсуждаются в главе 3 диссертационной работы.

1.2 Постановка задачи

После линеаризации и аппроксимации по пространственным переменным, задача устойчивости течения вязкой несжимаемой жидкости сводится к исследованию устойчивости нулевого решения системы обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений вида

$$C \frac{d\mathbf{v}}{dt} = J^{(1)}\mathbf{v} + \frac{1}{\text{Re}} J^{(2)}\mathbf{v} + G\mathbf{p}, \quad F\mathbf{v} = 0, \quad (1.2.1)$$

где первое уравнение является дискретным аналогом уравнений движения, а второе – уравнения неразрывности, \mathbf{v} – n_v -компонентный вектор дискретных аналогов компонент скорости, \mathbf{p} – n_p -компонентный вектор дискретного аналога давления ($n_p < n_v$); C и $J^{(1)}$ и $J^{(2)}$ – квадратные матрицы порядка n_v , независящие от числа Рейнольдса, а G и F – прямоугольные матрицы размеров $n_v \times n_p$ и $n_p \times n_v$ соответственно. В случае, когда основное течение не зависит от одной или двух пространственных переменных (сдвиговое течение), либо обладает осевой симметрией, задача временной устойчивости приводит к семейству систем вида (1.2.1) с вещественной матрицей C , комплексными матрицами $J^{(1)}$, $J^{(2)}$, G и F , зависящими от одного или двух спектральных параметров, и комплексными векторами \mathbf{v} и \mathbf{p} .

Будем предполагать, что (1.2.1) наследует известное свойство уравнений вязкой несжимаемой жидкости [36], а именно, что из уравнений движения можно исключить давление, используя уравнение неразрывности. Можно показать, что (1.2.1) обладает этим свойством, если матрица C невырождена и

$$\text{rank } G = \text{rank } F = \text{rank } FC^{-1}G. \quad (1.2.2)$$

Действительно, если матрицы F и G не полного ранга и имеют дефект ранга d , то некоторые d строк матрицы F являются линейными комбинациями остальных ее строк, а некоторые d столбцов матрицы G являются линейными комбинациями остальных ее столбцов. Поэтому эти строки и столбцы можно сократить, сократив при этом и соответствующие компоненты вектора \mathbf{p} . Таким образом из (1.2.1) получается система точно такого же вида с $n_p = n_p^{old} - d$ и с матрицами F и G , удовлетворяющими условию

$$\text{rank } G = \text{rank } F = \text{rank } FC^{-1}G = n_p, \quad (1.2.3)$$

что эквивалентно требованию невырожденности матрицы $FC^{-1}G$. Тогда, умножив первое уравнение в (1.2.1) на матрицу FC^{-1} , получим

$$FC^{-1}J^{(1)}\mathbf{v} + \frac{1}{\text{Re}}FC^{-1}J^{(2)}\mathbf{v} + FC^{-1}G\mathbf{p} = 0,$$

откуда можно найти \mathbf{p} .

Предполагая, что система (1.2.1) снабжена сеточным аналогом кинетической энергии $\mathcal{E}(\mathbf{v}) = (E\mathbf{v}, \mathbf{v})$, где $E = E^* > 0$, определим для нее критические числа Рейнольдса Re_E и Re_L обычным образом [8], то есть как точные нижние грани таких положительных Re , при которых существуют решения, кинетическая энергия которых не убывает строго монотонно и просто не убывает при $t \rightarrow \infty$, соответственно.

1.3 Предварительные преобразования

Основываясь на результатах работ [20–22, 37], преобразуем систему (1.2.1) к более удобному для анализа виду.

Пусть

$$G = U \begin{bmatrix} R_G \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F^* = V \begin{bmatrix} R_F \\ 0 \end{bmatrix}$$

являются QR-разложениями [34], т.е. U и V – унитарные [38] матрицы порядка n_v , а R_G и R_F – верхние треугольные порядка n_p и матрицы U и V разбиты на

блоки следующим образом: $U = [U_1, U_2]$, $V = [V_1, V_2]$, где U_k и V_k – матрицы размера $n_v \times n_k$ и $n_1 = n_p$, $n_2 = n_v - n_p$. Введем следующие обозначения: $J_{ij}^{(k)} = U_i^* J^{(k)} V_j$, $k = 1, 2$, $C_{ij} = U_i^* C V_j$.

Рассмотрим систему

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = H^{(1)}\mathbf{u} + \frac{1}{\text{Re}}H^{(2)}\mathbf{u}, \quad (1.3.1)$$

где $H^{(k)} = (C_{22}R^{-1})^{-1}J_{22}^{(k)}R^{-1}$, а R – фактор Холецкого в разложении Холецкого $V_2^* E V_2 = R^* R$ [34].

Теорема 1.3.1. *Если выполнено условие (1.2.3), то система (1.2.1) эквивалентна системе (1.3.1). Причем*

$$\mathbf{v}(t) = V_2 R^{-1} \mathbf{u}(t),$$

$$\mathbf{p}(t) = R_G^{-1} (C_{12} R^{-1} (H^{(1)} + \frac{1}{\text{Re}} H^{(2)}) R - J_{12}^{(1)} - \frac{1}{\text{Re}} J_{12}^{(2)}) R^{-1} \mathbf{u}(t),$$

а функционал энергии $\mathcal{E}(\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|_2^2$.

Доказательство. Поскольку столбцы V_2 образуют базис в ядре матрицы F , то второе уравнение (1.2.1) выполняется тогда и только тогда, когда $\mathbf{v}(t) = V_2 R^{-1} \mathbf{u}(t)$, где $\mathbf{u}(t)$ – комплексный вектор размера $n_v - n_p$. Кроме того, как следствие указанного выше QR-разложения матрицы G , член $G\mathbf{p}$ можно представить в виде $U_1 R_G \mathbf{p}$. Значит система (1.2.1), эквивалентна уравнению

$$C V_2 R^{-1} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = J^{(1)} V_2 R^{-1} \mathbf{u} + \frac{1}{\text{Re}} J^{(2)} V_2 R^{-1} \mathbf{u} + U_1 R_G \mathbf{p}.$$

Умножая поочередно полученное уравнение на U_1^* и U_2^* , и, учитывая, что $U_2^* U_1 = 0$, получим

$$U_1^* C V_2 R^{-1} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = U_1^* J^{(1)} V_2 R^{-1} \mathbf{u} + \frac{1}{\text{Re}} U_1^* J^{(2)} V_2 R^{-1} \mathbf{u} + R_G \mathbf{p},$$

$$U_2^* C V_2 R^{-1} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = U_2^* J^{(1)} V_2 R^{-1} \mathbf{u} + \frac{1}{\text{Re}} U_2^* J^{(2)} V_2 R^{-1} \mathbf{u}.$$

В силу данных выше определений матриц $H^{(k)}$, $J_{12}^{(k)}$, C_{12} и C_{22} , полученную систему можно переписать в виде

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = H^{(1)}\mathbf{u} + \frac{1}{\text{Re}}H^{(2)}\mathbf{u},$$

$$\mathbf{p} = R_G^{-1}(C_{12}R^{-1}\frac{d\mathbf{u}}{dt} - J_{12}^{(1)}R^{-1}\mathbf{u} - \frac{1}{\text{Re}}J_{12}^{(2)}R^{-1}\mathbf{u}),$$

откуда следует, что

$$\mathbf{p}(t) = R_G^{-1}(C_{12}R^{-1}(H^{(1)} + \frac{1}{\text{Re}}H^{(2)})R - J_{12}^{(1)} - \frac{1}{\text{Re}}J_{12}^{(2)})R^{-1}\mathbf{u}(t).$$

Рассмотрим теперь функционал энергии. Поскольку $V_2^*EV_2 = R^*R$, где R – фактор Холецкого, то

$$\mathcal{E}(\mathbf{v}) = (E\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (EV_2R^{-1}\mathbf{u}, V_2R^{-1}\mathbf{u}) = (R^{-*}V_2^*EV_2R^{-1}\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|_2^2.$$

□

Итак, исследование устойчивости нулевого решения системы обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений (1.2.1) сводится к исследованию устойчивости нулевого решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.3.1). При этом критические числа Рейнольдса Re_E и Re_L , определенные в разделе 1.2, являются точными нижними гранями таких положительных Re , при которых существуют решения системы (1.3.1), вторая норма которых не убывает строго монотонно и просто не убывает при $t \rightarrow \infty$.

Для обоснования алгоритмов вычисления критических чисел Рейнольдса нам будет достаточно учитывать, что матрица $H^{(2)}$ является дискретным аналогом сужения оператора Лапласа на подпространство соленоидальных сеточных функций, и, следовательно, при корректной пространственной аппроксимации должна быть диссипативной, т.е. обладать следующим свойством:

$$H^{(2)} + H^{(2)*} < 0.$$

Матрицу $H^{(1)}$ мы будем рассматривать как квадратную комплексную матрицу общего вида. При этом мы будем считать, что максимальное собственное значение матрицы $H^{(1)} + H^{(1)*}$ положительное. Последнее не нарушит общности описанных в следующем разделе алгоритмов, поскольку, если $H^{(1)} + H^{(1)*} \leq 0$, то при любом числе Рейнольдса норма любого решения $\mathbf{u}(t)$ системы (1.3.1) строго монотонно убывает при $t \rightarrow \infty$. Это следует из оценки [21]:

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{u}(t)\|_2^2 \leq h_{max} \|\mathbf{u}(t)\|_2^2, \quad (1.3.2)$$

где h_{max} означает максимальное собственное значение матрицы

$$H^{(1)} + H^{(1)*} + \frac{1}{\text{Re}}(H^{(2)} + H^{(2)*}). \quad (1.3.3)$$

Если $\mathbf{u}(0)$ является собственным вектором матрицы (1.3.3), отвечающим максимальному собственному значению h_{max} , то в оценке (1.3.2) достигается равенство.

1.4 Вычисление энергетического критического числа Рейнольдса

Для эрмитовой матрицы (1.3.3), по определению [38], имеем

$$h_{max} = \max_{\mathbf{x} \neq 0} \left[\frac{((H^{(1)} + H^{(1)*})\mathbf{x}, \mathbf{x})}{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{((H^{(2)} + H^{(2)*})\mathbf{x}, \mathbf{x})}{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \right].$$

Так как матрица $H^{(1)} + H^{(1)*}$ не знакоопределенная, а $H^{(2)}$ диссипативная, то в зависимости от Re максимальное собственное значение h_{max} может быть как отрицательным, так и положительным. Более того, для любых положительных чисел $\text{Re}_1 < \text{Re}_2$, при любых $\mathbf{x} \neq 0$ будет выполнено неравенство:

$$\begin{aligned} & \frac{((H^{(1)} + H^{(1)*})\mathbf{x}, \mathbf{x})}{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} + \frac{1}{\text{Re}_1} \frac{((H^{(2)} + H^{(2)*})\mathbf{x}, \mathbf{x})}{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} < \\ & < \frac{((H^{(1)} + H^{(1)*})\mathbf{x}, \mathbf{x})}{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} + \frac{1}{\text{Re}_2} \frac{((H^{(2)} + H^{(2)*})\mathbf{x}, \mathbf{x})}{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}. \end{aligned}$$

Значит h_{max} строго монотонно возрастает с ростом Re . Если Re меняется непрерывно, то и h_{max} будет меняться непрерывно.

Из указанной выше зависимости h_{max} от Re и того, что оценка (1.3.2) достижима, следует, что Re_E можно найти как Re , при котором максимальное собственное значение h_{max} матрицы (1.3.3) равно нулю.

При $Re = Re_E$, максимальное собственное значение $h_{max} = 0$ и, следовательно, матрица (1.3.3) вырождена, то есть

$$\det(H^{(1)} + H^{(1)*} + \mu(H^{(2)} + H^{(2)*})) = 0, \quad (1.4.1)$$

при $\mu = 1/Re_E$. Множество всех μ , удовлетворяющих уравнению (1.4.1) является множеством собственных значений эрмитового матричного пучка

$$H^{(1)} + H^{(1)*} + \mu(H^{(2)} + H^{(2)*}) = 0. \quad (1.4.2)$$

Таким образом, $Re_E = 1/\mu_E$, где μ_E – максимальное собственное значение пучка (1.4.2). Отметим, что пучок (1.4.2) является эрмитовым с знакоопределенной матрицей при спектральном параметре и его максимальное собственное значение может быть вычислено с помощью процедуры из пакета LAPACK [39].

1.5 Вычисление линейного критического числа Рейнольдса

Линейное критическое число Рейнольдса Re_L можно найти как точную нижнюю грань таких положительных Re , при которых существует решение системы (1.3.1), норма которого не стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, т.е. как минимальное Re , при котором матрица

$$H^{(1)} + \frac{1}{Re} H^{(2)}$$

имеет хотя бы одно собственное значение с нулевой вещественной частью.

Обозначим через $r(\mu)$ максимальную вещественную часть собственных значений матрицы $H^{(1)} + \mu H^{(2)}$. Тогда $\text{Re}_L = 1/\mu_L$, где μ_L – максимальный положительный корень уравнения $r(\mu) = 0$. Учитывая, что при $\mu > \mu_E$ это уравнение корней заведомо не имеет, мы будем искать μ_L на отрезке $[\mu_\infty, \mu_E]$ с $\mu_\infty = 1/\text{Re}_\infty$, где Re_∞ – некоторое достаточно большое число Рейнольдса, такое что при большем числе Рейнольдса исследовать устойчивость основного течения не имеет физического смысла. При этом, не нарушая общности, можно считать, что $r(\mu_E) < 0$, иначе $r(\mu_E) = 0$, т.е. $\mu_L = \mu_E$.

Для вычисления нулей функции $r(\mu)$, будем использовать стандартные процедуры FZERO и FMIN [33], включенные во многие пакеты прикладных программ, первая из которых вычисляет корень заданной функции на заданном отрезке $[a, b]$, на концах которого функция имеет различные знаки, а вторая – на заданном отрезке $[a, b]$ ищет минимум заданной функции. Значение функции $r(\mu)$ при фиксированном μ будем находить с использованием процедуры из пакета LAPACK, позволяющей вычислять все собственные значения матрицы $H^{(1)} + \mu H^{(2)}$ [39].

Пусть априори известно, что при $\text{Re}_L < \text{Re} \leq \text{Re}_\infty$ течение неустойчиво, тогда справедлива

Теорема 1.5.1. *Если процедуру FZERO($f(\mu)$, tol , a , b) применить к функции $f(\mu) = r(\mu/\text{Re}_\infty)$, с параметрами $tol = \delta/4$, $a = 1$, $b = \text{Re}_\infty/\text{Re}_E$, то Re_L будет вычисляться с заданной относительной точностью δ :*

$$|\hat{\text{Re}}_L - \text{Re}_L|/\text{Re}_L \leq \delta, \quad (1.5.1)$$

где $\hat{\text{Re}}_L = 1/\hat{\mu}_L$ – вычисленное значение Re_L .

Доказательство. По условию, при $\text{Re}_L < \text{Re} \leq \text{Re}_\infty$ течение неустойчиво. С другой стороны, по определению Re_L , при $\text{Re}_E \leq \text{Re} < \text{Re}_L$ течение линейно устойчиво. Это означает, что $r(\mu) > 0$ при $\mu \in [\mu_\infty, \mu_L)$ и $r(\mu) < 0$ при $\mu \in (\mu_L, \mu_E]$. То есть, отрезок $[\mu_\infty, \mu_E]$ содержит только искомый максимальный положительный корень μ_L уравнения $r(\mu) = 0$.

Как будет показано в разделе 1.6.1, применив FZERO к функции $f(\mu) = r(\mu_\infty \mu)$ на отрезке $[1, \mu_E/\mu_\infty]$ с параметром точности $tol = \delta/4$, мы вычислим корень $\hat{\mu}_L$, который будет удовлетворять условию

$$|\hat{\mu}_L - \mu_L| \leq \delta \hat{\mu}_L.$$

То есть справедливо (1.5.1) и линейное критическое число Рейнольдса $Re_L = 1/\mu_L$ будет вычисляться с заданной относительной точностью δ . \square

Если же при $Re_L < Re \leq Re_\infty$ течение может быть неустойчиво при одних Re и устойчиво при других, то отрезок $[\mu_\infty, \mu_E]$ может содержать несколько корней уравнения $r(\mu) = 0$. Для вычисления μ_L в этом случае воспользуемся следующим алгоритмом.

На первом шаге нашего алгоритма мы вычисляем $r(\mu_\infty)$. Если $r(\mu_\infty) > 0$, то с помощью предложенной в разделе 1.6.1 модификации процедуры FZERO с заданной точностью δ находим приближенный корень, т.е. точку $\mu_* \in [\mu_\infty, \mu_E]$, такую что $r(\mu_* - \mu_*\delta)r(\mu_* + \mu_*\delta) < 0$. Если $r(\mu_\infty) = 0$, то полагаем $\mu_* = \mu_\infty$. В обоих случаях вычисляем новую левую границу отрезка: $\mu_\infty^{new} = \mu_* + \mu_*\delta$. Наконец, если $r(\mu_\infty) < 0$, то мы вычисляем минимум функции

$$\frac{r(\mu)}{\mu_E - \mu_\infty} \left(\frac{\mu_E - \mu}{r(\mu_\infty)} + \frac{\mu - \mu_\infty}{r(\mu_E)} \right) \quad (1.5.2)$$

на отрезке $[\mu_\infty, \mu_E]$ с помощью процедуры FMIN. Это позволяет, либо найти корень (если минимум равен нулю), либо убедиться, что корня нет (если минимум положительный), либо найти на отрезке точку μ_* , в которой $r(\mu_*) > 0$. В первом случае, полагаем $\mu_\infty^{new} = \mu_* + \mu_*\delta$. Во втором останавливаем вычисления, заключив, что корней на рассматриваемом отрезке нет. В последнем случае полагаем $\mu_\infty^{new} = \mu_*$. Таким образом, первый шаг позволяет либо убедиться, что корней на отрезке $[\mu_\infty, \mu_E]$ нет, либо сузить отрезок поиска максимального корня до $[\mu_\infty^{new}, \mu_E]$ с $\mu_\infty^{new} > \mu_\infty$. В последнем случае мы или уже нашли один корень (когда либо $r(\mu_\infty)r(\mu_E) < 0$ и нам сразу удалось применить FZERO к $[\mu_\infty, \mu_E]$, либо $r(\mu_\infty)r(\mu_E) > 0$ и с помощью FMIN мы нашли

μ_* , в которой $r(\mu_*) = 0$), или убедились, что на новом отрезке $[\mu_\infty^{new}, \mu_E]$ есть по крайней мере один корень, то есть с помощью FMIN нашли μ_∞^{new} , такую что $r(\mu_\infty^{new}) > 0$, а значит $r(\mu_\infty^{new})r(\mu_E) < 0$ и к новому отрезку применима процедура FZERO.

Отметим, что в отличии от процедуры FZERO, которая, используя методы бисекции и секущих [40], обязательно найдет один из корней уравнения $r(\mu) = 0$ с заданной точностью, если функция принимает на концах отрезка различные знаки, процедура FMIN может, вообще говоря, пропустить глобальный и найти один из локальных минимумов. Учитывая особенности используемого в ней алгоритма, в качестве одного из способов повышения надежности этой процедуры в контексте описанных выше вычислений мы вычисляли с ее помощью не минимум функции $-r(\mu)$, что было бы более естественно, а минимум функции (1.5.2).

Если мы не убедились в отсутствии корней на первом шаге, мы применяем тот же алгоритм к отрезку $[\mu_\infty^{new}, \mu_E]$ и так далее. Поскольку функция $r(\mu)$ является алгебраической и, следовательно, уравнение $r(\mu) = 0$ может иметь лишь конечное число корней, в конце концов мы получим несколько вычисленных корней и убедимся, что на отрезке $[\hat{\mu}_L + \hat{\mu}_L\delta, \mu_E]$ корней нет, где $\hat{\mu}_L$ – максимальный из вычисленных корней. При этом точное критическое число Рейнольдса Re_L будет удовлетворять равенству

$$\hat{\mu}_L - \hat{\mu}_L\delta \leq 1/Re_L \leq \hat{\mu}_L + \hat{\mu}_L\delta,$$

т.е. $Re_L = 1/\mu_L$ будет удовлетворять (1.5.1).

Если искать корни не только на крайнем правом, но и на всех отрезках, на которые разбивают $[\mu_\infty, \mu_E]$ уже вычисленные корни, то мы найдем с заданной точностью δ все корни уравнения $r(\mu) = 0$ на начальном отрезке.

Подчеркнем, что точность вычислений нулей функции $r(\mu)$ определяется только предложенной модификацией процедуры FZERO, поскольку FMIN

используется лишь для анализа наличия и грубой локализации корней на отрезках, на концах которых $r(\mu)$ имеет одинаковые знаки.

1.6 Использование стандартных процедур

1.6.1 Процедура FZERO

Данная процедура может работать в двух режимах: поиск нуля функции на заданном отрезке, где функция имеет разные знаки в концевых точках, и поиск нуля функции в окрестности заданной точки. Мы используем первый. В этом режиме на вход подается некоторый отрезок $[x_1, x_2]$, где $x_1 < x_2$. Процедура вычисляет значение функции $f_1 = f(x_1)$ и $f_2 = f(x_2)$ на его концах. Далее идет проверка наличия нулей в концевых точках: если f_1 или f_2 равняются нулю, то процедура сообщает о нахождении нуля. Если оба значения функции отличны от нуля, то поиск нуля будет продолжаться только при условии, что $f_1 f_2 < 0$. Таким образом, на вход в основной цикл процедуры подается отрезок $[x_1, x_2]$ на концах которого функция имеет разные знаки.

Внутри основного цикла сначала делается проверка условия $|f_1| \geq |f_2|$: если оно не выполнено, то обозначения концов отрезка меняются местами. Далее проверяется условие выхода из основного цикла:

$$|x_1 - x_2| \leq 4tol \max\{|x_2|, 1\}, \quad (1.6.3)$$

где tol - параметр, задаваемый пользователем. Если данное условие выполнено, то процедура заканчивает работу и в качестве нуля функции выводит x_2 . В противном случае ищется новое приближение x_2^{new} и вычисляется $f_2^{new} = f(x_2^{new})$. Если $f_2^{new} = 0$, то сообщается о нахождении нуля, иначе выбирается тот из отрезков $[x_1, x_2^{new}]$ или $[x_2^{new}, x_2]$, на котором у заданной функции имеется перемена знаков. Переменным x_1 и x_2 присваиваются значения левого и правого концов выбранного отрезка соответственно. После этого начинается новая итерация основного цикла.

Итак, если функция на концах первоначального отрезка $[x_1, x_2]$ имела различные знаки, то и перед началом каждой новой итерации основного цикла на концах соответствующего нового отрезка она тоже будет иметь различные знаки, и, следовательно, искомый нуль функции будет лежать на интервале (x_1, x_2) .

Если перед нами стоит задача отыскания нуля функции $f(x)$ с заданной точностью δ на некотором отрезке $[a, b]$, $0 < a < b$, $f(a)f(b) < 0$, так, чтобы выполнялось неравенство

$$|\hat{x}_* - x_*| \leq \delta \hat{x}_*, \quad (1.6.4)$$

где \hat{x}_* и x_* – приближенное и точное значения искомого нуля соответственно, то, учитывая вид критерия останова (1.6.3), нам достаточно применить процедуру FZERO к функции $\tilde{f}(\xi) = f(a\xi)$ на отрезке $[1, b/a]$, положив параметр $tol = \delta/4$. Действительно, если на k -м шаге процедура не обнаружила нуль при вычислении нового приближения x_2^{new} (т.е. $f_2^{new} \neq 0$), то FZERO остановится, если будет выполнен критерий останова (1.6.3), который в данном случае имеет вид:

$$|x_1 - x_2| \leq 4 \cdot \frac{\delta}{4} \cdot \max\{|x_2|, 1\}.$$

Поскольку поиск нуля функции $\tilde{f}(\xi)$ мы начинали на отрезке $[1, b/a]$, то $x_2 > 1$ и, следовательно,

$$|x_1 - x_2| \leq \delta x_2.$$

Как отмечалось выше, в качестве приближенного нуля $\hat{\xi}_*$ функции $\tilde{f}(\xi)$ процедура выдает правый конец x_2 вычисленного отрезка. Значит

$$|x_1 - \hat{\xi}_*| \leq \delta \hat{\xi}_*.$$

Так как точное значение ξ_* нуля функции $\tilde{f}(\xi)$ должно лежать на интервале $(x_1, \hat{\xi}_*)$, то будет справедливо неравенство

$$|\hat{\xi}_* - \xi_*| \leq \delta \hat{\xi}_*,$$

следовательно, приближенное значение $\hat{x}_* = \hat{\xi}_* x_1$ нуля $x_* = \xi_* x_1$ исходной функции $f(x)$ будет удовлетворять (1.6.4).

1.6.2 Процедура FMIN

Данная процедура предназначена для поиска минимума непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Для нахождения максимума функции $f(x)$ достаточно применить FMIN к функции $-f(x)$. Входными параметрами данной процедуры являются сама функция f и концы a и b отрезка, на котором требуется найти минимум $f(x)$.

В данной программе каждое новое приближение к минимуму функции ищется методом парабол либо методом золотого сечения [40]. Сначала заданный отрезок делится на две части точкой x_k в отношении золотого сечения, и в ней вычисляется значение функции $f_k = f(x_k)$. Далее следует основной цикл, выход из которого осуществляется при сокращении длины отрезка до $2tol$.

Для метода парабол необходимо знать значения аппроксимируемой функции в трех точках, поэтому первые два приближения вычисляются только методом золотого сечения. Вычислив первое приближение x , сравниваются значения f_k функции в точке x_k и $f(x)$. Если $f_k \geq f(x)$, то возможны два варианта: 1) $x \geq x_k$, тогда левому концу отрезка a присваивается значение x_k , а значение правого конца b не меняется. 2) $x < x_k$, тогда a остается без изменений, а b присваивается x_k . Если же $f_k < f(x)$, то снова рассматривается два варианта: 1) $x \geq x_k$, тогда правому концу отрезка b присваивается значение x , а значение левого конца a не меняется. 2) $x < x_k$, тогда b остается без изменений, а a присваивается x . После этого переменным x_k и f_k присваиваются найденные значения x и $f(x)$ соответственно. Старое значение x_k и соответствующее ему значение функции f_k в этой точке присваиваются переменным x_{k-1} и f_{k-1} соответственно. На втором шаге делаются те же действия, что и на первом, но вводятся еще две переменные x_{k-2} и f_{k-2} , которым будут присваиваться

предыдущие значения x_{k-1} и f_{k-1} соответственно. Таким образом перед началом третьего шага и далее, перед началом любого $k+1$ -го шага будут известны три точки x_k, x_{k-1}, x_{k-2} , вычисленные на k -м, $k-1$ -м и $k-2$ -м шагах цикла соответственно. Так же будут известны и соответствующие значения функций в этих точках, и, следовательно, для поиска новых приближений будет возможным применение метода парабол. Поиск минимума прекращается, если выполнен следующий критерий останова:

$$|x_k - x_m| \leq 2\sqrt{\varepsilon_M}|x_k| + \frac{2tol}{3} - \frac{b-a}{2}, \quad (1.6.5)$$

где $x_m = (a+b)/2$, ε_M – машинная точность, а tol – параметр, который задается пользователем.

