

На правах рукописи

Иванчиков Андрей Александрович

**ЧИСЛЕННАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕУСТОЙЧИВЫХ
РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА
С ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ**

01.01.07 – вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2008

Работа выполнена на кафедре вычислительной математики
механико-математического факультета
Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
доцент Е.В. Чижонков

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор А.В. Фурсиков
кандидат физико-математических наук,
с.н.с. С.А. Горейнов

Ведущая организация: Научно-исследовательский институт
математики и механики им. Н.Г. Чеботарева
Казанского государственного университета

Защита состоится « 14 » ноября 2008 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 002.045.01 в Институте вычислительной математики РАН по адресу: 119333, г. Москва, ул. Губкина, д. 8.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института вычислительной математики РАН.

Автореферат разослан « 12 » октября 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук

Г.А. Бочаров

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Уже долгое время задачи управления решениями эволюционных уравнений в частных производных являются объектом исследования математиков. В их числе рассматриваются уравнения, допускающие неустойчивые решения. В теории неустойчивых задач информации о существовании и единственности решения недостаточно для их успешного численного решения. Поэтому задачей исследователей является, с одной стороны, указание алгоритма решения, с другой стороны — анализ процесса возникновения возмущений и разработка методов их подавления.

Пусть известно стационарное решение $\mathbf{w}(x)$ эволюционного уравнения, которое, возможно, является неустойчивым. Сформулируем задачу стабилизации этого решения. Для начального условия из достаточно малой окрестности $\mathbf{w}(x)$ требуется найти краевые условия, выполняющие роль управления, такие, что решение $\mathbf{v}(t, \cdot)$ начально-краевой задачи устремится к стационарному решению $\mathbf{w}(x)$ с заданной скоростью: $\|\mathbf{v}(t, \cdot) - \mathbf{w}\| \leq C \cdot e^{-\alpha t}$ при $t > 0$, определяемой показателем $\alpha > 0$. Объектом исследования в диссертации будет задача стабилизации неустойчивого решения системы уравнений Навье – Стокса, описывающей движение вязкой несжимаемой жидкости.

Среди теоретических исследований, посвященных стабилизации уравнений математической физики, наиболее привлекательной является дифференциальная теория А.В. Фурсикова, которая, в частности, позволяет строить стабилизирующие граничные условия. Мы будем пользоваться лишь той ее частью, которая касается уравнений Навье – Стокса. Следующие положения, базирующиеся на более общих результатах из теории банаховых пространств, являются в этой теории центральными:

1. Существует устойчивое инвариантное многообразие M_- такое, что эволюционное решение, принадлежащее M_- в начальный момент времени и стартовавшее из окрестности стационарного решения $\tilde{\mathbf{w}}$, экспоненциально стремится к последнему. Само многообразие имеет представление в виде суммы линейной L_- и нелинейной частей.

2. Существует оператор продолжения, отображающий малую окрестность стационарного решения \mathbf{w} в многообразии M_- .

Естественным является вопрос о принципиальной возможности стабилизации неустойчивых решений уравнений Навье – Стокса при реальном компьютерном моделировании. Несмотря на все положительные предпосылки дифференциальной теории, ответ на этот вопрос оставался открытым. На момент начала исследований никакой конструктивной информации об устройстве инвариантного многообразия M_- известно не было, кроме, конечно, способа построения касательного пространства L_- . Это, в свою очередь, порождало разрыв между построенной дифференциальной теорией и практикой численного моделирования. Все теоретические оценки для реального процесса говорят о том, что сходимость к неустойчивому решению при численной

стабилизации обеспечена, правда со скоростью несколько меньшей. Но это остается справедливым лишь в том случае, если в любой нужный момент времени мы умеем точно проектировать решение на устойчивое многообразие M_- . Такая возможность в реальной ситуации отсутствует, поэтому, в первую очередь, кажется естественным использование свойств линейного приближения многообразия — множества L_- .

При проведении численной стабилизации неустойчивых решений самым наглядным фактором роста ошибок является непосредственное интегрирование эволюционных уравнений, поскольку M_- является отталкивающим множеством. Кроме того в этих задачах присутствует еще предельная точность решения вспомогательных задач, которая на несколько порядков хуже машинной. Одной из таких вспомогательных задач является спектральная задача. Другая такая задача — это решение системы линейных алгебраических уравнений с некоторой плохо обусловленной матрицей проектирования. Поэтому уже при проведении операции проектирования накопленные ошибки могут далеко отодвинуть решение от целевого линейного многообразия L_- .

Из всего вышесказанного следует, что задача численной стабилизации неустойчивых решений уравнений Навье – Стокса с помощью граничных условий является важной и трудной задачей современной вычислительной математики.

Цель работы. Основная задача диссертации заключается в создании вычислительной технологии для стабилизации с границы области неустойчивых решений уравнений Навье – Стокса с наперед заданной скоростью. Под вычислительной технологией здесь понимается совокупность численных методов, структур данных и программных реализаций для решения последовательности разнородных вычислительных задач на вычислительных системах. С целью разделения сложной проблемы на этапы переход к основной задаче осуществляется последовательно — от линейной к нелинейной, от устойчивой к неустойчивой, от симметричной к несимметричной. Конечной целью является стабилизация неустойчивого течения Куэтта, которое в отсутствие управления стремится к вихрям Тейлора. Выбор этих течений обусловлен тем, что такая картина неустойчивости наблюдается в природе и хорошо описывается математической моделью — теорией уравнений Навье – Стокса.

