

На правах рукописи

Добросердова Татьяна Константиновна

**Численное моделирование кровотока при  
наличии сосудистых имплантатов или  
патологий**

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва – 2013

Работа выполнена в *Федеральном государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования “Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова”*.

Научный руководитель:

*доктор физико-математических наук, доцент  
Ольшанский Максим Александрович*

Официальные оппоненты:

*Нечепуренко Юрий Михайлович,*

*доктор физико-математических наук, доцент, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт вычислительной математики Российской академии наук, ведущий научный сотрудник*

*Чупахин Александр Павлович,*

*доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук, заведующий лабораторией дифференциальных уравнений*

Ведущая организация:

*Федеральное государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования “Московский физико-технический институт (государственный университет)”*

Защита состоится 31 октября 2013 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 002.045.01 при *Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте вычислительной математики Российской академии наук (ИВМ РАН)*, расположенном по адресу: 119333, г. Москва, ул. Губкина, 8.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *ИВМ РАН*.

Автореферат разослан «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2013 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь

диссертационного совета Д 002.045.01,  
*доктор физико-математических наук*

*Бочаров Г. А.*

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы исследования.** По данным федеральной службы государственной статистики РФ за последние десять лет по причине болезней системы кровообращения (БСК) ежегодно происходит более 55% всех смертей в РФ. Эта причина лидирует во всем мире. В настоящее время значительно увеличивается количество стентирований, ангиопластик, число применений современных технологий диагностики и лечения острой сосудистой патологии. В проекте государственной программы по развитию здравоохранения в РФ до 2020 г. планируется дальнейшее усиление мер по оказанию специализированной медицинской помощи больным с острой сосудистой патологией. Данная тема привлекает внимание ученых и врачей во всем мире.

Математическое моделирование может существенно помочь в разработке новых и улучшении существующих методов лечения и профилактики БСК, в устранении побочных эффектов. Возможность использования в математической модели широкого диапазона параметров кровотока и сосудистого дерева позволяет исследовать критические факторы некоторых патологических осложнений. В виртуальной системе кровообращения можно реализовать различные сценарии операции для конкретного пациента, спрогнозировать исход той или иной тактики лечения и выбрать оптимальную.

Гемодинамическое моделирование является предметом исследования многих ученых. Наиболее популярными являются одномерные модели течения крови по сосудам. За последние несколько лет опубликовано большое число работ, посвященных их разработке, как в России, так и за рубежом. Человеческий организм является сложной системой, поэтому для приближения численных расчетов к реальным данным требуется учитывать множество факторов. Разработка методов адаптации модели под конкретного пациента, способов принятия во внимание работы других органов, систем организма, действия внешних сил и т.п. является крайне актуальной.

Одной из возникающих проблем является трудоемкость вычислений. Чем больше детализация модели и размерность пространства, тем больше необходимо вычислительных ресурсов. Чтобы подобные технологии могли использоваться врачами, время, затрачиваемое на расчет, должно быть соизмеримо с модельным временем. Следовательно, необходима разработка эффективных

численных методов. С этой точки зрения использование одномерных моделей весьма эффективно. Использование многомасштабных моделей позволяет лучше описать реальные процессы. Преимущество имеют методы, не включающие итерационные процессы, а использующие, например, схемы расщепления. Однако, для реализации схемы расщепления нужны подходящие граничные условия на стыке областей разных размерностей.

Большие временные затраты требуются для расчета 3D течений, особенно при наличии анизотропных включений, например, кава-фильтра, поэтому особое внимание уделяется надежности и эффективности расчетов в таких областях. В частности, при решении систем уравнений, полученных после дискретизации уравнений Навье-Стокса, можно использовать специальные переобуславливатели.

Исследования, вошедшие в диссертацию, были частично поддержаны грантами РФФИ 10-01-91055-НЦНИ\_а, 11-01-00767-а, 11-01-00971-а, 12-01-00283-а, 12-01-33084-а, федеральной целевой программой “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России”.