У процедуры FMIN существуют некоторые особенности, на которые следует обратить внимание. Как уже говорилось выше, данная процедура находит минимум функции, но, если на заданном отрезке функция имеет несколько локальных минимумов, то найденный может оказаться локальным, а не глобальным минимумом на отрезке. Таким образом, после нахождения с помощью FMIN локального минимума, мы не можем гарантировать отсутствие еще каких-либо меньших локальных минимумов на данном отрезке.

При вычислении Re_L , описанном в разделе 1.5, процедуру FMIN мы применяем к нормированной функции (1.5.2). Численные эксперименты показали, что применение FMIN с использованием данной нормировки к функции, которая на заданном отрезке имеет несколько минимумов, дает некоторое преимущество, так как при определенной длине отрезка находится глобальный минимум, а без использования нормировки – локальный.

Стоит отметить, что FMIN не вычисляет значение функции на концах отрезка, поэтому, если минимум функции находится в одной из граничных точек, то в качестве ответа процедура выдаст точку x_k удовлетворяющую условию (1.6.5). Процесс сходимости в этом случае может замедлиться.

1.7 Выводы

В данной главе развита и обоснована предложенная в [20–22] технология численного анализа систем обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений, полученных после пространственной аппроксимации линеаризованных уравнений вязкой несжимаемой жидкости. В частности, обоснованы предварительные преобразования исходной системы, обоснованы методы вычисления энергетического и линейного критических чисел Рейнольдса, а также предложены и обоснованы модификации стандартных процедур FZERO и FMIN, позволяющие вычислять линейное критическое число Рейнольдса с заданной относительной точностью.

Глава 2

Анализ устойчивости течения Пуазейля в канале прямоугольного сечения

2.1 Введение

В данной главе в трехмерном бесконечном в продольном направлении канале постоянного прямоугольного сечения с отношением $Z \geq 1$ длин горизонтальной и вертикальной сторон сечения рассматривается стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости с постоянным градиентом давления и условием прилипания на стенках канала (течение Пуазейля). Исследуется зависимость $Re_L(Z)$ линейного критического числа Рейнольдса от Z (далее, для краткости, будем употреблять термин “критическое число Рейнольдса”, подразумевая линейное критическое число Рейнольдса). Интерес к данной зависимости возник довольно давно. Известно, что если Z меньше некоторого критического значения $Z_c > 1$, то течение Пуазейля линейно устойчиво при любом числе Рейнольдса, т.е. $Re_L(Z) = \infty$, а при $Z > Z_c$ критическое число Рейнольдса конечно и далее с ростом Z оно уменьшается, стремясь при

$Z \rightarrow \infty$ к критическому числу Рейнольдса плоского течения Пуазейля, равному примерно 5772 [41]. В работе [9] путем непосредственного вычисления $Re_L(Z)$ при различных $Z > 1$ было установлено, что $Z_c \approx 3.2$. Позже это значение было подтверждено в работе [10]. Однако, какого-либо теоретического обоснования зависимости $Re_L(Z)$ и величины Z_c до недавнего времени получить не удавалось.

Первая часть главы посвящена численному исследованию зависимости $Re_L(Z)$ выполненному в работах автора [24, 29]. Для вычисления критических чисел Рейнольдса и построения соответствующих нейтральных кривых предложен адаптированный под рассматриваемую задачу и требующий меньших вычислительных затрат вариант технологии, описанной в главе 1.

Для пространственной аппроксимации использованы гауссовские сетки типа В: сетки Гаусса для давления и Гаусса-Лобатто для компонент скоростей. Аппроксимация осуществлялась методом коллокаций [42]. Вычисление критического числа Рейнольдса сводится к решению проблем собственных значений для линейризованных уравнений вязкой несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса. При этом особенно важно аппроксимировать эти уравнения так, чтобы не нарушить соотношение между конвективными и вязкими членами. Прежде всего, для этого необходимо сохранить на дискретном уровне наиболее важные свойства входящих в них операторов: симметричность и отрицательную определенность оператора Лапласа и соотношение $div = -grad^*$ между дивергенцией и градиентом. Аппроксимация методом коллокаций эти свойства, вообще говоря, не сохраняет, но как это показано в разделе 2.2.3, выбранные нами сетки позволяют обосновать преобразования полученной после аппроксимации проблемы собственных значений, приводящие к сохранению всех упомянутых свойств.

Аппроксимация методом коллокаций приводит к задачам с матрицами, хотя и не сверх большого размера, как при аппроксимации с той же точностью другими методами не такого высокого порядка точности, но, так как эти

матрицы плотные, их размер все же оказывается достаточно большим, чтобы непосредственные вычисления до сходимости по шагу сетки требовали огромных затрат. Для сокращения вычислительных затрат, описанная в главе 1 технология предполагает применение к полученной после аппроксимации обобщенной проблеме собственных значений алгебраической редукции (см. раздел 1.3), сводящей ее к обычной проблеме собственных значений с матрицей меньшего порядка. В настоящей главе предложен новый вариант [24] этой редукции, позволяющий сократить объем оперативной памяти, необходимый для хранения матриц, в два раза, а число арифметических операций – примерно в четыре раза.

При различных значениях Z вычислялись критические числа Рейнольдса и строились нейтральные кривые. Полученные результаты были сопоставлены с уже известными [9, 10]. Эти эксперименты показали высокую эффективность разработанного метода и позволили уточнить известные результаты.

Во второй части этой главы дается теоретическое обоснование полученной зависимости линейного критического числа Рейнольдса от Z , впервые предложенное в работах автора [23, 30]. Для этого было рассмотрено некоторое модельное течение: течение Пуазейля в том же самом канале с нулевыми граничными условиями (условия прилипания) в направлении y , но с периодическими граничными условиями на боковых стенках для основного течения и возмущений. Единственным отличием модельного течения от плоского течения Пуазейля является дискретность поперечного волнового числа допустимых возмущений, обусловленная наличием в канале боковых стенок. То есть для этого течения справедлива теорема Сквайра (см. раздел 2.3.1, а также работы [7, 43–45]). В отличие от течения Пуазейля с условиями прилипания на боковых стенках, модельное течение допускает ненулевые возмущения, постоянные в поперечном направлении, которые, как известно, являются наиболее неустойчивыми и на которых достигается критическое число Рейнольдса. Исключив такие возмущения из множества допустимых, для модельного те-

чения на основе теоремы Сквайра и свойств нейтральной кривой проблемы Орра-Зоммерфельда для плоского течения Пуазейля (см. раздел 2.3.1, а также работы [7, 43–45]) аналитически была построена зависимость $\text{Re}_L(Z)$ и получена соответствующая оценка \tilde{Z}_c . Зависимость $\text{Re}_L(Z)$ для модельного течения оказалась близка к соответствующей зависимости для исходного течения. Это позволяет утверждать, что в канале прямоугольного сечения механизм линейной устойчивости течения Пуазейля с условием прилипания на боковых стенках аналогичен механизму линейной устойчивости течения Пуазейля с условием периодичности на боковых стенках к возмущениям с неравным нулю поперечным волновым числом.

2.2 Численное исследование устойчивости

2.2.1 Постановка задачи

Рассмотрим в декартовой системе координат течение вязкой несжимаемой жидкости в трехмерном бесконечном канале

$$\{(x, y, z) : -\infty < x < \infty, -b < y < b, -a < z < a\}$$

постоянного прямоугольного сечения

$$\{(y, z) : -b < y < b, -a < z < a\}. \quad (2.2.1)$$

Не нарушая общности, будем предполагать, что $0 < b \leq a$. Обозначим скорости вдоль направлений x, y, z , давление, коэффициент кинематической вязкости и плотность среды через u, v, w, p, ν и ρ соответственно. Движение жидкости определяется следующими трехмерными уравнениями Навье-Стокса и уравнением неразрывности:

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \Delta u = 0, & \quad \frac{Dv}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \nu \Delta v = 0, \\ \frac{Dw}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \nu \Delta w = 0, & \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

где

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Одним из решений уравнений (2.2.2) с нулевыми граничными условиями для u , v и w на стенках канала, будет стационарное течение $u = U$, $v = 0$, $w = 0$, $p = -\tau x$, называемое течением Пуазейля, где τ – заданная положительная константа, а $U = U(y, z)$ – профиль течения, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\tau}{\nu \rho}$$

в области (2.2.1) с нулевыми граничными условиями. Нас будет интересовать устойчивость этого течения к бесконечно малым возмущениям.

Учитывая, что своего максимального значения скорость течения Пуазейля достигает в центре канала, определим для него число Рейнольдса следующим образом: $Re = U(0, 0)b/\nu$. Нормируем скорости u , v , w и профиль течения Пуазейля U на $U(0, 0)$, пространственные координаты x , y , z на b , время t на $b/U(0, 0)$, давление p на $\rho U(0, 0)^2$ и τ на $\rho U(0, 0)^2/b$. В нормированных переменных, за которыми мы сохраним старые обозначения, уравнения (2.2.2) примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{Re} \Delta u &= 0, & \frac{Dv}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{Re} \Delta v &= 0, \\ \frac{Dw}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{Re} \Delta w &= 0, & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

и будут описывать движение в канале

$$\{(x, y, z) : -\infty < x < \infty, -1 < y < 1, -Z < z < Z\},$$

где $Z = a/b \geq 1$ - отношение ширины к высоте исходного канала. Соответствующий профиль течения Пуазейля можно найти, решив уравнение

$$\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial z^2} = -1 \quad (2.2.4)$$

в области

$$\Sigma = \{(y, z) : -1 < y < 1, -Z < z < Z\} \quad (2.2.5)$$

с нулевыми граничными условиями и положив $U(y, z) = \tilde{U}(y, z)/\tilde{U}(0, 0)$.

Для получения линеаризованных уравнений эволюции возмущений [7, 44] запишем произвольное решение системы (2.2.3), близкое к течению Пуазейля, в виде

$$\begin{aligned} u &= U + \delta u' + \mathcal{O}(\delta^2), \quad v = \delta v' + \mathcal{O}(\delta^2), \\ w &= \delta w' + \mathcal{O}(\delta^2), \quad p = -\tau x + \delta p' + \mathcal{O}(\delta^2), \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

где δ – малый параметр, а u' , v' , w' , p' некоторые функции, не зависящие от δ , и потребуем, чтобы функции (2.2.6) удовлетворяли (2.2.3) при всех значениях δ в окрестности 0, получим следующую систему линейных уравнений для u' , v' , w' и p' :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial U}{\partial y} + w' \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{1}{\text{Re}} \Delta u' &= 0, \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial p'}{\partial y} - \frac{1}{\text{Re}} \Delta v' &= 0, \\ \frac{\partial w'}{\partial t} + U \frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{1}{\text{Re}} \Delta w' &= 0, \quad \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

с нулевыми граничными условиями для u' , v' , w' на стенках канала.

Исследование линейной устойчивости основного течения сводится к исследованию устойчивости нулевого решения системы (2.2.7) к возмущениям вида:

$$\begin{aligned} u' &= u'' e^{i(\alpha x - \omega t)}, \quad v' = v'' e^{i(\alpha x - \omega t)}, \\ w' &= w'' e^{i(\alpha x - \omega t)}, \quad p' = p'' e^{i(\alpha x - \omega t)}, \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

где α заданная вещественная константа, $\omega = \omega_r + i\omega_i$ – комплексная частота, а u'' , v'' , w'' , p'' функции y и z , не зависящие от x и t , [7, 8, 43–45]. При $\alpha = \omega = 0$ функции (2.2.8) вещественные. В противном случае, эти функции комплексные, но физический смысл имеют только их вещественные части, которые, очевидно, также удовлетворяют системе уравнений (2.2.7).

Подставляя (2.2.8) в (2.2.7) получим следующую проблему собственных значений для амплитуд u'' , v'' , w'' , p'' и спектрального параметра ω :

$$-i\omega \mathbf{v} = J^{(1)} \mathbf{v} + \frac{1}{\text{Re}} J^{(2)} \mathbf{v} + Gp, \quad F\mathbf{v} = 0, \quad (2.2.9)$$

где

$$J^{(1)} = \begin{bmatrix} -i\alpha U & -U_y & -U_z \\ 0 & -i\alpha U & 0 \\ 0 & 0 & -i\alpha U \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} -i\alpha \\ -\partial/\partial y \\ -\partial/\partial z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u'' \\ v'' \\ w'' \end{bmatrix},$$

$$F = [i\alpha, \partial/\partial y, \partial/\partial z], \quad J^{(2)} = \text{diag}(L, L, L), \quad L = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \alpha^2,$$

$$U_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad U_z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

и для упрощения обозначений p'' обозначено через p .

Для заданной величины Z определим критическое число Рейнольдса $\text{Re}_L(Z)$ течения Пуазейля, как границу устойчивости нулевого решения системы (2.2.7) ко всем возмущениям вида (2.2.8). Так как возмущение вида (2.2.8) нарастает со временем, если $\omega_i > 0$ и убывает, если $\omega_i < 0$, то

$$\text{Re}_L(Z) = \inf_{\alpha \geq 0} \text{Re}_L(Z, \alpha), \quad (2.2.10)$$

где

$$\text{Re}_L(Z, \alpha) = \inf \{ \text{Re} : \max \text{Im} \Omega(Z, \alpha, \text{Re}) = 0, \text{Re} > 0 \}, \quad (2.2.11)$$

а $\Omega(Z, \alpha, \text{Re})$ означает спектр проблемы (2.2.9).

2.2.2 Аппроксимация

Сделаем в (2.2.9) замену переменных $r = y$, $s = z/Z$, приводящую Σ к квадрату

$$\mathfrak{S} = \{(r, s) : -1 < r < 1, -1 < s < 1\}.$$

После этого, аппроксимируем полученные уравнения методом коллокаций на прямоугольных сетках. Для простоты описания используемой аппроксимации будем предполагать одинаковым число узлов по каждому из направлений.

Выберем сетку

$$\{(\rho_i, \rho_j) : i = 1, \dots, 2m + 1; j = 1, \dots, 2m + 1\} \quad (2.2.12)$$

для аппроксимации давления и уравнения неразрывности, где ρ_k – корни многочлена Лежандра L_{2m+1} степени $2m + 1$ (узлы Гаусса), и сетку

$$\{(\tilde{\rho}_i, \tilde{\rho}_j) : i = 1, \dots, 2m; j = 1, \dots, 2m\} \quad (2.2.13)$$

для аппроксимации компонент скорости и уравнений движения, где $\tilde{\rho}_k$ ($1 \leq k \leq 2m$) – корни производной L'_{2m+1} многочлена Лежандра (вместе с $\tilde{\rho}_0 = -1$ и $\tilde{\rho}_{2m+1} = 1$ – узлы Гаусса-Лобатто) [42, 46, 47].

Давление будем аппроксимировать интерполяционным многочленом вида

$$p(r, s) \approx \hat{p}(r, s) = \sum_{i=1}^{2m+1} \sum_{j=1}^{2m+1} \psi_i(r) \psi_j(s) p(\rho_i, \rho_j) \quad (2.2.14)$$

степени $2m$ по каждой из переменных r и s , где

$$\psi_k(\rho) = \frac{1}{\rho - \rho_k} \frac{L_{2m+1}(\rho)}{L'_{2m+1}(\rho_k)},$$

а каждую из компонент скорости, учитывая нулевые граничные условия, – интерполяционным многочленом вида

$$f(r, s) \approx \hat{f}(r, s) = \sum_{i=1}^{2m} \sum_{j=1}^{2m} \varphi_i(r) \varphi_j(s) f(\tilde{\rho}_i, \tilde{\rho}_j) \quad (2.2.15)$$

степени $2m + 1$ по переменным r и s , где

$$\varphi_k(\rho) = \frac{(\rho^2 - 1)L'_{2m+1}(\rho)}{(2m + 2)(2m + 1)(\rho - \tilde{\rho}_k)L_{2m+1}(\tilde{\rho}_k)}.$$

Дифференцирование интерполяционных многочленов будем выполнять по алгоритмам, описанным в [48].

Подставляя в (2.2.9), после указанной выше замены переменных, вместо компонент скорости и давления аппроксимирующие их многочлены, и, требуя выполнения уравнения неразрывности в узлах сетки (2.2.12), а уравнений движения – в узлах сетки (2.2.13), мы получим проблему собственных значений вида

$$-i\omega \mathbf{v} = J^{(1)} \mathbf{v} + \frac{1}{\text{Re}} J^{(2)} \mathbf{v} + G \mathbf{p}, \quad F \mathbf{v} = 0, \quad (2.2.16)$$

где \mathbf{v} – n_v -компонентный вектор значений компонент скорости в узлах сетки (2.2.13), \mathbf{p} – n_p -компонентный вектор значений давления в узлах сетки (2.2.12), $n_p = (2m+1)^2 < n_v = 12m^2$, $J^{(1)}$ и $J^{(2)}$ – квадратные матрицы порядка n_v , а G и F – прямоугольные матрицы размеров $n_v \times n_p$ и $n_p \times n_v$ соответственно. Все эти матрицы не зависят от числа Рейнольдса и имеют следующие блочные структуры:

$$J^{(1)} = \begin{bmatrix} iJ_0 & J_1 & J_2 \\ 0 & iJ_0 & 0 \\ 0 & 0 & iJ_0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} iG_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix}, \quad (2.2.17)$$

$$J^{(2)} = I_3 \otimes \left(I' \otimes D + \frac{1}{Z^2} D \otimes I' \right) - \alpha^2 I, \quad F = \begin{bmatrix} iF_1, F_2, F_3 \end{bmatrix},$$

где J_k – вещественные квадратные матрицы порядка $4m^2$, G_k, F_k – вещественные прямоугольные матрицы размеров $4m^2 \times n_p$ и $n_p \times 4m^2$, соответственно, являющиеся дискретными аналогами соответствующих операторов в (2.2.9), матрица D – дискретный аналог второй производной на сетке с узлами $\tilde{\rho}_i$, $i = 1, \dots, 2m$, определенными выше, а I, I', I_3 – единичные матрицы порядка $n_v, 2m$ и 3 соответственно.

Отметим, что при $\alpha = 0$ матрицы G и F имеют дефект ранга $d = 2$ и имеют полный ранг в остальных случаях. Кроме того, для полученной системы (2.2.16) выполняется свойство (1.2.2) с единичной матрицей C .

2.2.3 Свойства полученной системы

Матрицы в (2.2.17) не обладают наиболее важными для анализа устойчивости свойствами, которыми обладают соответствующие непрерывные операторы в (2.2.9), а именно: дискретный аналог $J^{(2)}$ оператора Лапласа не является симметричной отрицательно определенной матрицей, а для матриц F и G не выполняется соотношение $F = G^*$. Покажем, как добиться выполнения этих свойств, сделав некоторое преобразование проблемы (2.2.16).

Теорема 2.2.1. *Существуют такие невырожденные диагональные матрицы K_v и K_p , что справедливы следующие равенства:*

$$K_p F K_v^{-1} = (K_v G K_p^{-1})^*, \quad (2.2.18)$$

$$K_v J^{(2)} K_v^{-1} = (K_v J^{(2)} K_v^{-1})^*, \quad (2.2.19)$$

причем

$$K_v J^{(2)} K_v^{-1} < 0. \quad (2.2.20)$$

Доказательство. Возьмем произвольные многочлены $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$ вида (2.2.15) и произвольный многочлен \hat{p} вида (2.2.14). Интегрируя по частям с учетом граничных условий, можно вывести следующее тождество:

$$\int_{\mathfrak{E}} \left(i\alpha \hat{u} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial r} + \frac{1}{Z} \frac{\partial \hat{w}}{\partial s} \right) \bar{\hat{p}} dr ds = - \int_{\mathfrak{E}} \left(\hat{u} i\alpha \bar{\hat{p}} + \hat{v} \frac{\partial \bar{\hat{p}}}{\partial r} + \frac{1}{Z} \hat{w} \frac{\partial \bar{\hat{p}}}{\partial s} \right) dr ds, \quad (2.2.21)$$

где черта означает комплексное сопряжение. Рассмотрим интеграл, стоящий в левой части равенства (2.2.21). Поскольку $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$ есть многочлены степени не выше $2m + 1$ по r и s , а \hat{p} – многочлен степени не выше $2m$ по r и s , максимальная степень многочлена, стоящего под знаком интеграла, по каждой из переменных r и s не превосходит $4m + 1$. Вычислим этот интеграл, используя следующую квадратурную формулу с узлами (2.2.12) и весами Гаусса [42]:

$$\int_{-1}^{+1} g(\rho) d\rho \approx \sum_{k=1}^{2m+1} w_k g(\rho_k), \quad w_k = \frac{2}{(1 - \rho_k^2) L'_{2m+1}(\rho_k)^2}. \quad (2.2.22)$$

Так как матрица F является дискретным аналогом оператора дивергенции, полученным методом коллокаций, то умножение на нее дает точное значение дивергенции для сеточных аналогов многочленов степени не выше $2m + 1$ по каждой из переменных r и s и равных нулю в точках ± 1 . Учитывая это, и то, что квадратурная формула (2.2.22) точна для многочленов степени не выше $4m + 1$, несложно проверить, что

$$\int_{\mathfrak{S}} \left(\mathbf{i}\alpha\hat{u} + \frac{\partial\hat{v}}{\partial r} + \frac{1}{Z} \frac{\partial\hat{w}}{\partial s} \right) \tilde{p} dr ds = (K_p^2 F \mathbf{v}, \mathbf{p}),$$

где \mathbf{v} – n_v -компонентный вектор, содержащий значения всех трех многочленов $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$ в узлах сетки (2.2.13), \mathbf{p} – n_p -компонентный вектор, содержащий значения многочлена \hat{p} в узлах сетки (2.2.12), а

$$K_p = K \otimes K, \quad K = \text{diag}(w_1^{1/2}, \dots, w_{2m+1}^{1/2}).$$

Рассмотрим теперь правую часть равенства (2.2.21). Максимальная степень многочлена, стоящего под знаком интеграла, по каждой из переменных r и s не превосходит $4m + 1$. Поскольку матрица $-G$ является дискретным аналогом оператора градиента, полученным методом коллокаций, и, следовательно, умножение на нее дает точное значение градиента для сеточных аналогов многочленов степени не выше $2m$ по каждой из переменных r и s , а квадратурная формула

$$\int_{-1}^{+1} f(\rho) d\rho \approx \sum_{k=1}^{2m} \tilde{w}_k f(\tilde{\rho}_k), \quad \tilde{w}_k = \frac{1}{(2m+1)(m+1)L_{2m+1}^2(\tilde{\rho}_k)} \quad (2.2.23)$$

с узлами (2.2.13) и весами Гаусса-Лобатто [42] точна для многочленов степени не выше $4m + 1$ и равных нулю в точках ± 1 , справедливо равенство

$$- \int_{\mathfrak{S}} \left(\hat{u} \overline{\mathbf{i}\alpha\hat{p}} + \hat{v} \overline{\frac{\partial\hat{p}}{\partial r}} + \frac{1}{Z} \hat{w} \overline{\frac{\partial\hat{p}}{\partial s}} \right) dr ds = (K_v^2 \mathbf{v}, G \mathbf{p}),$$

где

$$K_v = I_3 \otimes \tilde{K} \otimes \tilde{K}, \quad \tilde{K} = \text{diag}(\tilde{w}_1^{1/2}, \dots, \tilde{w}_{2m}^{1/2}). \quad (2.2.24)$$

Таким образом, мы показали, что для любых n_v и n_p -компонентных векторов \mathbf{v} и \mathbf{p} , соответственно, выполняется равенство

$$(K_p^2 F \mathbf{v}, \mathbf{p}) = (K_v^2 \mathbf{v}, G \mathbf{p}),$$

и, следовательно, справедливо равенство

$$K_p^2 F = G^* K_v^2,$$

из которого непосредственно следует (2.2.18).

Докажем теперь равенство (2.2.19). Для матрицы $J^{(2)}$ в (2.2.17) и матрицы K_v в (2.2.24) равенство (2.2.19) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} I_3 \otimes \left(I' \otimes \tilde{K} D \tilde{K}^{-1} + \frac{1}{Z^2} \tilde{K} D \tilde{K}^{-1} \otimes I' \right) - \alpha^2 I &= \\ = I_3 \otimes \left(I' \otimes \tilde{K}^{-1} D^* \tilde{K} + \frac{1}{Z^2} \tilde{K}^{-1} D^* \tilde{K} \otimes I' \right) - \alpha^2 I. \end{aligned}$$

Последнее равенство выполняется тогда и только тогда, когда справедливо равенство

$$\tilde{K} D \tilde{K}^{-1} = (\tilde{K} D \tilde{K}^{-1})^*. \quad (2.2.25)$$

Докажем его. Возьмем произвольные многочлены $u(\rho)$, $v(\rho)$ степени не выше $2m + 1$ такие, что $u(\pm 1) = v(\pm 1) = 0$. Интегрируя по частям с учетом граничных условий, получим

$$\int_{-1}^1 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \bar{v} d\rho = - \int_{-1}^1 \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \rho} d\rho = \int_{-1}^1 u \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \rho^2} d\rho. \quad (2.2.26)$$

Под интегралами стоят многочлены, степени которых не превосходят $4m$. Используемая нами квадратурная формула Гаусса-Лобатто (2.2.23) точна для многочленов степени не выше $4m + 1$, равных нулю в точках ± 1 , а матрица D является дискретным аналогом оператора второй производной, полученным методом коллокаций, поэтому умножение на нее дает точное значение второй

производной для сеточных аналогов многочленов степени не выше $2m + 1$, равных нулю в точках ± 1 . Следовательно выполняются точные равенства:

$$\int_{-1}^1 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \bar{v} d\rho = (\tilde{K}^2 D \mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \int_{-1}^1 u \overline{\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2}} d\rho = (\tilde{K}^2 \mathbf{u}, D \mathbf{v}), \quad (2.2.27)$$

где \mathbf{u} и \mathbf{v} – соответственно векторы значений многочленов u и v в узлах $\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_{2m}$. Таким образом, мы показали, что для любых $2m$ -компонентных векторов \mathbf{u} и \mathbf{v} , справедливо равенство

$$(\tilde{K}^2 D \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (D^* \tilde{K}^2 \mathbf{u}, \mathbf{v}),$$

и, следовательно, выполняется равенство

$$\tilde{K}^2 D = D^* \tilde{K}^2,$$

откуда непосредственно следует (2.2.25). Таким образом мы доказали (2.2.19).