Для решения основной проблемы требуется решить несколько вспомогательных. Первая состоит в вычислении собственных функций с максимальной высокой точностью и построении базиса в в корневых подпространствах. Второй задачей является установление возникновения неустойчивости течения Куэтта в дискретном случае. Ее решение является основой для постановки целевой задачи — стабилизации неустойчивого течения Куэтта.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Разработана вычислительная технология стабилизации неустойчивых решений уравнений Навье – Стокса с помощью граничных условий. Алгоритм сформулирован и успешно применен в самом общем случае — для стабилизации неустойчивых нетривиальных стационарных течений, приводящих к несимметричным спектральным задачам. Стабилизация уравнений динамики жидкости проведена впервые и аналогов не имеет.

2. Реализованы и успешно применены алгоритмы численного решения частичных спектральных задач для линеаризованных уравнений Навье – Стокса. Получены аналитические решения спектральных задач.

3. Описана динамика стабилизируемых течений с объяснением всех, возникающих в процессе стабилизации, численных эффектов.

Достоверность, теоретическая и практическая ценность работы. Работа носит теоретический характер. Достоверность проведенного исследования основана на строгой математической теории стабилизации в дифференциальном случае и тщательном анализе и сравнении результатов численных экспериментов. Теоретическая ценность состоит в построении отправной точки для дальнейших исследований по разработке новых, более совершенных численных алгоритмов стабилизации уравнений математической физики. Практическая ценность работы заключается в обширном наборе формул, алгоритмов и графических представлений расчетов. Ее методы и результаты могут быть использованы учеными и инженерами различных научно-технических институтов при решении прикладных задач.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались автором: на конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва, 2002), на международной научной конференции “Актуальные проблемы математики и механики” (Казань, 2004), на ежегодных научных конференциях “Ломоносовские чтения” (Москва, 2004, 2005), на 6-ом Всероссийском семинаре “Сеточные методы и приложения” (Казань, 2005), на международной научной конференции “Математическая гидродинамика” (Москва, 2006), на научно-исследовательском семинаре “Вычислительная математика, математическая физика, управление” под руководством проф. Г.М. Кобелькова, проф. В.И. Лебедева, проф. А.В. Фурсикова (ИВМ РАН, Москва, 2006).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 8 работ: 3 — в материалах конференций, 5 — в рецензируемых журналах (из них [4], [7], [8] — в журналах, рекомендованных ВАК для защиты кандидатских диссертаций).

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и библиографии из 48 наименований. Она изложена на 100 страницах, содержит 96 рисунков и 25 таблиц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **Введении** дается краткое изложение дифференциальной теории А.В. Фурсикова по стабилизации уравнений Навье – Стокса. Формулируется задача о неустойчивом течении Куэтта и связанная с ним задача стабилизации.

Глава 1 посвящена численному и аналитическому решению проблемы собственных значений для уравнений Стокса.

Численные расчеты проводятся на примере решения двух спектральных задач: 1) в единичном квадрате с нулевыми краевыми условиями; 2) в прямоугольнике с периодическими условиями по одному направлению. Во втором случае приводится аналитическое решение дифференциальной задачи.

В **§1.1** дается строгое определение оператора, по отношению к которому формулируется спектральная задача. Для задачи Стокса

$$-\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0 \quad (1)$$

в ограниченной двумерной области Ω определим оператор $A_1 : \mathbf{u} \mapsto \mathbf{f}$. В качестве его области определения $D(A_1)$ возьмем совокупность всех решений задачи (1) для всевозможных правых частей $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(\Omega)$. Известно, что спектр оператора A_1 дискретный, конечной кратности и стремится к $+\infty$. Система собственных функций ортогональна и полна в $\mathbf{L}_2(\Omega)$.

В **§1.2** приводится постановка спектральных задач и их дискретизация. Остановимся на случае периодических краевых условий, поскольку именно эти результаты будут востребованы в алгоритме стабилизации. Периодическая спектральная задача в $\Omega = [-T/2, T/2] \times [-a, a]$ имеет вид

$$-\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \lambda \mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0 \quad (2)$$

и дополняется условиями $\mathbf{u}(x_1, x_2) = \mathbf{u}(x_1 + T, x_2)$, $p(x_1, x_2) = p(x_1 + T, x_2)$, где a и T — параметры определяющие размеры области, $T = 2\pi$ — период. Под границей $\partial\Omega$ теперь понимается лишь та ее часть, на которой заданы краевые условия. Для дискретизации введем в Ω равномерную прямоугольную сетку. Пусть каждая из дискретных компонент вектора скорости \mathbf{u} определена в узлах сетки, а дискретное давление — в центрах ячеек. Теперь сеточные аналоги дифференциальных операторов ∇_h , div_h , Δ_h определяются стандартным симметричным образом.

В **§1.3** дается описание алгоритмов, используемых для численного решения сеточного аналога задачи (2). Основным является метод Ланцоша, который предназначен для решения частичной проблемы собственных чисел и векторов для симметричных матриц. Применительно к нашим целям в качестве оператора A возьмем определенный выше A_1^{-1} — он сопоставляет правой части \mathbf{f} решение краевой задачи для дискретных уравнений (1).

Найдем несколько максимальных собственных чисел оператора A_1^{-1} . Тогда обратные к ним величины будут искомыми минимальными собственными числами. Качество полученных приближений измеряется с помощью невязок $r_s = \|A_1^{-1}y_s - \lambda_s^{-1}y_s\|$.

В §1.4 дается аналитическое решение дифференциальной периодической спектральной задачи.