**Цели и задачи диссертационной работы.** Цель данной работы — разработка и численная реализация методов, позволяющих одномерной модели глобальной циркуляции крови учитывать наличие патологий или имплантатов, в частности, атеросклеротических бляшек и кава-фильтра.

Для достижения заданной цели требовалось разработать две стратегии. В первом случае для реализации поставленной задачи используется волоконная или пружинно-волоконная модель эластичной стенки сосуда. С ее помощью можно воспроизвести зависимость трансмурального давления от площади поперечного сечения сосуда. Эта зависимость далее используется в одномерной модели глобального кровообращения. В рамках данного подхода необходимо было создать цельную технологию, позволяющую импортировать данные между моделями.

Во втором случае дополнительно к одномерной модели глобальной циркуляции крови используется трехмерная модель течения жидкости в канале сложной формы: область с патологией или имплантатом считается трехмерной и течение крови в ней рассчитывается с помощью уравнений Навье-Стокса. Геометрия области может быть любой, в том числе с сильно анизотропными

препятствиями, такими как кава-фильтр. Чтобы математическая постановка задачи для двухмасштабной модели была корректна и ее численная реализация вычислительно эффективна, необходимо предложить граничные условия на стыке областей разных размерностей, а также численный алгоритм расчета. Новые граничные условия должны гарантировать выполнение энергетического баланса, а схема расщепления для численного решения обеспечивать порядок точности не меньше второго.

**Научная новизна.** В работе представлен новый подход к учету патологий и имплантатов в модели глобального кровообращения. Ключевой характеристикой эластичных свойств стенок сосудов в этой модели является зависимость трансмурального давления от площади поперечного сечения сосуда. Впервые предложено выводить данную зависимость с помощью волоконной модели эластичной стенки сосуда. Новый метод позволяет исследовать не только локальный кровоток, но и изменение глобальной гемодинамики. Технология оказывается вычислительно эффективной, благодаря простой постановке математической задачи.

В работе предложены новые граничные условия на стыке областей разных размерностей при синтезе одномерной и трехмерной моделей течения жидкости. Эти условия обеспечили выполнение энергетического баланса для двумасштабной модели течения жидкости при использовании конвективной формы записи уравнений Навье-Стокса; выведена энергетическая оценка. Для вычислений предложена и численно исследована схема расщепления второго порядка точности. Подобные двухмасштабные модели могут использоваться для изучения кровотока в сети сосудов с произвольной геометрией как имплантатов, так и сосудов, их стенок, патологий. Никогда ранее не производился расчет кровотока многомасштабной моделью с сильно анизотропными включениями в трехмерной области, такими, как кава-фильтр. В диссертационной работе приведены результаты указанного численного эксперимента. Для решения уравнений Навье-Стокса в описанной двухмасштабной модели впервые используется метод бисопряженных градиентов с блочным переобуславливателем специального вида.

**Практическая значимость.** В рамках диссертационной работы реализованы две составные модели, позволяющие описывать влияние патологий и

имплантатов на кровоток. Результаты расчетов гемодинамики в сети сосудов с атеросклерозом не только воспроизвели известные симптомы заболевания, но и позволили качественно оценить и сравнить значимость различных по величине бляшек. Моделирование течения крови в области установленного кава-фильтра дало возможность вычислить силу, действующую на имплантат.

Разработанные модели являются этапом в создании “Виртуальной системы кровообращения”. Проект реализуется в ИВМ РАН совместно с Василевским Ю.В., Симаковым С.С., Ивановым Ю.А., Крамаренко В.К. Данная технология, оснащенная удобным графическим интерфейсом на сенсорной панели с функциями мультитач, позволит делать гемодинамические расчеты для конкретного пациента (с использованием данных магнитно-резонансной или компьютерной томографии), учитывая влияние различных факторов, в частности, патологий и имплантатов. Разработка может использоваться для повышения точности прогнозирования хирургических операций.

