На правах рукописи

Ольшанский Максим Александрович

Равномерные по параметру многосеточные и итерационные методы

01.01.07 – вычислительная математика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2006

Работа выполнена на механико-математическом факультете Московского Государственного Университета им. М.В. Ломоносова

Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Астраханцев Г.П.
	доктор физико-математических наук, профессор Карамзин Ю.Н.
	доктор физико-математических наук, профессор Крукиер Л.А.
Ведущая организация:	Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН

Защита состоится 27 октября 2006г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 002.045.01 в Институте вычислительной математики РАН по адресу: 119991, г. Москва, ГСП-1, ул. Губкина, 8.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института вычислительной математики РАН.

Автореферат разослан 2006 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук Г.А. Бочаров

Общая характеристика работы

Диссертация посвящена анализу многосеточных и других итерационных методов, обладающих равномерной по параметрам оценкой скорости сходимости. Методы применяются для нахождения приближенного решения краевых задач, возникающих в вычислительной гидродинамике. Основные черты полученных результатов — построение устойчивых аппроксимаций методом конечных элементов и получение нетривиальных оценок сходимости итерационных методов на всем спектре физических и численных параметров, которые определяют дискретную задачу.

Актуальность тематики. История многосеточных методов берет свое начало с работ российских математиков Р.П.Федоренко (1964) и Н.С.Бахвалова (1966). Позже многосеточный метод был "открыт" заново в работах А.Брандта (1973, 1977) и В.Хакбуша (1976). В конце 70х годов метод получил широкое признание, и количество публикаций стало стремительно расти. Современная теория метода была заложена в начале 80-х годов. В 1985 году выходит монография В.Хакбуша со строгим изложением абстрактной теории многосеточных методов и описанием многих приложений. Теория и практика применения метода продолжает развиваться и пополняться. В то время как многосеточные методы стали обязательной составляющей в большинстве прикладных пакетов, и им посвящена огромная библиография, насчитывающая, в том числе, около десятка книг, в русскоязычной литературе им уделено относительно мало внимания. Из книг можно назвать только монографию В.В. Шайдурова (1988) и недавно опубликованную монографию [2]. Итерационные методы имеют более чем вековую историю - названия многих из них, например, Ньютона, Якоби, говорят за себя. К примеру, самому известному вариационному методу, сопряженных градиентов, в 2002 году исполнилось 50 лет.

Широкое использование многосеточных методов обусловлено их свойством оптимальности по числу неизвестных, входящих в систему алгебраических уравнений. В терминах сходимости итераций это свойство можно сформулировать как наличие нетривиальной оценки на показатель сходимости, не зависящей от размерности системы (или от параметра дискретизации h в случае использования квазиравномерных сеток). Однако при использовании многосеточных методов для решения многих практических задач обнаруживается, что их скорость сходимости может сильно зависеть от значений физических и вычислительных параметров, определяющих систему, например, коэффициентов вязкости, диффузии, плотности, параметров стабилизации и других. При достижении этими параметрами некоторых значений метод может сходиться очень медленно или расходиться. Сказанное выше относится и к итерационным методам с переобуславливателями, построенными на основе многосеточных методов. На построение универсальных по параметрам итерационных методов для решения различных задач в последние десятилетия были направлены усилия многих инженеров и математиков. Универсальным по параметрам итерационным методом будем называть метод, обеспечивающий приемлемую сходимость при всех допустимых значениях физических и численных параметров, входящих в систему уравнений. В англоязычной литературе для обозначения этого свойства используется термин “robust” и его производные. Особенно трудным математическим вопросом считается анализ таких методов, т.е. доказательство равномерных оценок при тех или иных условиях на дифференциальную задачу и метод дискретизации. Среди множества работ в этом направлении отметим работы Бахвалова Н.С., Bramble J.H., Elman H.C., Hackbusch W., Кобелькова Г.М., Пальцева Б.В., Pasciak J.E., Reusken A., Stevenson R., Xu J., Wittum G. Приведем в качестве одного примера изучаемый в диссертации переобуславливатель Каху-Шабата для обобщенной задачи Стокса, который был предложен в 1988 году. Несмотря на активное использование этого метода в расчетах несжимаемых вязких течений и большой интерес к данной тематике в научных кругах, вопрос получения равномерных оценок для него оставался открытым более 10 лет. Другим примером из диссертации может служить многосеточный метод для задачи конвекции-диффузии. Эти уравнения были рассмотрены одними из первых для приближенного решения многосеточным методом, и за последние 20 с лишним лет накопилось достаточно практического опыта, как это можно делать более или менее эффективно. При доминировании конвекции, однако, с точки зрения математического анализа алгоритмов задача считается (по праву) настолько трудной, что среди множества публикаций можно выделить всего несколько работ, где получены равномерные оценки для простейших случаев.

В целом отметим, что несмотря на обширную библиографию, анализ многосеточных методов и переобуславливателей для несимметричных задач (исключая случай доминирования симметричной части) находится в зачаточном состоянии. Получения результатов для сильно несимметричных задач и составляет основу диссертации.

В качестве метода дискретизации в диссертации используется метод конечных элементов, как широко используемый в реальных приложениях и допускающий математический анализ на основе вариационных принципов. Стоит признать, что не любое уравнение в частных производных можно на сегодняшний день эффективно численно решить, используя метод конечных элементов и многосеточный метод. Однако для многих уравнения, имеющих физический подтекст, такой подход эффективен. В диссертации идет речь о применении многосеточного метода (вместе с переобусловленными итерационными методами) к решению ряда задач, возникающих на практике, например, в гидродинамике и моделировании тепло-массопереноса.

Целью исследования является разработка и изучение итерационных методов, сходимость которых остается достаточно высокой при любых допустимых значениях физических и численных параметров, входящих в систему уравнений, а также получение оценок устойчивости для соответствующих дискретных систем. Главным требованием к теоретической части исследования является строгое доказательство нетривиальных оценок на показатели сходимости итерационных методов, не зависящих от численных и физических параметров системы, а также получение оценок устойчивости и сходимости метода конечных элементов с анализом явной зависимости от данных параметров.

Методология исследования. Доказательство сходимости многосеточных методов основано на свойствах аппроксимации и сглаживания. Эти алгебраические свойства требуют различной техники доказательства. Свойство сглаживания доказывается с помощью средств линейной алгебры, а свойство аппроксимации следует из утверждений о сходимости метода конечных элементов. Доказательство этих утверждений, в свою очередь, существенно базируется на априорных оценках для решений дифференциальных задач, в том числе на оценках вторых производных решений. В общем случае подобные оценки известны. Однако, имея целью доказательство равномерной сходимости итерационных методов, в диссертации находится в явном виде зависимость "констант" из априорных оценок от физических параметров, входящих в постановку дифференциальных задач. Более того, в оценках сходимости метода конечных элементов так же требуется получить зависимость констант от этих параметров, причем в большинстве случаев – оптимальную по порядку. Для достижения этих целей используются средства функционального анализа и теории аппроксимации. Численные эксперименты служат для получения практической информации об исследуемых методах.

Достоверность, научная новизна. Достоверность работы основана на изложении материала в виде последовательности лемм и теорем, иллюстрации теоретического материала результатами численных экспериментов. В диссертации уделяется большое внимание обзору известных результатов для каждой конкретной задачи, их связи с полученными результатами, а также отслеживается соответствие доказанных оценок экспериментальному опыту, в том числе, накопленному в работах других авторов.

Научную новизну работы составляет анализ многосеточных методов для систем линейных алгебраических уравнений с доминирующими косо-симметрическими членами; доказательство равномерных по параметрам оценок сходимости для уравнений конвекции-диффузии и системы с косо-симметрической реакцией. При этом, в отличии от работ других авторов, не накладывается ограничений на шаг самой грубой сетки, а арифметическая сложность одной итерации остается оптимальной. Впервые проводится исследование консервативной (квази-)линеаризации уравнений Навье-Стокса в вихревой форме. Построение эффективных итерационных методов и оценок сходимости устойчивых методов конечных элементов для таких систем также проводится впервые. Новым является доказательство равномерных по параметру оценок для метода Каху-Шабата для обобщенной задачи Стокса в областях, допускающих H^2 регулярность задачи Пуассона. Этот метод был предложен в 1988 году, но вопрос получения равномерных оценок долго оставался открытым. Не исследовалась ранее задача Стокса с интерфейсом, возникающая в моделях двух-фазных течений. Для этой задачи исследуется устойчивость метода конечных элементов, строятся равномерные по скачку в коэффициенте вязкости переобусловливатели, доказываются априорные оценки. Доказываются новые оценки сходимости стабилизированных методов конечных элементов для (квази-) линеаризированных уравнений Навье-Стокса для несжимаемых сред.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическая значимость заключается в развитии математического аппарата анализа сходимости многосеточных методов для задач с доминирующей кососимметрической частью; в разработке методов построения переобуславливателей нелокальных операторов окаймления для седловых задач, основанных на свойствах аппроксимируемых систем дифференциальных уравнений; в развитии теории стабилизированных методов конечных элементов для задач динамики жидкости.