Теорема 1. *Обозначим $\mu = \sqrt{\lambda - m^2}$. Решение задачи (2) распадается на четыре случая:*

1. $m \cdot \operatorname{tg} a\mu = \mu \cdot \operatorname{th} am, m = 1, 2, \dots,$
2. $\mu \cdot \operatorname{tg} a\mu = m \cdot \operatorname{th} am, m = 1, 2, \dots,$
3. $\lambda = (\pi k + \pi/2)^2/a^2, k = 0, 1, \dots$
4. $\lambda = (\pi k)^2/a^2, k = 1, 2, \dots,$

(3)

Первые два уравнения задают для каждого целого $m > 0$ бесконечную серию собственных чисел λ . Последние два дают еще пару бесконечных серий собственных чисел.

Теорема 1 также дает явный вид собственных функций.

В §1.5 проводится численное решение спектральной задачи (2) при различных значениях сеточных параметров и анализ вычислений. Параметр a полагался равным $\pi/2$. В алгоритме Ланцоша размерность крыловского пространства бралась равной 50. При этом число искоемых собственных чисел с учетом кратности составляло 10. Из расчетов можно сделать вывод, что приближения сходятся со вторым порядком к точным значениям, полученным по формулам (3).

В Главе 2 строится алгоритм стабилизации устойчивых и неустойчивых решений уравнений Стокса и Навье – Стокса в дискретном случае. Проводится полный вычислительный цикл стабилизации и анализ наблюдаемых явлений.

В §2.1 приводится точная постановка задачи. В ограниченной области $\Omega \subset R^2$ рассмотрим следующую систему уравнений

$$\mathbf{u}_t - \Delta \mathbf{u} + \nabla p + \operatorname{Re} u_k \mathbf{u}_{x_k} = \gamma \mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \quad (4)$$

От системы Навье – Стокса ее отличает член $\gamma \mathbf{u}$ с параметром $\gamma \geq 0$. Варьируя значение γ , мы можем превратить тривиальное решение системы из устойчивого в неустойчивое, поскольку собственные значения линеаризованной стационарной задачи смещаются на величину γ и некоторые из них становятся отрицательными. Стабилизации здесь подвергается тривиальное решение, а задачей является построение таких граничных условий $\mathbf{u}|_{\partial\Omega}$, которые обеспечивают стремление нормы возмущения \mathbf{u}_0 решения к нулю с оценкой

$$\|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\|_{L_2(\Omega)} \leq C e^{-\alpha t} \|\mathbf{u}_0\|. \quad (5)$$

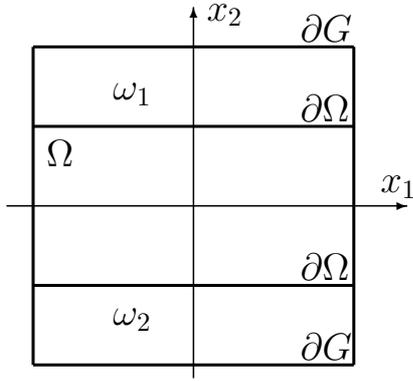


Рис. 1. Область G

Система уравнений (4), дополненная некоторым условием на границе, будет решаться в двух областях: в рассмотренной ранее Ω и ее симметричном расширении $G = \omega_1 \cup \Omega \cup \omega_2$ (рис. 1). Ввиду периодичности функций \mathbf{u} и p по первой координате, под границами областей Ω и G понимаются лишь те их части, где отсутствуют условия периодичности.

В §2.2 формулируется алгоритм стабилизации решения линейной задачи (система (1) при $\text{Re} = 0$) с заданной скоростью α в дифференциальной форме. Дается его обоснование. Алгоритм состоит из 3-х шагов.

1. Продолжение – проектирование заданного начального условия из исходной области в расширенную область на линейное приближение L_- устойчивого инвариантного многообразия M_- .

2. Стабилизация в расширенной области G , т.е. интегрирование нестационарной системы уравнений в G с нулевыми краевыми условиями, где в качестве начального условия взята проекция, полученная на предыдущем шаге.

3. Стабилизация в исходной области Ω , т.е. интегрирование системы уравнений с полученными граничными условиями – следом на $\partial\Omega$, определенного в G , решения.

В формулировку алгоритма входит циклическое повторение операции продолжения – проектирования (п.1) через равные промежутки времени при интегрировании в G . В таком виде он применяется в реальных расчетах. Формальное описание алгоритма в общем виде дается в §4.2.

В §2.3 проводится дискретизация задачи по пространству и времени. Основная часть этой работы уже была проделана в §1.2 в области Ω . В области G сеточные области G_u и G_p строятся аналогично. При этом выполняется свойство вложения $\Omega_u \subset G_u$, $\Omega_p \subset G_p$. Разностные аналоги нелинейных членов $\mathbf{N}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \equiv u_k \mathbf{u}_{x_k}$ строятся симметричным образом. Для дискретизации эволюционной задачи (4) с краевыми условиями $\mathbf{u}|_{\partial G} = 0$ используется проекционная схема Чорина – Теама. В численных экспериментах уравнения, составляющие разностную схему, на каждом шаге решались методом минимальных невязок (GMRES) и методом сопряженных градиентов.

В §2.4 описываются некоторые детали решения вспомогательной спектральной задачи в расширенной области G . Приводятся необходимые для анализа процесса стабилизации собственные числа соответствующих спектральных задач в G и в Ω .

В §2.5 приводятся результаты численных экспериментов по стабилизации и их подробный анализ. Введем дискретный аналог показателя α из (5) по формуле $\alpha(t^k) = (\ln \|\mathbf{v}^{k-1}\|_h - \ln \|\mathbf{v}^k\|_h) / \tau$. В основе анализа лежит поведение функции $\alpha(t)$ в процессе стабилизации. Изучаются четыре типа задач:

1. Устойчивая задача Стокса ($\text{Re} = 0, \gamma = 0$);
2. Неустойчивая задача Стокса ($\text{Re} = 0, \gamma = 2$);
3. Устойчивая задача Навье – Стокса ($\text{Re} = 1, \gamma = 0$);
4. Неустойчивая задача Навье – Стокса ($\text{Re} = 1, \gamma = 2$).

