

На правах рукописи

**Григорьев Олег Александрович**

**Конформные отображения  
прямоугольных многоугольников:  
численно-аналитический метод**

01.01.07 — вычислительная математика

**Автореферат**

диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Москва — 2015

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте вычислительной математики Российской академии наук (ИВМ РАН)

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент  
**Богатырев Андрей Борисович**

Официальные оппоненты: **Аптекарев Александр Иванович,**  
доктор физико-математических наук, профессор  
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша Российской академии наук»,  
заведующий отделом №4 «Математический отдел»

**Федоровский Константин Юрьевич,**  
доктор физико-математических наук, доцент,  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана»,  
профессор кафедры прикладной математики

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Российской академии наук (ВЦ РАН)

Защита состоится 25 марта 2015 г. в 16 часов на заседании диссертационного совета Д 002.045.01 при федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте вычислительной математики Российской академии наук (ИВМ РАН) по адресу: 119333, г. Москва, ул. Губкина, 8, ауд. 729.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИВМ РАН <http://www.inm.ras.ru>.

Автореферат разослан \_\_\_\_\_ 2015 года.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
Д 002.045.01, д.ф.-м.н.

Бочаров Геннадий Алексеевич

# Общая характеристика работы

## Актуальность темы.

Диссертация посвящена развитию численно-аналитического метода конформных отображений прямоугольных (т.е. имеющих углы, кратные прямо-му) многоугольников на верхнюю полуплоскость и обратно. Области приложения данного метода — задачи теории потенциала (в частности, решение задачи Дирихле в прямоугольной области), задачи построения конформных сеток в многоугольных областях. Традиционные методы вычисления конформных отображений многоугольников, требующие вычисления параметров интеграла Кристоффеля-Шварца, сталкиваются с проблемой потери точности, вызванной явлением сгущения — экспоненциального сгущения образов точек на границе области при конформном отображении.

Одним из способов разрешения этой вычислительной проблемы стал подход А.Б. Богатырёва, предложившего для многоугольников специального вида полуаналитические выражения конформных отображений через тэта-функции Римана на гиперэллиптических поверхностях, ассоциированных с многоугольниками. Задача поиска параметров интеграла Кристоффеля-Шварца заменялась при этом задачей поиска *вспомогательных параметров*, характеризующих гиперэллиптическую поверхность. Как показали численные эксперименты, проблема потери точности, вызванная сгущением, преследует этот подход в меньшей степени. Построение семейства численно-аналитических методов для различных классов прямоугольных многоугольников в рамках этого подхода, а также решение проблемы потери точности является актуальной задачей.

## Цели диссертационной работы.

1. Разработать и реализовать численно-аналитический метод конформного отображения верхней полуплоскости на прямоугольные многоугольники с количеством прямых и входящих углов, не превышающим 8, и обратно в рамках подхода, предложенного А.Б. Богатыревым и развитого А.Г. Асфандияровым и Д.В. Ярмоличем <sup>1</sup>.
2. Исследовать точность метода в условиях сгущения при вычислениях для «вырожденных» многоугольников.
3. На основе предложенного метода разработать систему тестов для методов численного решения краевых задач для эллиптических уравнений (в частном случае задачи Дирихле в прямоугольном многоугольнике с кусочно-постоянными граничными условиями).

---

<sup>1</sup>Bogatyrev A., Hassner M., Yarmolich D. An exact-analytical expression for the read sensor signal in magnetic data storage channels. // Contemporary Mathematics. 2010. Vol. 528, pp. 155-160.

4. Применить новый метод для автоматического построения конформных сеток в задаче устойчивости Пуазейлевского течения в канале с гребённым оребрением.

**Основные положения, выносимые на защиту:** В рамках полуаналитического подхода А.Б. Богатырева разработан метод вычисления конформных отображений прямоугольных (т.е. имеющих углы, кратные прямому) многоугольников сложной геометрии на верхнюю полуплоскость и обратно.

1. Для многоугольников, имеющих до 8 прямых углов и до 5 выходов на бесконечность, выведены системы уравнений на вспомогательные параметры и программно реализован алгоритм их численного решения.
2. Для приближенного решения системы из п. 1 применены модулярные преобразования и алгоритм Зигеля. Численные эксперименты показывают, что использование этой методологии позволяет находить параметры отображения и вычислять само отображение с хорошей точностью даже в условиях сильного сгущения точек.
3. Предложен класс тестовых задач для проверки точности вычислительных пакетов SCPACK (вычисление конформного отображения на многоугольные области) и Ani2D (решение граничных задач для эллиптических уравнений в двумерных областях). Этот класс включает в себя многоугольники, моделирующие различные особенности плоских областей (разрезы, входящие углы, узкие перешейки, выходы на бесконечность и т.д.)
4. Для исследования задачи устойчивости течения в канале с гребённым оребрением предложены автоматически генерируемые конформные сетки. Сравнение результатов, полученных для гребенчатого и для волнистого оребрения, показывает адекватность использования конформной сетки в данной задаче.