Практическая ценность состоит в том, что результаты диссертации закладывают твердую математическую основу для геометрических многосеточных методов, широко используемых в прикладных программных пакетах для моделирования процессов тепло-массопереноса; позволяют лучше понять потенциал и ограничения применения таких методов. Равномерные по параметрам итерационные методы, предложенные и исследованные в настоящей работе, могут служить составной частью программных продуктов для моделирования ламинарных, турбулентных, двухфазных течений жидкости и других процессов механики сплошной среды, где требуется проводить расчеты в широком диапазоне физических параметров. Численные методы для уравнений Навье-Стокса с нелинейными членами в вихревой форме важны для использования методов аппроксимации, удовлетворяющих законам сохранения базовых инвариантов: энергии и завихренности потока жидкости, а также для расчетов течений с учетом Кориолисовых сил.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались автором: на международной конференции “Математические идеи П.Л.Чебышева и их приложение к современным проблемам естествознания ” (Обнинск, 2006), на международной конференции “Computational Methods for Multidimensional Flows” (Гейдельберг, 2005), на Российко-Голландском семинаре “Robust numerical methods for singular-perturbed problems” (Москва, 2005), Ежегодной конференции “Ломоносовские чтения” (Москва, 2005), на 13-ой международной конференции “European Conference on Mathematics for Industry” (Эйндховен, 2004), на 4-ой и 7-ой международных конференциях “European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering” (Афины 1998, Ювяскюла 2004), на международных конференциях им. Петровского “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы” (Москва 2001 и 2004), на 2-ой, 3-ей, 4-ой и 5-ой международных конференциях “European Conference on Numerical Mathematics and Advanced Applications” (Гейдельберг 1997, Ювяскюла 1999, Искья 2001, Прага 2003), 2-ой международной конференции “Second M.I.T. Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics” (Бостон, 2003), 8-ой международной конференции “Уравнения Навье-Стокса и приложения” (С.-Петербург, 2002), Международном Математическом Конгрессе (Берлин, 1998), Российско-Голландском семинаре ‘Robust numerical solution methods for convection- diffusion and Navier-Stokes equations’ (Амстердам-Наймеген, 1998), на международной конференции “Preconditioned Iterative Solution Methods for Large Scale Problems in Scientific Computations” (Наймеген, 1997), на научно-исследовательских семинарах Института вычислительной математики РАН, Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Вычислительного Центра РАН, кафедры вычислительной математики мех.-мат. ф-та. МГУ, университетов Марилэнда, Эмори, Вандербилт, Дортмунда, Гейдельберга, Ахена, Линца, Геттингена, Технического Университета Джорджии.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 22 работы, из них 1 монография, 16 публикаций в рецензируемых журналах, 4 публикации в материалах конференций.

Личный вклад автора. Вклад автора в совместные работы заключался: в формировании постановки проблемы [2,6,10,11,16], идеи решения [1,2,6,7,10,11,12,15], теоретическом обосновании [1,5,7,15,16], совместном теоретическом обосновании [4, 6, 10, 11, 12, 13, 14], постановке и анализе численных экспериментов [4,6,10,13,15,16].

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Текст работы изложен на 285 страницах, содержит библиографию из 188 наименований, 19 рисунков и 36 таблиц.

Содержание диссертации

Во **введении** дается понятие универсальных по параметрам итерационных методов, обосновывается актуальность построения и исследования таких методов, формулируются задачи математической физики, для которых разрабатываются универсальные по параметрам многосеточные и переобусловленные итерационные методы; проводится обзор известных результатов и подходов к решению поставленных задач, обсуждается ценность полученных результатов и новизна предлагаемых методов.

Главы 1 и 2 содержат анализ дифференциальных задач и метода конечных элементов, соответственно. Итерационным методам и анализу сходимости посвящена глава 3. Отметим, что материал второй и третей главы не только представляет самостоятельный интерес, но также необходим для целей главы 3.

В **главе 1**, состоящей из семи разделов, проводится исследование дифференциальных задач. В **разделе 1.1** рассматривается задача реакции-диффузии:

$$\begin{aligned} -\varepsilon\Delta\, u + d(\mathbf{x})\, u &= f \quad \text{в} \;\; \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{на} \;\; \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

Для задачи (1) доказываются априорные оценки на L^2 нормы первых и вторых производных решения. В **разделе 1.2** рассматриваются уравнения конвекции-диффузии:

$$\begin{aligned} -\varepsilon\Delta u + \mathbf{a}\cdot\nabla u &= f \quad \text{в} \;\; \Omega := (0,1)^2, \\ u &= 0 \quad \text{на} \;\; \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2}$$

Рассматривается случай $\mathbf{a} = (1, 0)$, а также задача с условиями Неймана на границе вытекания. Для задачи (2) доказываются оценки специальных норм решения и норм первых и вторых производных решения. Изучается их зависимость от ε. Для задачи с условиями Неймана на границе вытекания доказывается следующий результат:

Теорема 1.1 *Пусть $f \in \mathbb{L}_2(\Omega)$, u – решение задачи конвекции-диффузии с $\mathbf{a} = (1, 0)$ и коэффициентом диффузии $\varepsilon_k \geq \varepsilon$ вдоль линий тока, тогда существует константа c, не зависящая от ε_k и ε такая, что*

$$\begin{aligned}
\|u\| + \|u_x\| &\leq c\,\|f\|, \\
\sqrt{\varepsilon}\|u_y\| &\leq c\,\|f\|, \\
\varepsilon_k\|u_{xx}\| + \sqrt{\varepsilon\varepsilon_k}\|u_{xy}\| + \varepsilon\|u_{yy}\| &\leq c\,\|f\|, \\
\int_{\Gamma_E} u^2\,dy + \varepsilon_k \int_{\Gamma_W} u_x^2\,dy + \varepsilon \int_{\Gamma_E} u_y^2\,dy &\leq c\|f\|^2,
\end{aligned}$$

где Γ_W – граница втекания, Γ_E – граница вытекания. Здесь и далее $\|\cdot\|$ обозначает норму в L_2. Более того, если $\phi \in \mathbb{H}^1_\infty(0,1)$ такая, что $0 \leq -\varepsilon_k\phi_x \leq \phi$, и $\|\cdot\|_\phi := \|\phi^{\frac{1}{2}}\cdot\|$, $\|\cdot\|_{-\phi_x} := \|(-\phi_x)^{\frac{1}{2}}\cdot\|$, то решение удовлетворяет оценкам

$$\begin{aligned}
\|u_x\|_\phi &\leq 2\|f\|_\phi \\
\varepsilon_k\ \phi(0)\int_{\Gamma_W} u_x^2\,dy &\leq \|f\|_\phi^2 \\
\frac{1}{4}\|u\|^2_{-\phi_x} + \varepsilon\|u_y\|^2_\phi &\leq (\phi\, f, u).
\end{aligned}$$

В теореме 2.1 подобные оценки доказываются для задачи с условиями Дирихле на границе вытекания. Из этих теорем получаются следствия 1.1 и 1.2 об оценках зависимости решений вверх по течению от f и об оценках решений вдали от Γ_E.