Остановимся на результатах расчета последней задачи, которая представляет собой наиболее общий и сложный случай. При $\gamma = 2$ три младших собственных значения становятся отрицательными, при этом тривиальное решение из устойчивого превращается в неустойчивое. Чтобы противостоять неустойчивости, необходимо выбрать $K > 3$. Для достижения достаточно высокой скорости стабилизации зададимся $K = 7$. Это приводит к ожидаемому показателю стабилизации $\alpha = \lambda_{K+1}(G) - \gamma \approx 2.38$. На рис. 2 изображены результаты стабилизации в области G , на рис. 3 — в области Ω .

В Ω зададим сеточную область 32×32 , в G — 32×64 , шаг по времени $\tau = 0.01$, частоту реортогонализации — каждые 10 шагов.

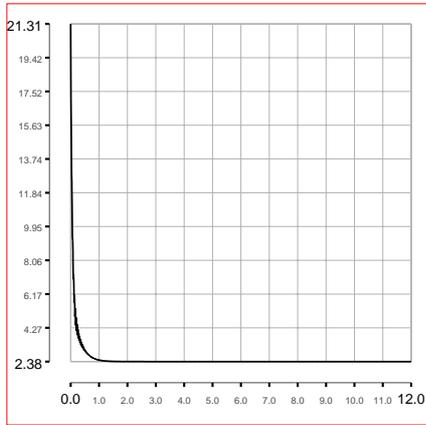


Рис. 2 $\alpha(t)$ в G

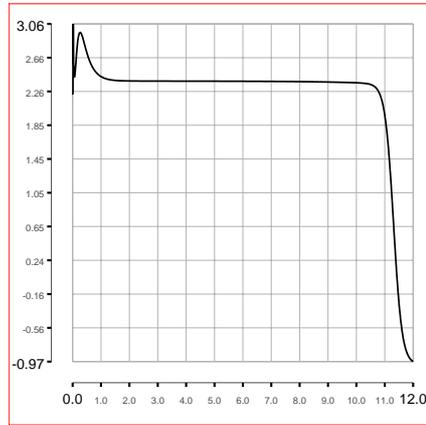


Рис. 3 $\alpha(t)$ в Ω

График в G имеет осцилляции в начале. Если увеличить K или Re то осцилляции резко возрастут по своей амплитуде и длине временного интервала. Это эффект нелинейности задачи: проектирование ведется лишь на касательное пространство к многообразию M_- . Затем график приобретает идеальный характер, демонстрируя выход показателя стабилизации на предсказанную асимптотику $\alpha \approx 2.38$, что полностью соответствует дифференциальной теории экспоненциального затухания возмущения. Затухание осцилляций с течением времени связано с тем, что решение переходит в окрестность нуля, где M_- и L_- достаточно близки.

График в Ω имеет две характерные особенности. Первая — это несколько больших немонотонных скачков на первых шагах интегрирования. Она является следствием полученных граничных условий. Вторая особенность — это неконтролируемое падение α к значению $\lambda_1(\Omega) - \gamma \approx -1$. Объяснение состоит в том, что реортогонализация проводится в области G , где этого эффекта нет. В области же Ω имеются свои неустойчивые собственные функции, коэффициенты при которых монотонно растут, а у нас отсутствует инструмент их подавления. Существенным является то, что описываемое изменение $\alpha(t)$

происходит, когда падение нормы возмущения достигает $3 \cdot 10^{11}$ на промежутке интегрирования, т.е., по сути, когда цель стабилизации достигнута.

Итоговыми являются эксперименты по стабилизации с большими значениями Re . Они показывают, что из-за осцилляций в G стабилизация невозможна уже при $\text{Re} = 8$. Это ограничение является следствием используемого линейного приближения M_- в численном алгоритме стабилизации.

Глава 3 посвящена численному и аналитическому решению спектральной задачи, связанной с устойчивостью течения Куэтта. Она формулируется для оператора, получающегося линейризацией уравнений Навье – Стокса в окрестности течения Куэтта. Рассматриваются численные методы решения спектральной задачи, в основе которых лежит метод Арнольди; иллюстрируется сходимость спектра дискретной задачи к спектру дифференциальной при измельчении сетки, поведение спектра при изменении числа Рейнольдса; возникновение неустойчивости при решении нестационарных уравнений Навье – Стокса с увеличением числа Рейнольдса и ее связь со спектром.

В §3.1 дается постановка краевой и спектральной задач для уравнений Навье – Стокса. Исходная система, для которой при подходящем числе Рейнольдса Re и периоде T решение не единственно, имеет вид:

$$\begin{aligned} -\Delta v^r + \frac{v^r}{r^2} + \text{Re} \left(-\frac{1}{r} v^{\phi^2} + v^r v_r^r + v^z v_z^r \right) + p_r &= 0, \\ -\Delta v^\phi + \frac{v^\phi}{r^2} + \text{Re} \left(\frac{1}{r} v^\phi v^r + v^r v_r^\phi + v^z v_z^\phi \right) &= 0, \\ -\Delta v^z + \text{Re} \left(v^r v_r^z + v^z v_z^z \right) + p_z &= 0, \\ (rv^r)_r + (rv^z)_z = 0, \quad v^\phi|_{r=r_0} = 1, \quad v^\phi|_{r=r_1} = 0, \quad v^r|_{\partial\Omega} = v^z|_{\partial\Omega} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, а вектор скорости $\mathbf{v} = \{v^r(r, z), v^\phi(r, z), v^z(r, z)\}$ и давление $p(r, z)$ определены в плоской области $\Omega = [0, T] \times [r_0, r_1]$. Здесь и далее все функции периодичны: $\mathbf{v}(r, z) = \mathbf{v}(r, z + T)$, $p(r, z) = p(r, z + T)$.