**Научная новизна:** Полуаналитический подход к вычислению конформного отображения является одним из немногих существующих на сегодня подходов с (апостериорной) оценкой точности. В рамках этого подхода предложен оригинальный способ решения вычислительных проблем, вызываемых явлением сгущения, с помощью техники модулярных преобразований — большинство существующих методов требуют при вычислениях для сильно вырожденных многоугольников повышать размер мантииссы. Выгодным отличием описываемого метода является то, что конформное отображение верхней полуплоскости на

многоугольник и обратно дается в терминах спецфункций, эффективный способ вычисления которых описан в литературе.

С помощью включения нового метода в технологию исследования гидродинамической устойчивости, разработанную А.В. Бойко и Ю.М. Нечепуренко, впервые были построены кривые нейтральной устойчивости для каналов с гребёночатым оребрением. Подход к построению сетки, использующий отображение Гордона-Холла, применяемый ранее для волнистых оребрений, был в данном случае неприменим, а существующие пакеты для построения конформных сеток (в частности, SCPACK) в ряде случаев давали неудовлетворительные результаты. Причины этих сбоев также были прояснены при сравнении с предложенным методом.

**Научная и практическая значимость.** Ввиду связи между задачей о конформном отображении и задачами теории потенциала построенный метод может быть использован для численного решения плоских задач, возникающих в гидродинамике идеальной жидкости, электро- и магнитостатике (например, вычисление ёмкостей), аэродинамике дозвуковых скоростей, теории фильтрации и т.д.

Поскольку для построенного метода существуют теоретические и экспериментальные оценки точности решения, он может быть использован для тестирования комплексов программ для приближенного построения конформных отображений и решения задач математической физики в многоугольных областях.

Результаты приближенного решения задачи о конформном отображении, полученные с помощью численно-аналитического метода, могут быть использованы как начальное приближение для других методов при поиске конформного отображения на области с произвольной кусочно-аналитической границей.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертационной работы докладывались автором и обсуждались на семинарах Института вычислительной математики РАН, Института прикладной математики РАН им. М.В. Келдыша, Вычислительного центра РАН им. А.А. Дородницына и на следующих конференциях:

55-я научная конференция МФТИ / Москва, ИВМ РАН, 2012;

56-я научная конференция МФТИ / Москва, ИВМ РАН, 2013;

конференция «Тихоновские чтения» / Москва, МГУ, 2013;

международная конференция «Modern Problems of Applied Mathematics and Computer Science» / Дубна, ОИЯИ, 2014,

«Физико-математические проблемы создания новой техники (PhysMathTech-2014)» / Москва, МГТУ им. Баумана, 2014.

**Личный вклад.** Формулировка условий на вспомогательные параметры конформного отображения в виде систем нелинейных уравнений, модификация алгоритма решения систем с помощью модулярных преобразований, программная реализация метода осуществлены автором лично. Формулировка задач, возникающих в приложениях, и численные эксперименты проведены лично автором, кроме работы по исследованию характеристик гидродинамической устойчивости в канале с гребенчатым оребрением, выполненной совместно с Н.В. Ключневым.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 6 печатных изданиях, 2 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 4 — в тезисах докладов.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации **86** страниц текста с **19** рисунками и **2** таблицами. Список литературы содержит **78** наименований.

## Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор существующих численных методов конформных отображений, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

**Первая глава** посвящена изложению численно-аналитического метода конформного отображения верхней полуплоскости на многоугольники типа показанных на рис. 1. Данный метод разработан в рамках предложенного А.Б. Богатыревым в 2007 году подхода, центральной идеей которого является использование связи интеграла Кристоффеля-Шварца для прямоугольных многоугольников с абелевыми интегралами на гиперэллиптических поверхностях.

Вводится класс многоугольников, называемых прямоугольными. Это простые (т.е. не имеющие самопересечений) односвязные многоугольники, все углы которых кратны  $\frac{\pi}{2}$ . Такие многоугольники могут содержать входящие углы, разрезы и выходы на бесконечность. Используются следующие обозначения для количества различных элементов в прямоугольном многоугольнике <sup>2</sup>:

- $k$  – количество прямых углов;

---

<sup>2</sup>Эти числа в совокупности с заданным порядком чередования различных элементов при обходе границы прямоугольного многоугольника задают его *комбинаторный тип*. Для каждого комбинаторного типа численно-аналитический метод строится отдельно.

