Оселедец Иван Валерьевич

Нелинейные аппроксимации матриц

01.01.07 — Вычислительная математика

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2007

Работа выполнена в Институте вычислительной математики РАН

Научный руководитель:

член-корреспондент РАН, профессор Е. Е. Тыртышников

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор А. А. Абрамов
доктор физико-математических наук, А. В. Сетуха

Ведущая организация:

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Защита состоится «_14_» _ноября_ 2007 г. в _15_ часов на заседании диссертационного совета Д 002.045.01 в Институте вычислительной математики РАН по адресу: 119333, г. Москва, ул. Губкина, д. 8.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института вычислительной математики РАН.

Автореферат разослан «_10_» _октября_ 2007 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета Д 002.045.01
доктор физико-математических наук Г. А. Бочаров

Общая характеристика работы

Актуальность работы

К решению линейных систем уравнений — основной задаче линейной алгебры и матричного анализа — сводится подавляющее большинство практических вычислительных задач. Однако, несмотря на наличие универсальных методов, многие приложения приводят к «большим» системам, которые не могут быть решены даже на современных суперкомпьютерах.

В данной диссертации развиваются эффективные методы вычислений с плотными матрицами, в которых сами матрицы и результаты матричных операций аппроксимируются матрицами специальной структуры, определённой относительно малым числом параметров. Зависимость от параметров носит нелинейный характер, поэтому речь идёт о методах *нелинейной матричной аппроксимации.*

Плотные матрицы описываются N^2 параметрами. Если мы хотим ускорить работу с ними, то необходимо построить «сжатое» представление матрицы с помощью меньшего числа параметров. К сожалению, точные представления малым числом параметров доступны лишь для ограниченного числа случаев. Например, это матрицы инвариантные относительно сдвига — тёплицевы матрицы, или в многомерном случае многоуровневые тёплицевы матрицы. Однако если мы попытаемся выяснить структуру обратной матрицы к таким матрицам, то сразу обнаружим отсутствие явных формул, выражающих элементы обратной матрицы через элементы исходной простым и быстро вычислимым способом. Поэтому надо искать такие малопараметрические представления, с которыми можно эффективно выполнять матричные операции, такие как обращение матриц и решение линейных систем.

Обычно решение линейной системы происходит с использованием некоторого быстрого алгоритма матрично-векторного умножения и итерационного метода. Для быстрой сходимости, как правило, требуется предобуславливатель. Построение хороших предобуславливателей — задача сложная, и обычно решается путём выбора из готового набора «стандартных» предобуславливателей, таких, например, как неполное LU-разложение. Однако их вычислительная сложность и «качество» (т.е. скорость сходимости соответствующего итерационного метода) не всегда высоки. Поэтому представляет интерес решение задачи о построении «наилучших» предобуславливателей и создании некоторого общего подхода к приближённому обращению структурированных матриц. Обе задачи сводятся к задачам нелинейной аппроксимации матриц.

Кроме обращения и предобуславливания плотных матриц при решении интегральных уравнений, алгоритмы нелинейной аппроксимации матриц находят своё применение в задачах сжатия и обработки изображений, сигналов, в задачах восстановления пропущенных измерений в больших массивах данных.

Исследования, отражённые в диссертации, поддерживались грантами РФФИ №02-01-00590-а, 04-07-90336-в, 05-01-00721-а и 06-01-08052-офи.

Цели работы

Основная цель работы состоит в построении быстрых эффективных методов нелинейной аппроксимации матриц и методов работы с построенными аппроксимациями (например, вычисление обратных матриц). Были поставлены следующие задачи:

1. Создание быстрых методов построения наилучших циркулянтных преодобуславливателей на основе $C + R$ аппроксимации и доказательство существование таких аппроксимаций в случае тёплицевых матриц.

2. Построение нестандартных вейвлет-пребразований, адаптированных к заданной неравномерной сетке.

3. Создание метода построения обратных матриц к матрицам малого тензорного ранга, нахождение наиболее экономной структуры для факторов тензорного разложения и обоснование сходимости метода.