В **разделе 1.3** изучается система уравнений:

$$\begin{aligned}
-\varepsilon\Delta\mathbf{u} + \mathbf{w}\times\mathbf{u} + \alpha\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad &\text{в}\ \ \Omega, \\
\mathbf{u} = 0 \quad &\text{на}\ \ \partial\Omega,
\end{aligned} \tag{3}$$

Далее будет показано, что эта система возникает как вспомогательная при использовании (полу-)неявных схем для уравнений Навье-Стокса с нелинейными членами в вихревой форме, и $\mathbf{w} = \operatorname{curl}\mathbf{v}$, где $\mathbf{v}$ – известное поле скоростей. Заметим, что слагаемое $\mathbf{w}\times\mathbf{u}$ в системе (3) можно интерпретировать как косо-симметрическую реакцию. В диссертации детально разобран случай $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, для которого $\operatorname{curl}\mathbf{v}$ – скалярная функция, которую мы обозначим через $w := \mathbf{w}$, а $w \times \mathbf{u}$ – вектор-функция $(-w\,u_2,\, w\,u_1)$. Для задачи (3) доказываются априорные оценки на L_2 нормы первых и вторых производных решения. Изучается их зависимость от ε, $\|\mathbf{w}\|$ и α. Пусть Ω выбрана так, что для правой части из $\mathbb{L}_2(\Omega)$ решение однородной задачи Дирихле для уравнения Пуассона принадлежит $\mathbb{H}^2(\Omega)$. Это условие будем обозначать, как (H2) условие. В формулировках теорем об априорных оценках для задачи (3), о сходимости метода конечных элементов и многосеточного метода для нее будут использоваться следующие три предположения. Пусть $w \in \mathbb{L}_\infty(\Omega)$ и $c_w := \operatorname{ess\,inf}_\Omega |w|$.
(A1) Условие (A1) выполнено, если $\alpha + c_w > 0$ и

$$\eta := \frac{\|w\|_\infty}{\alpha + c_w} \le C.$$

(A2) Условие (A2) выполнено, если

$$w(\mathbf{x}) \ge 0 \ \text{ п.в. в } \Omega \quad \text{или } w(\mathbf{x}) \le 0 \ \text{ п.в. в } \Omega.$$

(A3) Условие (A3) выполнено, если $\nabla w \in \mathbb{L}_q(\Omega)^2$ для некоторого $q > 2$ и

$$\|\nabla w\|_{L_q} \le C\,\|w\|_\infty.$$

Если w – функция из конечно-элементного пространства, то C предполагается независимым от h. Доказана
Теорема 1.3 *Пусть* $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(\Omega)$, $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1$ *– обобщенное решение задачи* (3)*. Тогда* $\mathbf{u}$ *принадлежит* $\mathbf{H}^2(\Omega)$*, и справедливы оценки*

$$\begin{aligned} \varepsilon\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + \alpha\|\mathbf{u}\|^2 &\le c(\varepsilon,\alpha)\|\mathbf{f}\|^2\ , \\ \varepsilon^2\|\mathbf{u}\|_2^2 + C_P^2\|w\times\mathbf{u}\|^2 &\le 2C_P^2\big(4 + 2c(\varepsilon,\alpha)^2\|w\|_\infty^2\big)\|\mathbf{f}\|^2 \end{aligned}$$

с константами C_P *из оценки* $\|\mathbf{u}\|_2 \le C_P\|\Delta\mathbf{u}\|$, $c(\varepsilon,\alpha) = \frac{C_F^2}{\varepsilon + C_F^2\alpha}$ *и* C_F *из неравенства Фридрихса. Если дополнительно выполнены условия* (A1) *и* (A3)*, то*

$$\varepsilon^2\|\mathbf{u}\|_2^2 + \varepsilon(\|w\|_\infty + \alpha)\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + \alpha^2\|\mathbf{u}\|^2 + \|w\times\mathbf{u}\|^2 \le C\|\mathbf{f}\|^2$$

с константой C*, не зависящей от* $\mathbf{f}$*,* ε*,* α*, и* w*.*
Затем в лемме 4.1 доказываются оценки непрерывности для билинейной формы вариационной постановки задачи.

В **разделе 1.4** рассматривается система обобщенных уравнений Стокса:

$$\begin{aligned} -\varepsilon\Delta\mathbf{u} + \alpha\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad &\text{в} \ \ \Omega, \\ -\operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \quad &\text{в} \ \ \Omega, \\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0, \quad &\int_\Omega p\,dx = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

Для системы (4) доказывается равномерная по ε спектральная эквивалентность дополнения Шура, $A_0 := -\operatorname{div}(-\varepsilon\Delta+\alpha)_0^{-1}\nabla$ (оператора окаймления для давления), и специального переобуславливателя в случае достаточно произвольных двух- и трехмерных областей. Для этих целей доказывается
Теорема 1.4 *Пусть* $\mathbf{n}$ *– внешняя нормаль к* $\partial\Omega$*,* A_1 *– дополнение Шура для* (4) *с краевыми условиями* $\mathbf{u}{\cdot}\mathbf{n} = 0, \operatorname{curl}\mathbf{u}{\times}\mathbf{n} = 0$ *(в двумерном случае* $\mathbf{u}{\cdot}\mathbf{n} = \operatorname{curl}\mathbf{u} = 0$*). Для произвольного* $p \in \mathbb{L}_2^0$*, положим* $q = A_1 p$*. Тогда* $p = \varepsilon\, q - \alpha\, r$*, где* $r := \Delta_N^{-1} q$ *– решение задачи Неймана*

$$\Delta r = q, \quad \left.\frac{\partial r}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0.$$

Теорема позволяет записать $A_1^{-1} = \varepsilon\, I - \alpha\,\Delta_N^{-1}$. Лемма 1.10 доказывает обобщенное неравенство Нечаса в случае выполнения условия (H2). На основе этой леммы доказывается
Теорема 1.5 *Существует константа* $c(\Omega) > 0$*, не зависящая от* ε *и* α *такая, что*

$$c(\Omega)A_1 \le A_0 \le A_1.$$

Далее изучается обобщенная задача Стокса со стабилизирующей добавкой $\xi(\operatorname{div}\mathbf{u}, \operatorname{div}\mathbf{v})$ в вариационной постановке задачи (т.н. ∇div стабилизация). В теореме 1.8 доказываются оценки на показатель обусловленности задачи $C(\gamma,\Gamma)$, определяемый как отношение констант непрерывности, Γ, и infsup устойчивости, γ, для билинейной формы задачи с седловой точкой. Для задачи (4) эти оценки даны в **Теореме 1.9** *Справедливы оценки*

$$C(\gamma,\Gamma) \le \frac{4(\sqrt{5}+1)}{c_0^2}\frac{\max\{c_0^2\,,\,\varepsilon+\xi\}}{\min\{1\,,\,\sqrt{\varepsilon+\xi}\}}, \quad \text{\textit{если}} \quad \alpha = 0\ , \tag{5}$$

$$C(\gamma,\Gamma) \le \frac{4(\sqrt{5}+1)}{c_0^2}\frac{\max\{c_0^2\,,\,\varepsilon+C_F^2+\xi\}}{\min\{1\,,\,\sqrt{\varepsilon+\xi}\}}, \quad \text{\textit{если}} \quad \alpha = 1, \tag{6}$$

где c_0 – константа из неравенства Нечаса.
Далее в следствии 1.3 анализируется влияние ∇div стабилизации на обусловленность непрерывной задачи.

При моделировании двух-фазных течений возникает необходимость в решении следующей модельной задачи, которая рассматривается в **разделе 1.5**:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\nu(\mathbf{x})\mathrm{D}\mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{f} &\quad \text{в} \ \ \Omega, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 &\quad \text{в} \ \ \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 &\quad \text{на} \ \ \partial\Omega, \end{aligned} \tag{7}$$

с кусочно-постоянной вязкостью:

$$\nu = \begin{cases} 1 & \text{в} \ \ \Omega_1 \\ \varepsilon > 0 & \text{в} \ \ \Omega_2. \end{cases}$$

На интерфейсе (границе между подобластями), $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$, задаются условия непрерывности поля скоростей и нормальной составляющей тензора напряжений. Для анализа задачи оказалось необходимым ввести пространство для давления с нестандартной факторизацией $\mathbb{M} := \{\, p \in \mathbb{L}_2(\Omega) \mid \int_\Omega \nu^{-1} p(x)\,dx = 0\,\}$ и весовой нормой $(p,q)_M := \int_\Omega \nu^{-1}\,p\,q\,dx$. В пространстве для скоростей вводится норма $\|\mathbf{u}\|_\nu := (\nu\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{u})^{\frac{1}{2}}$. Доказан следующий результат, обобщающий

неравенство Нечаса на случай разрывного коэффициента:
Теорема 1.10 Пусть $\Omega_i,\ i=1,2$ липшецевы области, тогда существует константа $C>0$, не зависящая от ε такая, что

$$\sup_{\mathbf{u}\in\mathbf{H}_0^1}\frac{(\operatorname{div}\mathbf{u},p)}{\|\mathbf{u}\|_\nu}\ \geq\ C\|p\|_M\quad\forall\ p\in\mathbb{M}$$

Этот результат является ключевым для априорных оценок для решений (7), доказанных далее в разделе 1.5.