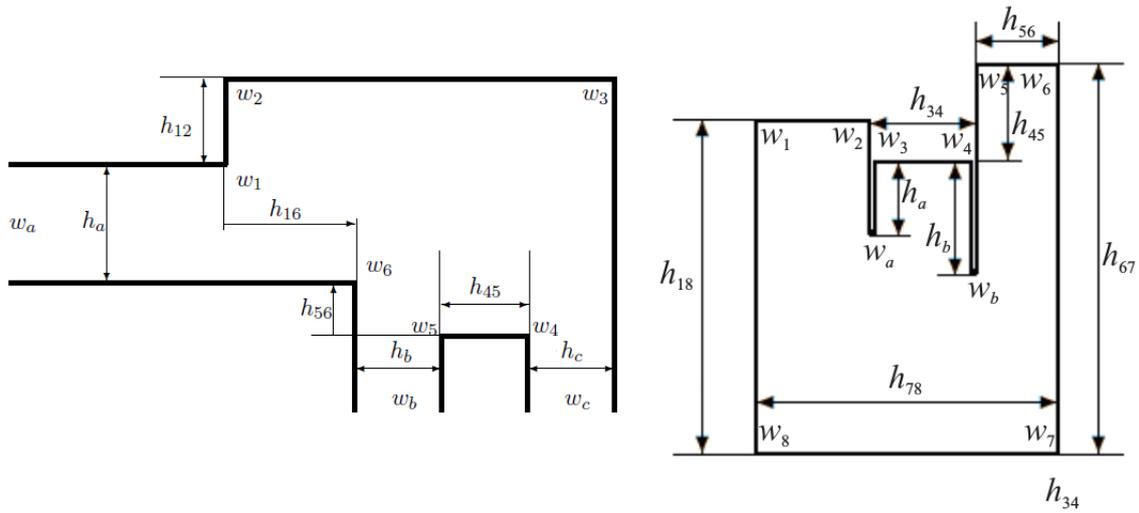


Рис. 1: Прямоугольные многоугольники специального вида.

- $m$  – количество входящих прямых (т.е. равных  $\frac{3\pi}{2}$ ) углов;
- $l$  – количество выходов на бесконечность (углы при вершинах равны 0);
- $r$  – количество разрезов (им соответствуют вершины, углы при которых равны  $2\pi$ ).

Эти числа удовлетворяют следующим соотношениям:

- $k + m = 2g + 2$ ;
- $m + r - l = g - 1$ ,

где  $g$  – целое неотрицательное число, а отображение Кристоффеля-Шварца верхней полуплоскости на прямоугольный многоугольник можно записать в виде

$$w(x) = \alpha \int_{x_0}^x \frac{\mathcal{P}_{g+l-1}(\xi)}{\mathcal{D}_l(\xi) \sqrt{\mathcal{Q}_{2g+2}(\xi)}} d\xi,$$

где рукописным шрифтом обозначены многочлены степени, равной индексу, с таким же количеством различных вещественных корней и старшим коэффициентом, равным 1. Подынтегральное выражение может быть аналитически продолжено на риманову поверхность  $\mathcal{M}$  функции  $\sqrt{\mathcal{Q}_{2g+2}}$  (поднятие верхней полуплоскости на  $\mathcal{M}$  будем обозначать через  $\mu$ ). Род такой поверхности равен числу  $g$ .

Поверхность  $\mathcal{M}$  может быть описана как набором корней многочлена  $\sqrt{\mathcal{Q}_{2g+2}}$  (параметры интеграла Кристоффеля-Шварца), так и в более естественных терминах, которые вводятся в первых двух разделах главы.

В разделе 1.1 изложены основные понятия и утверждения теории функций на гиперэллиптических поверхностях. Приводится принадлежащая Якоби классификация мероморфных дифференциалов на римановых поверхностях, а также приводится классический результат – размерность пространства дифференциалов I рода на поверхности равна ее роду  $g$ . Затем фиксируется набор базисных циклов  $a_1, \dots, a_g$  и  $b_1, \dots, b_g$ , относительно которого вводится  $a$ -нормированный базис  $\omega_k$  дифференциалов на поверхности  $\mathcal{M}$ , т.е. такой, что

$$\oint_{a_j} \omega_k = \delta_{jk}.$$

Показано, что подынтегральное выражение в интеграле Кристоффеля-Шварца для ограниченного прямоугольного многоугольника можно представить как линейную комбинацию  $\omega_k$ , а для неограниченного доказана

**Теорема 1.3.** *Дифференциал Кристоффеля-Шварца для неограниченного прямоугольного многоугольника представляется следующей суммой абелевых  $a$ -нормированных дифференциалов III рода и дифференциала I рода  $\omega$*

$$dw(x) = \sum_{k=1}^l \varepsilon_k h_k \eta_{P_k P'_k} + \omega, \quad (1)$$

где  $h_k$  – ширина  $k$ -го канала,  $\varepsilon_k$  – направление  $k$ -го канала ( $\varepsilon_k \in \{\pm 1\} \cup \{\pm i\}$ ), а  $P_k$  и  $P'_k$  – поднятие прообраза  $k$ -ой бесконечно удаленной вершины в  $\mathcal{M}$ .