#### **Положения, выносимые на защиту:**

1. Для модели глобальной циркуляции крови предложено и реализовано новое дополнение, позволяющее учитывать влияние патологий или имплантатов на гемодинамику, например, атеросклероза или кава-фильтра. Проведены численные расчеты кровотока в сети сосудов с атеросклерозом, подтверждающие клинические симптомы заболевания.
2. Предложены новые граничные условия на стыке трехмерной и одномерной моделей течения жидкости, гарантирующие выполнение физически правильного энергетического баланса для двухмасштабной модели. При численных расчетах данные условия позволяют на каждом временном шаге расщеплять задачу на одномерную и трехмерные подзадачи.
3. Проведен численный расчет трехмерного течения крови в области установленного кава-фильтра. Расчет также моделирует влияние кава-фильтра на гемодинамику в соседних одномерных сосудах. Точность алгоритма протестирована на задачах с известным аналитическим решением, а также на модельной задаче трехмерного обтекания цилиндра.

**Степень достоверности и апробация результатов.** Основные результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференци-

ях: научный семинар института прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН (ИПМ РАН, 2013 г.); семинар “Mathematical modeling of natural disasters and technical hazards” (г.Сьон, Швейцария, 2013г.); международная конференция по математической теории управления и механике (г. Суздаль, Россия, 5-9 июля 2013 г.); научный круглый стол “Современные проблемы и инновационные перспективы моделирования кровообращения” (ФЦ сердца, крови и эндокринологии им. В.А. Алмазова, г. Санкт-Петербург, 24 июня 2013 г.); семинар кафедры вычислительной математики под руководством проф., д.ф.-м.н. А.С. Холодова (МФТИ, 2013 г.); научный семинар Института вычислительной математики РАН (ИВМ РАН, 2013 г.); семинар кафедры вычислительной математики под руководством проф., д.ф.-м.н. Г.М. Кобелькова (мех-мат МГУ, 2013 г.); научный круглый стол “Cardiovascular simulations: challenges and perspectives” (Университет Хьюстона, США, 29 апреля 2013 г.); день математического моделирования “Инновации в фармацевтике и медицине” (Москва, Россия, 14 ноября 2012 г.); VI Всероссийская конференция “Актуальные проблемы прикладной математики и механики”, посвященная памяти академика А.Ф.Сидорова (Абрау-Дюрсо, Россия, 2012); 4th Workshop on Advanced Numerical Methods for Partial Differential Equation Analysis (Санкт-Петербург, Россия, 22 - 24 августа 2011); I (2010 г.), II (2011 г.), III (2011 г.), IV (2012 г.) конференции по математическим моделям и численным методам в биоматематике (ИВМ РАН, Москва, Россия); 52-я (2009 г.), 53-я (2011 г.), 55-я (2012 г.) научные конференции МФТИ “Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук” (МФТИ, Россия, Московская область, г.Долгопрудный); Лобачевские чтения - 2009 (Казань, Россия).

**Публикации.** Материалы диссертации опубликованы в 12 печатных работах, из них 5 статей в журналах из Перечня ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК, [1–5] и 7 тезисов докладов.

**Личный вклад автора.** Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами в работах [1–5]. Вклад соавторов равновелик. Диссертантом были реализованы составные модели течения крови в сети сосудов с патологиями или имплантатами на основе имеющихся моделей глобаль-

ной циркуляции крови, эластичной стенки сосуда, а также программного пакета ani3D. В работе [1] также предложены новые граничные условия на стыке областей разных размерной при синтезе одномерной модели глобального кровообращения и трехмерной модели течения жидкости. Для двухмасштабной задачи предложена схема расщепления, исследована ее точность на аналитическом решении. Диссертантом реализованы численные эксперименты по моделированию течения крови в сети сосудов с кава-фильтром и атеросклерозом. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 102 страницы, включая 16 рисунков и 13 таблиц. Библиография включает 96 наименований на 12 страницах.