4. Применение быстрого метода обращения к конкретным задачам, разработка алгоритма обращения двухуровневых тёплицевых матриц линейной или даже сублинейной сложности и теоретическое исследование структуры обратных к матрицам малого тензорного ранга.

Методы исследования

Одним из основных методов исследования, применяемых в данной диссертации, является построение малоранговых аппроксимаций на основе скелетного разложения и метода неполной крестовой аппроксимации. Скелетное разложение чрезвычайно полезно в деле матричной аппроксимации, так как позволяет представить заданную малоранговую матрицу в через небольшое количество её элементов. Во многих задачах удаётся свести исходную задачу именно к задаче аппроксимации матрицей малого ранга. Предложенный автором метод чёрных точек и алгоритмы тензорной аппроксимации основаны на скелетном разложении. Для обращения матриц применяется классический метод Ньютона, модифицированный для работы со структурированными матрицами. Используются методы теории приближения рациональными функциями.

Научная новизна работы

Предлагаемый в работе метод чёрных точек является новым и принадлежит автору. На данный момент существующие аналогичные алгоритмы являются итерационными и об их глобальной сходимости ничего неизвестно. Предложенный в диссертации алгоритм находит точное решение за конечное и небольшое число итераций. Теоремы о существовании $C + R$ аппроксимаций к тёплицевым матрицам получены в соавторстве с Н.Л. Замарашкиным. Общий подход к обращению структурированных матриц, теоремы о сходимости метода, использование матриц малого тензорного ранга со структурированными факторами для обращения матриц большого размера, возникающих из интегральных уравнений, являются новыми и принадлежат автору. Также является новым и принадлежит автору супербыстрый алгоритм приближённого обращения двухуровневых тёплицевых матриц. Данный метод имеет сублинейную сложность, а все методы, имеющиеся в литературе, имеют существенно более высокую вычислительную сложность. Также новыми являются полученные автором теоремы о структуре обратных матриц к матрицам малого тензорного ранга специального вида.

Защищаемые положения

1. Метод чёрных точек для построения циркулянтных предобуславливателей и восстановления пропущенных элементов в больших массивах данных и теоремы о существовании $C + R$ аппроксимаций для широкого класса тёплицевых матриц.

2. Построение вейвлет-преобразований, адаптированных для неравномерных сеток.

3. Общий подход к построению приближённых обратных матриц к большим структурированным матрицам на основе метода Ньютона с аппроксимациями. Обоснование метода, реализация всей схемы на основе матриц малого тензорного ранга со структурированными факторами.

4. Супер-быстрый алгоритм обращения двухуровневых тёплицевых матриц сложности $\mathcal{O}(\sqrt{n}\log^{\alpha} n)$ и теорема о структуре обратных матриц к матрицам малого тензорного ранга специального вида.

Практическая значимость работы

Методы нелинейной аппроксимации могут быть использованы для быстрого численного решения интегральных уравнений с высокой точностью на мелких сетках на не очень мощных рабочих станциях.

Нестандартные вейвлет-преобразования могут быть использованы для более эффективного сжатия матриц, изображений, для представления кривых и для решения многих других задач, где уже давно используются стандартные вейвлет-преобразования.

Быстрые методы обращения матриц позволяют создавать очень эффективные предобуславливатели для больших матриц и, соответственно, позволяют решать нестационарные задачи, такие как течение жидкости, где требуется на каждом шаге по времени решать линейную систему с одной и той же матрицей.

Метод чёрных точек может применяться для эффективного построения циркулянтных предобуславливатей. Для него существует и другая, очень перспективная область применения — задача восстановления пропусков в больших массивах данных. Такие массивы возникают, например, при анализе структуры генома. Объём данных в таких массивах огромен и поэтому использование быстрого и точного метода абсолютно необходимо.

Апробация работы

Основные результаты докладывались на различных конференциях: на международных конференциях «Матричные методы и операторные уравнения» (ИВМ РАН, 2005 и 2007), на «Ломоносовских чтениях» (Москва, ВМиК МГУ, 2006 и 2007), на третьей международной конференции «Математические идеи П.Л. Чебышёва и их приложение к современным проблемам естествознания» (Обнинск, ИАТЭ, 2006), на международных конференциях ILAS-13 (Амстердам, 2006) и ILAS-14 (Шанхай, 2007), на международной конференции по структурированным матрицам (Гонконг, 2006), на «Тихоновских чтениях» (Москва, ВМиК МГУ, 2006 и 2007), на семинаре «Вычислительные и информационные технологии в математике» (научные руководители Ю.М. Нечепуренко, В.И. Лебедев, Е.Е. Тыртышников), на семинаре мехмата МГУ (научный руководитель Б.С. Кашин).