Осталось доказать (2.2.20). В силу первого равенства в (2.2.26) и равенства (2.2.27) имеем

$$(\tilde{K}^2 D \mathbf{u}, \mathbf{u}) = - \int_{-1}^1 \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|^2 d\rho,$$

т.е. $\tilde{K}^2 D < 0$ и, следовательно, $\tilde{K} D \tilde{K}^{-1} < 0$. Поэтому

$$K_v J^{(2)} K_v^{-1} = I_3 \otimes \left(I' \otimes \tilde{K} D \tilde{K}^{-1} + \frac{1}{Z^2} \tilde{K} D \tilde{K}^{-1} \otimes I' \right) - \alpha^2 I < 0.$$

□

Поясним утверждение о дефекте ранга матриц G и F , сделанное в предыдущем разделе. Матрица G является дискретным аналогом операторов дифференцирования, с помощью которой точно вычисляются производные от сеточных аналогов многочленов степени не выше $2m$. Значит, при $\alpha = 0$ ядро этой матрицы будет содержать ненулевой вектор-константу. Далее обратим внимание на то, что уравнения движения аппроксимируются на сетке (2.2.13)

корней производной L'_{2m+1} многочлена Лежандра степени $2m+1$. Значит ненулевой вектор p_{ker} , компонентами которого являются всевозможные произведения вида $L'_{2m+1}(\rho_i)L'_{2m+1}(\rho_j)$, $i, j = 1, \dots, 2m+1$, будет принадлежать ядру матрицы G , поскольку при $\alpha = 0$ первые $4m^2$ компонент вектора Gp_{ker} тождественные нули, а остальные $8m^2$ компонент будут состоять из членов вида $L''_{2m+1}(\tilde{\rho}_i)L'_{2m+1}(\tilde{\rho}_j)$, $i, j = 1, \dots, 2m$, которые равны нулю в узлах (2.2.13). То есть дефект ранга матрицы G не меньше двух. Учитывая утверждение доказанной выше теоремы 2.2.1, F имеет такой же дефект ранга, что и G .

Сделаем в (2.2.16) замену переменных $\mathbf{v} := K_v \mathbf{v}$, $\mathbf{p} := K_p \mathbf{p}$, $F := K_p F K_v^{-1}$, $J^{(k)} := K_v J^{(k)} K_v^{-1}$, $G := K_v G K_p^{-1}$. Тогда, в силу теоремы 2.2.1, в новых переменных за которыми сохраним старые обозначения, система (2.2.16) примет вид:

$$-i\omega \mathbf{v} = J^{(1)} \mathbf{v} + \frac{1}{\text{Re}} J^{(2)} \mathbf{v} + F^* \mathbf{p}, \quad F \mathbf{v} = 0, \quad (2.2.28)$$

где матрица $J^{(2)}$ является вещественной симметричной отрицательно определенной, а матрицы $J^{(1)}$ и F – комплексные. Блочная структура всех трех матриц останется такой же, как показано в (2.2.17).

Уравнение (2.2.4), которое необходимо решить, чтобы вычислить профиль основного течения, аппроксимируем так же, как вязкие члены в уравнениях (2.2.9) и применим к нему преобразование, аналогичное описанному в теореме 2.2.1. В результате получим для значений профиля основного течения в узлах сетки (2.2.13) систему линейных алгебраических уравнений с эрмитовой отрицательно определенной матрицей

$$I' \otimes \tilde{K} D \tilde{K}^{-1} + \frac{1}{Z^2} \tilde{K} D \tilde{K}^{-1} \otimes I'. \quad (2.2.29)$$

2.2.4 Алгоритм вычисления критического числа Рейнольдса

Сделаем в (2.2.28) еще одну замену переменных: $\mathbf{v} := S\mathbf{v}$, $J^{(k)} := SJ^{(k)}S^*$, $F := FS^*$, где $S = \text{diag}(iI, I, I)$. После этого матрицы $J^{(1)}$ и F примут следующий вид:

$$J^{(1)} = \mathbf{i} \begin{bmatrix} J_0 & J_1 & J_2 \\ 0 & J_0 & 0 \\ 0 & 0 & J_0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} F_1, F_2, F_3 \end{bmatrix}, \quad (2.2.30)$$

т.е. станут соответственно чисто мнимой и вещественной, а матрица $J^{(2)}$ не изменится, т.е. останется вещественной, отрицательно определенной и симметричной.

Проблема собственных значений (2.2.28) допускает дальнейшее упрощение [20]. Для произвольной функции $f(x, y)$, заданной в области (2.2.5), определим следующие функции:

$$f_{\Delta\Box}(y, z) = \frac{f(y, z)\Box f(y, -z)}{4} \Delta \frac{f(-y, z)\Box f(-y, -z)}{4},$$

где \Box и Δ означают либо $+$, либо $-$. В соответствии с этим определением, функция f_{--} – нечетная по y и z , f_{+-} – четная по y и нечетная по z , f_{-+} – нечетная по y и четная по z , и f_{++} – четная по y и z .

Учитывая, что профиль течения Пуазейля U четная функция по y и z , нетрудно показать, что, если при фиксированном ω функции (u'', v'', w'', p'') удовлетворяют (2.2.9), то каждая функция из набора

$$\begin{aligned} I(u''_{-+}, v''_{++}, w''_{--}, p''_{-+}), & \quad II(u''_{--}, v''_{+-}, w''_{-+}, p''_{--}), \\ III(u''_{++}, v''_{-+}, w''_{+-}, p''_{++}), & \quad IV(u''_{+-}, v''_{--}, w''_{++}, p''_{+-}), \end{aligned}$$

так же будет удовлетворять этим уравнениям при данном ω . Поэтому решение (2.2.9) можно сводить к отдельному поиску решений, обладающих одной из четырех указанных выше симметрий. Аппроксимация методом коллокаций на

сетках (2.2.12), (2.2.13) это свойство решений сохраняет. Учитывая вид матриц

$$K_p = K \otimes K, \quad K = \text{diag}(w_1^{1/2}, \dots, w_{2m+1}^{1/2})$$

и

$$K_v = I_3 \otimes \tilde{K} \otimes \tilde{K}, \quad \tilde{K} = \text{diag}(\tilde{w}_1^{1/2}, \dots, \tilde{w}_{2m}^{1/2}),$$

где w_k – веса Гаусса (2.2.22), \tilde{w}_k – веса Гаусса-Лобатто (2.2.23), а также матрицы $S = \text{diag}(iI, I, I)$, нетрудно видеть, что описанные выше преобразования так же сохраняют это свойство решений.

После учета симметрий, мы получим из (2.2.28) четыре независимые проблемы собственных значений того же вида, у которых $n_v = 3m^2$ для всех четырех симметрий, а n_p будет равно m^2 для II , $(m+1)^2$ для III , и $m(m+1)$ для I и IV . Далее мы будем рассматривать только систему (2.2.28), отвечающую первой из указанных выше симметрий, поскольку именно этой симметрией обладают наиболее неустойчивые собственные моды [9].

Учитывая, что профиль основного течения – четная функция по обоим переменным, уравнение (2.2.4) можно так же решать с учетом симметрий. Это приведет к линейной системе с эрмитовой отрицательно определенной матрицей вида (2.2.29) вчетверо меньшего порядка, чем без учета симметрии.

Далее к проблеме (2.2.28) применим преобразования, описанные в разделе 1.3: ортогонально спроектируем (2.2.28) на ядро матрицы F , т.е. на пространство соленоидальных сеточных функций. В результате такой алгебраической редукции мы получим проблему собственных значений вида

$$-i\omega \mathbf{u} = H^{(1)} \mathbf{u} + \frac{1}{\text{Re}} H^{(2)} \mathbf{u} \quad (2.2.31)$$

с квадратной чисто мнимой матрицей $H^{(1)}$ и симметричной отрицательно определенной матрицей $H^{(2)}$. Отметим, что в разделе 1.3 редукция применялась к системам вида (2.2.16), а в данном случае – к системе (2.2.28) с матрицами вида (2.2.30). Это сокращает число арифметических операций примерно

в четыре раза, а объем памяти, необходимой для хранения матриц, – примерно в два раза.

Проблема собственных значений (2.2.31) аппроксимирует исходную проблему собственных значений (2.2.9) и позволяет вычислять приближенное критическое число Рейнольдса $\text{Re}_L(Z, \alpha)$ по формуле (2.2.11), где $\Omega(Z, \alpha, \text{Re})$ означает спектр проблемы (2.2.31).

Для заданных Z и α через $r(\mu)$, где $\mu = 1/\text{Re}$, обозначим максимальную мнимую часть собственных значений ω проблемы (2.2.31), то есть максимальную действительную часть собственных значений матрицы

$$H^{(1)} + \mu H^{(2)}. \quad (2.2.32)$$

Критическое число Рейнольдса $\text{Re}_L(Z, \alpha)$ равно величине обратной максимальному положительному корню уравнения $r(\mu) = 0$. Поиск корней этого уравнения будем выполнять в интервале $[\mu_1, \mu_2]$, взяв в качестве левой границы $\mu_1 = 1/\text{Re}_\infty$, где Re_∞ – некоторое достаточно большое число Рейнольдса такое, что при большем числе Рейнольдса исследовать устойчивость основного течения не имеет физического смысла. В качестве μ_2 выберем максимальное собственное значение эрмитового матричного пучка

$$H^{(1)} + H^{(1)*} + \mu(H^{(2)} + H^{(2)*}).$$

Вторая матрица этого пучка является отрицательно определенной, что позволяет эффективно вычислять его максимальное собственное значение с помощью соответствующей процедуры пакета LAPACK [39]. Как показано в разделе 1.5, такой выбор μ_2 гарантирует, что уравнение $r(\mu) = 0$ не будет иметь вещественных корней, больших μ_2 .

Поиск корней уравнения $r(\mu) = 0$ будем выполнять по алгоритму, описанному в разделах 1.5 и 1.6. Он позволяет для заданного $\delta > 0$ с помощью предложенных модификаций стандартных процедур FZERO и FMIN [33] находить все корни в интервале $[\mu_1, \mu_2]$ так, что для каждого точного корня μ_* и

отвечающего ему вычисленного приближенного корня $\hat{\mu}_*$ будет выполняться неравенство вида (1.6.4):

$$|\hat{\mu}_* - \mu_*| \leq \delta \hat{\mu}_*.$$

Это позволяет найти $1/\mu_*$, с заданной относительной точностью δ , т.е. с заданной относительной точностью строить нейтральные кривые в плоскости (Re, α) и вычислять $\text{Re}_L(Z)$.

Для вычисления $\text{Re}_L(Z)$ будем применять упомянутую выше процедуру FMIN к критическому числу Рейнольдса $\text{Re}_L(Z, \alpha)$, рассматриваемому, как функция от α . При этом, нет необходимости вычислять для каждого α все корни уравнения $r(\mu) = 0$. Достаточно вычислять только самый правый из них, дающий $\text{Re}_L(Z, \alpha)$, что позволяет значительно сократить вычислительные затраты.

2.2.5 Численные эксперименты

В ходе численных экспериментов для различных значений Z строились нейтральные кривые и вычислялись критические числа Рейнольдса. Для аппроксимации бралась сетка Гаусса с числом узлов $2m_r + 1$ по r и $2m_s + 1$ по s и Гаусса-Лобатто с числом внутренних узлов соответственно $2m_r$ и $2m_s$. Далее, для краткости, мы будем указывать только размер второй сетки. Основная сетка, на которой проводились расчеты, имела размер 60×140 и приводила к обобщенным проблемам собственных значений вида (2.2.16) с матрицами порядка $12m_r m_s + (2m_r + 1)(2m_s + 1) = 33801$. После учета симметрии мы получали проблемы собственных значений того же вида с матрицами порядка $3m_r m_s + m_r(m_s + 1) = 8403$ (порядок матриц указан для симметрии I , которую, как упоминалось выше, мы и будем рассматривать далее), а после редукции – обычные проблемы собственных значений вида (2.2.31) с матрицами порядка $3m_r m_s - m_r(m_s + 1) = 4170$.

При построении нейтральных кривых также исследовалась и сходимость по шагу сетки. На рис.2.1 приведена нейтральная кривая в плоскости (Re, α) , рассчитанная для $Z = 8$ на сетках 40×100 и 60×140 . Эта кривая отделяет значения (Re, α) , при которых любое достаточно малое возмущение со временем затухает, и при которых существуют бесконечно малые возмущения, незатухающие со временем. Видно, что с увеличением количества узлов сетки, нейтральная кривая принимает форму, характерную для течений в каналах. В верхней левой части нейтральной кривой, которая содержит точку $(\text{Re}_L(Z), \alpha_L)$ (минимальное критическое число Рейнольдса и отвечающее ему значение α), наблюдается сходимость по шагу сетки.

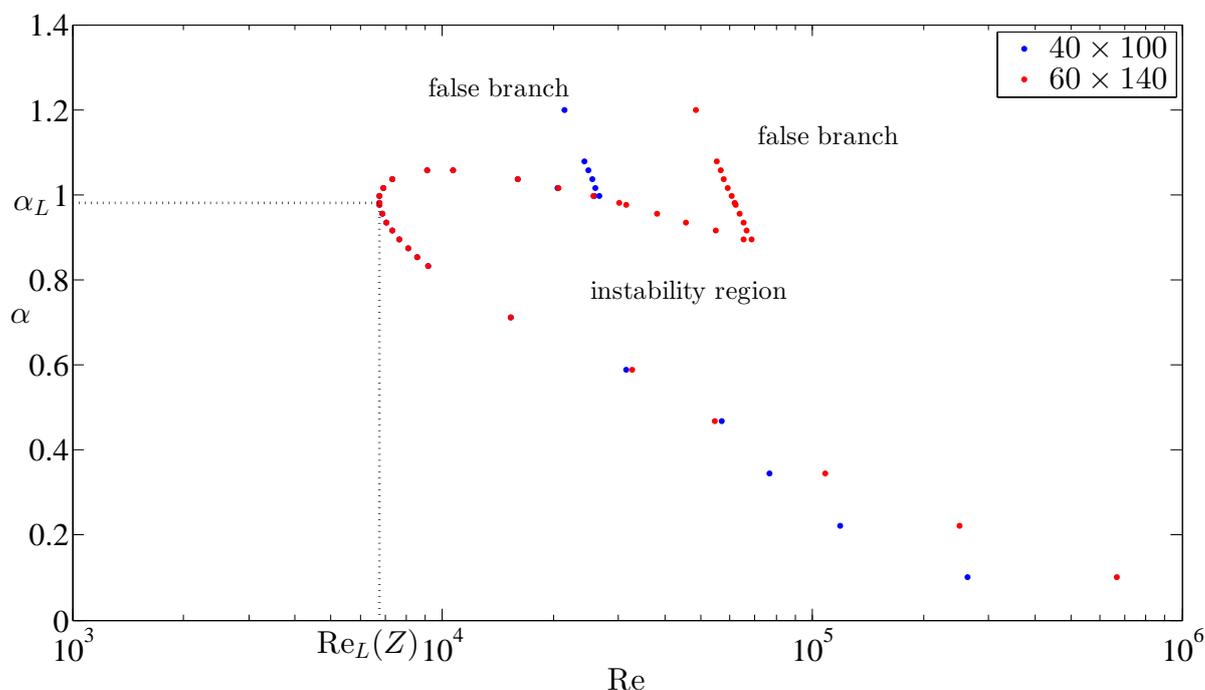


Рисунок 2.1: Полная нейтральная кривая в плоскости (Re, α) для $Z = 8$, рассчитанная на сетках 40×100 и 60×140 .

При увеличении Z нейтральная кривая будет сдвигаться вверх и влево. В пределе, при Z , стремящемся к бесконечности, мы получим нейтральную кривую плоского течения Пуазейля, которая представлена на рис. 2.3. Из-за погрешности аппроксимации у уравнения $r(1/\text{Re}) = 0$ при достаточно больших

α возникает лишний крайний правый корень, а при малых α – число корней, напротив, уменьшается до одного. Лишний корень дает ложную ветвь нейтральной кривой, примыкающую к “правильной” нейтральной кривой справа и не исчезающую при больших значениях α , при которых течение должно быть заведомо устойчивым. Ложная ветвь с ростом числа узлов сетки отходит вправо. Таким образом, с увеличением разрешения уменьшается дестабилизирующий эффект, обусловленный погрешностью аппроксимации, а область неустойчивости в плоскости (Re, α) сходится к области неустойчивости нулевого решения системы (2.2.7) к возмущениям вида (2.2.8).

Вычисление нейтральных кривых для различных значений Z позволило определить приближенные значения $\hat{\text{Re}}_L(Z)$ и $\hat{\alpha}_L$ критических параметров $\text{Re}_L(Z)$ и α_L , соответственно. Далее, эти значения уточнялись с помощью процедуры FMIN, как это описано в конце раздела 2.2.4. При этом использовалась аппроксимация на сетке 60×140 . Минимум функции $\text{Re}_L(Z, \alpha)$ искался в интервале $\hat{\alpha}_L - 0.05 \leq \alpha \leq \hat{\alpha}_L + 0.05$. Вычисленные критические числа Рейнольдса $\text{Re}_L(Z)$ и соответствующие им значения волнового параметра α_L и действительной части частоты ω_L , т.е. взятой с обратным знаком мнимой части ведущего собственного значения матрицы (2.2.32) при $\mu = 1/\text{Re}_L(Z)$, представлены в таблице 2.1. Точки нейтральных кривых, полученные в процессе работы процедуры FMIN, изображены на рис. 2.2, где они для каждого значения Z соединены сплошными линиями. Пунктирная линия соединяет критические точки, отвечающие различным значениям Z .

Таблица 2.1: Вычисление Re_L и соответствующих α_L и ω_L на сетке 60×140 для различных значений Z .

Z	3.5	4	5	6	8	10
Re_L	36520	18194	10432	8226	6762	6281
α_L	0.7075	0.8138	0.9085	0.9513	0.9876	1.0017
ω_L	0.12293	0.16612	0.21086	0.23307	0.25266	0.26027
Z	12	14	16	30	50	
Re_L	6072	5965	5904	5796	5778	
α_L	1.0085	1.0121	1.0143	1.0188	1.0201	
ω_L	0.26383	0.26568	0.26676	0.26879	0.26928	

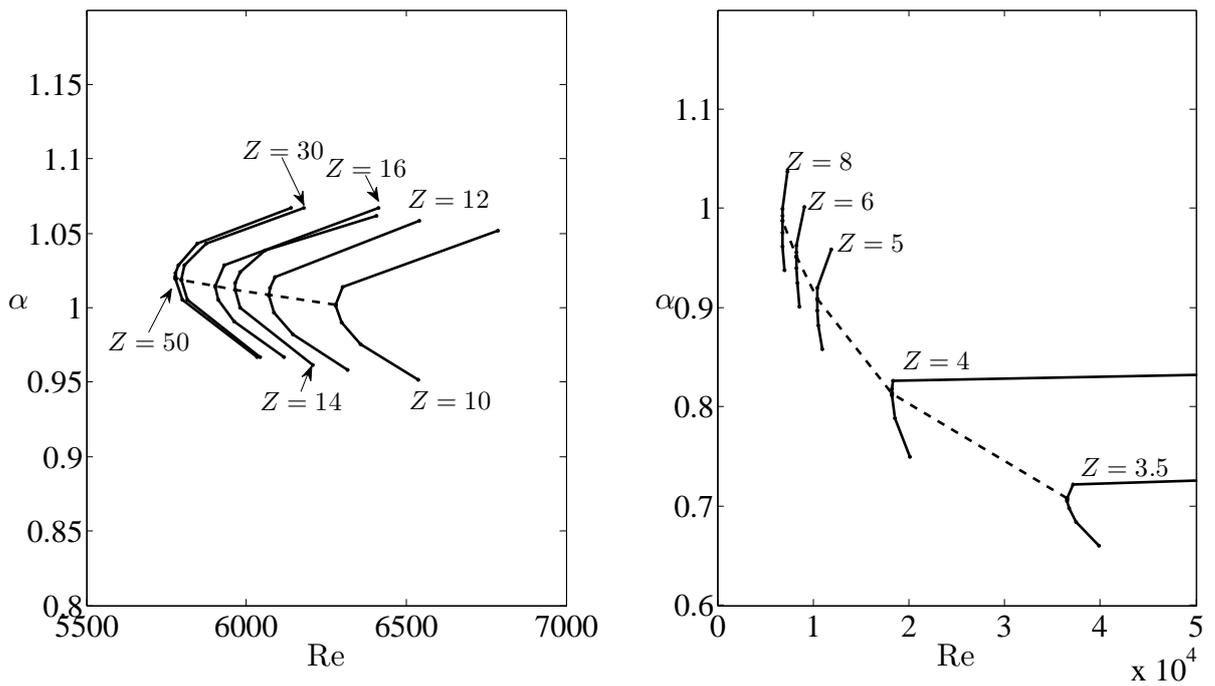


Рисунок 2.2: Вычисление $\text{Re}_L(Z)$ на сетке 60×140 для различных значений Z .

Для проверки сходимости по шагу сетки, были проведены дополнительные расчеты на еще более мелких сетках, которые показали, что для малых значений Z достигнута сходимость $\text{Re}_L(Z)$ с точностью до последней из указанных

в таблице 2.1 значащих цифр, а для больших Z – с точностью до предпоследней (см. таблицу 2.2, где результаты расчетов на сетке 60×140 сравниваются с результатами расчетов на более мелких сетках для случаев $Z = 3.5$ и 30).

Таблица 2.2: Проверка сходимости по шагу сетки.

Z	$2m_r \times 2m_s$	Re_L	α_L	ω_L
3.5	60×140	36520.30	0.707464	0.122934
	80×280	36520.38	0.707468	0.122935
30	60×140	5796.048	1.018819	0.268792
	80×240	5795.470	1.019008	0.268870
	60×400	5795.471	1.018957	0.268850

2.2.6 Сравнение с известными результатами

Зависимость критического числа Рейнольдса для течения Пуазейля в канале прямоугольного сечения от величины Z впервые была исследована в работе [9]. Из системы (2.2.9) исключали давление и продольную компоненту скорости и получали систему из двух дифференциальных уравнений четвертого порядка (обобщенную проблему собственных значений типа Орра-Зоммерфельда). Аппроксимация выполнялась спектральным методом на основе многочленов Лежандра. Использовались многочлены степени 40 по y и 80 по z . Для поиска $\text{Re}_L(Z)$ вводилась прямоугольная сетка в плоскости (Re, α) . При каждом фиксированном α в узлах сетки по Re вычислялась максимальная мнимая часть собственных значений полученного матричного пучка и искались отрезки, на которых эта функция имела перемену знака. Затем выбирался самый левый отрезок, который и содержал критическое число Рейнольдса при рассматриваемом значении α . Середина этого отрезка принималась за точку нейтральной кривой. При таком подходе приходилось решать проблему собственных значений значительно большее число раз, чем в пред-

ложенном нами методе, причем, требовалось решать обобщенную проблему собственных значений, в то время, как в нашем методе – обычную. Это делало метод, используемый в работе [9], существенно более затратным, чем наш. Результаты, полученные в работе [9] приведены в таблице 2.3.

Таблица 2.3: Результаты, полученные в работе [9].

Z	3.5	4	5	6	8
Re_L	36600	18400	10400	8200	6800
α_L	0.71	0.8	0.91	0.94	0.98

Зависимость $Re_L(Z)$ также исследовалось в работе [10]. Поиск точек нейтральной кривой проводился таким же образом, как и в [9], но, в отличие от [9], в [10] проблемы собственных значений решались методом Арнольди для исходной линеаризованной системы, аппроксимированной на основе специально подобранных многочленов Якоби. Использовалось разрешение 40×72 . Для $Z = 3.5, 4, 5, 6, 8$ и 25 вычислялись критические числа Рейнольдса и соответствующие им значения α_L и ω_L . В таблице 2.4 приведены полученные результаты, которые, совпали с результатами из работы [9].

Таблица 2.4: Результаты, полученные в работе [10].

Z	3.5	4	5	6	8	25
Re_L	36600	18400	10400	8200	6800	5772
α_L	0.71	0.8	0.91	0.94	0.98	1.02
ω_L	0.12353	0.16187	0.21167	0.22925	0.24963	0.26960

Кроме того, для значений параметра Z от 1 до 10 с шагом 1, при $Re = 100$, вычислялся спектр, который сравнивался со спектром плоского течения Пуазейля ($Z = \infty$). При больших Z ведущие собственные значения практически совпадали с ведущими собственными значениями плоского течения Пуазейля, а при уменьшении Z , совпадение исчезало.

Из таблиц 2.1–2.4 видно, что полученные нами результаты, хорошо согласуются с результатами работ [9] и [10]. Однако, используемый нами метод значительно менее затратный, что позволило нам использовать для пространственной аппроксимации примерно вдвое более мелкие по каждому направлению сетки. Также, как уже говорилось в разделе 2.2.4, критическое число Рейнольдса вычисляется нашим методом с заданной относительной точностью. Все это дало нам возможность получить результаты с гарантированной и более высокой точностью, чем с помощью методов, предложенных в работах [9] и [10].

2.3 Зависимость критического числа Рейнольдса от отношения длин сторон сечения

2.3.1 Теорема Сквайра

В нормированных переменных (см. раздел 2.2.1) в трехмерном бесконечном канале

$$\{(x, y, z) : -\infty < x < \infty, -1 < y < 1, -\infty < z < \infty\}$$

рассмотрим плоское течение Пуазейля – течение вязкой несжимаемой жидкости с вектором скорости и давлением

$$\mathbf{v} = (U(y), 0, 0), \quad p = -\tau x,$$

где профиль $U(y) = 1 - y^2$, а τ – заданная положительная константа.

Анализ линейной устойчивости данного течения сводится к анализу его устойчивости по отношению к бесконечно малым возмущениям вида [7, 8, 43–45]

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}'(x, y, z, t) \\ p'(x, y, z, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{v}}(y) \\ \tilde{p}(y) \end{pmatrix} e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)}, \quad \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \quad (2.3.1)$$

где α, β – волновые числа, а амплитуды $\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$, \tilde{p} и комплексная частота ω являются решением следующей проблемы собственных значений:

$$\begin{aligned}
-\mathbf{i}\omega\tilde{u} &= -\mathbf{i}\alpha U\tilde{u} - \tilde{v}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2 - \beta^2\right)\tilde{u} - \mathbf{i}\alpha\tilde{p}, \\
-\mathbf{i}\omega\tilde{v} &= -\mathbf{i}\alpha U\tilde{v} + \frac{1}{\text{Re}}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2 - \beta^2\right)\tilde{v} - \frac{\partial\tilde{p}}{\partial y}, \\
-\mathbf{i}\omega\tilde{w} &= -\mathbf{i}\alpha U\tilde{w} + \frac{1}{\text{Re}}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2 - \beta^2\right)\tilde{w} - \mathbf{i}\beta\tilde{p}, \\
\mathbf{i}\alpha\tilde{u} + \frac{\partial\tilde{v}}{\partial y} + \mathbf{i}\beta\tilde{w} &= 0,
\end{aligned} \tag{2.3.2}$$

с нулевыми граничными условиями для компонент скорости при $y = \pm 1$. Нетрудно видеть, что при $\alpha = 0$, учитывая вид второго, третьего и четвертого уравнений (2.3.2), для любого $\beta \geq 0$ будет справедливо неравенство $\text{Im}\omega < 0$, то есть течение будет линейно устойчиво.