## Содержание работы

**Во Введении** дается обзор исследований, посвященных моделированию течения крови в сосудах, обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна работы, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

**В первой главе** описывается метод учета патологий или имплантатов моделью глобального кровообращения посредством изменения уравнения состояния. Уравнение состояния, одно из уравнений модели, представляет собой зависимость трансмурального давления в сосуде от площади поперечного сечения. При изменении эластичных свойств стенки сосуда предлагается модифицировать эту зависимость с помощью волоконной или пружинно-волоконной модели эластичной стенки сосуда.

*В разделе 1.1* описывается используемая модель глобального кровообращения<sup>1</sup>. В пункте 1.1.1 приводится математическая постановка задачи. В основе модели лежат законы сохранения массы и импульса для вязкой несжи-

---

<sup>1</sup> Холодов А.С., Симаков С.С. Численное исследование содержания кислорода в крови человека при низкочастотных воздействиях // Математическое моделирование. 2008. Т. 20(4). С. 87–102.

маемой жидкости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(Su)}{\partial x} &= \varphi(t, x, S, \bar{u}), \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}^2/2 + \bar{p}/\rho)}{\partial x} &= \psi(t, x, S, \bar{u}), \end{aligned} \quad (1)$$

$x \in [0, l]$  — координата вдоль сосуда, длина которого  $l$ ;  $t \in [0, T]$  — время в интервале от начала расчетов до момента  $T$ ;  $S$  сечение сосуда;  $\bar{u}$  — скорость, осредненная по сечению;  $\bar{p}$  — трансмуральное давление;  $\rho$  — плотность крови;  $\varphi, \psi$  — заданные функции. В данной работе положим  $\varphi = 0$ , а  $\psi$  будет задавать вязкое трение и определяться формулой:

$$\psi = -16\mu\eta(\check{S})/(\check{S}d^2), \quad (2)$$

$$\text{где } \check{S} = S\hat{S}^{-1}, \quad \eta(\check{S}) = \begin{cases} 2, & \check{S} > 1, \\ \check{S} + \check{S}^{-1}, & \check{S} \leq 1, \end{cases}$$

$\hat{S}$  — площадь поперечного сечения сосуда при  $p = 0$ ;  $d$  — диаметр трубки;  $\mu$  — коэффициент вязкости крови. Третьим уравнением модели является уравнение состояния, представляющее собой зависимость трансмурального давления от площади поперечного сечения. Для здоровых сосудов принимается эмпирическая функция

$$\bar{p} = \rho c_0^2 f(S), \quad (3)$$

$$f(S) = \begin{cases} \exp(S\hat{S}^{-1} - 1) - 1, & S > \hat{S} \\ \ln(S\hat{S}^{-1}), & S \leq \hat{S} \end{cases}, \quad (4)$$

где  $c_0$  — скорость распространения малых возмущений. Уравнение состояния является главной характеристикой эластичных свойств стенок сосудов в модели. Далее приводятся краевые условия для задачи (1) в точках стыковки сосудов. В разделе 1.1.2 обосновывается диссипативность модели глобального кровообращения, выводится энергетическое равенство. В разделе 1.1.3 рассматриваются численные методы для гемодинамических расчетов. Приводится двухслойная консервативная разностная схема для системы уравнений (1). Граничные условия дискретизируются с первым порядком точности, полученная нелинейная система рассчитывается методом Ньютона. В разделе 1.1.4 рассматриваются допустимые дополнительные предположения и обобщения

модели глобального кровообращения, например, возможности учитывать нервную регуляцию, ауторегуляцию, функционирование других физиологических систем организма и органов. Основным интересом для диссертационной работы являются методы учета влияния различных патологий и имплантатов на кровоток.