Публикации

Основные результаты диссертации отражены в публикациях [1-6].

Структура и объём работы

Работа состоит из введения, основного текста и заключения. Объём диссертации — 102 страницы. Библиография включает в себя 66 наименований. Диссертация содержит 8 рисунков и 8 таблиц.

Краткое содержание работы

Введение. К решению линейных систем уравнений — основной задаче линейной алгебры и матричного анализа — сводится подавляющее большинство практических вычислительных задач. В связи с ростом мощности вычислительной техники размер матриц в приложениях всё время увеличивается. Однако в приложениях требуется иметь дело с матрицами ещё больших размеров, недоступных для современных суперкомпьютеров. В частности, при решении интегральных уравнений, как известно, возникают линейные системы с плотными матрицами. Если для решения использовать стандартный метод (такой, как метод Гаусса), то сложность решения составит $\mathcal{O}(N^3)$ операций, где N —число неизвестных. Более того, память на хранение всей матрицы при $N \sim 500000$ составляет порядка 2 Терабайт — такая память доступна сейчас лишь на параллельных машинах. Например, при решении двумерной задачи на сетке с числом узлов по одному направлению 1000, размер матрицы сразу становится равным миллиону. Означает ли это, что задачи такого размера не могут быть решены на рабочей станции? Если речь идёт о реализации известных алгоритмов на существующих компьютерах, то ответ положительный. Однако новые вычислительные алгоритмы могут сделать возможным решение таких задач и на персональной станции. Разработке таких алгоритмов и посвящена данная диссертация.

Плотные матрицы описываются N^2 параметрами. Если мы хотим ускорить работу с ними, то необходимо построить «сжатое» представление матрицы с помощью меньшего числа параметров. Матрицы, описываемые малым числом параметров, будем называть *структурированными*.

Часто структура матрицы видна сразу или следует из физических свойств задачи. Например, в задачах с оператором, инвариантным относительно сдвига, получающиеся матрицы имеют *тёплицеву* (или блочно-тёплицеву в многомерных задачах) структуру, т.е. элемент матрицы зависит лишь от разности индексов: $a_{ij} = b_{i-j}$. Для тёплицевых матриц существуют быстрые алгоритмы, основанные на БПФ. Тёплицевы матрицы — классический пример матриц с *линейной структурой*. Можно привести другие примеры: ганкелевы матрицы ($a_{ij} = b_{i+j}$), ленточные матрицы, разреженные матрицы.

Ещё один важнейший класс матриц — *матрицы малого ранга*, т.е. матрицы вида

$$A = UV^\top,$$

$U \in \mathbb{R}^{n \times r}, V \in \mathbb{R}^{m \times r}$, где ранг $r \ll m, n$. Это — пример матрицы с *нелинейной структурой*: её элементы зависят от параметров (элементов матриц U и V) нелинейно.

Таким образом, эффективные алгоритмы могут быть основаны на *нелинейных малопараметрических аппроксимациях матриц*. Однако далеко не всегда очевидно, как получить эффективное малопараметрическое представление матрицы. Более того, чтобы быстро работать с такими структурами, мы должны уметь выполнять матричные операции (сложение, умножение, обращение) именно в терминах малопараметрического представления. В общем случае возможность сохранения структуры при операциях зависит от выбранного типа структуры. Например матрица, обратная к тёплицевой матрице, уже не будет тёплицевой. В то же время тёплицевы матрицы можно вложить в более широкий класс матриц *малого ранга смещения*, который уже замкнут относительно операции обращения. К сожалению, даже этот класс не замкнут относительно операции умножения. Поэтому выполнение матричных операций с сохранением малопараметического формата может быть только приближённым.