С помощью преобразования Сквайра (см., например, [7, 49, 50])

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha} &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \hat{u} = (\alpha\tilde{u} + \beta\tilde{w})/\hat{\alpha}, \\
\hat{p} &= \tilde{p}\hat{\alpha}/\alpha, \quad \hat{\omega} = \omega\hat{\alpha}/\alpha, \quad \hat{\text{Re}} = \text{Re}\alpha/\hat{\alpha},
\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

проблему собственных значений (2.3.2) можно записать в виде следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned}
-\mathbf{i}\hat{\omega}\hat{u} &= -\mathbf{i}\hat{\alpha}U\hat{u} - \tilde{v}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{1}{\hat{\text{Re}}}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \hat{\alpha}^2\right)\hat{u} - \mathbf{i}\hat{\alpha}\hat{p}, \\
-\mathbf{i}\hat{\omega}\tilde{v} &= -\mathbf{i}\hat{\alpha}U\tilde{v} + \frac{1}{\hat{\text{Re}}}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \hat{\alpha}^2\right)\tilde{v} - \frac{\partial\hat{p}}{\partial y}, \\
\mathbf{i}\hat{\alpha}\hat{u} + \frac{\partial\tilde{v}}{\partial y} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

и

$$\begin{aligned}
-\mathbf{i}\hat{\omega}\tilde{w} &= -\mathbf{i}\hat{\alpha}U\tilde{w} + \frac{1}{\hat{\text{Re}}}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \hat{\alpha}^2\right)\tilde{w} - \mathbf{i}\beta\hat{p}, \\
\tilde{u} &= (\hat{\alpha}\hat{u} - \beta\tilde{w})/\alpha, \quad \tilde{p} = \hat{p}\alpha/\hat{\alpha}, \quad \omega = \hat{\omega}\alpha/\hat{\alpha}.
\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Уравнения (2.3.4) являются проблемой собственных значений, независимой от уравнений (2.3.5). Поэтому можно рассматривать два типа решений системы (2.3.4), (2.3.5), а, следовательно, и системы (2.3.2). Первый тип решений дают собственные значения $\hat{\omega}$ и собственные функции $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{p})^T \neq 0$ проблемы (2.3.4). Найдя такое решение проблемы (2.3.4), из уравнений (2.3.5) можно найти \tilde{w} , \tilde{u} , \tilde{p} и ω . Второму типу решений соответствует тривиальное решение $\hat{u} = \hat{v} = \hat{p} = 0$ проблемы (2.3.4). При этом ω и \tilde{w} – это, соответственно, собственные значения и собственные функции проблемы собственных значений

$$-i\omega\tilde{w} = -i\alpha U\tilde{w} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2 - \beta^2 \right) \tilde{w}, \quad (2.3.6)$$

$\tilde{u} = -\beta\tilde{w}/\alpha$, $\tilde{p} = 0$. Нетрудно показать, что хаусдорфово множество [51], а, следовательно, и спектр стоящего в правой части уравнения (2.3.6) оператора лежат в левой полуплоскости при любых α и β . Значит, линейную устойчивость плоского течения Пуазейля можно исследовать, рассматривая только решения первого типа, то есть, рассматривая проблему (2.3.4).

Проблема собственных значений

$$\begin{aligned} -i\omega u &= -i\alpha Uu - v \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2 \right) u - i\alpha p, \\ -i\omega v &= -i\alpha Uv + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2 \right) v - \frac{\partial p}{\partial y}, \\ i\alpha u + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

называется проблемой Орра-Зоммерфельда [7, 8, 43, 45]. Обозначим линейное критическое число Рейнольдса этой проблемы чрез $\text{Re}_L^{OS}(\alpha)$, то есть такое минимальное положительное Re , при котором собственные значения этой проблемы имеют непустое пересечение с мнимой осью.

Сравнивая проблемы (2.3.4) и (2.3.7), видно, что $\hat{\text{Re}}_L(\hat{\alpha}) = \text{Re}_L^{OS}(\hat{\alpha})$. Учитывая (2.3.3), получим

$$\text{Re}_L(\alpha, \beta) = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\alpha} \text{Re}_L^{OS}(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}). \quad (2.3.8)$$

Для плоского течения Пуазейля минимальное линейное критическое число Рейнольдса

$$\inf_{\beta \geq 0} \inf_{\alpha > 0} \operatorname{Re}_L(\alpha, \beta) = \inf_{\beta \geq 0} \inf_{\alpha > 0} \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\alpha} \operatorname{Re}_L^{OS} \left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \right) = \inf_{\alpha > 0} \operatorname{Re}_L^{OS}(\alpha)$$

достигается при $\beta = 0$ и равно минимальному линейному критическому числу Рейнольдса проблемы Орра-Зоммерфельда. Это утверждение называют теоремой Сквайра.

Проблема Орра-Зоммерфельда (2.3.7) в настоящее время тщательно изучена теоретически и численно (см., например, [7, 8, 43, 45]). В частности, для нее рассчитана с очень высокой точностью нейтральная кривая для рассматриваемого случая, когда $U(y) = 1 - y^2$, изображенная на рис. 2.3. Область внутри нейтральной кривой – это область неустойчивости, т.е. для каждой точки $\operatorname{Re}_0, \alpha_0$ из этой области при числе Рейнольдса Re_0 существует собственное значение ω с положительной мнимой частью. Левая ветвь нейтральной кривой – это множество точек

$$\{(\operatorname{Re}_L^{OS}(\alpha), \alpha) : 0 < \alpha \leq \alpha_{\max}^{OS}\}.$$

Область неустойчивости проблемы Орра-Зоммерфельда ограничена сверху значением $\alpha = \alpha_{\max}^{OS}$, то есть $\operatorname{Re}_L^{OS}(\alpha) = \infty$ при $\alpha > \alpha_{\max}^{OS}$. Установлено, что

$$\alpha_{\max}^{OS} \approx 1.097, \quad \inf_{\alpha > 0} \operatorname{Re}_L^{OS}(\alpha) \approx 5772.$$

2.3.2 Течение в канале прямоугольного сечения

Как было показано в разделе 2.2.1, анализ линейной устойчивости течения Пуазейля в канале прямоугольного сечения сводится к анализу его устойчивости к бесконечно малым возмущениям вида (2.2.8), где амплитуды скорости $\mathbf{v}'' = (u'', v'', w'')$ и давления p'' и комплексные частоты ω являются решением

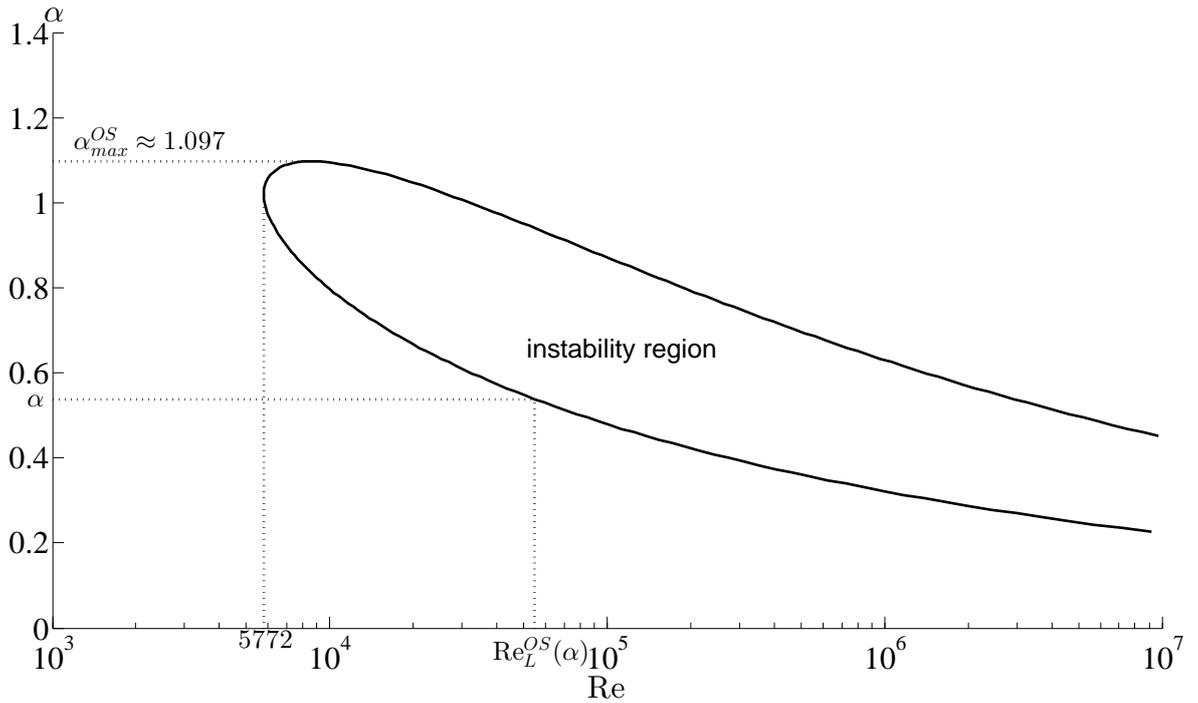


Рисунок 2.3: Нейтральная кривая проблемы Орра-Зоммерфельда для плоского течения Пуазейля.

проблемы собственных значений (2.2.9), рассматриваемой в области (2.2.5) с нулевыми граничными условиями для компонент скорости, где $Z \geq 1$ - отношение длин горизонтальной и вертикальной стенок канала. Критическое число Рейнольдса течения Пуазейля, т.е. граница устойчивости ко всем бесконечно малым возмущениям вида (2.2.8), определяется как в (2.2.10).

Остановимся подробнее на зависимости Re_L от величины параметра Z . Результаты численных экспериментов, представленные в разделах 2.2.5 и 2.2.6, показывают, что существует некоторое $Z_c > 1$ такое, что при $Z < Z_c$ течение Пуазейля устойчиво при любом числе Рейнольдса, т.е. $Re_L(Z) = \infty$, а при $Z > Z_c$ критическое число Рейнольдса конечно. С ростом Z критическое число Рейнольдса уменьшается, стремясь при $Z \rightarrow \infty$ к критическому числу Рейнольдса плоского течения Пуазейля, равному примерно 5772. Поведение $Re_L(Z)$ при $Z \rightarrow \infty$ становится понятным, если заметить, что для достаточно больших Z профиль скорости $U(y, z) \approx 1 - y^2$ при $-Z + \delta \leq z \leq Z - \delta$,

где $\delta \ll Z$. Это иллюстрирует рис. 2.4, где изображены профили скорости при $Z = 4$ и $Z = 10$. Также, такое поведение $Re_L(Z)$ при достаточно больших Z

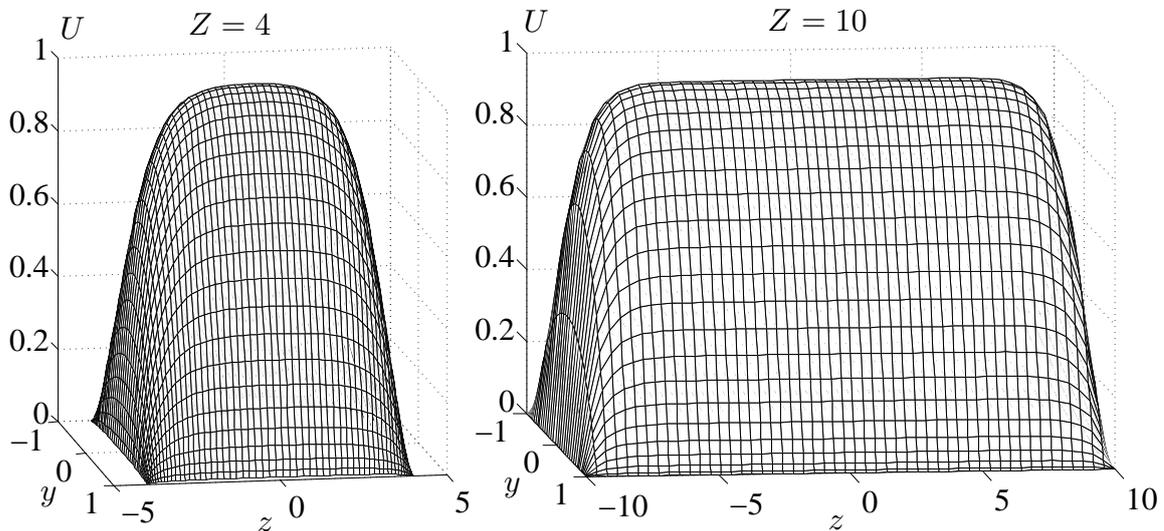


Рисунок 2.4: Профили основного течения в прямоугольном канале при $Z = 4$ и $Z = 10$.

подтверждают и результаты наших расчетов критического числа Рейнольдса, приведенные в таблице 2.1 раздела 2.2.5. Видно, что с ростом Z критическое число Рейнольдса уменьшается и уже при $Z = 30$ равно 5772.

С другой стороны, при $Z = 1$ мы имеем течение в канале квадратного сечения, которое считается [9] линейно устойчивым в виду его сходства с течением в трубе круглого сечения – течением Гагена-Пуазейля – линейная устойчивость которого была доказана [52, с.216-221], [53–56].

Более сложным является вопрос, почему существует указанная выше величина $Z_c > 1$ и чему она равна. Впервые в работе [9] на основе расчетов $Re_L(Z)$, приведенных в таблице 2.3, было установлено, что $Z_c \approx 3.2$. Это значение Z_c подтверждают результаты работы [10], приведенные в таблице 2.4, и результаты наших, более точных и полных расчетов, приведенные в таб-

лице 2.1 и изображенные на рис. 2.5 (кривая I). Вместе с тем, никакого тео-

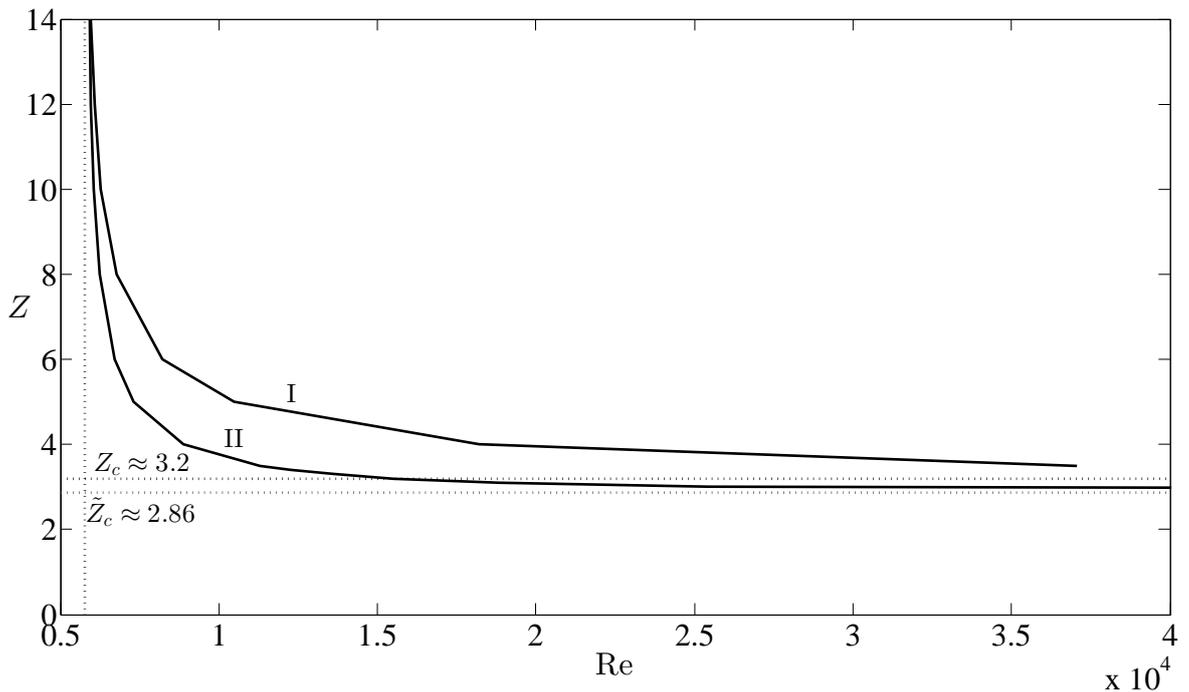


Рисунок 2.5: Зависимость линейного критического числа Рейнольдса от Z для исходного (кривая I) и модельного (кривая II) течений.

ретическо обоснования зависимости $Re_L(Z)$ и, в частности, Z_c до недавнего времени получено не было, что связано со значительной сложностью теоретического исследования двумерной проблемы собственных значений (2.2.9) по сравнению с детально изученными аналогичными одномерными проблемами собственных значений такими, как проблема Орра-Зоммерфельда. В следующем разделе мы дадим подробное обоснование зависимости $Re_L(Z)$ и величины Z_c , предложенное в работах автора [23, 24].

2.3.3 Одномерная модель течения в канале прямоугольного сечения

Рассмотрим некоторое модельное течение – течение Пуазейля в том же самом бесконечном канале прямоугольного сечения, но с периодическими граничными условиями для основного течения и возмущений в направлении z ,

оставив в направлении y условие прилипания. В этом случае профиль нормированного основного течения при любом Z будет таким же, как у плоского течения Пуазейля, т.е. $U(y, z) = 1 - y^2$, а анализ линейной устойчивости сведется к анализу устойчивости нулевого решения линеаризованных уравнений эволюции возмущений к возмущениям вида

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}'(x, y, z, t) \\ p'(x, y, z, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{v}}(y) \\ \tilde{p}(y) \end{pmatrix} e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)}, \quad \alpha \geq 0, \beta = \frac{\pi}{Z}k, \quad (2.3.9)$$

где k – целое, а $\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$, \tilde{p} и ω являются решением проблемы собственных значений (2.3.2) с нулевыми граничными условиями для компонент скорости при $y = \pm 1$. Таким образом, единственным отличием модельного течения от плоского течения Пуазейля будет дискретность волнового числа β (что обусловлено наличием в канале боковых стенок). В частности, будет справедлива теорема Сквайра, согласно которой, как было показано в разделе 2.3.1, критическое число Рейнольдса $\text{Re}_L(\alpha, \beta)$ модельного течения, определяемое как граница устойчивости к возмущениям вида (2.3.9), будет выражаться при произвольном вещественном β через критическое число Рейнольдса проблемы Орра-Зоммерфельда для плоского течения Пуазейля по формуле (2.3.8).

Тогда критическое число Рейнольдса $\text{Re}_L(Z)$ для модельного течения достигается, как и для плоского течения Пуазейля, на возмущениях с $\beta = 0$ и при любом Z оно равно критическому числу Рейнольдса плоского течения Пуазейля. Действительно, учитывая, что $\inf_{\alpha > 0} \text{Re}_L^{OS}(\alpha) \approx 5772$, в рассматриваемом случае имеем:

$$\begin{aligned} \text{Re}_L(Z) &= \inf_{\beta = \pi k/Z} \inf_{\alpha > 0} \text{Re}_L(\alpha, \beta) = \inf_{\beta = \pi k/Z} \inf_{\alpha > 0} \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\alpha} \text{Re}_L^{OS}(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) = \\ &= \inf_{\beta = \pi k/Z} \inf_{\alpha > \beta} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \text{Re}_L^{OS}(\alpha) = \inf_{\alpha > 0} \text{Re}_L^{OS}(\alpha) \approx 5772. \end{aligned}$$

Нулевые граничные условия в направлении z не допускают нетривиальные возмущения постоянные в этом направлении. В случае же периодических граничных условий такие возмущения возможны. Это возмущения с $\beta = 0$,

т.е. $k = 0$. Исключим из множества допустимых возмущений в периодическом случае возмущения с $k = 0$. Тогда критическое число Рейнольдса $\text{Re}_L(Z)$ будет достигаться при $k = 1$ и определяться формулой

$$\text{Re}_L(Z) = \inf_{\alpha > \pi/Z} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \pi^2/Z^2}} \text{Re}_L^{OS}(\alpha), \quad (2.3.10)$$

где $\text{Re}_L^{OS}(\alpha)$ образует левую ветвь нейтральной кривой проблемы Орра-Зоммерфельда. Соответствующая зависимость $\text{Re}_L(Z)$ изображена на рис. 2.5 (кривая II).

Оценим значение Z , ниже которого в рассматриваемом случае имеет место устойчивость при любом числе Рейнольдса. Для этого проанализируем формулу (2.3.10). В ее правую часть входит критическое число Рейнольдса проблемы Орра-Зоммерфельда $\text{Re}_L^{OS}(\alpha)$. Как уже отмечалось выше, $\text{Re}_L^{OS}(\alpha) = \infty$ при $\alpha > \alpha_{\max}^{OS}$ и $\text{Re}_L^{OS}(\alpha) < \infty$ при $0 < \alpha < \alpha_{\max}^{OS}$ (см. рис. 2.3). Значит, если $\pi/Z > \alpha_{\max}^{OS}$, то для любого $\alpha > \pi/Z$ имеем $\text{Re}_L^{OS}(\alpha) = \infty$ и, следовательно, $\text{Re}_L(Z) = \infty$. Если $\pi/Z < \alpha_{\max}^{OS}$, то множество таких значений α , что $\pi/Z < \alpha < \alpha_{\max}^{OS}$, не будет пустым и, следовательно, $\text{Re}_L(Z) < \infty$. Таким образом, значение величины Z , ниже которого модельное течение устойчиво при любом числе Рейнольдса, очевидно, есть

$$\tilde{Z}_c = \pi/\alpha_{\max}^{OS} \approx 2.86.$$

Близость кривых I и II позволяет утверждать, что в канале прямоугольного сечения механизм линейной устойчивости течения Пуазейля с условием прилипания на боковых стенках аналогичен механизму линейной устойчивости течения Пуазейля с условием периодичности на боковых стенках к возмущениям с неравным нулю поперечным волновым числом.

2.4 Выводы

В данной главе исследована устойчивость течения Пуазейля вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном канале постоянного прямоугольного сечения. В первой части главы предложен адаптированный под рассматриваемую задачу и, как следствие, существенно более экономичный вариант описанной в главе 1 технологии, с помощью которого численно исследована зависимость линейного критического числа Рейнольдса течения Пуазейля от отношения длин сторон сечения канала. Выполнено сравнение результатов численных экспериментов с уже известными. Эксперименты показали высокую эффективность предложенного варианта технологии и позволили уточнить известные результаты.

Во второй части главы дано теоретическое обоснование зависимости линейного критического числа Рейнольдса течения Пуазейля от отношения длин сторон сечения на основе теоремы Сквайра и свойств нейтральной кривой проблемы Орра-Зоммерфельда для плоского течения Пуазейля.

Глава 3

Решение частичных проблем собственных значений

3.1 Введение

Данная глава посвящена методам решения частичной обычной и обобщенной проблем собственных значений с большими разреженными матрицами. Наиболее популярными методами решения этих задач являются метод Арнольди, несимметричный метод Ланцоша и метод Якоби-Дэвидсона (см., например, [13–19]).

Метод Арнольди и несимметричный метод Ланцоша очень эффективны в случае, если необходимо найти одно хорошо отделенное от остальной части спектра собственное значение и отвечающий ему собственный вектор заданной матрицы A . Если требуется найти инвариантное подпространство, отвечающее заданной группе близких собственных значений, хорошо отделенных от остальной части спектра, то необходимо использовать более вычислительно-емкие блочные варианты этих алгоритмов. При этом, необходимо выполнять процедуру дефляции [13], которая заключается в “исключении” уже сошедшихся инвариантных подпространств.

Если искомое собственное значение (группа близких собственных значений) не очень хорошо отделены от остальной части спектра, то эти методы применяют к сдвинутой обратной матрице $(A - \sigma I)^{-1}$, где σ – некоторая константа, а I , здесь и далее, – единичная матрица соответствующего порядка. При этом умножение на обратную матрицу заменяют на решение с высокой точностью систем с этой матрицей. Такой подход эффективен, если эти системы можно решать с помощью достаточно быстрых прямых методов, например, на основе LU -разложения [34]. В противном случае, для решения систем приходится использовать какой-нибудь итерационный метод, например, обобщенный метод минимальных невязок (GMRES, [57, 58]) с предобуславливанием, что делает вычисления значительно более затратными, а алгоритмы – более сложными логически. Для решения аналогичных частичных обобщенных проблем собственных значений, то есть вычисления конечных собственных значений матричного пучка $A - \lambda B$, расположенных вблизи точки σ комплексной плоскости, и, отвечающего им понижающего подпространства, эти методы применяют к матрице $(A - \sigma B)^{-1}B$.

Существенным недостатком методов является высокие требования к объему оперативной памяти. Так, в методе Арнольди и несимметричном методе Ланцоша приближение к собственному вектору ищется в подпространстве, размерность которого растет на каждом шаге, а для нахождения инвариантного или понижающего подпространства, как говорилось выше, приходится использовать логически более сложные и вычислительно-емкие блочные варианты этих методов.

Метод Якоби-Дэвидсона так же эффективен, если необходимо найти одно хорошо отделенное от остальной части спектра собственное значение и отвечающий ему собственный вектор заданной матрицы A . Однако, в отличие от методов Арнольди и Ланцоша, даже в этом простейшем случае на каждом шаге алгоритма требуется решать системы, хотя и не со столь же высокой точностью, с матрицами вида $(I - x_k x_k^*)(A - \sigma I)(I - x_k x_k^*)$, где x_k – очередное

приближение к искомому собственному вектору. Эти системы обычно решают с помощью предобусловленного GMRES. Если требуется найти инвариантное подпространство, отвечающее заданной группе близких собственных значений, хорошо отделенных от остальной части спектра, то необходимо использовать процедуру дефляции, которая заключается в ортогонализации к уже сошедшемуся инвариантному подпространству [13, 59].

Метод Якоби-Дэвидсона требует меньше оперативной памяти, чем методы Арнольди и Ланцоша, однако объем требуемой памяти по-прежнему значителен, поскольку приближение к искомому подпространству, как и в упомянутых выше методах, ищется в подпространстве существенно большей размерности. Этот метод легко обобщается на случай обобщенной проблемы собственных значений, но при этом, увеличиваются и требования к памяти: требуется вычислять не одно, как в случае обычной проблемы собственных значений, а два подпространства, с помощью которых выполняется редукция исходного матричного пучка, к пучку меньшего размера [13, 16, 59].

Поэтому в настоящее время инженеры часто используют метод обратных итераций, который, хотя и обладает лишь линейной скоростью сходимости, но требует существенно меньше оперативной памяти. Его недостатком является необходимость достаточно точного решения линейных систем с матрицами порядка n на каждой итерации, что может быть слишком затратным при достаточно большом n . В работах [60–64] был предложен очень экономичный вариант этого метода – приближенный метод обратных итераций с тюнингом, где упомянутые системы решались приближенно с увеличивающейся на каждой внешней итерации точностью с помощью GMRES с правым предобусловливанием с тюнингом (тюнинг заключается в определенном изменении предобусловливателя на каждой внешней итерации. См. раздел 3.2.1.). В таком случае количество итераций GMRES не зависит от номера внешней итерации. Единственным недостатком этого варианта метода обратных итераций является его линейная скорость сходимости.