В разделе 1.2 описывается один из таких методов. Суть его заключается в модификации уравнения состояния (3). В пункте 1.2.1 рассматриваются особенности этой функции, в частности, нелинейность и  $S$ -образность ее графика. В пункте 1.2.2 приводится краткое описание имеющихся волоконной модели эластичной стенки сосуда и пружинно-волоконной модели стенки артерии с атеросклеротической бляшкой. Указанные модели позволяют рассчитывать реакцию стенки сосуда на деформацию. Полученная зависимость трансмурального давления от площади поперечного сечения далее используется в модели глобального кровотока. В пункте 1.2.3 описано несколько численных экспериментов по моделированию течения крови в сети сосудов с атеросклерозом. Предполагается наличие как одной, так и нескольких атеросклеротических бляшек разных размеров, сравниваются результаты расчетов в различных частях организма. Полученные данные подтверждают возможность проявления хорошо известных в медицине осложнений и симптомов данного заболевания.

Результаты первой главы опубликованы в работах [2–5].

**Во второй главе** описывается метод сопряжения трехмерной модели течения жидкости с одномерной моделью глобальной циркуляции крови.

В разделе 2.1 представлена модель течения жидкости в трехмерной области  $\Omega_{3D}$ , основанная на уравнениях Навье-Стокса. Здесь приводится математическая постановка задачи. Далее выводится энергетическая оценка для модели. Полученное равенство показывает, что при однородных граничных условиях наблюдается диссипация энергии. Уравнения Навье-Стокса дискретизируются по времени со вторым порядком точности. В зависимости от того, как аппроксимируется конвективный член, система дифференциальных уравнений оказывается линейной или нелинейной.

В разделе 2.2 описываются численные методы для решения полученной задачи. Если задача линеаризована, дальнейшая дискретизация проводится

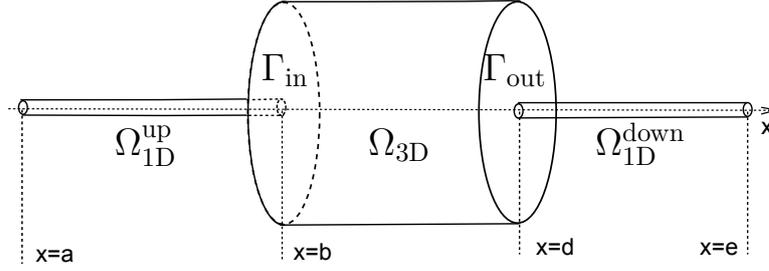


Рис. 1. Схема стыковки  $\Omega_{1D}^{up}$ ,  $\Omega_{3D}$  и  $\Omega_{1D}^{down}$  областей.

методом конечных элементов. Полученная система уравнений решается методом бисопряженных градиентов с блочным треугольным переобуславливателем специального вида<sup>2</sup>. Используемый переобуславливатель эффективен для достаточно большого диапазона параметра вязкости, а также его собственные значения могут быть ограничены константами, не зависящими от шага расчетной сетки. Если решаются нелинейные уравнения Навье-Стокса, используется метод Ньютона-Крылова. Все используемые численные методы реализованы с помощью программного пакета Ani3D.

Раздел 2.3 посвящен сопряжению трехмерной модели течения жидкости с одномерной моделью глобальной циркуляции крови. Рассматривается трехмерная область  $\Omega_{3D}$  ( $\Gamma_{out}$  – граница вытекания) и присоединенная к ней одномерная  $\Omega_{1D}^{down}$ , граничащая с  $\Omega_{3D}$  в точке  $d$  (см. рис. 1). В разделе 2.3.1 приводится обзор существующих граничных условий на стыке областей разных размерностей, требующих непрерывности каких-либо осредненных величин: нормальной компоненты скорости, осредненной по сечению, площади поперечного сечения, давления, нормальной компоненты тензора напряжений, входящей характеристики или потока. Наиболее популярной комбинацией являются требования непрерывности нормальной компоненты тензора напряжения и потока:

$$\left( -\nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} + p \mathbf{n} \right) \Big|_{\Gamma_{out}} = \bar{p}|_{x=d} \mathbf{n}, \quad (5)$$

$$\int_{\Gamma_{out}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds = S \bar{u}|_{x=d}, \quad (6)$$