Тёплицевы матрицы соответствуют одномерным интегральным уравнениям, где использование сеток большой размерности не является необходимым. На практике значительно более интересным представляется решение многомерных уравнений. Для ядер, инвариантных относительно сдвига и дискретизации на равномерной сетке, получаются *многоуровневые тёплицевы матрицы*. Такие матрицы тоже можно умножать на вектор за квазилинейное время, однако до сих пор универсальных прямых методов решения таких систем за то же время неизвестно. Существующие формулы (формулы Гохберга-Хайнига) содержат не $\mathcal{O}(N)$ параметров, а $\mathcal{O}(N^{3/2})$, и, видимо, удобных формул с меньшим числом параметров не существует. Что же делать? Ответ прост. Вместо *точных формул* мы предлагаем использовать некоторые *приближённые формулы*. Из каких соображений можно исходить при получении приближённых формул? По существу, изучению этого вопроса (или, точнее, методов поиска ответа на данный вопрос) и посвящена данная диссертация.

Первая глава диссертации направлена на построение циркулянтных предобуславливателей для общих и тёплицевых матриц. Тёплицевы и циркулянтные матрицы — матрицы линейной структуры, и в многочисленных предыдущих работах использовались лишь методы на основе наилучших (в некоторой норме) линейных приближений заданной тёплицевой матрицы циркулянтами. Мы формулируем новую задачу — задачу нелинейной аппроксимации заданной матрицы суммой циркулянта и матрицы малого ранга. Раздел 1.1 содержит краткое описание существующих циркулянтных предобуславливателей, состояния дел на данный момент и мотивацию новой задачи — о поиске $C+R$ аппроксимации. В разделе 1.2 даются различные формулировки задачи $C+R$ аппроксимации и показывается, как эта задача связана с восстановлением неизвестных элементов в малоранговой матрице (матрица с «чёрными точками»). В разделе 1.3 формулируется алгоритм чёрных точек для решения задачи $D + R$ аппроксимации, к которой сводится задача $C + R$ аппроксимации. Этот алгоритм является конечным. Доказана теорема о том, что алгоритм восстанавливает подавляющее большинство «пропусков» за конечное число итераций, на практике порядка 10-20. В разделе 1.4 формулируется практическая адаптивная версия метода чёрных точек, позволяющая строить $C+R$ и $D+R$ аппроксимации без какой-либо дополнительной информации — на вход надо лишь подать исходную матрицу и нужный параметр точности аппроксимации ε. Для матриц общего вида, описываемых n^2 параметрами, получается алгоритм сложности $\mathcal{O}(n^2)$. Для тёплицевых матриц, определяемых $2n - 1$ параметром, в разделе 1.5 получен алгоритм сложности $\mathcal{O}(n \log n)$. Основная задача, которую потребовалось решить — дать удобное, легко и быстро вычисляемое описание для Фурье-образа тёплицевой матрицы.

В разделе 1.6 приведены теоретические результаты, касающиеся существования $C+R$ аппроксимаций для класса тёплицевых матриц. Сначала доказывается теорема для рациональных символов, порождающих семейство тёплицевых матриц:

Теорема 1 Пусть тёплицева матрица T порождена рациональным тригонометрическим символом

$$f(z) = P(z) + \frac{Q(z)}{L(z)}, \quad z = e^{it},$$

где P, Q, L — многочлены, L не имеет корней на единичной окружности, степень Q меньше степени L и они не имеют общих корней. Тогда

$$T = C + R,$$

где C–циркулянтная матрица, и при этом $\operatorname{rank} R \leqslant \deg P + \deg L + 1$.

Результаты раздела объединяет следующая

Теорема 2 Пусть тёплицева матрица T порождена кусочно-аналитическим символом вида

$$f = g + \sum_{\alpha=0}^{l} \sum_{k=0}^{m} A_{k\alpha}(z - \zeta_k)^{\alpha} \log(z - \zeta_k), \quad z = e^{it}, |\zeta_k| = 1,$$

где функция g является аналитической в кольце, содержащем $|z| = 1$. Тогда для любого ε существуют циркулянтная матрица C и матрица R такие, что

$$|(T - C - R)_{ij}| \leqslant |T_{ij}|\varepsilon,$$

причём

$$\operatorname{rank} R \leqslant \log \varepsilon^{-1}[c_0 + c_1 \log \varepsilon^{-1} + c_2 \log n] + c_3, \qquad (1)$$

а c_0, c_1, c_2, c_3 не зависят от n и ε.