В данной главе для решения частичной проблемы собственных значений предлагается использовать методы ньютоновского типа. Обладая квадратичной скоростью сходимости, к их преимуществам перед обсуждавшимися выше методами Арнольди, Ланцоша и Якоби-Дэвидсона нужно отнести простоту и невысокие требования к оперативной памяти, поскольку в ходе итераций необходимо хранить только приближенное инвариантное или понижающее подпространство, в то время как в упомянутых трех методах приближение к искомым инвариантным или понижающим подпространствам ищется в подпространствах существенно большей размерности и при этом необходимо использование процедуры дефляции.

Предлагаемые в разделах 3.2 и 3.3 методы Ньютона являются развитием предложенного и обоснованного в работе [65] варианта метода Ньютона для вычисления инвариантного подпространства матрицы, отвечающего ее собственным значениям, лежащим вне (внутри) заданного круга, граница которого не проходит через точки спектра. Идея блочных методов Ньютона для частичных проблем собственных значений не нова. Например, в работе [66] предложен блочный вариант метода для случая симметричных матриц, а в работе [67] – метод Ньютона для проблем собственных значений нелинейных относительно спектрального параметра, который, в частности, применим и к линейной проблеме собственных значений с несимметричной матрицей. Тем не менее, предложенный в [65] метод обладает некоторыми преимуществами. Он, в отличие от метода [66], применим в несимметричном случае и имеет простую теорию сходимости. Также метод [65] не может быть выведен из [67]. Это характерная для методов ньютоновского типа ситуация, когда для одной и той же проблемы могут быть записаны различные нелинейные уравнения, приводящие после их линеаризации к различным, алгебраически неэквивалентным, схемам. Более того метод [65] не использует итераций с отношением Рэлея (см., например, [34]), а на каждом шаге требует решения уравнения Сильвестра (см., например, [51, 68]).

Обладая высокой скоростью сходимости, метод Ньютона из работы [65], как и все методы ньютоновского типа, требует хорошего начального приближения. Также на каждом шаге предложенного метода требуется решать уравнение Сильвестра. Эти сложности практической реализации были преодолены в работе [69], где, во-первых, для поиска начального приближения разработан вариант упомянутого выше метода приближенных обратных итераций с тюнингом, а, во-вторых, описан способ решения уравнения Сильвестра на основе GMRES с предобуславливанием и разложения Шура [34, 38].

Раздел 3.2 посвящен обсуждению предложенного и обоснованного в работах автора [25, 27] двустороннего метода Ньютона для вычисления спектрального проектора [35, 51], отвечающего заданной группе изолированных собственных значений большой разреженной матрицы. Помимо этого, описывается двусторонний метод приближенных обратных итераций с тюнингом [25, 27], используемый для поиска начального приближения для этого метода Ньютона. Обсуждаются результаты численных экспериментов с дискретным аналогом неэрмитового эллиптического оператора.

Раздел 3.3 посвящен обсуждению предложенного и обоснованного в работах автора [28, 31] метода Ньютона для вычисления понижающего подпространства, отвечающего заданному изолированному подмножеству конечных собственных значений регулярного матричного пучка вида $A - \lambda B$ с большими разреженными матрицами. В качестве тестовой задачи рассмотрен матричный пучок, возникающий при численном исследовании обсуждавшейся в главе 2 задачи устойчивости течения в бесконечном канале постоянного прямоугольного сечения. В отличие от главы 2, для пространственной аппроксимации используются центральные разности второго порядка на равномерных разнесенных сетках типа C [70], что приводит к пучку с большими разреженными матрицами.

3.2 Двусторонний метод Ньютона для решения частичной обычной проблемы собственных значений

Данный раздел посвящен вычислению спектрального проектора [35, 51], отвечающего изолированному подмножеству собственных значений большой разреженной матрицы $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, ближайших к заданной точке комплексной плоскости. Без потери общности будем предполагать, что матрица A невырожденная и требуется найти спектральный проектор, отвечающий ее $p \ll n$ (с учетом кратности) минимальным по модулю собственным значениям. В противном случае предлагается рассматривать вместо исходной матрицы A матрицу $A - \sigma I$, где σ – некоторый сдвиг.

Пусть \mathcal{X}_1 и $\mathcal{X}_2 \subset \mathbb{C}^n$ – соответственно правое и левое инвариантные подпространства, отвечающие p минимальным по модулю собственным значениям матрицы A , а X_1 и $X_2 \in \mathbb{C}^{n \times p}$ – матрицы, столбцы которых образуют биортогональные базисы в этих подпространствах, т.е. $\mathcal{X}_i = \text{span}(X_i)$ и

$$X_2^* X_1 = I. \quad (3.2.1)$$

Тогда,

$$AX_1 = X_1 \Lambda, \quad A^* X_2 = X_2 \Lambda^*,$$

где $\Lambda = X_2^* A X_1$, и спектр $\lambda(\Lambda)$ матрицы Λ состоит из p минимальных по модулю собственных значений матрицы A , а спектральный проектор, который так же называют проектором Рисса [51, 71] или инвариантным проектором, отвечающий p минимальным по модулю собственным значениям матрицы A , может быть представлен в виде

$$\mathcal{P} = X_1 X_2^*. \quad (3.2.2)$$

Проектор (3.2.2) обычно не формируют явно, а используют (например, для спектральной редукции) в указанном выше малоранговом виде, то есть, как произведение двух прямоугольных матриц.

Матрицы X_1 и X_2 , удовлетворяющие равенству (3.2.1), мы далее для краткости будем называть биортогональными. Для фиксированных подпространств \mathcal{X}_1 и \mathcal{X}_2 биортогональные базисы в этих подпространствах определены неоднозначно, но проектор (3.2.2) от выбора базисов не зависит. Тем не менее, с точки зрения вычислительной устойчивости матрицы X_1 и X_2 предпочтительнее выбирать специальным образом, а именно, так, что бы

$$X_2^* X_2 = X_1^* X_1,$$

что обеспечивает равенство

$$\|\mathcal{P}\|_2 = \|X_1\|_2^2 = \|X_2\|_2^2. \quad (3.2.3)$$

Такие биортогональные матрицы мы будем называть сбалансированно биортогональными.

Для вычисления матриц X_1 и X_2 предлагается использовать комбинацию двусторонних методов приближенных обратных итераций с тюнингом и Ньютона. Первый метод описан в разделе 3.2.1 и является модификацией метода приближенных обратных итераций с тюнингом, предложенного в работах [60, 62, 63]. Стартуя с сбалансированно биортогональных матриц $X_{1,0}, X_{2,0} \in \mathbb{C}^{n \times p}$, метод двусторонних обратных итераций строит две последовательности матриц $X_{1,k}$ и $X_{2,k}$, $k = 1, 2, \dots$, приближенно решая на каждом шаге блочные системы вида $A X_{1,k+1} = X_{1,k}$ и $A^* X_{2,k+1} = X_{2,k}$ с помощью GMRES с правым предобуславливанием с тюнингом, и, выполняя после решения систем сбалансированную биортогонализацию найденных матриц $X_{1,k+1}$ и $X_{2,k+1}$.

После нескольких шагов метода двусторонних обратных итераций, найденные приближенные инвариантные подпространства берутся в качестве начального приближения для двустороннего метода Ньютона, который выведен

в разделе 3.2.2, по аналогии с методом Ньютона, предложенным и обоснованным в работах [65, 69]. Результаты численных экспериментов с предложенными двусторонними алгоритмами обсуждаются в разделе 3.2.3.

При описании предложенных алгоритмов, мы будем использовать две вспомогательные процедуры. Первая процедура выполняет ортонормировку столбцов заданной полноранговой матрицы $W \in \mathbb{C}^{n \times r}$, вычисляя ее QR-разложение [34]: $W = QR$, где $Q \in \mathbb{C}^{n \times r}$ – унитарная прямоугольная матрица: $Q^*Q = I$, а $R \in \mathbb{C}^{r \times r}$ – верхняя треугольная. Результат работы этой процедуры мы будем записывать в виде $(Q, R) = \text{ort}(W)$ либо $Q = \text{ort}(W)$, если матрица R не требуется.

Вторая процедура выполняет биортогонализацию столбцов двух заданных полноранговых матриц W_1 и $W_2 \in \mathbb{C}^{n \times r}$, на основе сингулярного разложения $W_2^*W_1 = UDV^*$ [34], где U и V – унитарные, а D – неотрицательно определенная диагональная матрица порядка r . Вычислив U , V и D , эта процедура вычисляет биортогональные матрицы

$$V_1 = W_1VD^{-1/2}, \quad V_2 = W_2UD^{-1/2},$$

если матрица D невырожденная, либо констатирует, что биортогонализация невозможна. Успешный результат работы этой процедуры мы будем записывать в виде $(V_1, V_2, U, D, V) = \text{biort}(W_1, W_2)$ или, если матрицы U , V и D далее не требуются, – в виде $(V_1, V_2) = \text{biort}(W_1, W_2)$. Для определенности будем предполагать далее, что диагональные элементы матрицы D упорядочены в порядке невозрастания.

Для получения из заданных матриц W_1 и W_2 сбалансированно биортогональных матриц, достаточно перед биортогонализацией ортогонализировать каждую из них:

$$(V_1, V_2) = \text{biort}(\text{ort}(W_1), \text{ort}(W_2)).$$

Нетрудно проверить, что построенные таким образом матрицы V_1 и V_2 будут удовлетворять следующим равенствам:

$$\text{span}(V_l) = \text{span}(W_l), \quad V_l^* V_l = D^{-1}, \quad V_2^* V_1 = I.$$

Кроме описанных выше двух процедур мы будем использовать процедуру, вычисляющую разложение Шура [34, 72] $B = QTQ^*$ заданной матрицы $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, где $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ – унитарная, а $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ – верхняя треугольная. Результат работы этой процедуры будем записывать в виде $(Q, T) = \text{schur}(B)$. Разложение Шура обычно вычисляется с помощью QR -алгоритма [34]. Диагональные элементы матрицы T являются собственными значениями матрицы B (с точностью до ошибок округления) и расположены в произвольном порядке. Для получения разложения Шура с диагональными элементами формы Шура T , расположенными в заданном порядке, будем применять к матрицам Q и T процедуру упорядочивания. Результат перестановки в разложении Шура диагональных элементов формы Шура T в порядке неубывания и в порядке невозрастания модулей, соответственно, будем записывать в виде

$$(Q, T) = \text{reord}(Q, T, \leq), \quad (Q, T) = \text{reord}(Q, T, \geq).$$

Проектор (3.2.2), где X_1 и X_2 биортогональные матрицы, является спектральным проектором, отвечающим некоторому подмножеству собственных значений матрицы A , в том, и только том случае, если он коммутирует с матрицей A [51]. Поэтому, в критериях останова предлагаемых двусторонних методов мы будем следить за величиной нормы коммутатора

$$E = AP - PA, \tag{3.2.4}$$

либо за нормами спектральных невязок

$$R_1 = AX_1 - X_1\Lambda, \quad R_2 = A^*X_2 - X_2\Lambda^*, \tag{3.2.5}$$

где $\Lambda = X_2^* A X_1$, которые, как нетрудно проверить, связаны с E следующими равенствами:

$$E = R_1 X_2^* - X_1 R_2^*, \quad R_1 = E X_1, \quad R_2 = -E^* X_2.$$

Если матрицы X_1 и X_2 сбалансированно биортогональные, то в силу (3.2.3) имеем:

$$\|R_l\|_2 \leq \|E\|_2 \|\mathcal{P}\|_2^{1/2}, \quad \|E\|_2 \leq (\|R_1\|_2 + \|R_2\|_2) \|\mathcal{P}\|_2^{1/2}, \quad (3.2.6)$$

т.е. малость нормы коммутатора влечет малость норм спектральных невязок и наоборот.

Для вычисления нормы матрицы E саму эту матрицу формировать не требуется (это привело бы к огромным вычислительным затратам), а достаточно воспользоваться следующим алгоритмом. Поскольку

$$E = [R_1, X_1][X_2, -R_2]^* = [R_1, X_1] \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} [R_2, X_2]^*,$$

то, вычисляя $(Q_l, N_l) = \text{ort}([R_l, X_l])$, и, учитывая унитарную инвариантность второй нормы, имеем

$$\|E\|_2 = \|N_1 \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} N_2^*\|_2,$$

где матрицы N_l – верхние треугольные порядка $2p$. Причем, формировать матрицы Q_l так же не требуются, что сокращает вычислительные затраты. Кроме того, используя этот алгоритм, мы можем с небольшими дополнительными вычислительными затратами найти и нормы невязок, поскольку $\|R_l\|_2 = \|\tilde{N}_l\|_2$, где \tilde{N}_l – главная подматрица порядка p матрицы N_l .

Отметим, что вычислять спектральный проектор, можно было бы и с помощью метода из [69]. Для этого потребовалось бы применять его дважды, последовательно вычисляя правое и левое инвариантные подпространства рассматриваемой матрицы, необходимые для нахождения соответствующего про-

ектора. Однако, такой подход не дает конкретной информации о норме соответствующего коммутатора в ходе вычислений.

3.2.1 Двусторонний метод обратных итераций

Для нахождения достаточно точного начального приближения для двустороннего метода Ньютона предлагается использовать

Алгоритм 1 (Двусторонний метод приближенных обратных итераций с тюнингом).

Задать $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$, $\eta > 0$ и сбалансированно биортогональные матрицы $X_{1,0}, X_{2,0} \in \mathbb{C}^{n \times p}$. Для $k = 0, 1, \dots$

1. Вычислить $\Lambda_k = X_{2,k}^* A X_{1,k}$ и спектральные невязки

$$R_{1,k} = A X_{1,k} - X_{1,k} \Lambda_k, \quad R_{2,k} = A^* X_{2,k} - X_{2,k} \Lambda_k^*,$$

и проверить сходимость коммутатора $E_k = R_{1,k} X_{2,k}^* - X_{1,k} R_{2,k}^*$: если $\|E_k\|_2 \leq \varepsilon$, то положить $X_{1,out} = X_{1,k}$, $X_{2,out} = X_{2,k}$ и остановиться.

2. Вычислить $(Q_k, T_k) = \text{schur}(\Lambda_k)$ и $(Q_k, T_k) = \text{reord}(Q_k, T_k, \leq)$, положить $X_{1,k} := X_{1,k} Q_k$, решить приближенно систему $A X_{1,k+1} = X_k$ относительно $X_{1,k+1}$, так что

$$\|X_{1,k} - A X_{1,k+1}\|_2 \leq \gamma_{1,k}, \quad (3.2.7)$$

где $\gamma_{1,k} = \min\{\rho, \eta \|R_{1,k}\|_2\}$

3. Вычислить $(Q_k, T_k) = \text{reord}(Q_k, T_k, \geq)$, положить $X_{2,k} := X_{2,k} Q_k$, решить приближенно систему $A^* X_{2,k+1} = X_{2,k}$ относительно $X_{2,k+1}$, так что

$$\|X_{2,k} - A^* X_{2,k+1}\|_2 \leq \gamma_{2,k}, \quad (3.2.8)$$

где $\gamma_{2,k} = \min\{\rho, \eta \|R_{2,k}\|_2\}$

4. Положить $(X_{1,k+1}, X_{2,k+1}) = \text{biort}(\text{ort}(X_{1,k+1}), \text{ort}(X_{2,k+1}))$.

На втором и третьем шагах алгоритма 1 необходимо решить две блочные системы линейных уравнений. Эти системы предлагается решать по столбцам с помощью GMRES, используя для ускорения вычислений правое предобусловливание:

$$\begin{aligned} AP_{1,k}^{-1}Z_{1,k} &= X_{1,k}, & X_{1,k+1} &= P_{1,k}^{-1}Z_{1,k}, \\ A^*P_{2,k}^{-1}Z_{2,k} &= X_{2,k}, & X_{2,k+1} &= P_{2,k}^{-1}Z_{2,k}. \end{aligned}$$

Анализ, аналогичный проведенному в [60–64], показывает, что количество итераций GMRES не будет зависеть от k , если в качестве критериев останова использовать (3.2.7), (3.2.8) и выбирать

$$P_{1,k} = P + (A - P)X_{1,k}X_{2,k}^*, \quad P_{2,k} = P^* + (A - P)^*X_{2,k}X_{1,k}^*,$$

где P – некоторое приближение (например, неполное LU-разложение [58]) матрицы A . Тюнинг заключается в малоранговой модификации основного предобусловливателя P (или P^*) на каждой внешней итерации алгоритма. В этом случае

$$(P_{1,k} - A)X_{1,k} = 0 \Rightarrow AP_{1,k}^{-1}(P_{1,k} - A)X_{1,k} = (I - AP_{1,k}^{-1})AX_{1,k} = 0,$$

и, следовательно,

$$(I - AP_{1,k}^{-1})X_{1,k} = -(I - AP_{1,k}^{-1})R_{1,k}\Lambda_{1,k}^{-1} \rightarrow 0 \quad (3.2.9)$$

при $k \rightarrow \infty$ и $R_{1,k} \rightarrow 0$. В частности это означает, что решая систему $AP_{1,k}^{-1}Z_{1,k} = X_{1,k}$ относительно $Z_{1,k}$, в качестве начального приближения разумно выбрать правую часть, т.е. матрицу $X_{1,k}$. Аналогичное утверждение справедливо и для системы $A^*P_{2,k}^{-1}Z_{2,k} = X_{2,k}$.

Основанная на разложении Шура с заданным упорядочиванием диагональных элементов формы Шура замена переменных на втором шаге алгоритма 1 аналогична преобразованию Шура-Релея-Ритца описанному в [73]. Эта замена

переменных обеспечивает сходимость $\mathcal{X}_{1,k}^{(j)}$ к $\mathcal{X}_1^{(j)}$ со скоростью $O(|\lambda_j/\lambda_{p+1}|^k)$ (см. Лемму 3.1 в [73]), где $\mathcal{X}_{1,k}^{(j)} = \text{span}(X_{1,k}^{(j)})$, матрица $X_{1,k}^{(j)}$ состоит из первых j столбцов матрицы $X_{1,k}$, а $\mathcal{X}_1^{(j)}$ – правое инвариантное подпространство, отвечающее первым j минимальным по модулю собственным значениям, $1 \leq j \leq p$. После этого преобразования уменьшается норма первых столбцов спектральной невязки $R_{1,k}$, что, учитывая (3.2.9), позволяет сократить количество итераций GMRES, необходимых для решения системы на втором шаге алгоритма. Замена переменных на третьем шаге алгоритма 1 аналогично влияет на сходимость GMRES при решении соответствующей системы.

Пусть

$$P = \Pi^{-1}LU \approx A \quad (3.2.10)$$

и является неполным LU -разложением матрицы A , где L и U соответственно нижняя и верхняя треугольные матрицы, а Π – матрица перестановок. Используя формулу Шермона-Моррисона-Вудбери [34] и тот факт, что для матрицы перестановок справедливо равенство $\Pi^* = \Pi^{-1}$, можно вывести следующие формулы, удобные для умножения на вектор предобусловливателей:

$$P_{1,k}^{-1} = U^{-1}(I + V_{1,k}W_{1,k})L^{-1}\Pi, \quad P_{2,k}^{-1} = \Pi^*L^{-*}(I + V_{2,k}W_{2,k})U^{-*}, \quad (3.2.11)$$

где

$$W_{1,k} = X_{2,k}^*U^{-1}, \quad W_{2,k} = X_{1,k}^*\Pi^*L^{-*}, \quad V_{l,k} = \tilde{V}_{l,k}(I - W_{l,k}\tilde{V}_{l,k})^{-1},$$

$$\tilde{V}_{1,k} = UX_{1,k} - L^{-1}\Pi AX_{1,k}, \quad \tilde{V}_{2,k} = L^*\Pi X_{2,k} - U^{-*}A^*X_{2,k}.$$

3.2.2 Двусторонний метод Ньютона

Пусть $X_l \in \mathbb{C}^{n \times p}$ ($l = 1, 2$) – сбалансированно биортогональные матрицы, столбцы которых образуют базисы в соответственно правом и левом приближенных инвариантных подпространствах матрицы A , достаточно близких к точным, отвечающим ее p минимальным по модулю собственным значениям,

отделенным от остальной части спектра. Тогда $\mathcal{P} = X_1 X_2^*$ – приближенный спектральный проектор и будут малы по норме коммутатор E и спектральные невязки R_1 и R_2 , определенные в (3.2.4) и (3.2.5), соответственно.

Рассмотрим матрицы

$$\tilde{X}_l = X_l - \Phi_l, \quad (3.2.12)$$

где $\Phi_l \in \mathbb{C}^{n \times p}$ ($l = 1, 2$) – решения системы уравнений

$$\begin{aligned} (I - \mathcal{P})(A\Phi_1 - \Phi_1\Lambda - R_1) &= 0, & \mathcal{P}\Phi_1 &= 0, \\ (I - \mathcal{P})^*(A^*\Phi_2 - \Phi_2\Lambda^* - R_2) &= 0, & \mathcal{P}^*\Phi_2 &= 0, \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

и проектор

$$\tilde{\mathcal{P}} = \tilde{X}_1(\tilde{X}_2^*\tilde{X}_1)^{-1}\tilde{X}_2^*.$$

Следующая теорема показывает, что формулы (3.2.12) и (3.2.13) описывают шаг ньютоновского уточнения исходных приближенных инвариантных подпространств $\text{span}(X_1)$ и $\text{span}(X_2)$.

Теорема 3.2.1. *Если $\tau = \|E\|_2$ достаточно мало, то матрица $\tilde{X}_2^*\tilde{X}_1$ невырождена и проектор $\tilde{\mathcal{P}}$ коммутирует с A с точностью τ^2 , то есть*

$$\tilde{E} = A\tilde{\mathcal{P}} - \tilde{\mathcal{P}}A = \mathcal{O}(\tau^2). \quad (3.2.14)$$

Доказательство. Действительно, p минимальных по модулю собственных значений матрицы A отделены от остальной части спектра, матрицы X_1 и X_2 сбалансировано биртогональные и подпространства $\text{span}(X_1)$ и $\text{span}(X_2)$ стремятся при $\tau \rightarrow 0$ к соответственно правому и левому инвариантным подпространствам, отвечающим этим собственным значениям. Поэтому, существует такое достаточно малое $\tau_0 > 0$, что при $0 \leq \tau < \tau_0$ уравнения (3.2.13), представляющие собой уравнения Сильвестра относительно Φ_1 и Φ_2 , однозначно разрешимы и справедливы оценки

$$\|\Phi_l\|_2 \leq c\|R_l\|_2, \quad l = 1, 2, \quad (3.2.15)$$

с некоторой константой c , зависящей только от A , p и τ_0 [35].

Так как $R_l = \mathcal{O}(\tau)$, справедливо асимптотическое равенство $\Phi_l = \mathcal{O}(\tau)$ и, следовательно,

$$\tilde{X}_2^* \tilde{X}_1 = I + \mathcal{O}(\tau^2), \quad (3.2.16)$$

т.е. матрицы \tilde{X}_1 и \tilde{X}_2 – биортогональные с точностью τ^2 . Более того, учитывая, что

$$\mathcal{P}A = A\mathcal{P} + \mathcal{O}(\tau), \quad (I - \mathcal{P})R_1 = R_1, \quad (I - \mathcal{P})^*R_2 = R_2,$$

из (3.2.13) следуют асимптотические равенства

$$R_1 = A\Phi_1 - \Phi_1\Lambda + \mathcal{O}(\tau^2), \quad R_2 = A^*\Phi_2 - \Phi_2\Lambda^* + \mathcal{O}(\tau^2).$$

Кроме того,

$$\Lambda X_2^* = X_2^* A X_1 X_2^* = X_2^* A + \mathcal{O}(\tau), \quad X_1 \Lambda = X_1 X_2^* A X_1 = A X_1 + \mathcal{O}(\tau).$$

Поэтому,

$$E = R_1 X_2^* - X_1 R_2^* = A\Phi_1 X_2^* - \Phi_1 X_2^* A - X_1 \Phi_2^* A + A X_1 \Phi_2^* + \mathcal{O}(\tau^2)$$

и, следовательно,

$$A\tilde{X}_1 \tilde{X}_2^* - \tilde{X}_1 \tilde{X}_2^* A = \mathcal{O}(\tau^2). \quad (3.2.17)$$

Из (3.2.16) и (3.2.17) следует (3.2.14). \square

Опишем теперь алгоритм решения системы уравнений (3.2.13). Пусть $\Lambda = QTQ^*$ – разложение Шура [34], где Q – унитарная, а T – верхняя треугольная матрицы. Умножив каждое из уравнений в (3.2.13) справа на матрицу Q и сделав замену переменных: $\Phi_l := \Phi_l Q$, $R_l := R_l Q$, получим систему уравнений точно такого же вида, что и (3.2.13), но с верхней треугольной матрицей T вместо Λ . Решив полученную систему относительно Φ_l , выполняем обратное преобразование: $\Phi_l := \Phi_l Q^*$.