Оператор в (6) представим как сумму линейного \mathbf{L} и нелинейного \mathbf{N} , перейдем к уравнениям для возмущения $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$, где \mathbf{w} — какое-либо стационарное решение, отбросим нелинейные члены по \mathbf{u} ; тогда в компактном виде задачу можно записать так:

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}) + \text{Re} [\mathbf{N}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \mathbf{N}(\mathbf{w}, \mathbf{u})] + \mathbf{G}(p) = \mathbf{0}, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}. \quad (7)$$

Полученные уравнения представляют собой линейризацию нелинейной задачи (6) в окрестности своего решения \mathbf{w} . Таким решением является течение Куэтта. При достаточно больших Re задача (6) имеет решение, отличное от течения Куэтта — вихри Тейлора. Спектральная задача, связанная с устойчивостью течения Куэтта, имеет вид:

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}) + \text{Re} [\mathbf{N}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \mathbf{N}(\mathbf{w}, \mathbf{u})] + \mathbf{G}(p) = \lambda \mathbf{u}, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}. \quad (8)$$

В §3.2 проводится дискретизация задачи. Для дискретизации введем в Ω равномерную прямоугольную сетку. Пусть каждая из дискретных компонент вектора скорости \mathbf{u} определена в узлах сетки, а дискретное давление — в центрах ячеек. Теперь сеточные аналоги дифференциальных операторов ∇_h , div_h , Δ_h , \mathbf{N}_h определяются стандартным симметричным образом.

В §3.3 дается описание алгоритмов, используемых для численного решения сеточного аналога задачи (8). Основным является метод Арнольди, который предназначен для решения частичной проблемы собственных чисел и векторов для несимметричных матриц. Применительно к нашим задачам в качестве оператора A возьмем оператор A_1^{-1} , сопоставляющий правой части \mathbf{f} задачи (7) ее решение \mathbf{u} . Найдем несколько максимальных собственных чисел оператора A_1^{-1} . Тогда обратные к ним величины будут искомыми минимальными собственными числами. Качество полученных приближений измеряется с помощью невязок $\rho_s = \|L_h^{-1}y_s - \lambda_s^{-1}y_s\|$.

В §3.4 дается аналитическое решение спектральной задачи.

Теорема 2. *Обозначим $\mu = \sqrt{\lambda - m^2}$. В некоторых случаях задача (8) имеет аналитическое решение:*

1. $\operatorname{Re} \neq 0$, $u^r = 0$, $u^\phi = 0$: $J_0(\sqrt{\lambda}r_0)/J_0(\sqrt{\lambda}r_1) = Y_0(\sqrt{\lambda}r_0)/Y_0(\sqrt{\lambda}r_1)$,
 2. $\operatorname{Re} = 0$, $u^r = 0$, $u^z = 0$: $J_1(\mu r_0)/J_1(\mu r_1) = Y_1(\mu r_0)/Y_1(\mu r_1)$,
 3. $\operatorname{Re} \neq 0$, $u^\phi \neq 0$, $u_z^\phi = 0$: $J_1(\sqrt{\lambda}r_0)/J_1(\sqrt{\lambda}r_1) = Y_1(\sqrt{\lambda}r_0)/Y_1(\sqrt{\lambda}r_1)$,
 4. $\operatorname{Re} = 0$, $u^\phi = 0$: $\mu\tilde{\alpha}^1 - im\tilde{\alpha}^2 = 0$,
- (9)

Здесь $J_m(r)$, $Y_m(r)$ — функции Бесселя и $I_m(r)$, $K_m(r)$ — модифицированные функции Бесселя. Второе уравнение, как и четвертое задает для каждого целого $m > 0$ бесконечную серию собственных чисел λ . Первая и третья формулы дают еще пару бесконечных серий собственных чисел (достаточно громоздкие выражения для $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ мы здесь не приводим).

Теорема 2 также дает явный вид собственных функций.

В §3.5 дается численное решение спектральной задачи (8) и его анализ. Положим $r_0 = \pi/2$, $r_1 = 3\pi/2$. $T = 2\pi$. Зафиксируем сетку 32×32 в Ω_u .

С ростом Re задача становится все более несимметричной и результаты расчетов показывают, что в спектре появляются комплексные собственные значения. Появление значений с отрицательной действительной частью и увеличение их количества с ростом числа Рейнольдса также является ожидаемым результатом и соответствует росту неустойчивости течения Куэтта.

В §3.6 анализируется численное решение эволюционных уравнений Навье – Стокса при разных числах Рейнольдса (для их решения использовалась схема Чорина – Теамама, описанная в §4.3). В качестве начального условия берется возмущенное течение Куэтта, временной интервал $[0, 100]$, шаг по времени 0.01, сеточная область Ω_u — та же, что и в спектральной задаче.

Расчеты показывают, что полученные результаты вполне соответствуют ожидаемым — с ростом Re неустойчивость течения Куэтта появляется примерно с появлением собственных чисел с отрицательной вещественной частью, а при дальнейшем росте Re неустойчивость увеличивается.

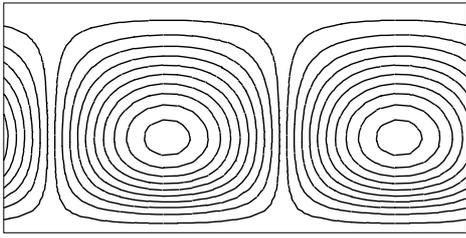


Рис. 4 Вихри Тейлора

Приведем функцию тока решения при $Re = 32$, $t = 100.0$. Изображенное на рис. 4 течение имеет вид классических вихрей Тейлора. Решение, которое в начальный момент времени представляло собой слабо возмущенное течение Куэтта, с течением времени эволюционировало в вихри Тейлора.