<sup>2</sup> Olshanskii M.A., Vassilevski Yu.V. Pressure Schur complement preconditioners for the discrete Oseen problem// SIAM J.Sci.Comp. 2007. V.29. P.2686-2704

где  $\mathbf{u}$  — трехмерная скорость;  $p$  — давление в  $\Omega_{3D}$ ;  $\bar{p}, S, \bar{u}$  — давление, площадь поперечного сечения и скорость, осредненная по сечению, в  $\Omega_{1D}^{\text{down}}$ ;  $\nu$  — вязкость жидкости;  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к поверхности. Однако, с условиями (5), (6) двухмасштабная модель не является диссипативной при однородных условиях на границе втекания в трехмерную область  $\Gamma_{\text{in}}$  и на границе вытекания из одномерной области при  $x = e$ . Сохранение данного свойства желательнее с точки зрения физического смысла, поскольку одномерная и трехмерная модели по отдельности являются диссипативными.

В работе Formaggia и др. предложено использовать условие (6) совместно с требованием непрерывности полного напряжения:

$$-\nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} + (p + \frac{\rho}{2} |\mathbf{u}|^2) \mathbf{n} = (\bar{p} + \frac{\rho}{2} \bar{u}^2) \Big|_{x=d} \mathbf{n} \quad \text{на } \Gamma_{\text{out}}. \quad (7)$$

В этом случае двухмасштабная модель оказывается диссипативной, однако, условие (7) естественно для вихревой формы уравнений Навье-Стокса. Численный расчет таких уравнений затруднителен средствами существующих программных пакетов.

В диссертационной работе решаются уравнения Навье-Стокса в обычной конвективной форме, естественным граничным условием для которых является (5). Считая полное напряжение постоянным вдоль границы  $\Gamma_{\text{out}}$ , как следует из (7), получим некорректное условие вытекания для простейшего течения Пуазейля. Для сохранения диссипативности двухмасштабной 1D-3D модели предлагается совместно с условием (5) использовать новое граничное условие, требующее непрерывности линейной комбинации потоков энергии и жидкости:

$$\bar{p} \int_{\Gamma_{\text{out}}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds + \frac{\rho}{2} \int_{\Gamma_{\text{out}}} |\mathbf{u}|^2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) ds = (\bar{p} S \bar{u} + \frac{\rho}{2} S \bar{u}^3) \Big|_{x=d}. \quad (8)$$

Если обозначить энергию одномерной модели для сосуда  $\Omega_{1D}^{\text{down}}$  через  $\mathcal{E}_{1D}(t)$ , а трехмерной модели для области  $\Omega_{3D}$  через  $\mathcal{E}_{3D}(t)$ , верна следующая теорема об энергетическом балансе для двухмасштабной модели:

**Теорема 1.** *Рассмотрим задачу течения жидкости в области  $\Omega_{3D} - \Omega_{1D}^{\text{down}}$ , основанную на уравнениях Навье-Стокса и системе уравнений (1), (3), (4), с граничными условиями (5), (8) на стыке областей разных размерностей. Пусть на остальных границах заданы однородные граничные условия:  $\mathbf{u}_{\text{in}} =$*

$0, \bar{u}|_{x=e} = 0$ . Тогда достаточно гладкое решение удовлетворяет следующему энергетическому равенству:

$$\mathcal{E}_{3D}(T) + \mathcal{E}_{1D}(T) + \nu \int_0^T \|\nabla \mathbf{u}\|^2 dt + \int_0^T \int_{\Omega_{1D}^{\text{down}}} K_\nu(S) \bar{u}^2 dx dt = \mathcal{E}_{3D}(0) + \mathcal{E}_{1D}(0) \quad (9)$$

для любого  $T > 0$ . Если  $\psi$  определена как (2), тогда  $K_\nu(S) = 16\nu\eta(\tilde{S})\hat{S}d^{-2} > 0$ , и совместная энергия модели монотонно убывает по времени для любого ненулевого решения:

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{E}_{3D}(t) + \mathcal{E}_{1D}(t)) < 0.$$

Если к трехмерной области  $\Omega_{3D}$  по границе  $\Gamma_{\text{in}}$  присоединить одномерный сосуд  $\Omega_{1D}^{\text{up}}$ , стыкующийся в точке  $b$  (см. рис. 1), возможным граничным условием может быть условие свободного стока в точке  $b$  в комбинации с требованием непрерывности нормальной компоненты скорости, осредненной по сечению, или потока, или линейной комбинации потоков жидкости и энергии (аналогично условию (8)) на стыке областей  $\Omega_{3D}$  и  $\Omega_{1D}^{\text{up}}$ .

Для расчета течения жидкости описанной двухмасштабной моделью в области  $\Omega_{1D}^{\text{up}}\text{-}\Omega_{3D}\text{-}\Omega_{1D}^{\text{down}}$  (см. рис. 1) предложена схема расщепления, описанная в разделе 2.3.2 – 2.3.3. Обозначим через  $\bar{u}^n, \bar{p}^n, S^n, \mathbf{u}^n$  и  $p^n$  значения соответствующих параметров в момент времени  $t = t_n$ . Используя эти величины, вычислим  $\bar{u}^{n+1}, \bar{p}^{n+1}, S^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}$  и  $p^{n+1}$  при  $t = t_{n+1}$  ( $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ ) в три этапа:

Шаг 1. Проинтегрируем (1) на интервале  $\Omega_{1D}^{\text{up}}$  при  $t \in [t_n, t_{n+1}]$  с данной  $\bar{u}(t_{n+1})$  в точке  $x = a$  и условием свободного стока в точке  $x = b$ .

Шаг 2. Из условия сопряжения моделей в точке  $a$ , вычислим  $\mathbf{u}_{\text{in}}$  с использованием

$$\{\bar{u}, \bar{p}, S\} = \{\bar{u}^{n+1}, \bar{p}^{n+1}, S^{n+1}\}.$$

Найдем  $\bar{p}^*$  и  $S^*$  как линейную экстраполяцию  $\bar{p}|_{x=d}$  и  $S|_{x=d}$  с временных слоев  $t_n$  и  $t_{n-1}$  на слой  $t_{n+1}$ . Решим задачу Навье-Стокса в  $\Omega_{3D}$  относительно  $\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}$  с условием

$$\left( -\nu \frac{\partial \mathbf{u}^{n+1}}{\partial \mathbf{n}} + p^{n+1} \mathbf{n} \right) |_{\Gamma_{\text{out}}} = \bar{p}^* \mathbf{n}$$

на  $\Gamma_{\text{out}}$ .

Шаг 3. Найдем  $\bar{u}^{n+1}|_{x=d}$  из уравнения

$$(\bar{p}^* S^* \bar{u}^{n+1} + \frac{\rho}{2} S^* (\bar{u}^{n+1})^3)|_{x=d} = \bar{p}^* \int_{\Gamma_{out}} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} ds + \frac{\rho}{2} \int_{\Gamma_{out}} |\mathbf{u}^{n+1}|^2 (\mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n}) ds. \quad (10)$$

(Для нахождения  $\bar{u}^{n+1}|_{x=d}$  также можно использовать условие непрерывности нормальной компоненты скорости, осредненной по сечению, или потока.) Теперь, используя  $\bar{u}^{n+1}$  для граничных условий в точке  $x = d$  и условие свободного стока в точке  $x = e$ , интегрируем (1) при  $t \in [t_n, t_{n+1}]$  и находим  $\bar{u}^{n+1}, \bar{p}^{n+1}, S^{n+1}$  в  $\Omega_{1D}^{down}$ .

Данный алгоритм можно использовать с разными шагами по времени в одномерной и трехмерной областях.

Результаты второй главы опубликованы в работе [1].