Обозначим через Φ_{lj} и R_{lj} соответственно j -е столбцы матриц Φ_l и R_l , а через t_{ij} – (i, j) -й элемент матрицы T . В этих обозначениях система (3.2.13) с верхней треугольной матрицей T вместо Λ может быть записана в виде

$$(I - \mathcal{P})(A - t_{jj}I)\Phi_{1j} = \Omega_{1j}, \quad \mathcal{P}\Phi_{1j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p, \quad (3.2.18)$$

$$(I - \mathcal{P})^*(A - t_{jj}I)^*\Phi_{2j} = \Omega_{2j}, \quad \mathcal{P}^*\Phi_{2j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p, \quad (3.2.19)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= (I - \mathcal{P})R_{11}, & \Omega_{1j} &= (I - \mathcal{P})\left(R_{1j} + \sum_{i=1}^{j-1} t_{ij}\Phi_{1i}\right), \quad j > 1, \\ \Omega_{2p} &= (I - \mathcal{P})^*R_{2p}, & \Omega_{2j} &= (I - \mathcal{P})^*\left(R_{2j} + \sum_{i=j+1}^p \bar{t}_{ji}\Phi_{2i}\right), \quad j < p. \end{aligned}$$

Первые уравнения систем (3.2.18) и (3.2.19) будем решать используя правое предобусловливание:

$$H_l \Gamma_{lj} = \Omega_{lj}, \quad \Phi_{lj} = L_l \Gamma_{lj}, \quad (3.2.20)$$

где

$$H_1 = (I - \mathcal{P})(A - t_{jj}I)L_1, \quad H_2 = (I - \mathcal{P})^*(A - t_{jj}I)^*L_2,$$

а L_l – некоторые предобусловливающие матрицы. Применяя GMRES к (3.2.20) мы найдем приближенное решение $\hat{\Gamma}_{lj}$, удовлетворяющее неравенству

$$\left\| \Omega_{lj} - H_l \hat{\Gamma}_{lj} \right\|_2 \leq \delta \|R_l\|_2, \quad (3.2.21)$$

где δ заданная точность. Из вторых уравнений в (3.2.18) и (3.2.19) следует, что матрицы L_1 и L_2 должны удовлетворять равенствам

$$L_1 = (I - \mathcal{P})L_1, \quad L_2 = (I - \mathcal{P})^*L_2.$$

С другой стороны, на каждом шаге GMRES, поправка к начальному значению принадлежит крыловскому подпространству, сгенерированному матрицей H_l , которая при $l = 1$ удовлетворяет равенству $H_1 = (I - \mathcal{P})H_1$, а при $l = 2$ – равенству $H_2 = (I - \mathcal{P})^*H_2$, и начальной невязкой $r_l^0 = \Omega_{lj} - H_l \hat{\Gamma}_{lj}^0$, которая

при $l = 1$ удовлетворяет равенству $r_1^0 = (I - \mathcal{P})r_1^0$, а при $l = 2$ – равенству $r_2^0 = (I - \mathcal{P})^*r_2^0$. Это означает, что поправка при $l = 1$ принадлежит подпространству $(I - \mathcal{P})\mathbb{C}^n$, а при $l = 2$ – подпространству $(I - \mathcal{P})^*\mathbb{C}^n$. Следовательно, результат не изменится (в точной арифметике), если мы будем использовать матрицу $L_1(I - \mathcal{P})$ вместо L_1 и матрицу $L_2(I - \mathcal{P})^*$ вместо L_2 . Таким образом, наиболее общий вид предобуславливающих матриц L_1 и L_2 – это

$$L_1 = (I - \mathcal{P})\tilde{L}_1(I - \mathcal{P}), \quad L_2 = (I - \mathcal{P})^*\tilde{L}_2(I - \mathcal{P})^*,$$

где \tilde{L}_l – некоторые $n \times n$ матрицы, и проблема выбора предобуславливающих матриц L_l сводится к выбору матриц \tilde{L}_l . В описанных в следующем разделе численных экспериментах мы использовали $\tilde{L}_1 = P^{-1}$ и $\tilde{L}_2 = P^{-*}$, где P – неполное LU-разложение (3.2.10) матрицы A , т.е.

$$L_1 = (I - \mathcal{P})U^{-1}L^{-1}\Pi(I - \mathcal{P}), \quad L_2 = L_1^*. \quad (3.2.22)$$

Приведем формальное описание предлагаемого метода Ньютона в целом.

Алгоритм 2 (Двусторонний метод Ньютона).

Задать $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и сбалансированно биортогональные матрицы $X_{1,0}, X_{2,0} \in \mathbb{C}^{n \times p}$. Для $k = 0, 1, \dots$

*1. Вычислить $\Lambda_k = X_{2,k}^*AX_{1,k}$ и спектральные невязки*

$$R_{1,k} = AX_{1,k} - X_{1,k}\Lambda_k, \quad R_{2,k} = A^*X_{2,k} - X_{2,k}\Lambda_k^*,$$

и проверить сходимость коммутатора $E_k = R_{1,k}X_{2,k}^ - X_{1,k}R_{2,k}^*$: если $\|E_k\|_2 \leq \varepsilon$, то положить $X_{1,out} = X_{1,k}$, $X_{2,out} = X_{2,k}$ и остановиться.*

2. Вычислить $(Q_k, T_k) = \text{schur}(\Lambda_k)$ и $(Q_k, T_k) = \text{reord}(Q_k, T_k, \leq)$, положить $R_{1,k} := R_{1,k}Q_k$, решить приближенно систему

$$(I - \mathcal{P}_k)(A\Phi_{1,k} - \Phi_{1,k}T_k) = (I - \mathcal{P}_k)R_{1,k}, \quad \mathcal{P}_k\Phi_{1,k} = 0,$$

как это описано в разделе 3.2.2, с $\mathcal{P}_k = X_{1,k}X_{2,k}^$ относительно $\Phi_{1,k}$ и положить $\Phi_{1,k} := \Phi_{1,k}Q_k^*$.*

3. Вычислить $(Q_k, T_k) = \text{reord}(Q_k, T_k, \geq)$, положить $R_{2,k} := R_{2,k}Q_k$, решить приближенно систему

$$(I - \mathcal{P}_k)^*(A^*\Phi_{2,k} - \Phi_{2,k}T_k^*) = (I - \mathcal{P}_k)^*R_{2,k}, \quad \mathcal{P}_k^*\Phi_{2,k} = 0,$$

как это описано в разделе 3.2.2, с $\mathcal{P}_k = X_{1,k}X_{2,k}^*$ относительно $\Phi_{2,k}$ и положить $\Phi_{2,k} := \Phi_{2,k}Q_k^*$.

4. Выполнить ньютоновский шаг и сбалансированную биортогонализацию:

$$(X_{1,k+1}, X_{2,k+1}) = \text{biort}(\text{ort}(X_{1,k} - \Phi_{1,k}), \text{ort}(X_{2,k} - \Phi_{2,k})).$$

Поскольку начальное приближение для двустороннего метода Ньютона получено после нескольких шагов алгоритма 1, замена переменных, основанная на разложении Шура с переупорядочиванием диагональных элементов формы Шура, на втором шаге алгоритма 2 уменьшает норму первых столбцов матрицы $R_{1,k}$ при $k = 0$ (см. обсуждение после алгоритма 1), а, следовательно, и на каждой следующей итерации. Аналогичное утверждение справедливо и для третьего шага 2. Таким образом, правильное переупорядочивание диагональных элементов формы Шура на втором и третьем шагах алгоритма 2 сокращают суммарное количество итераций GMRES, необходимых для решения уравнений Сильвестра.

3.2.3 Численные эксперименты

В качестве тестовой задачи рассматривался эллиптический оператор

$$\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial y}v + \mu\Delta \tag{3.2.23}$$

в области $(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1)$ с граничными условиями типа Дирихле, где Δ – двумерный оператор Лапласа, $\mu = 5 \times 10^{-4}$, а

$$u = \frac{\partial}{\partial y}\varphi, \quad v = -\frac{\partial}{\partial x}\varphi, \quad \varphi(x, y) = \frac{1}{4\pi} \cos(2\pi x^2) \cos(2\pi y^2). \tag{3.2.24}$$

Аппроксимация выполнялась методом центральных разностей второго порядка точности на равномерных сетках с одинаковым числом внутренних узлов $m = 200, 300$ или 400 по каждому направлению. После аппроксимации при каждом m получалась матрица A порядка $n = m^2$, являющаяся дискретным аналогом оператора (3.2.23), для которой вычислялся спектральный проектор \mathcal{P} на ее правое инвариантное подпространство, отвечающее $p = 8$ минимальным по модулю собственным значениям. Матрицы $X_{1,0}$ и $X_{2,0}$ для алгоритма 2 вычислялись алгоритмом 1, стартовавшим со случайного, но фиксированного для каждого m подпространства размерности 8.

Блочные линейные системы в алгоритмах 1 и 2 решались приближенно с помощью GMRES с правым предобусловливанием. В предобусловливателях (3.2.11) и (3.2.22) использовалось неполное LU -разложение с параметром отсечения, равным 10^{-3} . Соответствующие количества ненулевых элементов в треугольных факторах L, U и матрице A в зависимости от m указаны в таблице 3.1. Максимальная размерность крыловского подпространства во всех экспериментах полагалась равной 50. В алгоритме 1 для критериев останова (3.2.7), (3.2.8) параметры ρ и η всегда выбирались равными 10^{-4} и 10^{-2} , соответственно. Для алгоритма 2 в критерии останова (3.2.21) использовались $\delta = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$ или 10^{-4} . В качестве стартовых векторов для GMRES в алгоритме 1 выбирались столбцы матриц $X_{l,k}$, а в алгоритме 2 – нулевые векторы. Итерации GMRES останавливались либо при выполнении соответствующего критерия останова, либо при достижении максимальной размерности Крыловского подпространства. В последнем случае предусматривался рестарт. Эксперименты показали, что количество итераций GMRES, необходимое для решения систем, не превышало 33, то есть выполнять рестарты в ходе вычислений не потребовалось. Во всех численных экспериментах уточнение приближенного спектрального проектора прекращалось, когда норма коммутатора становилась меньше $\varepsilon = 10^{-10}$.

Таблица 3.1: Количество nnz ненулевых элементов в матрицах A , L и U .

m	$nnz(A)$	$nnz(L)$	$nnz(U)$
200	199200	660885	655287
300	448800	1488521	1470368
400	798400	2467964	2437090

В таблице 3.2 демонстрируются вычислительные затраты комбинации алгоритмов 1 и 2 при $\delta = 10^{-4}$. Для различных m и ε_{SI} показано количество k_{SI} итераций алгоритма 1, необходимых для получения начальных матриц $X_{l,0}$ для алгоритма 2, для которых $\|E_0\|_2 \leq \varepsilon_{SI}$, количество k_{NM} итераций алгоритма 2, и суммарные количества S_{SI} и S_{NM} итераций GMRES (решений систем с предобусловливателем P и вектором-столбцом в правой части), которые были выполнены в алгоритмах 1 и 2, соответственно, и $S_T = S_{SI} + S_{NM}$. Из этой таблицы видно, что хотя при более точном начальном приближении метод Ньютона сходится за меньшее количество итераций k_{NM} , вычислительные затраты при поиске этого приближения оказываются слишком большими, что в итоге приводит к росту общего числа S_T итераций GMRES. Таким образом, нет необходимости искать начальное приближение с высокой точностью. Выбор $\varepsilon_{SI} = 10^{-1}$ является оптимальным с точки зрения вычислительных затрат.

Таблица 3.2: Вычислительные затраты комбинации алгоритмов 1 и 2 при $\delta = 10^{-4}$.

m	ε_{SI}	k_{SI}	$\ E_0\ _2$	S_{SI}	k_{NM}	$\ E_k\ _2$	S_{NM}	S_T
200	10^{-1}	50	9.20×10^{-2}	3890	4	2.28×10^{-12}	540	4430
	10^{-2}	112	9.87×10^{-3}	7616	3	1.98×10^{-12}	429	8045
	10^{-3}	149	9.55×10^{-4}	9604	2	7.29×10^{-12}	226	9830
300	10^{-1}	33	9.56×10^{-2}	3484	4	9.30×10^{-12}	692	4176
	10^{-2}	105	9.85×10^{-3}	8174	3	6.08×10^{-12}	561	8735
	10^{-3}	138	9.99×10^{-4}	10164	2	1.37×10^{-11}	302	10466
400	10^{-1}	59	9.92×10^{-2}	6219	3	5.26×10^{-11}	624	6843
	10^{-2}	97	9.22×10^{-3}	9001	3	3.37×10^{-11}	693	9694
	10^{-3}	168	9.63×10^{-4}	13699	2	3.83×10^{-11}	369	14068

Отметим, что как в алгоритме 1, так и в алгоритме 2, в критериях останова GMRES вместо норм невязок можно использовать норму коммутатора. Соответствующий дополнительный численный эксперимент дал почти те же результаты, что и приведенные в таблице 3.2.

На рис. 3.1 сравнивается скорость сходимости комбинации алгоритмов 1 (красный пунктир) и 2 (красная сплошная линия) с $\varepsilon_{SI} = 10^{-1}$ и $\delta = 10^{-4}$ со скоростью сходимости алгоритма 1 в чистом виде (пунктирная синяя линия, начальная часть которой совпадает с пунктирной красной). Видно, что вычисление спектрального проектора с помощью комбинации алгоритмов 1 и 2 дает существенное ускорение по сравнению с использованием только алгоритма 1.

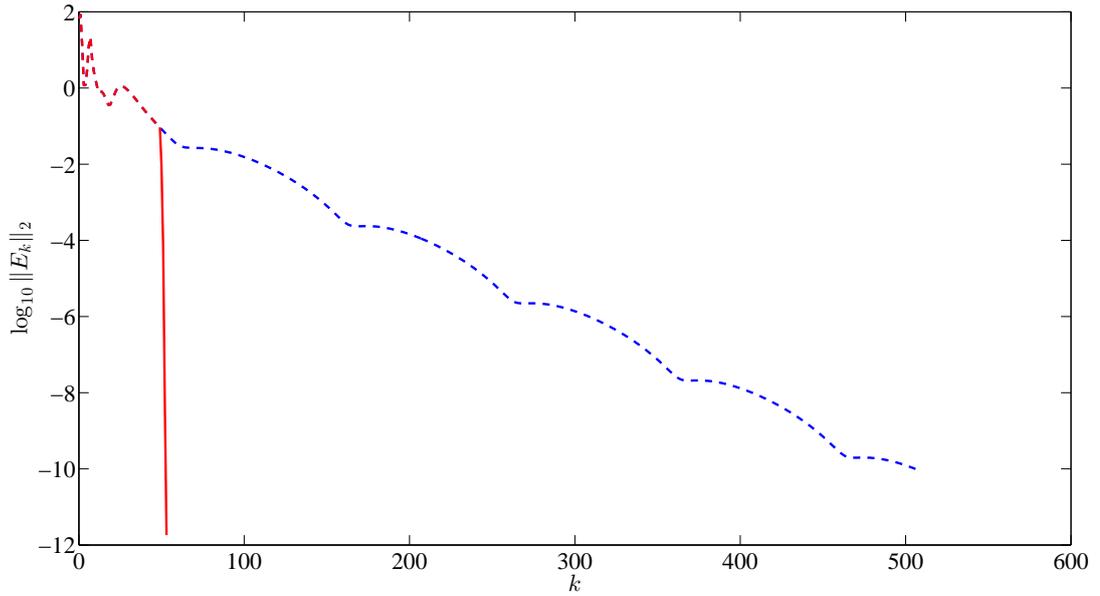


Рисунок 3.1: Зависимость нормы коммутатора E_k от номера итерации k при $m = 200$, $\varepsilon_{SI} = 10^{-1}$ и $\delta = 10^{-4}$. Алгоритм 1 – пунктир, алгоритм 2 – сплошная линия.

В следующем эксперименте была исследована сходимость алгоритма 2 при $m = 300$ и различных значениях ε_{SI} и δ . На рис.3.2 изображена соответствующая зависимость нормы коммутатора E_k от номера k . Видно, что скорость сходимости алгоритма 2 уменьшается с квадратичной (при $\delta = 10^{-4}$) до линейной (при $\delta = 10^{-1}$) с ростом δ .

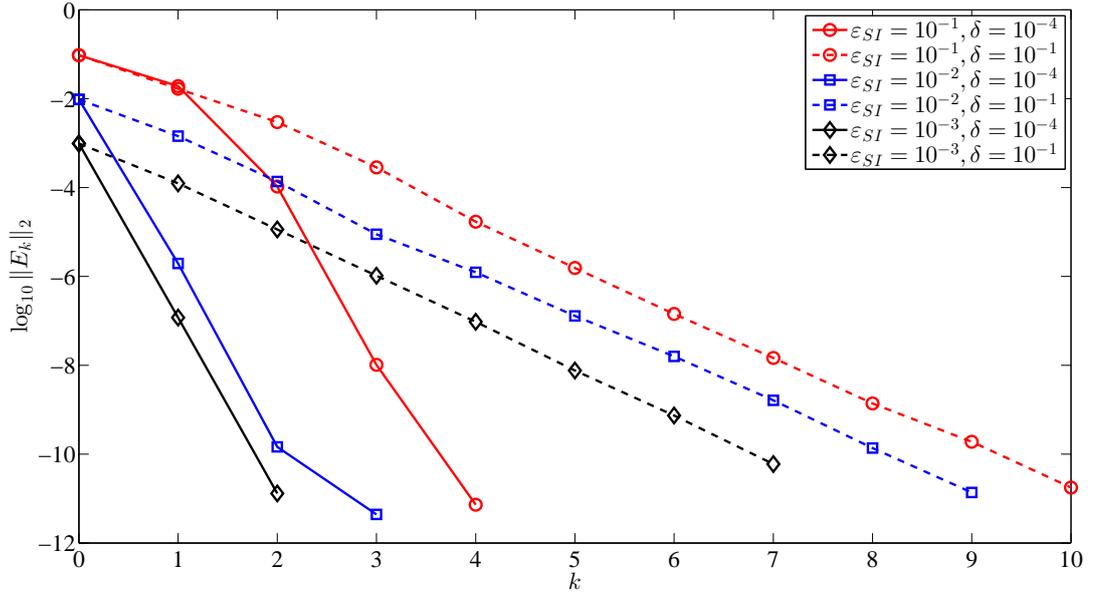


Рисунок 3.2: Зависимость нормы коммутатора E_k от k для алгоритма 2 при $m = 300$ и различных ϵ_{SI} и δ .

Вычислительные затраты алгоритма 2 при различных значениях ϵ_{SI} и δ представлены в таблице 3.3. Среднее количество итераций GMRES, необходимое для решения одного из уравнений (3.2.18) или (3.2.19), равно $S_{NM}/(2pk_{NM})$, почти одинаково для различных ϵ_{SI} и фиксированного δ и слабо растет с уменьшением δ . Максимальное количество l_{max} итераций GMRES на каждом шаге алгоритма 2 имеет ту же зависимость от этих параметров. Приведенные в этой таблице результаты подтверждают сделанное выше заключение о том, что нет необходимости вычислять начальное приближение для алгоритма 2 с высокой точностью. Напротив, уравнения Сильвестра необходимо решать достаточно точно не только для квадратичной сходимости предложенного метода Ньютона, но и для сокращения общих вычислительных затрат. Наименьшее количество итераций GMRES $S_T = 4176$ было получено при $\epsilon_{SI} = 10^{-1}$ и $\delta = 10^{-4}$.

Из таблицы 3.3 так же видно, что при всех рассмотренных значениях δ , величина $S_{NM}/(2pk_{NM})$ и максимальное количество l_{max} итераций GMRES при решении одного уравнения Сильвестра почти не зависели от ϵ_{SI} . Из это-

го можно сделать вывод, что при фиксированном δ вычислительные затраты одного шага алгоритма 2 не возрастают по мере его сходимости.

Таблица 3.3: Вычислительные затраты алгоритма 2 при $m = 300$.

	$\varepsilon_{SI} = 10^{-1}$			$\varepsilon_{SI} = 10^{-2}$			$\varepsilon_{SI} = 10^{-3}$					
δ	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
k_{NM}	10	6	5	4	8	4	3	3	8	4	3	2
S_{NM}	1074	830	814	692	800	490	451	561	807	498	451	302
S_T	4558	4314	4298	4176	8974	8664	8625	8735	10971	10662	10615	10466
$S_{NM}/(2pk_{NM}) \approx$	7	9	10	11	7	8	10	12	7	8	10	10
l_{\max}	18	21	24	26	18	21	24	27	18	22	24	26

3.2.4 Выводы

В разделе 3.2 описан и обоснован эффективный двусторонний метод Ньютона (алгоритм 2) для вычисления спектрального проектора, отвечающего изолированному подмножеству собственных значений большой разреженной матрицы. В качестве начального приближения для этого метода используются приближенные правое и левое инвариантные подпространства, найденные с помощью нескольких шагов двустороннего метода приближенных обратных итераций с тюнингом (алгоритм 1). В двустороннем методе Ньютона на каждой внешней итерации необходимо решать уравнения Сильвестра, для чего предложено использовать специальный алгоритм, основанный на разложении Шура и GMRES с предобуславливанием. Приведенные результаты численных экспериментов позволяют сделать следующие выводы:

- если имеется хорошее начальное приближение и уравнения Сильвестра решаются достаточно точно, то двусторонний метод Ньютона сходится квадратично;
- нет смысла вычислять начальное приближение со слишком высокой точностью, т.к. это приводит к сильному увеличению вычислительных затрат при его нахождении и, как следствие, к значительному росту суммарных вычислительных затрат;
- при наличии достаточно хорошего начального приближения вычислительные затраты одного шага предложенного двустороннего метода Ньютона не возрастают по мере его сходимости.

3.3 Метод Ньютона для решения частичной обобщенной проблемы собственных значений

Данный раздел посвящен вычислению понижающего подпространства $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^n$, отвечающего изолированному подмножеству p конечных собственных значений регулярного матричного пучка вида $A - \lambda B$ с большими разреженными матрицами A и $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, где B может быть вырожденной. Регулярность пучка означает, что существует по крайней мере одно λ_0 такое, что $\det(A - \lambda_0 B) \neq 0$. Конечные собственные значения пучка есть решения уравнения $\det(A - \lambda B) = 0$. Без потери общности, мы предполагаем, что матрица A невырожденная и искомое понижающее подпространство отвечает p конечным минимальным по модулю собственным значениям, так как иначе можно заменить A на $A - \sigma B$, где σ – точка вблизи p рассматриваемых собственных значений такая, что матрица $A - \sigma B$ невырождена. В этом случае имеем

$$\mathcal{Y} = A\mathcal{X} = B\mathcal{X}, \quad (3.3.1)$$

где \mathcal{X} и \mathcal{Y} – инвариантные подпространства матриц $A^{-1}B$ и BA^{-1} , соответственно, отвечающие их p максимальным по модулю собственным значениям.

Если столбцы матрицы $X \in \mathbb{C}^{n \times p}$ образуют базис в искомом понижающем подпространстве, то есть $\mathcal{X} = \text{span}(X)$, то справедливо следующее равенство:

$$AX = BX\Lambda \quad (3.3.2)$$

с невырожденной матрицей $\Lambda \in \mathbb{C}^{p \times p}$, спектр которой состоит из p искомым собственных значений. Учитывая (3.3.1), имеем

$$\Lambda = (X^* A^* BX)^{-1} (X^* A^* AX) = (X^* B^* BX)^{-1} (X^* B^* AX).$$

Метод Ньютона, предложенный в работах автора [28, 31] и описываемый в этом разделе, может рассматриваться как обобщение метода Ньютона, предложенного в [65, 69], на случай частичной обобщенной проблемы собственных

значений (3.3.2). В разделе 3.3.1 описан метод приближенных обратных итераций с тюнингом. Полученное с помощью него приближенное понижающее подпространство используется как начальное приближение для метода Ньютона. Раздел 3.3.2 посвящен описанию и обоснованию метода Ньютона. Этот метод на каждой итерации требует решения обобщенного уравнения Сильвестра, для чего разработан итерационный алгоритм на основе разложения Шура и GMRES с предобуславливанием, описанный в разделе 3.3.3.

Суммируя представленные в разделах 3.3.2 и 3.3.3 результаты, в разделе 3.3.4 дается полное описание метода Ньютона для вычисления понижающего подпространства, отвечающего изолированному подмножеству из p конечных собственных значений. Этот алгоритм применим, в частности, к частичным обобщенным проблемам собственных значений, возникающим при численном анализе гидродинамической устойчивости.

В разделе 3.3.5 кратко описывается проблема собственных значений для системы дифференциальных уравнений в частных производных, возникающей при анализе устойчивости течения Пуазейля в канале постоянного прямоугольного сечения. Эта задача подробно обсуждалась в главе 2, где пространственная аппроксимация выполнялась методом коллокаций. Это привело к обобщенной проблеме собственных значений с плотными матрицами не очень большого порядка. Для сокращения вычислительных затрат к полученной обобщенной проблеме применялась алгебраическая редукция, сводящая ее к обычной проблеме собственных значений с плотной матрицей вдвое меньшего порядка. Далее с помощью QR-алгоритма [34], вычислялись все собственные значения этой матрицы и выбирали те, что имели максимальную мнимую часть. Такой подход позволяет быть уверенным в том, что выбраны именно требуемые собственные значения.

В разделе 3.3.6 мы рассматриваем ту же систему дифференциальных уравнений, но используем конечно-разностную аппроксимацию второго порядка на равномерных разнесенных сетках типа C [70]. Эта аппроксимация значи-

тельно менее точная, чем метод коллокаций (даже при использовании в четверо большего количества узлов в каждом направлении, чем при аппроксимации методом коллокаций, мы получали менее точные требуемые собственные значения [24]) и приводит к частичной обобщенной проблеме собственных значений с большими разреженными матрицами, которая используется в качестве тестовой для предложенного метода Ньютона. Так как этот метод вычисляет только часть собственных значений, мы используем собственные значения, полученные с помощью метода коллокаций и QR-алгоритма, чтобы продемонстрировать, что найдены именно те собственные значения, которые требуются.

3.3.1 Приближенные обратные итерации

Приближенные обратные итерации с тюнингом применяются к (3.3.2) для нахождения хорошего начального приближения для метода Ньютона. Ниже приведено формальное описание алгоритма.

Алгоритм 3 (Приближенные обратные итерации с тюнингом).

Задать $\varepsilon > 0$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ и $X_0 \in \mathbb{C}^{n \times p}$ такую, что $X_0^* X_0 = I$,

Для $k = 0, 1, \dots$

1. Вычислить $Y_k = AX_k$, $W_k = \text{ort}(BX_k)$ и $L_k = W_k^* Y_k$,

2. Положить $R_k = Y_k - W_k L_k$ и проверить сходимость:

если $\|R_k\|_2 \leq \varepsilon$, то положить $X_{out} = X_k$ и выйти.

3. Решить относительно X_{k+1} систему $AX_{k+1} = BX_k$ приближенно, так что

$$\|BX_k - AX_{k+1}\|_2 \leq \rho_k = \min\{\delta_1, \delta_2 \|R_k\|_2\}. \quad (3.3.3)$$

4. Положить $X_{k+1} := \text{ort}(X_{k+1})$.

Отметим, что начальная матрица X_0 должна быть такой, чтобы максимальный угол (см., например, [34]) между подпространством $\text{span}(X_0)$ и инвариантным подпространством матрицы $(A^{-1}B)^*$, отвечающим ее p максимальным по модулю собственным значениям, не был равен $\pi/2$. Если нет никакой априорной информации о искомом понижающем подпространстве, то X_0 может быть выбрана произвольной.

По мере выполнения итераций алгоритма 3, $\text{span}(X_k)$ будет стремиться к понижающему подпространству, отвечающему минимальным по модулю собственным значениям пучка $A - \lambda B$. Соответствующие собственные значения могут быть найдены как спектр $p \times p$ матрицы $\Lambda_k = (W_k^* B X_k)^{-1} L_k$.

На каждой итерации k алгоритма 3 на третьем шаге необходимо решать относительно X_{k+1} блочную линейную систему. Её предлагается решать по столбцам с помощью GMRES с правым предобуславливанием

$$AP_k^{-1}Z_k = BX_k, \quad X_{k+1} = P_k^{-1}Z_k,$$

где P_k некоторое приближение матрицы A . Анализ, аналогичный [60–64], показал, что количество итераций предобусловленного GMRES не зависит от k , если в качестве критерия останова выбран (3.3.3) и

$$P_k = P + (A - P) X_k X_k^*, \quad (3.3.4)$$

где P – приближение A (например, неполное LU-разложение [58]). В этом случае

$$(P_k - A)X_k = 0 \Rightarrow AP_k^{-1}(P_k - A)X_k = (I - AP_k^{-1})AX_k = 0,$$

и, учитывая равенство $AX_k = BX_k\Lambda_k + R_k$, мы можем заключить (асимптотически, рассматривая алгоритм 3 с $\varepsilon = 0$ и, предполагая, что $\text{span}(X_k) \rightarrow \mathcal{X}$), что

$$(I - AP_k^{-1})BX_k = -(I - AP_k^{-1})R_k\Lambda_k^{-1} \rightarrow 0$$

при $k \rightarrow \infty$ и $R_k \rightarrow 0$ (так как X_k имеют ортонормированные столбцы, норма матриц Λ_k^{-1} ограничена при $\text{span}(X_k) \rightarrow \mathcal{X}$). В частности, это означает, что,

решая систему $AP_k^{-1}Z_k = BX_k$ относительно Z_k по столбцам с помощью GMRES, в качестве начального приближения разумно брать столбцы BX_k .