В разделе 1.2 предлагается способ вычисления интегралов Кристоффеля-Шварца для прямоугольных многоугольников с помощью теории функций на гиперэллиптических поверхностях. Рассматриваются определенные на  $\mathbb{C}^g$  ряды –  $\theta$ -функции Римана, через которые могут быть выражены мероморфные функции на поверхности  $\mathcal{M}$  рода  $g$  и абелевы дифференциалы на ней.

$\theta$ -функция Римана определяется следующим образом

$$\theta(\mathbf{z}|\Pi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp(i\pi \mathbf{n}^T \Pi \mathbf{n}) \exp(2\pi i \mathbf{n}^T \mathbf{z}). \quad (2)$$

где  $\Pi$  – комплексная матрица размера  $g \times g$ , мнимая часть которой симметрична и положительно определена.

Вводятся классические объекты теории функций на римановых поверхностях:

- комплексная матрица  $\Pi = (\Pi_{kj})_{g \times g}$ , где  $\Pi_{kj} = \oint_{b_j} \omega_k$  – называется *матрицей периодов* поверхности  $\mathcal{M}$  рода  $g$  с введенными на ней  $a$ - и  $b$ -циклами и  $a$ -нормированным базисом дифференциалов  $\omega$ ;

- комплексный тор  $\mathbb{C}^g / (\mathbb{Z}^g \oplus \Pi\mathbb{Z}^g)$  называется *якобианом кривой*  $Jac(\mathcal{M})$ ;
- отображение

$$\mathbf{u} : \mathcal{M} \rightarrow Jac(\mathcal{M}), \quad \mathbf{u}(P) = \int_{P_0}^P \omega \quad \text{mod } \mathbb{Z}^g \oplus \Pi\mathbb{Z}^g$$

называется отображением Абеля-Якоби с начальной точкой  $P_0$

Рассмотрено восходящее к Риману, Якоби и Клейну представление мероморфных функций на поверхности  $\mathcal{M}$  как композиции отображения Абеля-Якоби, и комбинации  $\theta$ -функций. В частности, приведено построение функции  $x(\mathbf{u})$ , называемой *гиперэллиптической проекцией*, такой, что ее композиция с отображением Абеля-Якоби совпадает с накрытием  $\mathcal{M} \mapsto \mathbb{C}P^1 : (x, y) \mapsto x$ .

Приведенные в разделах 1.1 и 1.2 диссертации факты и результаты приводят к следующей схеме метода:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}P^1 & \xleftarrow{x(\mathbf{u})} & \mathbf{u}(\mu(\mathbb{H})) & \xrightarrow{w(\mathbf{u})} & P \\ \uparrow & & \downarrow & & \\ \mathbb{H} & & Jac(\mathcal{M}) & & \end{array} \quad (3)$$

Поскольку  $x(\mathbf{u})$ , и  $w(\mathbf{u})$  выражаются через  $\theta$ -функции на якобиане поверхности  $\mathcal{M}$ , они могут быть вычислены явно с использованием алгоритма Деконинка-Бобенко <sup>3</sup>, гарантирующего машинную точность при вычислении  $\theta$ -функции с любой матрицей периодов.

Задача поиска параметров интеграла Кристоффеля-Шварца заменяется, таким образом, задачей поиска вспомогательных параметров, характеризующую поверхность, ассоциированную с многоугольником. Этими параметрами являются

- матрица периодов поверхности, ассоциированной с многоугольником, на которой введены базисные циклы как в разделе 1.1;
- образы нулей дифференциала при отображении Абеля-Якоби (для многоугольников с разрезами);
- образы полюсов дифференциала при отображении Абеля-Якоби (для многоугольников с выходами на бесконечность).

---

<sup>3</sup>Deconinck B., Heil M., Bobenko A.I., van Hoeij M., Schmieß M. Computing Riemann theta functions. // Mathematics of Computation 73 (2004), pp. 1417-1442.

Задача вычисления интеграла Кристоффеля-Шварца с уже известными параметрами заменяется задачей вычисления отображения, обратного к  $x(\mathbf{u})$ . Для ее решения – т.е. вычисления образа точки  $x_0 \in \mathbb{H}$  при отображении Абеля-Якоби – необходимо решить систему уравнений на  $\mathbf{u}$ , состоящую из условий принадлежности точки  $\mathbf{u}$  локусу верхней полуплоскости  $\mathbf{u}(\mu(\mathbb{H}))$  и условия  $x(\mathbf{u}) = x_0$ .