В **разделе 1.6** рассматриваются неявные схемы для уравнения Навье-Стокса несживаемой вязкой жидкости. Приводятся необходимые в дальнейшем оценки нелинейных членов уравнений. В **разделе 1.7** рассматриваются две системы, которые возникают при (квази-)линеаризации уравнений Навье-Стокса в вихревой и конвективной формах.

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\mathbf{u}+\mathbf{w}\times\mathbf{u}+\alpha\mathbf{u}+\nabla P=\mathbf{f}\quad &\text{в}\ \ \Omega\\ \operatorname{div}\mathbf{u}=0\quad &\text{в}\ \ \Omega, \end{aligned}\tag{8}$$

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\mathbf{u}+\mathbf{a}\cdot\nabla\mathbf{u}+\alpha\mathbf{u}+\nabla p=\mathbf{f}\quad &\text{в}\ \ \Omega\\ \operatorname{div}\mathbf{u}=0\quad &\text{в}\ \ \Omega. \end{aligned}\tag{9}$$

Система (8) возникает благодаря равенству $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}=(\operatorname{curl}\mathbf{u})\times\mathbf{u}+\nabla\left(\frac{\mathbf{u}^2}{2}\right)$, замене кинетического давления в системе Навье-Стокса на давление Бернули $P=p+\nabla\left(\frac{\mathbf{u}^2}{2}\right)$, и дальнейшей линеазации задачи с сохранением фундаментальной оценки:

$$||\mathbf{u}(t)||^2+2\nu\int_0^t||\nabla\mathbf{u}(s)||^2ds\leq||\mathbf{u}_0||^2+2\int_0^t(\mathbf{f}(s),\mathbf{u}(s))ds.$$

Системы (8), (9) дополняются краевыми и интегральными условиями. Для решений систем доказаны априорные оценки. Далее теорема 1.11 доказывает оценки спектрального типа для дополнения Шура систем (8) и (9).

В **главе 2**, состоящей из семи разделов, изучаются устойчивые методы конечных элементов для задач из главы 1. Если не сделано других предположений, то предполагается заданным семейство $\mathcal{T}_h$ квазиравномерных триангуляций Ω с параметром разбиения h.

В **разделе 2.1** для уравнений реакции-диффузии доказываются оценки сходимости метода конечных элементов. В **разделе 2.2** для уравнения конвекции-диффузии рассматривается метод конечных элементов с численной диффузией вдоль потока для семейства конечно-элементных пространств $\mathbb{V}_h$:

$$(\varepsilon+\delta_h h)((u_h)_x, v_x)+\varepsilon((u_h)_y, v_y)+((u_h)_x, v) = (f, v+\delta_h h\, v_x) \quad \forall\, v \in \mathbb{V}_h.$$

Стабилизационный параметр определяется следующим образом:

$$\delta_h = \bar{\delta} \quad \text{если} \quad \frac{h}{2\,\varepsilon} \geq 1, \qquad \text{иначе} \quad \delta_h = 0,$$

$\bar{\delta} \in [\frac{1}{3}, 1]$. Рассматривается случай доминирующей конвекции: $2\varepsilon \leq h$. В этом разделе предполагается равномерная северо-восточная триангуляция области. В § 2.2.3 приводятся доказательства априорных оценок для решения дискретной задачи и оценок решения вдали от границы вытекания. Получаемые оценки аналогичны результатам из теоремы 1.1 для решений дифференциальной задачи. В § 2.2.4 доказываются оценки сходимости метода конечных элементов. Для их формулировки нам понадобятся следующие обозначения: $\Omega_h^W := \{\,(x,y) \in \Omega \mid x < 4|\log_2 h|h\,\}$, $\Omega_h^{int} := \{(x,y) \in \Omega |\, x < 1-3|\log_2 h|h\}$. В **Лемме 2.3** доказываются оценки:

$$\begin{aligned} \|(u-u_h)_x\|_{L^2(\Omega_h^{int})} &\leq c\,\|f_h\| \\ \|(u-u_h)_y\|_{L^2(\Omega_h^{int})} &\leq c\,\frac{h}{\varepsilon}\|f_h\|. \end{aligned}$$

В **Лемме 2.6** доказывается следующий результат: пусть правая часть $f_h \in \mathbb{V}_h$ равна нулю в Ω_h^W, тогда справедлива оценка

$$\|u-u_h\|_{L^2(\Omega_h^{int})} \leq c\,\frac{h_k^2}{\varepsilon}\,\|f_h\|.$$

Оба результата оказываются неулучшаемыми в следующем смысле. В первом случае нельзя заменить норму $\|\cdot\|_{L^2(\Omega_h^{int})}$ на глобальную

$\mathbb{L}_2$-норму, а во втором нельзя отказаться от условия равенства нулю f_h в части области приграничной к Γ_W. Оба эти эффекта проиллюстрированы численными экспериментами.

В **разделе 2.3** для системы уравнений (3) доказывается устойчивость дискретной задачи при малой вязкости. Введем на $\mathbf{H}_0^1$ норму, зависящую от параметра:

$$|||\mathbf{u}|||_\tau = \left(\varepsilon\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + \alpha\|\mathbf{u}\|^2 + \frac{\tau}{\|w\|_\infty}\|w \times \mathbf{u}\|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \tau \geq 0.$$

Доказаны две теоремы о сходимости метода конечных элементов.
Теорема 2.2 *Пусть выполнены условия (A1) и (A2). Если* $h < 2\varepsilon$ *и* $h < 2\alpha$, *также предполагаем выполнение условия (A3). Найдется* $\tau \in (0,1]$, *не зависящее от* $\varepsilon,\ \alpha,\ w,\ \mathbf{u}$ *и* h, *такое, что выполняются следующие неравенства*

$$|||\mathbf{u}-\mathbf{u}_h|||_\tau \leq C_\tau\, h^j(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\mathbf{u}\|_{j+1} + (\alpha^{\frac{1}{2}} + \|w\|_\infty^{\frac{1}{2}})\|\mathbf{u}\|_j)\ , \quad j = 0, 1,$$
$$|||\mathbf{u}-\mathbf{u}_h|||_\tau \leq C_\tau\, h(\varepsilon^{\frac{1}{2}} + (\alpha^{\frac{1}{2}} + \|w\|_\infty^{\frac{1}{2}})h)\|\mathbf{u}\|_2\ .$$

Константы C_τ *не зависят от* $\varepsilon,\ \alpha,\ w,\ \mathbf{u}$ *и* h.
Теорема 2.3 *Предположим выполнение условий (A1), (A2), (A3). Для произвольного* $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(\Omega)$ *имеем оценку сходимости в* L_2 *норме*

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\| \leq C\min\left\{\frac{h^2}{\varepsilon}, \frac{1}{\alpha + \|w\|_\infty}\right\}\|\mathbf{f}\|$$

с некоторой константой C, *не зависящей от* $\varepsilon, \alpha, w, h$ *и* $\mathbf{f}$.
В конце раздела оценки сходимости иллюстрируются результатами численных экспериментов. Показывается, что необходимость условий (A1) – (A3) в предположениях теорем вызваны существом дела.

В **разделе 2.4** для обобщенной системы Стокса изучаются устойчивые дискретизации. Здесь и далее в главе сетки могут иметь локальные сгущения. Доказываются оценки сходимости метода конечных элементов с использованием $\nabla\mathrm{div}$ стабилизации. В частности, в **теоремах 2.5, 2.6** доказывается следующий результат.