Матрицу P_k^{-1} будем искать таким же образом, как это делали в конце раздела (3.2.1). Выбирая в качестве P неполное LU -разложение матрицы A (см. формулу (3.2.10)), и, применяя формулу Шермона-Моррисона-Вудбери [34] к (3.3.4), получим

$$P_k^{-1} = U^{-1}(I + V_k W_k)L^{-1}\Pi, \quad (3.3.5)$$

где $W_k = X_k^* U^{-1}$, $V_k = \tilde{V}_k(I - W_k \tilde{V}_k)^{-1}$ и $\tilde{V}_k = U X_k - L^{-1}\Pi A X_k$.

3.3.2 Метод Ньютона

Опишем теперь метод Ньютона для вычисления понижающего подпространства \mathcal{X} , отвечающего изолированному подмножеству p конечных минимальных по модулю собственных значений. Как уже упоминалось во введении, без потери общности мы полагаем, что A невырожденная и, следовательно, справедливо (3.3.1).

Пусть столбцы матрицы $X \in \mathbb{C}^{n \times p}$ образуют A^*A -ортонормированный базис в подпространстве \mathcal{X} , то есть, $\mathcal{X} = \text{span}(X)$, $X^*A^*AX = I_p$. Тогда X удовлетворяет (3.3.2) с $\Lambda = (X^*A^*BX)^{-1}$, и спектр Λ состоит из p искомым собственных значений. В этом случае уравнение (3.3.2) может быть записано в виде

$$Y - MY(Y^*MY)^{-1} = 0, \quad Y^*Y = I_p, \quad (3.3.6)$$

где $M = BA^{-1}$ и $Y = AX$. Столбцы Y образуют ортонормированный базис в подпространстве \mathcal{Y} , инвариантном для матрицы M и отвечающим ее p максимальным по модулю собственным значениям. Для решения нелинейного уравнения (3.3.6), мы будем использовать следующий вариант метода Ньютона, предложенного и обоснованного в [65].

Для $k = 0, 1, \dots$, вычислить

$$C_k = (Y_k^* M Y_k)^{-1}, \quad \Delta_k = Y_k - M Y_k C_k, \quad (3.3.7)$$

решить уравнение Сильвестра относительно Ψ_k

$$\Psi_k - (I - Y_k Y_k^*) M \Psi_k C_k = \Delta_k \quad (3.3.8)$$

и положить

$$Y_{k+1} = \text{ort}(Y_k - \Psi_k). \quad (3.3.9)$$

Обозначим через $\tan \angle(\mathcal{Z}, \mathcal{Y})$ тангенс максимального угла между подпространствами \mathcal{Z} и \mathcal{Y} (смотри, например, [34]). Следующая теорема гарантирует квадратичную сходимость приближенного инвариантного подпространства $\mathcal{Y}_k = \text{span}(Y_k)$ к точному инвариантному подпространству \mathcal{Y} матрицы M .

Теорема 3.3.1. *Если \mathcal{Y}_0 достаточно близко к \mathcal{Y} , тогда для любого $k = 0, 1, \dots$ имеем*

$$\tan \angle(\mathcal{Y}_{k+1}, \mathcal{Y}) \leq c \tan^2 \angle(\mathcal{Y}_k, \mathcal{Y}), \quad (3.3.10)$$

где c положительная константа, зависящая только от матрицы M и инвариантного подпространства \mathcal{Y} .

Эта теорема была доказана в [65] для случая, когда искомые собственные значения находятся вне заданного круга, отделяющего их от остальной части спектра, граница которого не проходит через точки спектра, а в работе [69] – для общего случая.

Используя обозначения $\Phi_k = A^{-1} \Psi_k$ и $X_k = A^{-1} Y_k$, из (3.3.7), (3.3.8) и (3.3.9) можно записать следующую схему, где два подпространства \mathcal{Y}_k и $\mathcal{X}_k = \text{span}(X_k)$ итерированы одновременно и сходятся, соответственно, к \mathcal{Y} и \mathcal{X} .

Возьмем матрицу $X_0 \in \mathbb{C}^{n \times p}$ с A^* -ортономированными столбцами такими, что $X_0^* A^* B X_0$ – невырожденная и положим $Y_0 = A X_0$ (тогда $Y_0^* Y_0 = I_p$). Для $k = 0, 1, \dots$ вычислим

$$C_k = (Y_k^* B X_k)^{-1}, \quad \Delta_k = Y_k - B X_k C_k, \quad (3.3.11)$$

решим обобщенное уравнение Сильвестра

$$A\Phi_k - (I - Y_k Y_k^*) B \Phi_k C_k = \Delta_k, \quad (3.3.12)$$

относительно Φ_k и положим

$$\tilde{X}_{k+1} = X_k - \Phi_k. \quad (3.3.13)$$

Затем вычислим QR -разложение $A\tilde{X}_{k+1} = Y_{k+1} S_{k+1}$, где $Y_{k+1}^* Y_{k+1} = I_p$, и положим $X_{k+1} := \tilde{X}_{k+1} S_{k+1}^{-1}$.

Из (3.3.11) и (3.3.12) видно, что $Y_k^* \Delta_k = 0$ и $Y_k^* A \Phi_k = 0$, следовательно уравнение (3.3.12) может быть записано в виде

$$(I - Y_k Y_k^*) (A \Phi_k - B \Phi_k C_k) = (I - Y_k Y_k^*) \Delta_k, \quad Z_k^* \Phi_k = 0, \quad (3.3.14)$$

где $Z_k = \text{ort}(A^* Y_k)$.

3.3.3 Решение обобщенного уравнения Сильвестра

Используя разложение Шура [34]

$$Y_k^* B X_k = Q_k T_k Q_k^*, \quad (3.3.15)$$

где Q_k унитарная, а T_k верхняя треугольная матрицы, и, сделав замену переменных $C_k = T_k^{-1}$, $\Phi_k := \Phi_k Q_k$ и $\Delta_k := \Delta_k Q_k$, и, обозначив через Φ_{kj} и Δ_{kj} j -е столбцы матриц Φ_k и Δ_k , соответственно, а через $c_{ij}^{(k)}$ — (i, j) -й элемент верхней треугольной матрицы C_k , система (3.3.14) может быть записана в виде

$$(I - Y_k Y_k^*) \left(A - c_{jj}^{(k)} B \right) \Phi_{kj} = \Omega_{kj}, \quad Z_k^* \Phi_{kj} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p, \quad (3.3.16)$$

где

$$\Omega_{k1} = (I - Y_k Y_k^*) \Delta_{k1}, \quad \Omega_{kj} = (I - Y_k Y_k^*) \left(\Delta_{kj} + \sum_{i=1}^{j-1} c_{ij}^{(k)} B \Phi_{ki} \right), \quad j > 1.$$

Каждая система в (3.3.16) может быть решена с использованием правого преобусловливателя:

$$H_k \Gamma_{kj} = \Omega_{kj}, \quad \Phi_{kj} = L_k \Gamma_{kj}, \quad (3.3.17)$$

где

$$H_k = (I - Y_k Y_k^*) \left(A - c_{jj}^{(k)} B \right) L_k, \quad (3.3.18)$$

а L_k преобусловливатель. Применяя GMRES к преобусловленной системе, мы найдем приближенное решение $\hat{\Gamma}_{kj}$, удовлетворяющее

$$\left\| \Omega_{kj} - H_k \hat{\Gamma}_{kj} \right\|_2 \leq \delta \|\Delta_k\|_2, \quad (3.3.19)$$

где δ – заданная точность. Из вторых уравнений (3.3.16) и (3.3.17) видно, что матрица L_k должна удовлетворять равенству $L_k = (I - Z_k Z_k^*) L_k$. С другой стороны, на каждом шаге GMRES приближенное решение принадлежит подпространству Крылова, сгенерированному матрицей H_k , которая удовлетворяет равенству $H_k = (I - Y_k Y_k^*) H_k$, и начальной невязкой $r^0 = \Omega_{kj} - H_k \hat{\Gamma}_{kj}^0$, удовлетворяющей равенству $r^0 = (I - Y_k Y_k^*) r^0$. Это означает, что приближенное решение принадлежит ортогональному дополнению \mathcal{Y}_k^\perp подпространства \mathcal{Y}_k и, следовательно, результат не изменится (в точной арифметике), если мы будем использовать матрицу $L_k (I - Y_k Y_k^*)$ вместо L_k . Таким образом, наиболее общая форма преобусловливающей матрицы L_k – это

$$L_k = (I - Z_k Z_k^*) \tilde{L}_k (I - Y_k Y_k^*), \quad (3.3.20)$$

где \tilde{L}_k – некоторая $n \times n$ матрица, и проблема выбора преобусловливающей матрицы L_k сводится к выбору \tilde{L}_k . В численных экспериментах мы будем использовать $\tilde{L}_k = P^{-1}$, где P – неполное LU -разложение матрицы A .

3.3.4 Приближенный метод Ньютона

Суммируя описанные в разделах 3.3.2 и 3.3.3 результаты, получим следующий алгоритм. Стартуя с матрицы X_0 , полученной с помощью нескольких итераций алгоритма 3, на k -й итерации вычисляются X_k , $Y_k = A X_k$,

$W_k = \text{ort}(BX_k)$ и норма невязки $R_k = Y_k - W_k(W_k^*Y_k)$. Проверяется сходимость аналогично шагу 2 в алгоритме 3. Если сходимость не достигнута, то с помощью QR-разложения выполняется ортонормировка столбцов матрицы Y_k и соответствующая перенормировка столбцов матрицы X_k , делающая их A^*A -ортонормированными, затем решается обобщенное уравнение Сильвестра (3.3.14), как показано в разделе 3.3.3.

Алгоритм 4 (Приближенный метод Ньютона).

Задать $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и $X_0 \in \mathbb{C}^{n \times p}$ такую, что $X_0^*X_0 = I$,

вычислить $Y_0 = AX_0$, $U_0 = BX_0$, $W_0 = \text{ort}(U_0)$,

Для $k = 0, 1, \dots$

1. Вычислить $R_k = Y_k - W_k(W_k^*Y_k)$,

Проверить сходимость: если $\|R_k\|_2 \leq \varepsilon$, то выйти.

2. Вычислить $(V_k, S_k) = \text{ort}(Y_k)$ и положить $X_k := X_k S_k^{-1}$, $Y_k := V_k$.

3. Вычислить $(Q_k, T_k) = \text{schur}(Y_k^*U_k)$, $(Q_k, T_k) = \text{reord}(Q_k, T_k, \geq)$
и положить $C_k = T_k^{-1}$.

4. Положить $U_k := U_k Q_k$, $Y_k := Y_k Q_k$.

5. Вычислить $\Delta_k = Y_k - U_k C_k$ и $Z_k = \text{ort}(A^*Y_k)$.

6. Решить относительно Φ_k приближенно систему (3.3.16), как описано в разделе 3.3.3.

7. Вычислить $X_{k+1} = \text{ort}(X_k - \Phi_k)$, $Y_{k+1} = AX_{k+1}$,

$U_{k+1} = BX_{k+1}$, и $W_{k+1} = \text{ort}(U_{k+1})$.

Для наибольшей эффективности алгоритма 4, диагональные элементы формы Шура T_k , вычисленной на третьем шаге алгоритма, должны быть упорядочены в порядке невозрастания их абсолютных величин.

Если обобщенное уравнение Сильвестра (3.3.14) решается согласно (3.3.16), (3.3.17), (3.3.18) и (3.3.20) и точность δ в (3.3.19) достаточно мала, то алгоритм 4 демонстрирует квадратичную сходимость, если начальное подпространство $\text{span}(X_0)$, полученное после нескольких итераций алгоритма 3 достаточно близко к искомому понижающему подпространству \mathcal{X} . При увеличении δ , обобщенное уравнение Сильвестра решается менее точно и в этом случае алгоритм 4 сходится линейно. Этот факт будет проиллюстрирован в разделе 3.3.6.

3.3.5 Тестовая задача

В этом разделе мы кратко опишем типичную задачу гидродинамической устойчивости, которая подробно обсуждалась в предыдущей главе и которую мы будем использовать в качестве тестовой для численных экспериментов с предложенными алгоритмами 3 и 4.

Рассмотрим в нормированных переменных стационарное ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости с вектором скорости $(U(y, z), 0, 0)$ и постоянным градиентом давления $(-\tau, 0, 0)$ с $\tau > 0$ в трехмерном бесконечном канале $\{-\infty < x < \infty\} \times \Sigma$ постоянного поперечного сечения

$$\Sigma = \{(y, z) : -1 < y < 1, -Z < z < Z\}$$

с отношением длин сторон сечения $Z \geq 1$. Это течение называется течением Пуазейля. Нормированный профиль скорости $U(y, z)$ можно найти, решив уравнение Пуассона (2.2.4) и выполнив соответствующую перенормировку (см. раздел (2.2.1)).

Как показано в разделе (2.2.1), анализ линейной устойчивости течения Пуазейля сводится к решению системы уравнений

$$\lambda u = -\mathbf{i}\alpha U u - v \frac{\partial U}{\partial y} - w \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \alpha^2 \right) u - \mathbf{i}\alpha p,$$

$$\begin{aligned}
\lambda v &= -\mathbf{i}\alpha Uv + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \alpha^2 \right) v - \frac{\partial p}{\partial y}, \\
\lambda w &= -\mathbf{i}\alpha Uw + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \alpha^2 \right) w - \frac{\partial p}{\partial z}, \\
\mathbf{i}\alpha u + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0,
\end{aligned} \tag{3.3.21}$$

в Σ с нулевыми граничными условиями на границе для u , v и w , где Re – число Рейнольдса, а $\lambda = -\mathbf{i}\omega$.

Система уравнений (3.3.21) с фиксированными параметрами Z , Re и α является проблемой собственных значений относительно собственных значений λ и собственных векторов (u, v, w, p) . Далее мы рассмотрим случай

$$Z = 10, \quad \alpha = 1.0017, \quad \text{Re} = 6281. \tag{3.3.22}$$

Как было отмечено в предыдущей главе (см. раздел 2.2.4 и работы [9, 10]), в виду четности функции $U(y, z)$ по переменным y и z , проблема (3.3.21) допускает решения, отвечающие четырем различным симметриям, в частности, решения вида $(u_{-+}, v_{++}, w_{--}, p_{-+})$. Далее мы будем рассматривать только решения, обладающие указанной симметрией. В таком случае, как показано в главе 2, величины (3.3.22) являются критическими для рассматриваемых решений, то есть соответствующие значения λ лежат в левой полуплоскости и на мнимой оси.

В главе 2 для пространственной аппроксимации (3.3.21) использовался метод коллокаций на гауссовских сетках. Эта аппроксимация приводила к матричному пучку $A - \lambda B$ с матрицами следующей блочной структуры:

$$A = \begin{bmatrix} J & F^* \\ F & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.3.23}$$

где $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $J \in \mathbb{C}^{n_v \times n_v}$, $F \in \mathbb{C}^{n_p \times n_v}$, $n = n_v + n_p$, I – единичная матрица порядка n_v и $n_v \approx 3n_p$. Учитывая симметрии, мы получали n_p и $n_v/3$ равными примерно четверти от суммарного количества узлов сетки, используемых, соответственно, для аппроксимации давления и компонент скорости.

Для сокращения вычислительных затрат, к рассматриваемой обобщенной проблеме собственных значений применялась обсуждавшаяся в главе 2 алгебраическая редукция. После редукции получалась обычная проблема собственных значений с плотной матрицей примерно вдвое меньшего размера, чей спектр состоял из всех конечных собственных значений исходного матричного пучка. Спектр этой матрицы, при аппроксимации на сетке 50×500 вычислен с помощью QR -алгоритма [34]. Собственные значения с $\text{Real}\lambda \geq -0.25$ показаны кружками на рис.3.3. Отметим, что порядок полученной плотной матрицы был равен 12475.

Аппроксимируем теперь уравнения (3.3.21) методом конечных разностей на равномерной разнесенной сетке типа C [70] с тем же, что и при аппроксимации методом коллокаций, количеством узлов по каждому направлению и выполним учет симметрий. В этом случае получим матричный пучок вида (3.3.23) с разреженными матрицами A и B . Для вычисления конечного спектра пучка мы воспользуемся тем же подходом: применяя алгебраическую редукцию, описанную выше, сведем обобщенную проблему собственных значений к обычной с плотной матрицей, а затем вычислим ее спектр с помощью QR -алгоритма. Вычисленные собственные значения с $\text{Real}\lambda \geq -0.25$ отмечены крестиками на рис.3.3. Видна достаточно большая разница между собственными значениями полученными при использовании метода коллокаций и теми, что получены при конечно-разностной аппроксимации. Поэтому далее для конечно-разностной аппроксимации мы будем использовать значительно более мелкие сетки.

3.3.6 Численные эксперименты

В этом разделе мы рассмотрим пучок $A - \lambda B$ с матрицами (3.3.23), полученными после описанной в предыдущем разделе конечно-разностной аппроксимации на равномерной сетке с количеством узлов 200×2000 . Для вы-

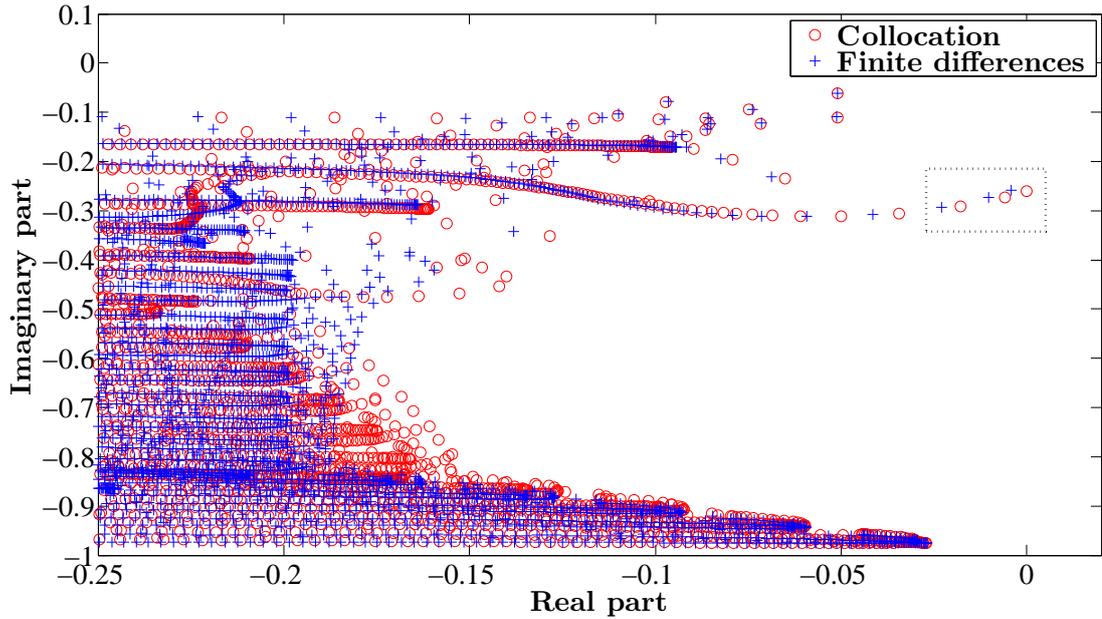


Рисунок 3.3: Собственные значения с $\text{Real}\lambda \geq -0.25$ матричного пучка, вычисленные с использованием аппроксимации методами коллокаций и конечных разностей на сетках с одинаковым количеством узлов 50×500 .

числения понижающего подпространства, отвечающего изолированному подмножеству конечных собственных значений пучка, с помощью алгоритмов 3 и 4, нужно выбрать начальный сдвиг σ и заменить A матрицей $A - \sigma B$. В описанных ниже численных экспериментах мы вычисляем понижающее подпространство, отвечающее $p = 3$ собственным значениям с максимальной действительной частью. Вычисленные на грубой (для конечно-разностной аппроксимации) сетке с числом узлов 50×500 эти собственные значения показаны на рис.3.3 крестиками внутри прямоугольника. В качестве σ выбрано самое правое из этих трех собственных значений.

Используя указанную выше более мелкую сетку и учитывая симметрии, получим разреженные матрицы, порядок которых примерно равен 4.0×10^5 . Число обусловленности матрицы A после сдвига примерно равно 2.8×10^6 . В качестве матрицы P , используемой в (3.3.4) и (3.3.20), взято неполное LU -разложение матрицы A с параметром отсечения 5×10^{-4} . Количества ненуле-

вых элементов в матрице A и треугольных факторах L и U равны примерно 2.9×10^6 , 4.9×10^7 и 4.3×10^7 , соответственно.

Матрица X_0 в алгоритме 4 получена после нескольких итераций алгоритма 3, стартовавшего с произвольного, но фиксированного подпространства размера 3.

Системы в алгоритмах 3 и 4 решались приближенно с помощью GMRES, при этом максимальная размерность подпространства Крылова полагалась равной 100, а также допускались 5 рестартов. В (3.3.3) δ_1 и δ_2 полагались равными 10^{-4} и 10^{-2} , соответственно, тогда как в (3.3.19), для исследования сходимости предложенного метода Ньютона, использовались различные значения точности δ : 10^{-1} , 10^{-2} , 10^{-3} и 10^{-4} . В алгоритме 3 GMRES стартовал с соответствующих столбцов BX_k (смотри обсуждение в разделе 3.3.1), в то время как в алгоритме 4 GMRES стартовал с нулевых начальных векторов. Вычисления останавливались, если выполнялся соответствующий критерий останова, либо при использовании GMRES допустимого количества рестартов. Вычисления показали, что при решении систем требовалось не более 85 итераций GMRES. Другими словами, рестарты в ходе вычислений не использовались.

Во всех экспериментах с алгоритмом 4 в критерии останова мы использовали $\varepsilon = 10^{-10}$. Помимо зависимости нормы невязки от номера итерации k , мы также проиллюстрировали сходимость в терминах максимального главного угла $\theta_k = \angle(\mathcal{X}_k, \mathcal{X})$ между подпространством $\mathcal{X}_k = \text{span}(X_k)$, вычисленными на k -й итерации алгоритмов 3 или 4, и точным понижающим подпространством \mathcal{X} . Для этого заранее было вычислено приближенное понижающее подпространство $\hat{\mathcal{X}} = \text{span}(\hat{X})$ с помощью алгоритма 4 с более высокой, чем во всех остальных экспериментах, точностью $\varepsilon = 10^{-11}$, поэтому мы использовали подпространство $\hat{\mathcal{X}}$ вместо \mathcal{X} . Для вычисления $\tan(\theta_k)$ использовалась

следующая формула (смотри, например,[35]):

$$\sin(\theta_k) = \|\mathcal{P}_k - \hat{\mathcal{P}}\|_2,$$

где $\mathcal{P}_k = X_k X_k^*$ и $\hat{\mathcal{P}} = \hat{X} \hat{X}^*$ ортогональные проекторы [34] на \mathcal{X}_k и $\hat{\mathcal{X}}$, соответственно. Для получения $\sin(\theta_k)$ и, следовательно, $\tan(\theta_k)$ с достаточной точностью, мы использоавли алгоритм аналогичный тому, что использовался в разделе 3.2 для вычисления нормы коммутатора. Вычислим QR -разложение $(G_k, N_k) = \text{ort}([X_k, \hat{X}])$, где G_k – прямоугольная, такая, что $G_k^* G_k = I_{2p}$ и N_k – верхняя треугольная. Тогда

$$\sin(\theta_k) = \|N_k \text{diag}(I_p, -I_p) N_k^*\|_2.$$

В таблице 3.4 демонстрируются вычислительные затраты комбинации алгоритмов 3 и 4 с $\delta = 10^{-4}$. Для различных значений точности ε_{SI} , таблица показывает количество k_{SI} итераций алгоритма 3, необходимых для получения матрицы X_0 , удовлетворяющей $\|R_0\|_2 \leq \varepsilon_{SI}$, количество k_{NM} итераций алгоритма 4 и суммарные количества итераций GMRES S_{SI} и S_{NM} , затраченных алгоритмами 3 и 4 соответственно, и $S_T = S_{SI} + S_{NM}$. Эти цифры хорошо иллюстрирую вычислительные затраты алгоритмов 3 и 4. Из этой таблицы можно сделать вывод, что нет необходимости вычислять начальное приближение для алгоритма 4 со слишком высокой точностью, поскольку это влечет увеличение S_T . Наименьшее количество итераций GMRES, равное $S_T = 1937$, достигнуто при $\varepsilon_{SI} = 10^{-2}$.

Таблица 3.4: Детальная информация о сходимости комбинации алгоритмов 3 и 4 при $\delta = 10^{-4}$

ε_{SI}	k_{SI}	$\ R_0\ _2$	$\tan(\theta_0)$	S_{SI}	k_{NM}	$\ R_k\ _2$	$\tan(\theta_k)$	S_{NM}	S_T
10^{-2}	10	5.91×10^{-3}	1.04×10^{-1}	1372	3	1.29×10^{-11}	7.39×10^{-10}	565	1937
10^{-3}	13	7.63×10^{-4}	2.32×10^{-2}	1684	3	1.08×10^{-11}	5.19×10^{-11}	575	2259
10^{-4}	17	7.49×10^{-5}	2.72×10^{-3}	2113	2	1.35×10^{-11}	7.38×10^{-10}	380	2493

На рис.3.4 (левый) сравнивается скорость сходимости комбинации алгоритмов 3 (красный пунктир) и 4 (красная сплошная линия) с $\varepsilon_{SI} = 10^{-2}$ и $\delta = 10^{-4}$ и алгоритма 3 в чистом виде (пунктирная синяя линия, начальная часть которой совпадает с пунктирной красной). Видно, что использование комбинации алгоритмов оказывается существенно эффективнее, чем использование алгоритма 3. Этот рисунок показывает, что норма невязки стагнирует со 2-й по 10-ю итерации алгоритма 3. Естественно было бы остановить алгоритм 3 после итерации $k = 2$ и, тем самым, ускорить сходимость и значительно сократить вычислительные затраты. Соответствующий эксперимент показал, что алгоритм 4, стартовавший при $k = 2$, не сходится. Для прояснения этого вопроса, мы провели дополнительные расчеты, результаты которых представлены на рис.3.4 (справа). Этот рисунок показывает, что в отличие от нормы невязки, угол θ_k между соответствующими подпространствами уменьшается монотонно. Более того, как видно из рис.3.5, где синими линиями

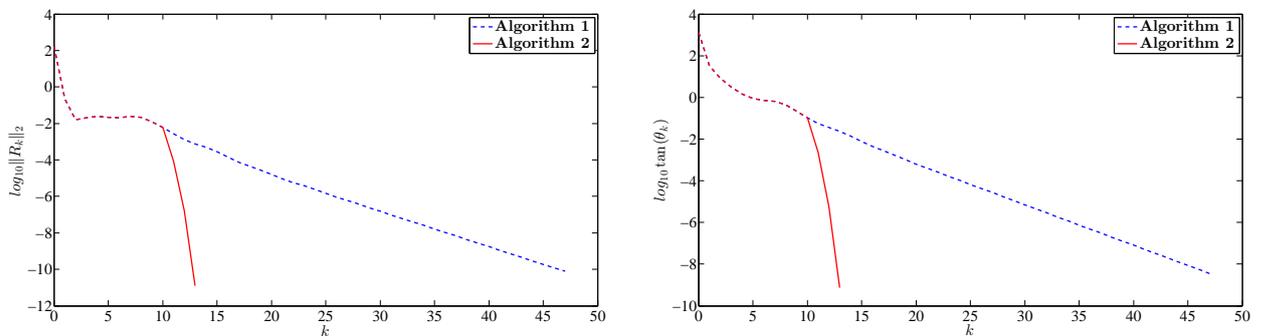


Рисунок 3.4: Зависимость нормы невязки (слева) и $\tan(\theta_k)$ (справа) от номера k внешней итерации.