Решению этих задач для двух конкретных комбинаторных типов многоугольников посвящен **раздел 1.3**. Выводятся условия на локус гиперэллиптических поверхностей, ассоциированных с областями вида, представленного на рис. 1, в их якобианах. Для этих областей также приведены и обоснованы явные формулы отображений  $w(\mathbf{u})$  и  $x(\mathbf{u})$  (см. схему метода (3)), приведен вывод систем уравнений на вспомогательные параметры.

В **разделе 1.4** построена модель пространства вспомогательных параметров для многоугольников, представленных на рис. 1. Показано, что решения нелинейных систем, построенных в разделе 1.3, единственны в областях, задаваемых определенными линейными неравенствами.

**Вторая глава** посвящена разработке численного метода решения систем из раздела 1.3 и механизма генерации начального приближения. Отмечается следующее сходство традиционного и рассмотренного в главе 1 полуаналитического подхода к вычислению конформного отображения: в обоих случаях осуществляется поиск приближенных значений набора вспомогательных параметров, а значение отображения в некоторой точке дается аналитической формулой, зависящей от этих параметров. Отмечено влияние явления кроудинга (скучивания) – вследствие него для вычисления значения отображения с некоторой абсолютной точностью  $\varepsilon$  могут потребоваться значения вспомогательных параметров, вычисленные со значительно бóльшей точностью. Чтобы решить эту проблему, предлагается подбирать свою систему вспомогательных параметров для каждого многоугольника.

В **разделе 2.1** приведена конструкция двух *пространств модулей* – пространства допустимых многоугольников (данного комбинаторного типа)  $P_{perm}$  и пространства модулей вещественных гиперэллиптических кривых рода  $g$  с  $k$  отмеченными точками на овалах  $M_g\mathbb{R}_k$ . Точки в  $P_{perm}$  – прямоугольные многоугольники данного комбинаторного типа с точностью до сдвигов и гомотетий, точки в  $M_g\mathbb{R}_k$  – вещественные гиперэллиптические кривые рода  $g$  с  $g + 1$  вещественным овалом и  $k$  отмеченными точками на овалах с точностью до конформного автоморфизма.

Явное построение (система координат) дана для многоугольника типа показанного слева на рис. 1. Показано, что любые две точки в  $P_{perm}$  можно соединить конечнозвенной ломаной. Доказано

**Утверждение 2.1.** *Решение задачи о конформном отображении для многоугольника, приведенного слева на рисунке 1, с произвольными геометрическими размерами, задает взаимно-однозначное отображение из  $P_{perm}$  в  $M_2\mathbb{R}_3$ .*

Переход от поиска параметров интеграла Кристоффеля-Шварца к поиску параметров ассоциированной с многоугольником поверхности представлено как замена координат в  $M_2\mathbb{R}_3$ . Таким образом, решение трансцендентных систем из раздела 1.3 эквивалентно нахождению отображения из  $P_{perm}$  в  $M_2\mathbb{R}_3$ . На основе этого сформулирован

**Алгоритм приближенного решения систем на вспомогательные параметры.**

1. Выбрав некоторые допустимые параметры, вычислить размеры соответствующего им многоугольника, и зафиксировать его как  $\mathcal{P}_0$ .
2. Затем точки, соответствующие в  $P_{perm}$  искомому многоугольнику  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{P}_0$ , соединяются ломаной.
3. Ломаная разбивается точками  $\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_n = \mathcal{P}$ . Если уже известно решение системы для многоугольника  $\mathcal{P}_i$ , оно используется как начальное приближение при ее решении для  $\mathcal{P}_{i+1}$ . Для приближенного решения системы используется метод Ньютона. При этом на каждом шаге метода контролируется выполнение неравенств, приведенных в разделе 1.4.
4. Если метод Ньютона не позволяет достичь желаемой точности за фиксированное число шагов  $N$ , оставшиеся отрезки разбиваются пополам, далее см. п.3. При поиске параметров для промежуточных многоугольников можно ради экономии времени предъявлять более низкие требования к точности.

Приведены результаты численных экспериментов, позволяющие предположить, что многоугольникам, прообразы вершин которых сильно скучены, соответствуют вспомогательные параметры, близкие к «граничным» значениям (т.е. таким, при которых часть неравенств, задающие пространство параметров, обращаются в равенства). В **разделе 2.2** рассмотрено влияние скучивания на матрицу периодов, и то, как близость матрицы периодов к границам допустимой области влияет на вычисление решения системы.

**Раздел 2.3** содержит модификацию алгоритма, основанную на принадлежащей Зигелю теореме. Данная модификация (**алгоритм 2**)

1. для очередного ньютоновского приближения с помощью алгоритма Зигеля строится модулярное преобразование  $\Gamma$ ,
2. уравнения системы, полученные интегрированием по базисным циклам на поверхности преобразуются в соответствии с действием  $\Gamma$ ;

3. продолжается поиск решения уже для модифицированной системы.