Оказывается, что класс функций, к которым применима теорема 2, включает в себя все примеры в литературе по суперлинейным предобуславливателям.

В разделе 1.7 приведены численные эксперименты по построению $C+R$ аппроксимаций для различных тёплицевых матриц. В разделе 1.8 идея метода чёрных точек получает своё естественное продолжение: приведён вариант метода, позволяющий восстанавливать неизвестные элементы в малоранговой матрице с произвольным расположением этих самых неизвестных элементов. Однако, в отличие от диагонального шаблона, надо внимательно следить за тем, какие элементы удалось восстановить, а какие нет. В разделе 1.9 сделано самое общее возможное обобщение метода чёрных точек на случай, когда положение неизвестных элементов неизвестно. Для этого предложено максимизировать разреженность матрицы $A - R$ с помощью минимизации специального функционала.

Вторая глава посвящена построению специальных преобразований (вейвлет-преобразований) для сжатия матриц, построенных по неравномерным сеткам. Построение происходит на основе лифтинговой схемы. В разделе 2.1 описывается история вопроса и мотивируется необходимость построения таких новых преобразований. В разделе 2.2 даются основные понятия и определения, необходимые для дальнейшего изложения. В разделе 2.3 вводится самый важный в главе объект — вейвлет-пространство и описывается так называемая лифтинговая схема построения вейвлет-преобразований с требуемыми свойствами. В разделе 2.4 формулируются основное требование на вейвлет-преобразование (наличие заданного количества нулевых моментов) и выписывается система линейных уравнений специального вида на коэффициенты, определяющие искомое преобразование. В разделе 2.5 формулируется основной результат главы. Показано, что задача сводится к нахождению некоторых многочленов $P_j(x)$, $j_{\min} \leqslant j \leqslant j_{\max}$ таких, что

$$[\widetilde{x}_r; \widetilde{x}_{(r+1)}; \ldots; \widetilde{x}_{(r+k+1)}] P_j(x) = \delta_{rj}, \qquad (2)$$

$$j_{\min} \leqslant r \leqslant j_{\max},$$

где $\widetilde{x}_j$ — некоторая заданная неравномерная сетка на отрезке. После этого доказывается следующая теорема о виде этих полиномов.

Теорема 3 Многочлен $P_j(x)$ такой что

$$P_j(\widetilde{x}_r) = \begin{cases} \widetilde{x}_j - \widetilde{x}_{j+1}, j_{\min} \leqslant r \leqslant j, \\ 0, j < r \leqslant j_{\max} + 1, \end{cases} \tag{3}$$

удовлетворяет (2) при $k = 0$. Многочлен $P_j(x)$ такой, что

$$P_j(\widetilde{x}_r) = \begin{cases} q(\widetilde{x}_r), j_{\min} \leqslant r \leqslant j, \\ 0, j < r \leqslant j_{\max} + k + 1, \end{cases} \tag{4}$$

$$q(x) = (\widetilde{x}_j - \widetilde{x}_{(j+k+1)}) \prod_{l=j+1}^{j+k} (x - \widetilde{x}_l),$$

удовлетворяет (2) при $k \geqslant 1$.

Раздел 2.6 посвящён нахождению масштабирующих коэффициентов — показано, что их можно находить с помощью уже описанного алгоритма по аналогичным формулам. В разделе 2.7 описан конкретный пошаговый способ реализации вейвлет-преобразования, требующий $\mathcal{O}(n)$ операций. Также описаны алгоритмы вычисления обратного и обратного транспонированного преобразования — они активно используются в численных расчётах для восстановления исходных данных по преобразованным. В разделе 2.8 приведены численные эксперименты, сравнивающие новые преобразования с преобразованиями Добеши. Показано, что выигрыш по степени сжатия составляет в различных примерах от 30% до 50% процентов.