Рассмотрим норму $|||\mathbf{u},p||| = \left(\varepsilon\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + \alpha\|\mathbf{u}\|^2 + \xi\|\mathrm{div}\,\mathbf{u}\|^2 + \|p\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. *Имеет место оценка сходимости метода конечных элементов:*

$$|||\mathbf{u}-\mathbf{u}_h, p-p_h||| \le \left(1+\hat{C}\right) \min_{\mathbf{v}_h\in\mathbf{V}_h, q_h\in\mathbb{Q}_h} |||\mathbf{u}-\mathbf{v}_h, p-q_h|||$$

где

$$\hat{C} \le \frac{1}{4\hat{\beta}^2}(\sqrt{5}+1)^2\frac{\max\{\hat{\beta}^2\,,\,\varepsilon+\xi\}}{\min\{1\,,\,\sqrt{\varepsilon+\xi}\}}, \quad \textit{если} \quad \alpha = 0\ ,$$
$$\hat{C} \le \frac{1}{4\hat{\beta}^2}(\sqrt{5}+1)^2\frac{\max\{\hat{\beta}^2\,,\,\varepsilon+C_F^2+\xi\}}{\min\{1\,,\,\sqrt{\varepsilon+\xi}\}}, \quad \textit{если} \quad \alpha = 1\ ,$$

где C_F *– константа из неравенства Фридрихса, а* $\hat{\beta}$ *– константа из условия Ладыженской-Бабушки-Брецци (LBB).*
Далее в разделе изучается эффект выбора $\xi > 0$ на качество приближения. Приводится численная иллюстрация результатов раздела.

В **разделе 2.5** для задачи Стокса с интерфейсом доказывается универсальное infsup-условие устойчивости. Выводятся оценки для дискретного решения, доказываются оценки сходимости метода конечных элементов. Здесь предполагается согласованность $\mathcal{T}_h$ с разбиением области на подобласти Ω_1, Ω_2, а именно

$$\exists\ \mathcal{T}_h^{(i)} \subset \mathcal{T}_h\ :\quad \cup\{\,T\mid T\in\mathcal{T}_h^{(i)}\,\} = \overline{\Omega}_i, \quad i=1,2.$$

Для того, чтобы сформулировать основной результат, необходимо ввести следующие обозначения $\bar{p} = \left\{|\Omega_1|^{-1} \text{ на } \Omega_1;\ \ -\varepsilon|\Omega_2|^{-1} \text{ на } \Omega_2\right\}$

$$\mu_h := \inf_{q_h\in\mathbb{M}_h}\frac{\|\bar{p}-q_h\|_M}{\|\bar{p}\|_M}.$$

Значение μ_h характеризует “качество”, с которым можно приблизить $\bar{p}$ в пространстве конечно-элементных функций. Заметим, что $\mu_h = 0$, если $\mathbb{M}_h$ содержит кусочно-постоянные функции. В общем случае $\mu_h \le c\,\tilde{h}^{\frac{1}{2}}$ с некоторой константой c, не зависящей от ε, $\tilde{h}$ – максимальный диаметр элементов триангуляции $\mathcal{T}_h$, имеющих общие точки с интерфейсом. Предположим выполнение LBB условия.

Следующая теорема является основным результатом раздела.
Теорема 2.6 *Существуют константы* $C_1 > 0$ *и* $C_2 > 0$*, не зависящие от* ε *и* h *такие, что справедливо следующее утверждение:*

$$\begin{aligned} &\text{если} \quad \mu_h \le C_1 \quad \text{тогда} \\ &\sup_{\mathbf{u}_h\in\mathbf{V}_h} \frac{(\operatorname{div}\mathbf{u}_h, p_h)}{\|\mathbf{u}_h\|_\nu} \ \ge\ C_2\|p_h\|_M \quad \forall \ \ p_h \in \mathbb{M}_h \end{aligned} \tag{10}$$

Заметим, что, в силу сказанного выше, условие (10) не является обременительным. Далее доказывается оптимальная оценка сходимости в норме $|||\mathbf{u}, p||| = \left(\|\mathbf{u}\|_\nu^2 + \|p\|_M^2\right)^{\frac{1}{2}}$.
Теорема 2.7 *Предположим, что условие* (10) *выполнено. Тогда существует константа* C*, не зависящая от* h *и* ε *такая, что выполняется оценка*

$$|||\mathbf{u}-\mathbf{u}_h, p-p_h||| \le C \min_{\mathbf{v}_h\in\mathbb{V}_h}\min_{q_h\in\mathbb{M}_h} |||\mathbf{u}-\mathbf{v}_h, p-q_h|||.$$

В **разделе 2.6** для системы типа Осеена

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(U) := -\nu\Delta\mathbf{u} + \alpha\mathbf{u} + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \mathbf{w}\times\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad && \text{в } \Omega, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} &= g && \text{в } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{на } \partial\Omega \end{aligned} \tag{11}$$

рассматривается стабилизированный метод конечных элементов: найти $U_h = \{\mathbf{u}_h, p_h\}$ такую, что

$$a_h(U_h, V_h) = f_h(V_h) \qquad \forall\, V_h = \{\mathbf{v}_h, q_h\},$$

где

$$\begin{aligned} a_h(U,V) \ &:= \ a(U,V) + \sum_\tau (\xi_\tau \operatorname{div}\mathbf{u}, \operatorname{div}\mathbf{v})_\tau \\ &\quad + \sum_\tau (\mathcal{L}(U), \delta_\tau^{\mathbf{a}}(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \delta_\tau^{\mathbf{w}}\mathbf{w}\times\mathbf{v} + \delta_\tau^{p}\nabla q)_\tau, \end{aligned}$$

$$f_h(V) := (\mathbf{f},\mathbf{v}) + \sum_\tau \left((\xi_\tau g, \operatorname{div}\mathbf{v})_\tau + (\mathbf{f}, \delta_\tau^{\mathbf{a}}(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \delta_\tau^{\mathbf{w}}\mathbf{w}\times\mathbf{v} + \delta_\tau^{p}\nabla q)_\tau\right).$$

Здесь $a(U,V)$ – билинейная форма метода Галеркина для (11). Отметим, что $\mathbf{a}=0$ или $\mathbf{w}=0$ приводит к линеаризованным уравнениям в вихревой и конвективной форме, соответственно; случай, когда $\mathbf{a}\neq 0$ и $\mathbf{w}$ – постоянный вектор, соответствует конвективной форме с учетом Кориолисовых сил. Далее понадобятся константы μ_u, μ_p из обратных неравенств на элементе триангуляции

$$\|\Delta \mathbf{v}_h\|_\tau \le \mu_u h_\tau^{-1}\|\nabla \mathbf{v}_h\|_\tau, \qquad \|\nabla q_h\|_\tau \le \mu_p h_\tau^{-1}\|q_h\|_\tau$$

Сначала для метода без стабилизации давления, т.е. $\delta_\tau^p=0$, и в случае выполнения LBB условия доказывается оценка устойчивости метода конечных элементов, изучается сходимость

Теорема 2.8 *Пусть* $\delta_\tau=\delta_\tau^{\mathbf{a}}=\delta_\tau^{\mathbf{w}}$ *и выполнено условие*

$$0 \ \le\ \delta_\tau \le \frac{\hat\beta^2 h_\tau^2}{54\mu_p^2 N_a^2}; \qquad \xi_\tau\sim N_a^2,$$

где $N_a=\sqrt{\nu}+\sqrt{\alpha}C_F+(\|\mathbf{a}\|_\infty+C_F\|\mathbf{w}\|_\infty)\frac{C_F}{\sqrt{\nu+C_F^2\alpha}}$. *Для ошибки* $E_h=\{\mathbf{u}-\mathbf{u}_h,p-p_h\}$ *имеет место оценка*

$$\|E_h\|_a^2\le C\sum_\tau\left(h_\tau^{2(k+1)}N_a^{-2}\|p\|^2_{H^{k+1}(\tau)}+N_a^2h_\tau^{2l}|\mathbf{u}|^2_{H^{l+1}(\tau)}\right)$$

в норме $\|V\|_a^2=|[V]|_a^2+\sigma_a\|q\|^2$,

$$|[V]|_a^2=\nu\|\nabla\mathbf{v}\|^2+\alpha\|\mathbf{v}\|^2+\sum_\tau\left(\xi_\tau\|\mathrm{div}\,\mathbf{v}\|_\tau^2+\delta_\tau\,\|(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{v}+\mathbf{w}\times\mathbf{v}\|_\tau^2\right),$$

где $\sigma_a=\frac{1}{27}\hat\beta^2N_a^{-2}$, $k\ge 0$ *и* $l>0$ *– степени конечно-элементных аппроксимаций для* p *и* $\mathbf{u}$, *соответственно.*