**Третья глава** посвящена основным приложениям численно-аналитического метода. К этим приложениям относятся:

- тестирование других существующих методов вычисления конформных отображений, а также методов приближенного решения уравнения Дирихле с кусочно-постоянными граничными условиями в многоугольных областях;
- вычисление гармонических функций в многоугольных областях, построение линий уровня этих функций, имеющих физический смысл эквипотенциалей и силовых линий, а также дизайн областей;
- генерация ортогональных сеток в областях, имеющих форму прямоугольного многоугольника.

Способ генерации ортогональной сетки в ограниченных прямоугольных областях с помощью полуаналитического метода, изложенного в главе 1, содержится в **разделе 3.1**. Ортогональная сетка в многоугольнике  $D$  строится как конформный образ прямоугольной сетки в прямоугольнике  $R_\tau = [-\tau; \tau] \times [-1; 1]$ . При этом требуется, чтобы вершины прямоугольника отображались в некоторые вершины  $D$ , углы при которых равны  $\frac{\pi}{2}$  (тогда, в частности, вершины прямоугольника не будут особыми точками отображения). Число  $\tau$ , при котором последнее условие выполняется (называемое *конформным модулем* области  $D$  с отмеченными вершинами) существует и единственно – приводится явная формула, выражающая его через вспомогательные параметры прямоугольного многоугольника (для области  $D_1$  на рис. 2)

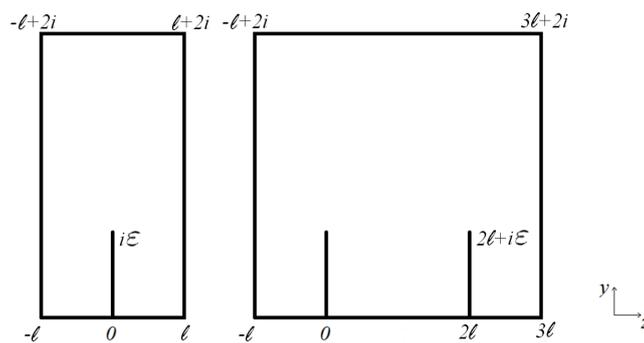


Рис. 2: Многоугольники  $D_1$  (слева) и  $D_2$ .

Предложен несложный вычислительный тест, позволяющий оценить точность метода конформного отображения для данного многоугольника. Поскольку согласно риманову принципу симметрии конформный модуль области  $D_2$  будет ровно вдвое больше конформного модуля области  $D_1$  на рис. 2, оценка точности метода получается при сравнении приближенных значений конформных

модулей двух областей. Данный тест проводится при различных длинах сторон  $D_1$  для предлагаемого полуаналитического метода и для метода, реализованного в пакете SCPACK.

В **разделе 3.2** изложен алгоритм вычисления гармонических векторных полей в многоугольных областях с помощью полуаналитического метода вычисления конформных отображений.

Перенос гармонической функции с помощью конформного отображения сам будет гармонической функцией. В связи с этим численные методы конформных отображений применяются в двумерных задачах теории потенциала. Приведены примеры расчета гармонических полей в многоугольных областях с углами, кратными  $\frac{\pi}{2}$ . Также рассмотрена задача дизайна гармонического поля, т.е. получения решения с нужными свойствами путем изменения геометрических параметров области.