Третья глава посвящена общему подходу для построения алгоритмов обращения больших структурированных матриц и решению систем с такими матрицами. В разделе 3.1 дано краткое описание истории вопроса и дана формулировка задачи, описаны основные этапы построения тензорной аппроксимации со структурированными факторами. В разделе 3.2 описан первый способ построения предобуславливателя — масштабированный циркулянтный предобуславливатель. В разделе 3.3 начинается изложение одного из основных результатов диссертации — метода Ньютона с аппроксимациями для приближённого для обращения матриц.

Пусть дана матрица A, тогда метод Ньютона для её обращения записывается в виде

$$X_k = 2X_{k-1} - X_{k-1}AX_{k-1}, \quad X_k \to A^{-1}, \tag{5}$$

и сводится к двум операциям умножения матриц. Применительно к матрицам общего вида метод имеет большую вычислительную сложность.

Поэтому в разделе 3.4 описан метод Ньютона с аппроксимациями, позволяющий строить приближённые обратные к большим структурированным матрицам:

$$Z_k = 2X_{k-1} - X_{k-1}AX_{k-1}, \qquad X_k = R(Z_k), \tag{6}$$

где R — оператор обрезания (или аппроксимации). Справедлива следующая теорема.

Теорема 4 *Предположим, что*

$$R(A^{-1}) = A^{-1}. \tag{7}$$

Тогда, для всех достаточно близких к A^{-1} *начальных приближений* $X_0 = R(X_0)$ *метод (6) порождает последовательность матриц* X_k*, сходящуюся к* A^{-1} *квадратично:*

$$||A^{-1} - X_k|| \leq (1 + M)\, ||A||\; ||A^{-1} - X_{k-1}||^2, \qquad k = 1, 2, \ldots . \tag{8}$$

Также в этом разделе предложен модифицированный метод Ньютона, который работает существенно быстрее для структурированных матриц. В разделе 3.5 представлены численные результаты. В таблице 1 приведены результаты работы программного комплекса.

Порядок матрицы	16129	65025	261121	1046529
Тензорный ранг	20	22	25	20
Точность	$9.7 \cdot 10^{-8}$	$8.4 \cdot 10^{-8}$	$9.8 \cdot 10^{-8}$	$8.1 \cdot 10^{-6}$
Матрица-на-вектор	0.3 sec	1.6 sec	7.7 sec	15.6 sec
Число итераций	28	30	33	38
Построение предобуславливателя	4.0 sec	16.4 sec	1.1 min	4.4 min
Время решения	11.2 sec	59.4 sec	5.7 min	14.5 min
Относительная ошибка	$5.8 \cdot 10^{-7}$	$1.1 \cdot 10^{-6}$	$9.9 \cdot 10^{-7}$	$2.8 \cdot 10^{-5}$

Таблица 1. Результаты для неравномерной сетки.

Четвёртая глава посвящена обращению двухуровневых тёплицевых матриц. В рамках развиваемого подхода построен метод Ньютона с аппроксимациями для обращения двухуровневых тёплицевых матриц с использованием введённого TDS-формата (Tensor-displacement-structure). Сам новый формат вводится в разделе 4.2. В разделе 4.3 описываются основные арифметические операции над матрицами в TDS формате — сложение, умножение, и показывается, что их можно выполнить за $\mathcal{O}(\sqrt{n}\log^{\alpha} n)$ операций. Важнейший элемент одного шага метода Ньютона — оператор обрезания — описан в том же разделе. Показано, что задача сводится к вычислению фробениусова скалярного произведения двух TDS-матриц, и это вычисление может быть проведено очень быстро. В разделе 4.5 описывается способ выбора начального приближения. В разделе 4.6 приведены численные эксперименты для двух модельных задач. Для матрицы из уравнения Прандтля результаты приведены в таблице 2.