Для частного случая квазиравномерной сетки доказана

Теорема 2.9 *Предположим, что* $\mathbb{Q}_h$ *состоит из кусочно-постоянных функций и* $\delta_\tau\sim\delta_a=h^2[\nu(1+\mathrm{Re}_h+\mathrm{Ek}_h^{-1}+\mathrm{D}_h)]^{-1}$, *где* $\mathrm{Re}_h=\frac{\|\mathbf{a}\|_\infty h}{\nu}$, $\mathrm{Ek}_h^{-1}=\frac{\|\mathbf{w}\|_\infty h^2}{\nu}$, $\mathrm{D}_h=\frac{\alpha h^2}{\nu}$ *и* $\xi_\tau\sim\xi=\mathcal{O}(1),\sigma_a\le\hat\beta^2N_a^{-2}$. *Предположим, что выполняется (H2) и LBB-условие. Тогда справедлива оценка сходимости:*

$$\|E_h\|_a^2\le C\{1+\nu(1+\mathrm{Re}_h+\mathrm{Ek}_h^{-1}+\mathrm{D}_h)+\sigma\}h^2(\|\mathbf{u}\|_2^2+|p|_1^2).$$

Также для случая квазиравномерной сетки в **Лемме 2.15** доказывается модифицированное LBB условие:
Предположим, что $\mathbb{Q}_h \subset \mathbb{H}^1(\Omega)$ *и выполняется (H2) и LBB-условие. Тогда выполняется следующее inf-sup условие:*

$$\inf_{p_h \in \mathbb{Q}_h} \sup_{\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{(\operatorname{div} \mathbf{u}_h, p_h)}{\|\nabla p_h\| \|\mathbf{u}_h\|} \geq \beta_1 > 0, \qquad (12)$$

где β_1 *не зависит от* h.
На основе (12) доказываются оценки сходимости для (11) с $\mathbf{w} = 0$.
Теорема 2.10 *Предположим, что выполняется (H2), LBB-условие и* $\mathbb{Q}_h \subset \mathbb{H}^1(\Omega)$, *а масштабирование уравнений такое, что* $\|\mathbf{a}\|_\infty \sim 1$. *Пусть параметры*

$$\xi_\tau = \xi \sim 1, \qquad \delta_\tau \sim h_\tau^2/\xi, \qquad \sigma_a \sim h^2 \qquad (13)$$

удовлетворяют условию

$$\delta_\tau \mathbf{a}_\tau^2 \leq \xi; \quad 0 \leq \delta_\tau \leq \min\left\{ \frac{\nu + \alpha h_\tau^2 \mu_u^{-2}}{8\mathbf{a}_\tau^2}; \frac{h_\tau^2}{3\mu_u^2 \nu}; \frac{1}{3\alpha} \right\}$$

Тогда справедлива равномерная оценка

$$\|E_h\|_a^2 \leq C \sum_\tau \left(h_\tau^{2(k+1)} |p|^2_{H^{k+1}(\tau)} + h_\tau^{2l} |\mathbf{u}|^2_{H^{l+1}(\tau)} \right), \quad C \neq C(h, \nu, \alpha).$$

Далее в разделе рассматривается метод со стабилизацией давления, т.е. $\delta_\tau^p \neq 0$. Метод может использоваться для любых, в том числе LBB-неустойчивых, аппроксимаций p и $\mathbf{u}$. Доказывается оценка устойчивости схемы, изучается сходимость и выбор параметров.
Теорема 2.11 *Положим*

$$\delta_\tau \sim h_\tau^2 \left[\nu(1 + \mathrm{Re}_\tau + \mathrm{Ek}_\tau^{-1} + \mathrm{D}_\tau)\right]^{-1}, \quad \xi_\tau \sim \nu(1 + \mathrm{Re}_\tau + \mathrm{Ek}_\tau^{-1} + \mathrm{D}_\tau).$$

При выборе параметров: $\delta_\tau = \delta_\tau^{\mathbf{a}} = \delta_\tau^{\mathbf{w}} = \delta_\tau^p$ *справедлива оценка сходимости*

$$\begin{aligned} \|E_h\|_b^2 \quad \leq \quad & C \Big\{ \sum_\tau \left(\nu^{-1} (1 + \mathrm{Re}_\tau + \mathrm{Ek}_\tau^{-1} + \mathrm{D}_\tau)^{-1} + \sigma_b \right) h_\tau^{2(k+1)} |p|^2_{H^{k+1}(\tau)} \\ & + \left(\nu(1 + \mathrm{Re}_\tau + \mathrm{Ek}_\tau^{-1} + \mathrm{D}_\tau) \right) h_\tau^{2l} |\mathbf{u}|^2_{H^{l+1}(\tau)} \Big\} \end{aligned}$$

в норме $\|V\|_b^2 = |[V]|_b^2 + \sigma_b \|q\|^2$, *где* $\sigma_b = cN_b^{-2}$, $N_b = \sqrt{\nu} + \sqrt{\alpha} C_F + (\|\mathbf{a}\|_\infty + C_F \|\mathbf{w}\|_\infty) C_F \nu^{-\frac{1}{2}}$,

$$|[V]|_b^2 = \nu \|\nabla \mathbf{v}\|^2 + \alpha \|\mathbf{v}\|^2 + \sum_\tau \left(\xi_\tau \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_\tau^2 + \delta_\tau \,\|(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \mathbf{w} \times \mathbf{v} + \nabla q\|_\tau^2 \right)$$

Для частного случая LBB устойчивых аппроксимаций (в этом случае типичным является соотношение $l = k + 1$) оптимальным может стать выбор параметров, как показано в следующей теореме.

Теорема 2.11 *Предположим* $\mathbf{w} = 0$ *и зададим маситабирование уравнений такое, что* $\|\mathbf{a}\|_\infty = O(1)$. *Для стабилизированного метода конечных элементов с параметрами*

$$\xi_\tau = \xi \sim 1, \qquad \delta_\tau \sim h_\tau^2 / \xi,$$

имеет место оценка для ошибки

$$\|E_h\|_b^2 \le C \sum_\tau \left\{ h_\tau^{2(k+1)} |p|^2_{H^{k+1}(\tau)} + h_\tau^{2l} |\mathbf{u}|^2_{H^{l+1}(\tau)} \right\}, \quad C \ne C(\nu, \alpha, h).$$

Далее в разделе теория иллюстрируется примерами расчетов. В частности, эксперементально было установлено, что для гладких решений не только $\|\cdot\|_b$, но и $\|\cdot\|_{L^2}$ норма ошибки равномерно ограничена по ν.

В **разделе 2.7** для системы Навье-Стокса и в конвективной, и в вихревой форме приводится пример дискретизации и примеры расчетов для задачи о движущейся каверне и задачи о течении за ступенькой.

В **главе 3**, состоящей из восьми разделов, анализируются итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений, возникающих при дискретизации уравнений из главы 1 с помощью метода конечных элементов. При анализе многосеточных методов предполагается, что задана система вложенных конечноэлементных пространств

$$\mathbb{V}_0 \subset \mathbb{V}_1 \subset \cdots \subset \mathbb{V}_k \subset \cdots \subset \mathbb{V}_l \subset \mathbb{H}_0^1(\Omega)$$

с квазиравномерными сетками и кусочно-полиномиальными, степени не выше r, функциями $v_k \in \mathbb{V}_k$. Соответствующий параметр дискретизации удовлетворяет условию: $c_0 2^{-k} \le \frac{h_k}{h_0} \le c_1 2^{-k}$, константы c_0, c_1 не зависят от k.

Ниже через $M_k(\nu_1, \nu_2)$ обозначается матрица итераций многосеточного метода на k-ом сеточном уровне, если на каждом уровне используется ν_1 предсглаживающих и ν_2 постсглаживающих итераций.

В **разделе 3.1** дается формальное определение геометрических многосеточных методов. Доказывается несколько вспомогательных результатов из линейной алгебры. В **разделе 3.2** для уравнений реакции-диффузии доказывается, что геометрический многосеточный метод с каноническими операторами перехода с сетки на сетку является универсальным по параметрам, т.е. его показатель сходимости ограничен сверху некоторой константой меньше единицы, и не зависящей от h и ε:

Теорема 3.4 *Для любого $\psi \in (0,1)$ существует $\nu_0 > 0$, не зависящее от k и ε, такое, что для матрицы итераций W-цикла со сглаживаниями Якоби с параметром или симметричными Гаусса-Зейделя справедливо*

$$\|M_k(\nu, 0)\| \le \psi \quad \forall \, \nu \ge \nu_0.$$

Теорема 3.5 *Для матрицы итераций V-цикла со сглаживаниями Якоби с параметром или симметричными Гаусса-Зейделя справедливо*

$$\|M_k\Big(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}\Big)\|_{A_k} \le \frac{C_A}{C_A + \nu} \ , \quad \nu = 2, 4, \ldots$$

с константой C_A, не зависящей от k и ε.