В **Главе 4** строится алгоритм стабилизации неустойчивых решений уравнений Навье – Стокса в самом общем несимметричном случае с применением обратной связи. Проводится полный вычислительный цикл по стабилизации неустойчивого течения Куэтта и анализ наблюдаемых явлений.

В **§4.1** дается постановка задачи стабилизации. Эволюционные уравнения, соответствующие стационарной задаче (6) после переноса решения в окрестность течения Куэтта \mathbf{w} в обозначениях **§3.1** примут вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + \mathbf{L}(\mathbf{u}) + Re [\mathbf{N}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \mathbf{N}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \mathbf{N}(\mathbf{w}, \mathbf{u})] + \mathbf{G}(p) &= \mathbf{0}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0. \end{aligned} \quad (10)$$

В этих уравнениях при больших Re неустойчивым является нулевое решение, а устойчивым — вихри Тейлора за вычетом течения Куэтта. Поэтому стабилизации здесь подвергается нулевое решение, а задачей является построение таких граничных условий $\mathbf{u}|_{r=r_1}$ на части границы области Ω , которые обеспечивают стремление возмущения \mathbf{u} к нулю с оценкой (5). Причем начальное возмущение \mathbf{u}_0 бездивергентно и тождественно равно нулю на $\partial\Omega$.

В **§4.2** формулируется алгоритм стабилизации в дифференциальной форме. Дается его обоснование.

Нам потребуется ввести расширенную область $G = \Omega \cup \omega$ (рис. 5), а также несколько видоизмененное скалярное произведение в $L_2(\Omega)$, что вызвано переходом к цилиндрическим координатам:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(\Omega)} = \int_0^T \int_{r_0}^{r_1} (\mathbf{u}, \mathbf{v}) r dr dz.$$

В расширенной области G помимо спектральной задачи вида (8) нам понадобится решать спектральную задачу формально сопряженную к ней в скалярном произведении $(,)_{\mathbf{L}_2(G)}$.

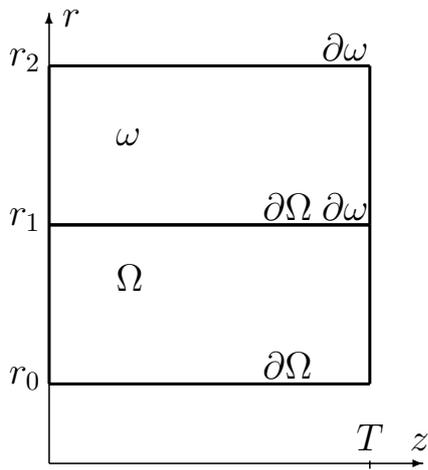


Рис. 5. Область G

Алгоритм стабилизации состоит из шести шагов, некоторые из которых выполняются однократно (п.1 – п.3), некоторые – циклически (п.4 – п.5), затем непосредственно выполняется стабилизация (п.6) с построенными краевыми условиями. Перейдем к его изложению. Задавшись числом $\alpha > 0$, определяющим скорость стабилизации, найдем K из неравенства $\text{Re}(\lambda_K(G)) < \alpha < \text{Re}(\lambda_{K+1}(G))$, предварительно вычислив достаточно большую часть спектра.

1а. Определение M собственных и присоединенных функций $\psi_{i,j}$, $i = 1, \dots, K$, $j = 1, \dots, \mu(\lambda_i)$, $M = \sum_{i=1}^K \mu(\lambda_i)$ в G :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\psi_{i,j}) + \text{Re} [\mathbf{N}(\psi_{i,j}, \tilde{\mathbf{w}}) + \mathbf{N}(\tilde{\mathbf{w}}, \psi_{i,j})] + \mathbf{G}(p_{i,j}) &= \lambda_i \psi_{i,j} + \kappa \psi_{i,j-1}, \\ \text{div } \psi_{i,j} &= 0, \quad \psi_{i,j}|_{\partial G} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

где $\tilde{\mathbf{w}}$ – течение Куэтта в Ω , продолженное нулем в ω .

1б. Определение M сопряженных собственных и присоединенных функций $\psi'_{i,j}$ в G :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}'(\psi'_{i,j}) + \text{Re} [\mathbf{N}'(\psi'_{i,j}, \tilde{\mathbf{w}}) + \mathbf{N}'(\tilde{\mathbf{w}}, \psi'_{i,j})] + \mathbf{G}(p'_{i,j}) &= \bar{\lambda}_i \psi'_{i,j} + \kappa \psi'_{i,j-1}, \\ \text{div } \psi'_{i,j} &= 0, \quad \psi'_{i,j}|_{\partial G} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

2. Доопределение \mathbf{u}_0 с Ω на G , т.е. нахождение функции $\hat{\mathbf{u}}$ в области ω :

$$\mathbf{L}(\hat{\mathbf{u}}) + \mathbf{G}(p) = \mathbf{0}, \quad \text{div } \hat{\mathbf{u}} = 0, \quad \hat{\mathbf{u}}|_{r=r_1} = \mathbf{u}_0|_{r=r_1}, \quad \hat{\mathbf{u}}|_{r=r_2} = \mathbf{0}.$$