соединены соответствующие величины первых трех собственных значений вычисленных при $k = 1, \dots, 10$, а крестиками обозначены их окончательные вычисленные значения, несмотря на стагнацию спектральной невязки, вычисленные собственные значения продолжают сходиться к соответствующим точным. Этот эксперимент показал, что угол между точным и вычисленным понижающими подпространствами является более надежной мерой их близости,

чем норма соответствующей спектральной невязки. К сожалению, на практике мы не можем вычислять $\tan(\theta_k)$ в ходе итераций, поскольку это требует априорной информации об искомом понижающем подпространстве.

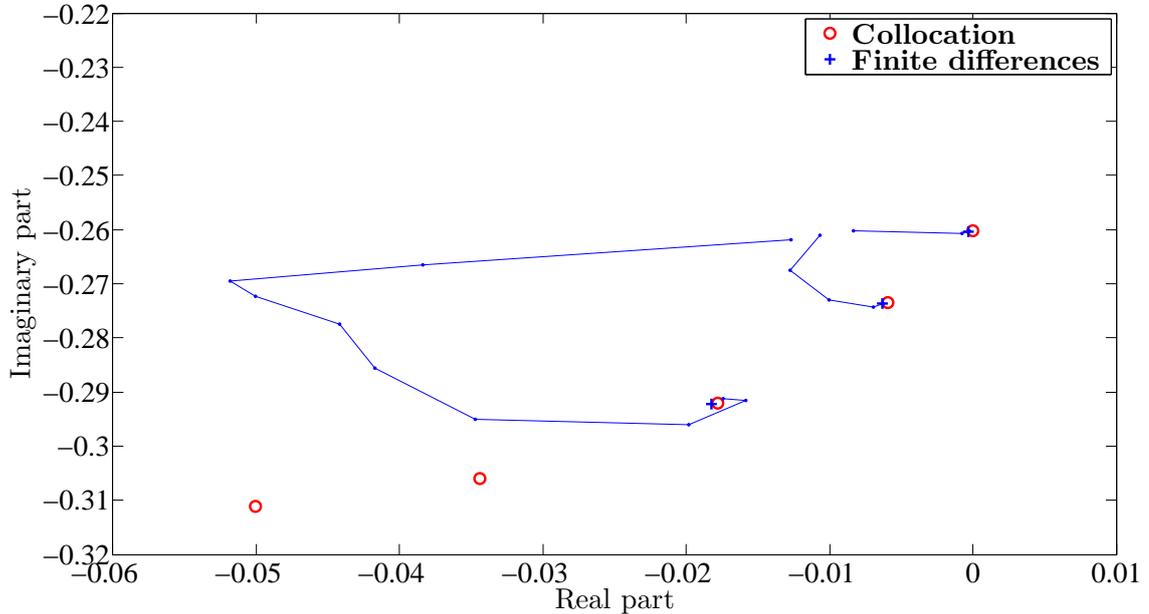


Рисунок 3.5: Сходимость первых трех собственных значений с максимальной действительной частью к соответствующим точным для $k = 1, \dots, 10$.

В следующем эксперименте мы исследовали сходимость алгоритма 4 при различных δ и ε_{SI} . Из рис.3.6, где приведены соответствующие результаты, видно, что с увеличением δ скорость сходимости меняется с квадратичной (при $\delta = 10^{-4}$) до линейной (при $\delta = 10^{-1}$).

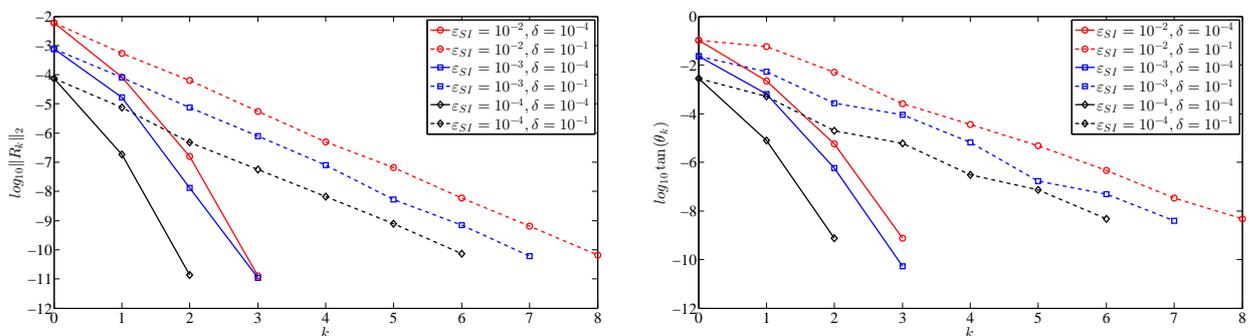


Рисунок 3.6: Зависимость нормы невязки (слева) и $\tan(\theta_k)$ (справа) от k при различных δ и ε_{SI} .

Таблица 3.5 показывает вычислительные затраты алгоритма 4. Количество итераций GMRES, необходимое для решения каждой системы в (3.3.16) (равное в среднем $S_{NM}/(pk_{NM})$), примерно одинаково для различных ε_{SI} и фиксированного δ и слабо возрастает при уменьшении δ . Максимальное количество l_{max} итераций GMRES, выполненное на каждой итерации алгоритма 4, зависит от этих параметров таким же образом. Наименьшее суммарное количество итераций GMRES $S_T = 1937$ получено при $\varepsilon_{SI} = 10^{-2}$ и $\delta = 10^{-4}$.

Таблица 3.5: Вычислительные затраты алгоритма 4

	$\delta = 10^{-1}$		$\delta = 10^{-2}$		$\delta = 10^{-3}$		$\delta = 10^{-4}$	
ε_{SI}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-3}
k_{NM}	8	7	4	4	4	3	3	2
S_{NM}	1040	849	600	608	666	470	565	380
S_T	2412	2533	1972	2292	2038	2154	1937	2259
$S_{NM}/(pk_{NM}) \approx$	43	40	50	51	56	52	63	63
l_{\max}	71	71	75	75	81	80	85	85

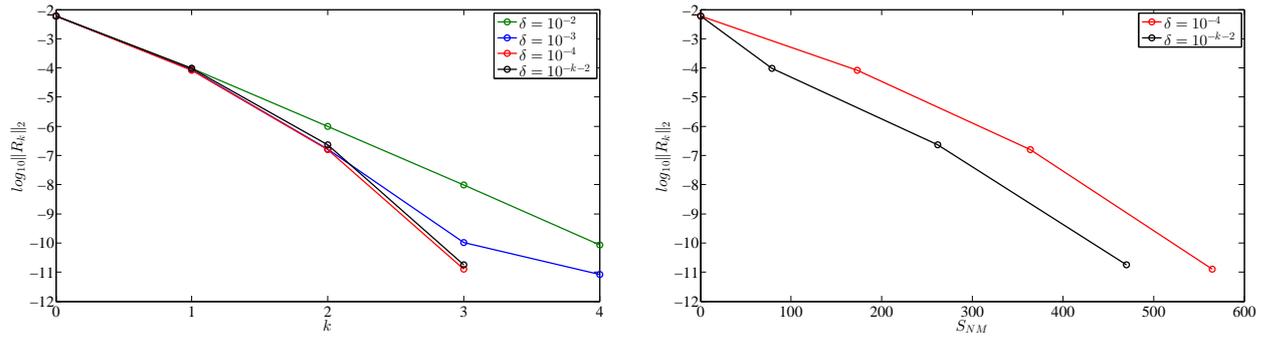


Рисунок 3.7: Зависимость нормы невязки от k (слева) и количество S_{NM} итераций GMRES (справа) при различных δ .

На рис.3.7 (слева) проиллюстрирована сходимость алгоритма 4 при $\varepsilon_{SI} = 10^{-2}$ и различных δ . Видно, что после первой итерации мы получаем примерно одинаковые значения нормы невязки при $\delta = 10^{-2}$, 10^{-3} и 10^{-4} . После второй итерации, мы имеем одинаковую норму невязки при $\delta = 10^{-3}$ and 10^{-4} . Это наблюдение натолкнуло нас на использование различных δ при разных k (черная линия). На рис.3.7 (справа) приведено сравнение вычислительных затрат при использовании $\delta = 10^{-k-2}$ (черная линия) и при фиксированном $\delta = 10^{-4}$ (красная линия). Таким образом, можно заключить, что использование уменьшающейся на каждой итерации δ дает заметное сокращение вычислительных затрат.

3.3.7 Выводы

Предложена эффективная версия метода Ньютона для вычисления понижающего подпространства, отвечающего изолированному подмножеству конечных собственных значений, расположенных вблизи заданной точки комплексной плоскости, матричного пучка с большими разреженными матрицами. В качестве начального приближения используется приближенное понижающее подпространство, полученное после нескольких шагов предложенного в данной главе метода приближенных обратных итераций на основе GMRES с предобуславливанием с тюнингом. На каждой итерации метода Ньютона необхо-

димо решать обобщенное уравнение Сильвестра и для этой цели предложен алгоритм на основе разложения Шура и GMRES с эффективным предобуславливанием. Если уравнение Сильвестра решается достаточно точно, то метод Ньютона демонстрирует квадратичную сходимость. По результатам экспериментов можно сделать следующие выводы:

- если есть достаточно точное начальное приближение и уравнение Сильвестра решаются с достаточной точностью, то метод Ньютона сходится квадратично;
- нет смысла вычислять начальное приближение со слишком высокой точностью, т.к. это приводит к значительному росту суммарных вычислительных затрат;
- вычислительные затраты метода могут быть сокращены, если использовать уменьшающуюся на каждой итерации δ при решении уравнения Сильвестра;
- количество итераций GMRES при фиксированном δ примерно одинаково на каждом шаге метода Ньютона, если вычисленное понижающее подпространство достаточно близко к соответствующему точному.

3.4 Выводы

В этой главе предложены методы ньютоновского типа для решения частичной обычной и обобщенной проблем собственных значений.

В первой части главы предложен и обоснован двусторонний метод Ньютона для вычисления спектрального проектора, отвечающего заданному подмножеству собственных значений большой разреженной матрицы. Для нахождения хорошего начального приближения для этого метода разработан двусторонний метод приближенных обратных итераций с тюнингом. Обсуждены

результаты численных экспериментов описанной комбинации двух методов с дискретным аналогом неэрмитового эллиптического оператора.

Во второй части главы предложен и обоснован метод Ньютона для вычисления понижающих подпространств отвечающих заданной группе конечных собственных значений регулярных матричных пучков с большими разреженными матрицами. Также предложен метод приближенных обратных итераций с тюнингом, с помощью которого находится достаточно хорошее начальное приближение для метода Ньютона. Проведены численные эксперименты, где в качестве тестовой задачи был рассмотрен матричный пучок, возникающий при исследовании типичной задачи гидродинамической устойчивости, которая подробно обсуждалась в главе 2. Результаты экспериментов показали высокую эффективность и надежность предложенных методов.

Заключение

Разработаны, обоснованы и реализованы быстрые методы вычисления характеристик гидродинамической устойчивости, в том числе:

1. Развита и обоснована предложенная в [20–22] технология численного анализа систем обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений, полученных после пространственной аппроксимации линеаризованных уравнений вязкой несжимаемой жидкости. В частности, обоснованы предварительные преобразования исходной системы, а также предложены и обоснованы модификации стандартных процедур FZERO и FMIN, позволяющие вычислять линейное критическое число Рейнольдса и строить соответствующие нейтральные кривые с заданной относительной точностью.
2. Для исследования устойчивости течений в бесконечном канале постоянного прямоугольного сечения предложен, обоснован и реализован специальный вариант технологии, позволяющий сократить требуемый объем оперативной памяти в два раза, а число арифметических операций – примерно в четыре раза. С помощью этого варианта исследована зависимость линейного критического числа Рейнольдса течения Пуазейля от отношения длин сторон сечения. Выполнены расчеты, уточняющие известные результаты.
3. Для течения Пуазейля в бесконечном канале постоянного прямоугольного сечения впервые дано теоретическое обоснование зависимости линейно-

го критического числа Рейнольдса от величины отношения длин сторон сечения.

4. Предложен и обоснован двусторонний метод Ньютона для вычисления спектрального проектора, отвечающего заданной группе собственных значений большой разреженной матрицы. Для поиска начального приближения разработан двусторонний метод приближенных обратных итераций с тюнингом.
5. Предложен и обоснован метод Ньютона для вычисления понижающего подпространства, отвечающего заданному изолированному подмножеству собственных значений регулярного матричного пучка с большими разреженными матрицами. Для нахождения начального приближения разработан вариант приближенного метода обратных итераций с тюнингом.

Список рисунков

2.1	Полная нейтральная кривая в плоскости (Re, α) для $Z = 8$, рассчитанная на сетках 40×100 и 60×140	46
2.2	Вычисление $\text{Re}_L(Z)$ на сетке 60×140 для различных значений Z	48
2.3	Нейтральная кривая проблемы Орра-Зомерфельда для плоского течения Пуазейля.	55
2.4	Профили основного течения в прямоугольном канале при $Z = 4$ и $Z = 10$	56
2.5	Зависимость линейного критического числа Рейнольдса от Z для исходного (кривая I) и модельного (кривая II) течений.	57
3.1	Зависимость нормы коммутатора E_k от номера итерации k при $m = 200$, $\varepsilon_{SI} = 10^{-1}$ и $\delta = 10^{-4}$. Алгоритм 1 – пунктир, алгоритм 2 – сплошная линия.	82
3.2	Зависимость нормы коммутатора E_k от k для алгоритма 2 при $m = 300$ и различных ε_{SI} и δ	83
3.3	Собственные значения с $\text{Real}\lambda \geq -0.25$ матричного пучка, вычисленные с использованием аппроксимации методами коллокаций и конечных разностей на сетках с одинаковым количеством узлов 50×500	99
3.4	Зависимость нормы невязки (слева) и $\tan(\theta_k)$ (справа) от номера k внешней итерации.	103
3.5	Сходимость первых трех собственных значений с максимальной действительной частью к соответствующим точным для $k = 1, \dots, 10$	104

3.6	Зависимость нормы невязки (слева) и $\tan(\theta_k)$ (справа) от k при различных δ и ε_{SI}	104
3.7	Зависимость нормы невязки от k (слева) и количество S_{NM} итераций GMRES (справа) при различных δ	107

Список таблиц

2.1	Вычисление Re_L и соответствующих α_L и ω_L на сетке 60×140 для различных значений Z	48
2.2	Проверка сходимости по шагу сетки.	49
2.3	Результаты, полученные в работе [9].	50
2.4	Результаты, полученные в работе [10].	50
3.1	Количество <i>nnz</i> ненулевых элементов в матрицах A , L и U	80
3.2	Вычислительные затраты комбинации алгоритмов 1 и 2 при $\delta = 10^{-4}$	81
3.3	Вычислительные затраты алгоритма 2 при $m = 300$	85
3.4	Детальная информация о сходимости комбинации алгоритмов 3 и 4 при $\delta = 10^{-4}$	102
3.5	Вычислительные затраты алгоритма 4	106

Литература

1. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: В 2-х т. Т.1. М.: Мир, 1990.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
3. Жигулев В.Н., Тумин А.М. Возникновение турбулентности. Наука. Сибирское отделение, 1987.
4. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
5. Reynolds O. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels // Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A. 1883. Т. 174. С. 935–982.
6. Гельмгольц Г. Основы вихревой теории. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
7. Drazin P.G. Introduction to hydrodynamic stability. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
8. Schmid P.J., Henningson D.S. Stability and transition in shear flows. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
9. Tatsumi T., Yoshimura T. Stability of the laminar flow in a rectangular duct // J. Fluid Mech. 1990. Т. 212. С. 437–449.

10. Theofilis V., Duck P.W., Owen J. Viscous linear stability analysis of rectangular duct and cavity flow // *J. Fluid Mech.* 2004. Т. 505. С. 249–286.
11. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981.
12. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.
13. Templates for the solution of algebraic eigenvalue problems: practical guide / Z. Bai, J. Demmel, J. Dongarra [и др.]. SIAM, Philadelphia, 2000.
14. Kerner W. Large-scale complex eigenvalue problems // *J. Comput. Phys.* 1989. Т. 85. С. 1–85.
15. Sleijpen G.L.G., Van der Vorst H.A. A Jacobi-Devidson iteration method for linear eigenvalue problems // *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 1996. Т. 17, № 2. С. 401–425.
16. Jacobi-Devidson type methods generalized eigenproblems and polynomial eigenproblems / G.L.G. Sleijpen, A.G.L. Booten, D.R. Fokkema [и др.] // *BIT Numerical Mathematics.* 1996. Т. 36, № 3. С. 595–633.
17. Fokkema D.R., Sleijpen G.L.G., Van der Vorst H.A. Jacobi-Devidson type methods generalized eigenproblems and polynomial eigenproblems // *SIAM J. Sci. Comput.* 1998. Т. 20, № 1. С. 94–125.
18. Sadkane M. Block-Arnoldi and Davidson methods for unsymmetric large eigenvalue problems // *Numer. Math.* 1993. Т. 64. С. 195–211.
19. Икрамов Х.Д. Несимметричная проблема собственных значений. Численные методы. М.: Наука, 1991.

20. Бойко А.В., Нечепуренко Ю.М. Численный спектральный анализ временной устойчивости ламинарных течений в каналах постоянного сечения // Ж. Вычисл. Матем. Матем. Физ. 2008. Т. 48, № 10. С. 1731–1747.
21. Бойко А.В., Нечепуренко Ю.М. Технология численного анализа влияния оребрения на временную устойчивость плоских течений // Ж. Вычисл. Матем. Матем. Физ. 2010. Т. 50, № 6. С. 1109–1125.
22. Boiko A.V., Nechepurenko Yu.M. Numerical study of stability and transient phenomena of Poiseuille flows in ducts of square cross-sections // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2009. Т. 24, № 3. С. 193–205.
23. Демьянко К.В., Нечепуренко Ю.М. О зависимости линейной устойчивости течений Пуазейля в прямоугольном канале от отношения длин сторон сечения // Доклады АН. 2011. Т. 440, № 5. С. 618–620.
24. Demyanko K.V., Nechepurenko Yu.M. Linear stability analysis of Poiseuille flow in a rectangular duct // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2013. Т. 28, № 2. С. 125–148.
25. Демьянко К.В., Нечепуренко Ю.М. Двусторонний метод Ньютона для вычисления спектральных проекторов // Вычислительные методы и программирование. 2014. Т. 15. С. 121–129.
26. Нечепуренко Ю.М., Демьянко К.В. О влиянии отношения сторон на устойчивость течений в бесконечных каналах прямоугольного сечения // «Модели и методы аэродинамики». Материалы 11-й международной школы-семинара. М.: МЦНМО, 2011. С. 149–150.
27. Демьянко К.В., Нечепуренко Ю.М. Двусторонний метод Ньютона для вычисления спектральных проекторов // Тезисы докладов XX Всероссийской конференции и Молодежной школы-конференции «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической

- физики», посвященной памяти К.И. Бабенко (Дюрсо, 15-20 сентября, 2014 г.). М: Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша, 2014. С. 55.
28. Демьянко К.В., Нечепуренко Ю.М., Садкан М. Метод Ньютона для вычисления понижающих подпространств регулярных матричных пучков // Современные проблемы вычислительной математики и математической физики: Международная конференция, Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 16-17 июня 2014 г.: Тезисы докладов. М.: МАКС Пресс, 2014. С. 42–43.
29. Демьянко К.В. О зависимости линейной устойчивости течений Пуазейля в прямоугольном канале от отношения длин сторон сечения // Труды 54-й научной конференции МФТИ. М.: МФТИ, 2011. С. 72–73.
30. Демьянко К.В. Устойчивость течения Пуазейля в канале прямоугольного сечения // Труды 55-й научной конференции МФТИ. М.: МФТИ, 2012. С. 13–14.
31. Демьянко К.В. Метод Ньютона для решения частичной обобщенной проблемы собственных значений // Труды 56-й научной конференции МФТИ. М.: МФТИ, 2013. С. 136–137.
32. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб. пособие: Для студентов: В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.
33. Forsythe G.E., Malcolm M.A., Moler. Computer Methods for Mathematical Computations. N.Y.: Prentice-Hall, 1976.
34. Golub G.H., Van Loan C.F. Matrix computations, second edition. The John Hopkins University Press, 1989.
35. Stewart G.W., Sun J.-G. Matrix Perturbation Theory. Academic Press, San Diego, California, 1990.

36. Temam R. Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis. AMS Chelsea Publishing, New York, 1977.
37. Нечепуренко Ю.М. О редукции линейных дифференциально-алгебраических систем управления // Доклады АН. 2012. Т. 445, № 1. С. 17–19.
38. Horn R.A., Johnson C.R. Matrix analysis. Cambridge University Press, 1986.
39. Anderson E., Bai Z., Bischof C. et al. LAPACK Users Guide. SIAM, Philadelphia, 1992.
40. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978.
41. Orszag S. Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation // J. Fluid Mech. 1971. Т. 50. С. 698–703.
42. Spectral methods. Fundamentals in single domains / C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni [и др.]. Springer, Berlin, 2006.
43. Lin C.C. The theory of hydrodynamic stability. Cambridge University Press, Cambridge, 1955.
44. Шлихтинг Г. Возникновение турбулентности. Издательство иностранной литературы, Москва, 1962.
45. Physics of transitional shear flows / A.V. Boiko, A.V. Dovgal, G.R. Grek [и др.]. Springer-Verlag, Berlin, 2011.
46. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Лаборатория базовых знаний, 2001.
47. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Физматгиз, 1963.

48. Weideman J.A.C., Reddy S.C. A MATLAB Differentiation Matrix Suite // ACM Trans. Math. Software. 2000. T. 26, № 4. С. 465–519.
49. Squire H.B. On the stability of three-dimensional disturbances of viscous flow between parallel walls // Proc. Roy. Soc. Lond. 1933. T. 142. С. 621–628.
50. Criminale W.O., Jackson T.L., Joslin R.D. Theory and computation of hydrodynamic stability. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
51. Годунов С.К. Современные аспекты линейной алгебры. Научная книга, 1997.
52. Drazin P.G., Reid W.H. Hydrodynamic stability. second edition изд. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
53. Salwen H., Cotton F.W., Grosch C.E. Linear stability of Poiseuille flow in a circular pipe // J. Fluid Mech. 1980. T. 98. С. 273–284.
54. Salwen H., Grosch C.E. The stability of Poiseuille flow in a pipe of circular cross-section // J. Fluid Mech. 1972. T. 54. С. 93–112.
55. Meseguer A., Trefethen. Linearized pipe flow to Reynolds number 10^7 // J. Comp. Phys. 2003. T. 186. С. 178–197.
56. Trefethen A.E., Trefethen L.N., Schmid P.J. Spectra and pseudospectra for pipe Poiseuille flow // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 1999. T. 1926. С. 413–420.
57. Saad Y., Schultz M.H. GMRES: A general minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems // SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1986. T. 7. С. 856–869.
58. Saad Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. PWS Publishing, Boston, 1996.

59. Hechme G., Nechepurenko Yu.M., Sadkane M. Efficient methods for computing spectral projectors for linearized Navier-Stokes equations // SIAM J. Sci. Comput. 2008. T. 31, № 1. С. 667–686.
60. Freitag M.A., Spence A. A tuned preconditioner for inexact inverse iteration applied to Hermitian eigenvalue problems // IMA J. Numer. Anal. 2008. T. 28, № 3. С. 522–551.
61. Freitag M.A., Spence A. Convergence of inexact inverse iteration with application to preconditioned iterative solves // BIT. 2007. T. 47. С. 27–44.
62. Robbe M., Sadkane M., Spence A. Inexact inverse subspace iteration with preconditioning applied to non-Hermitian eigenvalue problems // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2009. T. 31, № 1. С. 92–113.
63. Xue F., Elman H. C. Fast inexact subspace iteration for generalized eigenvalue problems with spectral transformation // Linear Algebra Appl. 2011. T. 435. С. 601–622.
64. Xue F., Elman H.C. Convergence analysis of iterative solvers in inexact Rayleigh quotient iteration // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2009. T. 31. С. 877–899.
65. Годунов С.К., Нечепуренко Ю.М. Оценки скорости сходимости метода Ньютона для вычисления инвариантных подпространств // Ж. Вычисл. Матем. Матем. Физ. 2002. Т. 42, № 6. С. 771–779.
66. Losche R., Schwetlick H., Timmermann G. A modified block Newton iteration for approximating an invariant subspace of a symmetric matrix // Linear Algebra Appl. 1998. T. 275–276. С. 381–400.
67. Kressner D. A block Newton method for nonlinear eigenvalue problems // Numer. Math. 2009. T. 114. С. 355–372.

68. Ганмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.
69. El Khoury G., Nechepurenko Yu.M., Sadkane M. Acceleration of inverse subspace iteration with Newton's method // J. Comput. Appl. Math. 2014. Т. 259. С. 205–215.
70. Лебедев В.И. Разностные аналоги ортогональных разложений, основных дифференциальных операторов и некоторых краевых задач математической физики // Ж. Вычисл. Матем. и Матем. Физ. 1964. Т. 4, № 3. С. 449–465.
71. Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969.
72. Тыртышников Е.Е. Методы численного анализа. М.: Издательский центр «Академия», 2007.
73. Stewart G.W. Simultaneous iteration for computing invariant subspaces of non-Hermitian matrices // Numer. Math. 1976. Т. 25. С. 123–136.