В **разделе 3.3** для уравнений конвекции-диффузии доказывается универсальная по параметрам сходимость W-цикла (т.е. показатель сходимости ограничен сверху некоторой константой меньше единицы, не зависящей от h и ε) для устойчивой конечно-элементной аппроксимации задачи, с использованием равномерного измельчения сетки и специальных блочных сглаживающих итераций. Анализ строится на основе нового свойства аппроксимации, ранее не встречавшегося в литературе по многосеточным методам, и нового свойства сглаживающих итераций, по быстрому подавлению ошибки около границы втекания. Эти свойства, также как и более трационное свойство сглаживания, формулируются и доказываются. Для задачи с условиями Дирихле на границе вытекания доказывается

Теорема 3.8 *Пусть выполняются условия на количество сглаживающих итераций на k-ом уровне:*

$$\nu_k \geq c_{po} k, \quad \mu_k \geq c_{pr}\, k^4, \quad k \geq k_0$$

с подходящими константами c_{po}, c_{pr}, k_0. Справедлива следующая оценка нормы матрицы итераций W-цикла:

$$\|M_k\|_{A^T A} \leq \xi^*$$

с константой $\xi^* < 1$, не зависящей от k и ε. Константы c_{po}, c_{pr} и k_0 так же не зависят от k и ε.

При рассмотрении случая условий Неймана на границе вытекания условие на число предсглаживаний имеет вид $\nu_k \geq c_{po}$ и исчезает условие на k_0. Заметим, что теория требует логарифмического роста числа сглаживаний при измельчении сетки, однако на практике необходимость такого увеличения не отмечена. В конце раздела приводятся примеры расчетов.

В **разделе 3.4** для системы (3) в двухмерном случае приводится доказательство оценки сходимости W-цикла многосеточного метода, не зависящей от ε, $\|\mathbf{w}\|$, h и α. Сначала доказывается свойство аппроксимции, потом доказывается свойство сглаживания. В качестве сглаживающих итераций используется блочный метод Якоби с блоками 2×2, учитывающими косо-симметрическую часть матрицы системы уравнений. Доказывается результат о сходимости:

Теорема 3.11 *Предположим выполнение условий (A1) – (A3), тогда для любого $\psi \in (0,1)$ существует $\bar{\nu}_0 > 0$, не зависящее от параметров задачи ε, α и сеточного уровня k, такое, что для матрицы итераций W-цикла получаем*

$$\|M_k(\nu, 0)\| \leq \psi \quad \forall\, \nu \geq \bar{\nu}_0.$$

В конце раздела приводятся примеры расчетов.

В **разделе 3.5** для обобщенной системы Стокса рассматриваются несколько блочно-переобусловленных итерационных методов. Сначала описываются используемые методы: метод Узавы, неточный метод Узавы, метод MINRES с блочно-диагональным переобуславлевателем. Затем обсуждаются два переобуславливателя для дополнения Шура: масштабированная матрица масс для пространства давления и переобуславливатель Каху-Шабата. Равномерные оценки для переобуславливателя Каху-Шабата доказаны в разделе 1.5 на дифференциальном уровне. Для случая матрицы масс оценки спектральной эквивалентности доказаны в лемме 3.22, где показано влияние $\nabla\mathrm{div}$ стабилизации на отношение констант эквивалентности. В конце раздела приводятся численные примеры.

В **разделе 3.6** для задачи Стокса с интерфейсом в качестве переобуславливателя для оператора окаймления для давления предложена матрица масс относительно скалярного произведения с весом, $(\nu^{-1}\cdot,\cdot)$, в пространстве конечно-элементных функций давления $\mathbb{Q}_h$. Она обозначена через $\hat{M}_\nu$. Доказана

Теорема 3.11 *Предположим, что выполнено условие* (10) *и* $\Omega\in\mathbb{R}^d$*, тогда для всех* $\mathrm{y}\in(\hat{M}_\nu\mathrm{e})^\perp$*, где* e *– вектор, все элементы которого равны* 1*, справедливы неравенства*

$$C_2^2\langle\hat{M}_\nu\mathrm{y},\mathrm{y}\rangle\le\langle S\mathrm{y},\mathrm{y}\rangle\le d\,\langle\hat{M}_\nu\mathrm{y},\mathrm{y}\rangle$$

с константой C_2*, не зависящей от* h *и* ε*.*

Из теоремы следует, что спектральное число обусловленности матрицы $\hat{M}_\nu^{-1}S$ равномерно ограничено на подпространстве $(\hat{M}_\nu\mathrm{e})^\perp$. Для эффективного вычисления $\hat{M}_\nu^{-1}$ в лемме 3.25 доказано, что $\hat{M}_\nu$ равномерно спектрально эквивалентна диагональной матрице, с элементами, составленными из сумм элементов матрицы $\hat{M}_\nu$ по соответствующей строке. В сочетании с известными результатами о равномерной по параметру сходимости многосеточного метода для задачи типа Пуассона со скачком в коэффициенте диффузии это позволило построить блочные итерационные методы для решения (7), обладающие свойством универсальности по ε и h. В конце раздела даются примеры расчетов для модельной трехмерной задачи.

В **разделе 3.7** рассматриваются переобусловленные методы для системы типа Осеена (8). Предложен переобуславливатель дополнения Шура вихревой формы уравнений. Для того, чтобы определить этот переобуславливатель на дифференциальном уровне, рассмотрим задачу

$$-\frac{1}{\alpha}\mathrm{div}\,(\mathcal{G}(\mathbf{x})\nabla p) = F \quad \text{в} \;\; \Omega, \qquad g_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_i}n_j = 0, \quad \text{на} \;\; \partial\Omega. \tag{14}$$

где $\mathcal{G}(\mathbf{x}) = \{g_{ij}(\mathbf{x})\}$, $i,j = 1,\dots,d$ – матрица “диффузии”, которая в терминах α и $\mathbf{w}$ имеет вид

- 2D
$$\mathcal{G}(\mathbf{x}) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\mathbf{w}^2}I - \frac{\alpha}{\alpha^2+\mathbf{w}^2}(\mathbf{w}\times). \tag{15}$$

- 3D
$$\mathcal{G}(\mathbf{x}) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\mathbf{w}^2}(I+\alpha^{-2}(\mathbf{w}\otimes\mathbf{w})) - \frac{\alpha}{\alpha^2+\mathbf{w}^2}(\mathbf{w}\times). \tag{16}$$

I – единичная матрица, обозначение $(\mathbf{w}\otimes\mathbf{w})$ используется для матрицы с элементами равными $w_i(\mathbf{x})w_j(\mathbf{x})$, $(\mathbf{w}\times)$ обозначает матрицу векторного произведения с $\mathbf{w}$:

$$\text{2D}: \;(\mathbf{w}\times) = \begin{pmatrix} 0 & -w \\ w & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{3D}: \;(\mathbf{w}\times) = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $L(\mathbf{w})^{-1} : \mathbb{L}_2^0(\Omega) \to \mathbb{H}^1(\Omega)\cap\mathbb{L}_2^0(\Omega)$ разрешающий задачу (14) оператор. В диссертации оператор

$$Q_S^{-1}(\mathbf{w}) = \nu I + L(\mathbf{w})^{-1} \tag{17}$$

предложен в качестве переобуславливателя для дополнения Шура системы (8), которое обозначим через S. Дается мотивация такого выбора. С одной стороны, в случае когда можно пренебречь кососимметрическими членами, новый переобуславливатель совпадает с оптимальны $\nu I - \alpha\Delta_N^{-1}$. С другой стороны, если члены диффузии не имеют существенного глобального влияния, то $L(\mathbf{w})$ снова близок к S. Далее в диссертации проводится анализ переобуславливателя с использованием рядов Фурье в модельном случае $\mathbf{w} = w = const$ для периодической задачи в $\mathbb{R}^2$. Этот анализ дает основания полагать, что выбор Q_S в (17) подходит и для промежуточных ситуаций. В частности, устанавливается следующий факт. Если обозначить $\zeta = w/\alpha$, то переобуславливатель $Q_S^{-1}(\mathbf{w})$ дает следующее улучшение по сравнению с известным $Q_S^{-1}(0)$ при $\zeta \to \infty$ и $\nu \ll 1$:

$$\begin{aligned} \operatorname{cond}(Q_S(\mathbf{w})^{-1}S) &\sim 1 + O(\zeta), \\ \operatorname{cond}(Q_S(0)^{-1}S) &\sim 1 + O(\zeta^2). \end{aligned}$$

В этом же подразделе с помощью анализа Фурье изучается влияние $\nabla\mathrm{div}$ стабилизации на число обусловленности переобусловленного дополнения Шура и на распределение собственных значений.