Порядок матрицы	64^2	128^2	256^2	512^2
Время счёта	270 сек	433 сек	817 сек	1710 сек
Тензорный ранг A^{-1}	13	13	12	11
Средний ранг смещения A^{-1}	8.5	9.3	9.5	9.7

Таблица 2. Численные результаты для модельной задачи

И, наконец, в разделе 4.7 впервые получены теоретические результаты о структуре обратных матриц к матрицам малого тензорного ранга специального вида. Построен класс матриц, замкнутый относительно обращения. Самым простым примером такой матрицы является матрица вида

$$A = I + D \otimes R + R \otimes D,$$

где $R = uu^\top$ — симметричная матрица ранга 1, а D —диагональная матрица. Доказано, что обратная к такой матрице имеет тензорный ранг не больше 5. Получено обобщение этого утверждения на случай большего числа слагаемых. Результаты данного раздела дают частичное теоретическое обоснование предложенных в этой и предыдущей главах быстрых алгоритмов приближённого обращения матриц.

Основные результаты работы

1. Решена задача построения оптимальных циркулянтных предобуславливателей на основе эффективных алгоритмов построения $C+R$ и $D+R$ аппроксимаций. Предложен и теоретически обоснован метод чёрных точек для решения задачи $C+R$ и $D+R$ аппроксимации и для восстановления пропусков в больших малоранговых матрицах. Для всех практически важных случаев тёплицевых матриц доказаны теоремы о существовании $C+R$ аппроксимации.

2. Построены явные формулы для построения вейвлет-преобразований на неравномерных сетках. Показано, что адаптированные к заданной сетке вейвлет-преобразования дают существенный выигрыш по сравнению с классическими преобразованиями Добеши, от 30% до 50%.

3. Предложен общий подход для обращения структурированных матриц на основе метода Ньютона с аппроксимациями. Доказана теорема о сохранении квадратичной сходимости метода. Предложен модифицированный метод Ньютона, дающий существенный выигрыш при обращении структурированных матриц. Предложены алгоритмы обращения больших матриц на основе тензорных аппроксимаций со структурированными факторами. Использование тензорных аппроксимаций вместе с нестандартными вейвлет-преобразованиями позволило решать плотные системы с миллионом неизвестных в течении минут на обычной персональной станции.

4. Построен алгоритм супер-быстрого обращения двухуровневых тёплицевых матриц, основанный на разработанном методе Ньютона с аппроксимациями. Предложена приближённая структура (TDS-формат) для обратной матрицы к дважды тёплицевой матрице — тензорное разложение малого тензорного ранга, в котором каждый тензорный фактор имеет малый ранг смещения. На модельных примерах показано, что сложность алгоритма для обращения двухуровневых тёплицевых матриц порядка n составляет $O(\sqrt{n}\log^{\alpha} n)$, т.е. алгоритм имеет *сублинейную сложность* по порядку матрицы n. Впервые получены результаты о структуре матриц, обратным к матрицам малого тензорного ранга специального вида.

Публикации по теме диссертации

1. Оселедец И.В., Тыртышников Е.Е., Приближённое обращение матриц при численном решении гиперсингулярного интегрального уравнения *ЖВМ и МФ* , 2005, **45**:2, 315–326.

2. Оселедец И.В., Применение разделённых разностей и B-сплайнов для построени быстрых дискретных преобразований вейвлетовского типа на неравномерных сетках, *Мат. заметки*, 2005, **75**:5, 743-752

3. Замарашкин Н.Л., Оселедец И.В., Тыртышников Е.Е., О приближении тёплицевых матриц суммой циркулянта и матрицы малого ранга, *ДАН*, 2006, **73**,100-101.

4. Ford J. M., Oseledets I. V., Tyrtyshnikov E. E., Matrix approximations and solvers using tensor products and non-standard wavelet transforms related to irregular grids, *Rus. J. Numer. Anal. and Math. Modelling*, 2004, **19**:2, 185-204.

5. Оселедец И.В., Оценки снизу для сепарабельных аппроксимаций ядра Гильберта, *Матем. сб.*, 2007, **198**:3, 137-144.

6. Оселедец И.В., Савостьянов Д.В., Ставцев С.Л., Применение нелинейных методов аппроксимации для быстрого решения задачи о распространении звука в мелком море. *Методы и технологии решения больших задач*, ИВМ РАН, 2004, 171-192.

изд. лиц. №03991 от 12.02.2001. Компьютерный набор.

Подписано в печать 10.10.2007. Усл. печ. л. 0.8. Тираж 100 экз.

Институт вычислительной математики РАН. 119333, Москва, ул. Губкина, 8.