3. Определение вспомогательных M функций $\mathbf{w}_{i,j}$ в области ω как решений задач Стокса с ограничениями функций $\psi_{i,j}$ на ω в качестве правых частей:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\mathbf{w}_{i,j}) + \text{Re} [\mathbf{N}(\mathbf{w}_{i,j}, \tilde{\mathbf{w}}) + \mathbf{N}(\tilde{\mathbf{w}}, \mathbf{w}_{i,j})] + \mathbf{G}(q_{i,j}) &= \psi_{i,j}, \\ \text{div } \mathbf{w}_{i,j} &= 0, \quad \mathbf{w}_{i,j}|_{\partial \omega} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

4. Построение функции $\tilde{\mathbf{u}}_0$ – продолжения \mathbf{u}_0 в область G :

$$\tilde{\mathbf{u}}_0 = \begin{cases} \mathbf{u}_0 & \text{в } \Omega, \\ \hat{\mathbf{u}} + \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{\mu(\lambda_i)} c_{i,j} \mathbf{w}_{i,j} & \text{в } \omega. \end{cases} \quad (11)$$

Коэффициенты $c_{i,j}$ определяются из условия ортогональности к функциям сопряженной задачи: $(\tilde{\mathbf{u}}_0, \psi'_{i,j})_{\mathbf{L}_2(G)} = 0$, которое сводится к системе линейных алгебраических уравнений $A\mathbf{c} = -\mathbf{b}$ с симметричной и положительно определенной матрицей A .

5. Интегрирование (стабилизация) уравнений с построенным начальным условием $\tilde{\mathbf{u}}_0$ в области G :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}}_t + \mathbf{L}(\tilde{\mathbf{u}}) + \operatorname{Re} [\mathbf{N}(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) + \mathbf{N}(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{w}) + \mathbf{N}(\mathbf{w}, \tilde{\mathbf{u}})] + \mathbf{G}(\tilde{p}) &= \mathbf{0}, \\ \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}} &= 0, \quad \tilde{\mathbf{u}}|_{\partial G} = \mathbf{0}, \quad \tilde{\mathbf{u}}|_{t=0} = \tilde{\mathbf{u}}_0.\end{aligned}$$

Интегрирование происходит с возвратом к п.4 через равные промежутки времени, где процедура проектирования применяется к текущему решению $\tilde{\mathbf{u}}(t)$.

6. Интегрирование (стабилизация) уравнений с построенным граничным условием $\mathbf{u}|_{\partial\Omega}$ (следом полученного в G решения $\tilde{\mathbf{u}}$ на $r = r_1$) в области Ω :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_t + \mathbf{L}(\mathbf{u}) + \operatorname{Re} [\mathbf{N}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \mathbf{N}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \mathbf{N}(\mathbf{w}, \mathbf{u})] + \mathbf{G}(p) &= \mathbf{0}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \quad \mathbf{u}|_{r=r_0} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}|_{r=r_1} = \tilde{\mathbf{u}}|_{r=r_1}, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0.\end{aligned}$$

В §4.3 проводится дискретизация задачи по пространству и времени. Фактически она уже построена в §3.2 в области Ω . В G сеточные области строятся так, чтобы выполнялось свойство вложения $\Omega_u \subset G_u$, $\Omega_p \subset G_p$. Для дискретизации эволюционной задачи (10) применяется проекционная схема типа Чорина – Теамама. В численных экспериментах составляющие ее уравнения решались методом минимальных невязок (GMRES).

В §4.4 описываются некоторые аспекты решения прямой и сопряженной спектральных задач в расширенной области G . Приводятся необходимые для анализа собственные числа — прямой спектральной задачи в Ω ; прямой и сопряженной спектральных задач в расширенной области G . Далее для экспериментов фиксируются области, сетки и число Рейнольдса:

$$\begin{aligned}\Omega &= [0, 2\pi] \times [\pi/2, 3\pi/2], \quad \Omega_u = 32 \times 32, \\ G &= [0, 2\pi] \times [\pi/2, 5\pi/2], \quad G_u = 32 \times 64, \quad \operatorname{Re} = 32.\end{aligned}$$

В §4.5 приводятся результаты численных экспериментов по стабилизации течения Куэтта. В основе анализа, как и прежде, лежит поведение функции $\alpha(t)$, которая моделирует поведение показателя скорости сходимости в формуле (5) в процессе стабилизации. Для всех экспериментов зафиксируем ряд параметров: норму начального возмущения $\mathbf{u}_0 = 10^{-2}$, интервал интегрирования $[0, 10]$, шаг по времени $\tau = 0.01$, частоту проектирования $\delta_\nu t = 0.1$. В качестве размерности проектирующего собственного подпространства M брались величины $M = 5$, $M = 10$, $M = 16$. Рассмотрим случай $M = 10$.

В расширенной области (рис. 6) мы наблюдаем сходимость $\alpha(t)$ к $1.83 \approx \lambda_{M+1}(G)$, то есть стабилизация происходит с наперед заданной скоростью. Отсутствие точного совпадения с собственными значениями объясняется нелинейностью решаемой задачи. Наличие же незатухающих со временем всплесков (которые происходят в момент операции проектирования) можно объяснить отсутствием сопряженности спектральных задач в дискретном случае и, как следствие этого — неточное выполнение операции проектирования. На всем промежутке интегрирования норма решения падает в $7.11 \cdot 10^6$ раз.