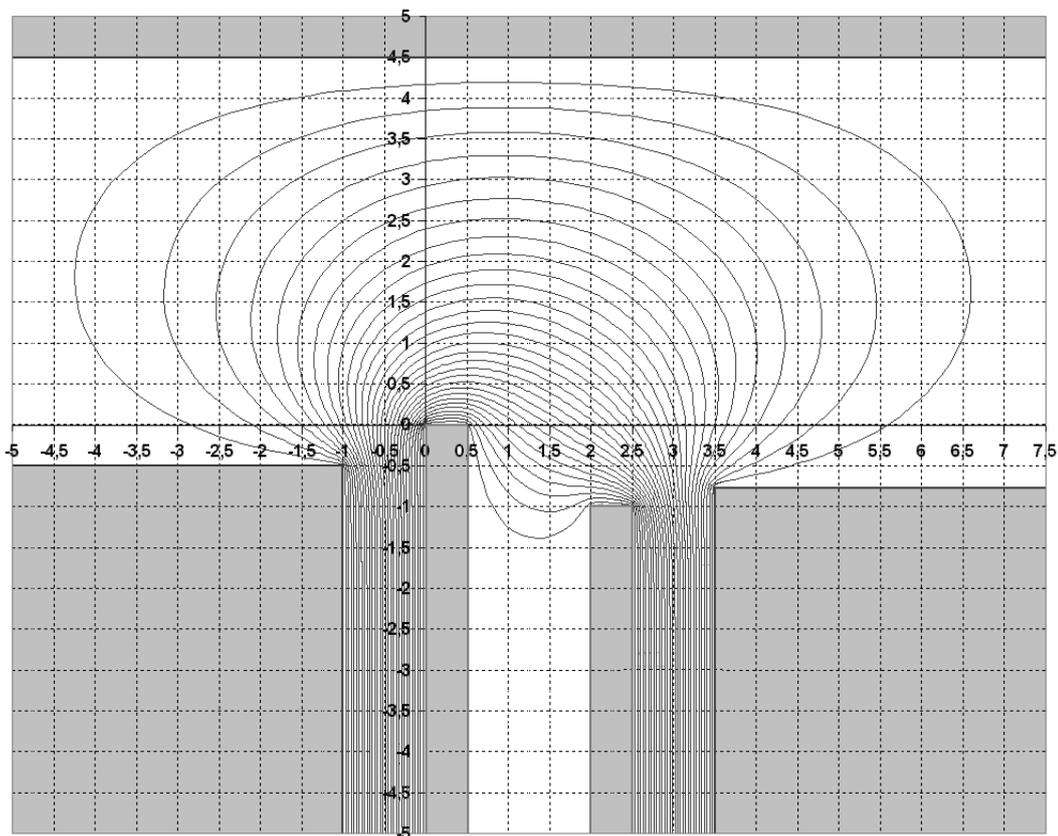


Рис. 3: Линии уровня гармонической функции в одиннадцатиугольнике.

В **разделе 3.3** изложены результаты совместной с С.Ю. Лямаевым работы по тестированию решений, полученных с помощью Ani2D (Advanced Numerical Instruments). В этом пакете, написанном Ю.В. Василевским, В.Н. Чугуновым, А.А. Даниловым и К.Н. Липниковым, реализован конечно-элементный метод решения граничных задач для эллиптических уравнений. Конечно-элементные

функции строятся на адаптивной неструктурированной сетке. Есть возможность многоуровневого локального измельчения и разгрубления сетки, что позволяет достигать более точного решения в «проблемных» частях области.

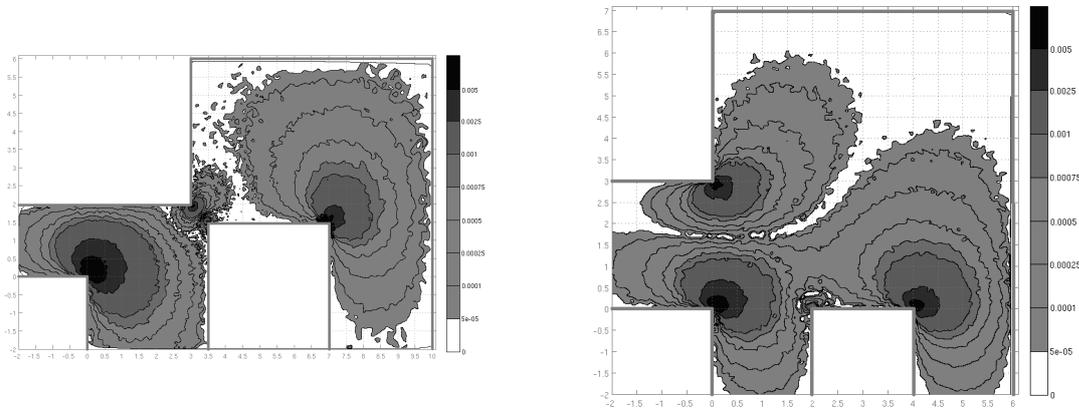


Рис. 4: Поле ошибок

С помощью пакета Ani2D находилась неструктурированная сетка для решения задачи Дирихле с постоянными граничными условиями в многоугольнике, показанном слева на рис. 1:

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= 0, & \phi(w) &= -1, & w &\in [w_c, w_6] \cup [w_6, w_a], \\ \phi(w) &= 0, & w &\in [w_b, w_4] \cup [w_4, w_5] \cup [w_5, w_c], \\ \phi(w) &= 1, & w &\in [w_a, w_1] \cup [w_1, w_2] \cup [w_2, w_3] \cup [w_3, w_b] \end{aligned} \quad (4)$$

Затем с помощью алгоритма из главы 1 вычислялось значение конформного отображения  $z(w)$  многоугольника на верхнюю полуплоскость в узлах сетки. Функция  $\phi(z(w)) = \frac{1}{\pi} \arg \left( \frac{z(w)-z_a}{z(w)-z_b} \right)$ , где  $z_a, z_b$  — прообразы соответствующих выходов на бесконечность, являющаяся решением задачи Дирихле в многоугольнике, сравнивалась с приближенным решением, предоставляемым Ani2D.