Из построенного оператора $Q_S(\mathbf{w})$ и многосеточного метода для задачи (3) формируется блочно-треугольный переобуславливатель для всей системы (8). Приводятся результаты численных экспериментов.

В **разделе 3.8** показывается, как изучаемые в диссертации итерационные методы и методы конечных элементов могут быть использованы для решения нелинейной системы Навье-Стокса. Приводятся примеры расчетов.

В **Заключении** сформулированы основные научные результаты диссертации.

Основные результаты диссертации

Основным научным результатом диссертации является анализ многосеточных алгоритмов и переобуславливателей, обеспечивающих равномерную по параметрам задачи сходимость итерационных методов решения широкого круга задач математической физики. Автор выносит на защиту следующие научные результаты.

1. Предложен многосеточный метод для конечно-элементной аппроксимации модельной задачи конвекции-диффузии с краевыми условиями Дирихле и смешанными краевыми условиями.

Для него доказана равномерная по ε и h оценка сходимости без предположений на малость самой грубой сетки.

2. Для консервативной (квази-)линеаризации уравнений Навье-Стокса в вихревой форме предложен блочный переобуславливатель, обеспечивающий эффективность итерационного метода для линейной задачи. В случае периодической модельной задачи проведен полный анализ нового переобуславливателя.

3. Доказаны равномерные по параметру оценок для переобуславливателя Каху-Шабата для обобщенной задачи Стокса в областях, допускающих H^2 регулярность задачи Пуассона.

4. Для системы уравнений с косо-симметрической реакцией, вспомогательной при решении уравнений Навье-Стокса в вихревой форме, доказаны равномерные по параметрам оценки устойчивости метода конечных элементов и предложен универсальный по параметрам многосеточный метод. В случае $\Omega \in \mathbb{R}^2$ доказана оценка сходимости W-цикла многосеточного метода, не зависящая от набора параметров при некоторых ограничениях на функцию вихря.

5. Для задачи Стокса с интерфейсом доказано равномерное (относительно скачка в коэффициенте вязкости) inf-sup условие устойчивости, как для дифференциальной задачи, так и для конечно-элементной. Получены оптимальные оценки сходимости метода конечных элементов в специально выбранных нормах. Предложен переобуславливатель для дополнения Шура дискретной задачи, для которого доказана оценка, не зависящая от ε и h. Это позволило построить блочные итерационные методы, обладающие свойством универсальности.

6. Впервые доказаны результаты о сходимости широко используемого на практике “сокращенного” стабилизированного метода конечных элементов для задачи Осеена. Проведен единый анализ сходимости стабилизированных методов конечных элементов для линеаризованных уравнений Навье-Стокса как в конвективной, так и в вихревой форме.

Основные публикации автора по теме диссертации

1. Olshanskii M.A., Reusken A., Analisys of a Stokes interface problem.// Numerische Mathematik, 2006, V. 103, No.1, P. 129–149.

2. Ольшанский М.А., Лекции и упражнения по многосеточным методам. Физматлит, Москва, 2005.

3. Ольшанский М.А., Анализ многосеточного метода для уравнений конвекции-диффузии с краевыми условиями Дирихле.// Журнал Вычислительной Математики и Математической Физики, 2004, Т. 44, No.8, С. 1462–1491.

4. Olshanskii M.A., Reusken A., Convergence analysis of a multigrid solver for a finite element method applied to convection-dominated model problem.// SIAM J.Num.Anal., 2004, V. 43, No.3, P. 1261–1291.

5. Gelhard T., Lube G., Olshanskii M.A., Starcke J.-H., Stabilized finite element schemes with LBB-stable elements for incompressible flows.// J. Comput. Appl. Math., 2005, V. 177, No.2, P. 243–267.

6. Olshanskii M.A., Reusken A., Grad-Div stabilization for the Stokes equations.// Mathematics of Computation, 2004, V. 73, No.248, P. 1699–1718.

7. Olshanskii M.A., Reusken A., A Stokes interface problem: stability, error estimate and a solver.// Proc. of European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS 2004 (Eds. P. Neittaanmäki, etal.), 2004.

8. Olshanskii M.A., Preconditioned iterations for the linearized Navier - Stokes system in rotation form.// Computational Fluid and Solid Mechanics 2003, K.J. Bathe (Editor) , Elsevier, 2003, P. 1074–1077

9. Olshanskii M.A., A low order Galerkin finite element method for the Navier-Stokes equations of steady incompressible flow: A stabilization issue and iterative methods.// Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 2002, V. 191, No.48, P. 5515–5536

10. Olshanskii M.A., Reusken A., Navier-Stokes equations in rotation form: a robust multigrid solver for the velocity problem.// SIAM J. Sci. Comp., 2002, V. 23, No.5, P. 1682–1706

11. Lube G., Olshanskii M.A., Stable finite element calculations of incompressible flows using the rotation form of convection.// IMA J. Num. Anal., 2002, V. 22, P. 437–461.

12. Kobelkov G.M., Olshanskii M.A., Effective Preconditioning of Uzawa Type Schemes for Generalized Stokes Problem.// Numerische Mathematik, 2000, V. 86, No.3, P. 443–470.

13. Olshanskii M.A., Reusken A., On the convergence of a multigrid method for linear reaction-diffusion problems.// Computing, 2000, V. 65, P. 193–202.

14. Chizhonkov E.V., Olshanskii M.A., On the domain geometry dependence of the LBB condition.// Math. Modelling Numer. Anal., 2000, V. 34, No.5, P. 935–951.

15. Ольшанский М.А., Чижонков Е.В., О наилучшей константе в inf-sup условии для вытянутых прямоугольных областей.// Математические заметки, 2000, V. 67, No.3, P. 387–396.

16. Olshanskii M.A., Staroverov V.M., On Simulation of the Outflow Boundary Conditions in FD Calculations for Incompressible Fluid.// Int. J. Numer. Meth. Fluids, 2000, V. 33, P. 499–534.

17. Olshanskii M.A., Iterative solver for Oseen problem and numerical solution of incompressible Navier-Stokes equations.// Num. Linear Algebra Appl., 1999, V. 6, P. 353–378.

18. Olshanskii M.A., Two-Level Method and Some A Priori Estimates in Unsteady Navier-Stokes Calculations.// J. Comput. Appl. Math., 1999, V. 104, P. 173–191.

19. Olshanskii M.A., A robust iterative solver in simulation of unsteady incompressible Navier-Stokes flow.// Proc. Fourth Europ. Comput. Fluid Dynamic Conf., V.1, (Eds. R.Papailiou, etc.), Willey, Chichester, etc., 1998, P. 1296–1301.

20. Olshanskii M.A., On Preconditioning Techniques for Generalized Stokes Problem.// Proc. Conf. on Precond. Iter. Solution Meth. in Large Scale Probl. in Scientific Comp., eds. O.Axelsson, M.Neytcheva, B.Polman, Nijmegen, the Netherlands, 1997, P. 137–144

21. Ольшанский М.А., О задаче Стокса с модельными краевыми условиями.// Математический сборник, 1997, Т. 188, No.4, P. 127–144.

22. Ольшанский М.А., О задаче типа Стокса с параметром.// Журнал Вычислительной Математики и Математической Физики, 1996, Т. 36, No.2, P. 75–86.

Изд.лиц. ИД N 03991 от 12.02.2001. Компьютерный набор
Подписано в печать . .2006. Усл. печ. л. 2,0. Тираж 80 экз.
Институт вычислительной математики РАН
119991 ГСП-1, г.Москва, ул.Губкина 8.