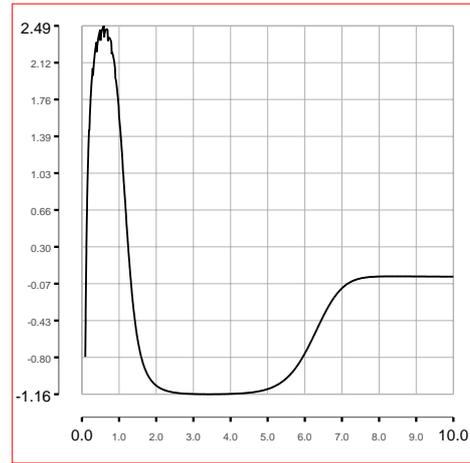
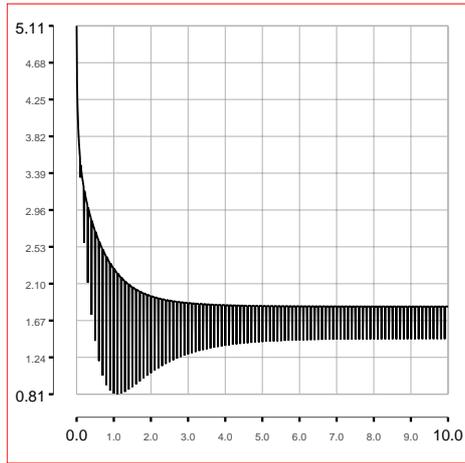


Рис. 6. $\alpha(t)$ в G при $M = 10$ Рис. 7. $\alpha(t)$ в Ω при $M = 10$

В исходной области (рис. 7) мы интегрируем уравнения Навье – Стокса с построенными стабилизирующими краевыми условиями на внешней стенке цилиндра. Сначала происходит всплеск $\alpha(t)$ в область отрицательных значений (который на графике не показан), затем идет полезный промежуток, на котором $\alpha(t)$ положительна и норма решения падает, после чего ее поведение ничем не отличается от случая, когда уравнения интегрируются без стабилизации — $\alpha(t)$ падает к $-1.17 \approx \lambda_1(\Omega)$. Как видно, подавлять возмущение в течении достаточно длительного времени за счет одних лишь краевых условий не удастся. Тем не менее, его норма успевает значительно уменьшиться.

Задавшись целью провести стабилизацию в Ω за счет краевых условий, несколько модифицируем алгоритм стабилизации. Проинтегрировав уравнения в Ω до момента времени, когда норма решения упала достаточно сильно, возьмем полученное решение $\mathbf{u}(t)$ на верхнем временном слое в качестве начального возмущения \mathbf{u}_0 и повторим весь алгоритм стабилизации с начала. Такая система удовлетворяет определению системы с обратной связью, а сам подход позволяет достичь желаемого результата — на всем промежутке интегрирования норма решения падает в $1.96 \cdot 10^2$ раз. В этом случае речь уже не идет о стабилизации с наперед заданной скоростью, а о максимально возможной скорости при используемом подходе. Тем не менее, падение нормы значительно увеличивается с ростом M , а на достаточно большом временном промежутке можно подавить норму возмущения до машинного нуля.

В **Заключении** обсуждаются полученные результаты. Приводятся пути их возможного улучшения.

Основные результаты.

1. Разработан алгоритм стабилизации (вычислительная технология), работающий в условиях реального компьютерного моделирования. С его помощью проведена стабилизация неустойчивых решений разностных уравнений Навье – Стокса в двумерной прямоугольной области в двух случаях:

а) в декартовых координатах с тривиальным неустойчивым решением, которое стремится к бесконечности в отсутствие стабилизации;

б) в цилиндрических координатах с неустойчивым течением Куэтта, которое перестраивается в вихри Тейлора в отсутствии стабилизации.

2. Реализованы алгоритмы численного решения частичных спектральных задач для линеаризованных уравнений Навье – Стокса. С их помощью построены базисы в собственных подпространствах. Показана сходимость спектра по сетке. В важнейших случаях получено аналитическое решение.

3. Показано возникновение неустойчивости течения Куэтта при численном интегрировании эволюционных разностных уравнений Навье – Стокса при числе Рейнольдса, превышающем некоторое критическое значение. Тем самым установлено соответствие с дифференциальной теорией.

4. Подробно исследовано поведение стабилизирующего процесса во всех случаях. Даны объяснения возникающих численных эффектов.

Публикации по теме диссертации

- [1] **Иванчиков А.А.** Численное решение некоторых спектральных задач для уравнений Стокса // Вычисл. методы и программ. 2003. Т.4, N.2, С.58-74.
- [2] **Иванчиков А.А., Чижонков Е.В.** Стабилизация решений уравнений Стокса и Навье – Стокса за счет граничных условий // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. 2004. Т.25, С.128-129.
- [3] **Иванчиков А.А.** Исследование спектральной задачи, связанной с устойчивостью течения Куэтта между вращающимися цилиндрами // Материалы шестого Всероссийского семинара “Сеточные методы для краевых задач и приложения”. 2004. С.102-106.
- [4] **Chizhonkov E.V., Ivanchikov A.A.** On numerical stabilization of solutions of Stokes and Navier – Stokes equations by the boundary conditions // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2004. V.19, N.6, P.477-494.
- [5] **Иванчиков А.А.** Исследование спектральной задачи, связанной с устойчивостью течения Куэтта между вращающимися цилиндрами // Вычисл. методы и программ. 2005. Т.6, N.2, С.55-70.
- [6] **Иванчиков А.А.** О численной стабилизации неустойчивого течения Куэтта по граничным условиям // International Conference “Mathematical Hydrodynamics” Abstracts. 2006. С.92-93.
- [7] **Ivanchikov A.A.** On numerical stabilization of unstable Couette flow by the boundary conditions // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2006. V.21, N.6, P.519-537.
- [8] **Иванчиков А.А.** О численной стабилизации неустойчивых решений уравнений Навье – Стокса с границы области // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2007. N.6, С.26-30.

Подписано в печать 09.10.2008 г.

Печать трафаретная

Заказ № 910

Тираж: 90 экз.

Типография «11-й ФОРМАТ»

ИНН 7726330900

115230, Москва, Варшавское ш., 36

(499) 788-78-56

www.autoreferat.ru