На рис. 4 показано поле разности между конечно-элементным и численно-аналитическим решениями. Видно, что наибольших значений разность достигает вблизи особенностей решения. Вид поля разности позволяет установить области, в которых сетка должна далее измельчаться для получения более точного решения с помощью Ani2D

В **разделе 3.4** изложены результаты совместной с Н.В. Ключневым работы по исследованию характеристик гидродинамической устойчивости течения Пуазейля в канале, поперечное сечение которого является периодической областью с гребенчатым оребрением (период такой области – многоугольник  $D_1$ , изображенный на рис. 2).

Исследование с помощью технологии, предложенной А.В. Бойко, Ю.М. Нечепуренко и Н.В. Ключневым, влияния продольного волнистого оребрения

на устойчивость течения Пуазейля в канале постоянного сечения (такое течение также называют основным) сводится к решению двух двумерных задач. Эти задачи – уравнение Пуассона для вычисления профиля основного течения и частичные проблемы собственных значений для расчета кривых нейтральной устойчивости. При этом для построения расчетной сетки используется отображение Гордона-Холла. Наряду с волнистым оребрением интерес представляет также гребенчатое оребрение, имеющее вид бесконечно тонких продольных пластин. Однако такое оребрение не может быть задано функцией от координат, поэтому для него неприменимо отображение Гордона-Холла. Было предложено применить численно-аналитический метод конформного отображения для автоматического построения расчетной сетки в случае гребенчатого оребрения.

В частности, проведены расчеты основного течения для канала с гребенчатым оребрением, параметры периода поперечного сечения которого (см. рис. 2)  $2l = 1$ ,  $\epsilon = 0,4$ . В использованной ранее технологии производные отображения, используемого для построения расчетной сетки, находятся численно методом коллокаций. В случае конформного отображения эти производные можно вычислить аналитически. Проведены численные эксперименты по сравнению основного течения, вычисленного на грубой и мелкой сетке, для сеток размером  $35 \times 40$ ,  $105 \times 40$  и  $315 \times 40$  узлов. Результаты показывают, что при использовании аналитического вычисления производных сходимость решений по шагу сетки лучше на порядок.

В **заключении** сформулирован основной результат работы – полуаналитический метод конформного отображения верхней полуплоскости на многоугольники сложной геометрии и обратно, и его модификация, в частности:

- Для многоугольников, имеющих до 8 прямых углов и до 5 выходов на бесконечность, построена система уравнений на вспомогательные параметры и программно реализован алгоритм их численного решения.
- Для приближенного решения системы из п. 1 применены модулярные преобразования и алгоритм Зигеля. Численные эксперименты показали, что использование этой методологии позволяет находить параметры отображения и вычислять само отображение с хорошей точностью даже в условиях сильного сгущения точек.
- Предложен класс тестовых задач для проверки точности вычислительных пакетов SCPACK (вычисление конформного отображения на многоугольные области) и Ani2D (решение граничных задач для эллиптических уравнений в двумерных областях). Этот класс включает в себя многоугольники, мо-

делирующие различные особенности плоских областей (разрезы, входящие углы, узкие перешейки, выходы на бесконечность и т.д.)

- Для исследования задачи устойчивости течения в канале с гребённым оребрением предложены автоматически генерируемые конформные сетки. Сравнение результатов для гребенчатого и для волнистого оребрения показывает адекватность использования конформной сетки в данной задаче.

## Публикации автора по теме диссертации

1. *Григорьев О.А.* Численно-аналитический метод конформного отображения многоугольников с шестью прямыми углами. // ЖВМ и МФ. 2013. 53, № 10. 27–36.
2. *Григорьев О.А., Ключнев Н.В.* Применение численно-аналитического метода конформного отображения для построения сетки в оребренном канале. // Вычислительные методы и программирование. 2014. 15. 487-498
3. *Григорьев О.А.* О методе нахождения параметров интеграла Кристоффеля-Шварца для прямоугольных многоугольников. // Труды 55-й научной конференции МФТИ: тезисы доклада. Москва-Долгопрудный-Жуковский: МФТИ. 2012. 174.
4. *Григорьев О.А.* О численно-аналитическом алгоритме конформного отображения верхней полуплоскости на многоугольник с восемью прямыми углами. // Труды 56-й научной конференции МФТИ: тезисы доклада. Москва-Долгопрудный-Жуковский: МФТИ. 2013. 141-142.
5. *Григорьев О.А.* Построение конформных сеток в прямоугольных многоугольниках. // Тихоновская конференция: Научная конференция, Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 28 октября - 1 ноября 2013 г.: тезисы докладов. / Отв. ред. В.И. Дмитриев. М., МАКС Пресс, 2013.
6. *Григорьев О.А.* Численно-аналитический метод генерации ортогональных сеток в прямоугольных многоугольниках. // Современные проблемы прикладной математики и информатики (МРАМС'2014): тезисы докладов международной конференции (Дубна, 25-29 августа 2014 г.) Дубна, ОИЯИ, 2014.