**В третьей главе** описываются численные эксперименты, проведенные двухмасштабной моделью, рассмотренной во второй главе.

В разделе 3.1 приведен первый эксперимент. Рассчитывается течение жидкости в области  $\Omega_{1D}^{up}-\Omega_{3D}-\Omega_{1D}^{down}$  (см. рис. 1), где трехмерная область  $\Omega_{3D}$  является цилиндром, а аналитическое решение задачи известно. Сначала уравнения Навье-Стокса линеаризуются, дискретизируются методом конечных элементов, исследуется сходимость метода бисопряженных градиентов с блочным переобуславливателем специального вида. Установлено, что сходимость незначительно зависит от вязкости и улучшается при измельчении сетки. Надежность алгоритма при различных значениях параметра вязкости обнаружена только для достаточно малых значений шага по времени (в рассматриваемых случаях не больше 0.01). Наблюдается сходимость численного решения к аналитическому решению со вторым порядком точности.

Тот же эксперимент рассчитывается с использованием нелинейных уравнений Навье-Стокса. Метод Ньютона-Крылова, применяемый для их решения, оказывается надежным примерно в том же диапазоне параметров, имеет также второй порядок сходимости и такую же величину погрешности. Однако, время, затрачиваемое на расчет нелинейных уравнений, оказывается значительно большим, чем затрачиваемое на расчет линейных, из-за большего количества линейных итераций на каждом шаге по времени. По этой причине в последующих расчетах уравнения Навье-Стокса линеаризуются.

В разделе 3.2 описана вторая серия экспериментов. Схема расщепления тестируется на задачах с известным аналитическим решением и использованием различных условий сопряжения решений на стыке областей разных размерностей. Во всех случаях установлен второй порядок сходимости.

В разделе 3.3 тестируется вычисление важных прикладных характеристик, таких как сила сопротивления и перепад давления, создаваемый жидкостью при обтекании препятствия. Также тестируется применение новых условий сопряжения 1D и 3D моделей (5), (8). Следуя работам Schäfer, Turek, Braack, в качестве трехмерной области рассматривается канал с прямоугольным сечением, в качестве препятствия — круговой цилиндр. Течение задается стационарным с числом Рейнольдса 20 или нестационарным с максимальным числом Рейнольдса 100. Для указанных задач известен диапазон значений исследуемых характеристик. В описанных тестах не устанавливалось ограничений на условия вытекания, таким образом, мы использовали условия (5), (8), присоединив к трехмерному каналу одномерный сосуд.

Численные результаты хорошо приближают эталонные. Используемый в  $\Omega_{3D}$  метод конечных элементов для задач с условиями сопряжения моделей (5), (8) на границе вытекания  $\Gamma_{out}$  обеспечивает надежную и устойчивую аппроксимацию решения.

В разделе 3.4 описан расчет двухмасштабной моделью течения крови в вене с установленным кава-фильтром. В качестве трехмерной области  $\Omega_{3D}$  брался участок нижней полой вены длиной 4.5см с эллиптическим сечением  $1.6 \times 2.4$ см. Кава-фильтр прикреплен на расстоянии 0.5см от границы втекания, его длина 2см, диаметр каждой из 12 ножек 0.5мм. Для такой области строилась адаптивная сетка. Кровь считается вязкой несжимаемой жидкостью с динамической вязкостью  $0.0055 \text{ Па}\cdot\text{с}$  и плотностью  $1 \text{ г/см}^3$ . Профиль скорости на границе втекания в  $\Omega_{1D}^{up}$  строился по данным доплерографии в нижней полой вене и был аппроксимирован гладкой периодической функцией.

Результаты расчетов показали, что за кава-фильтром наблюдается замедление кровотока и обратные течения. Это объясняет повторное тромбообразование на ножках кава-фильтра, являющееся побочным эффектом установки имплантата. Численное решение в этой области не осесимметрично: возмуще-

ния, вызванные несимметричностью тетраэдральной сетки, достаточно значимы для появления неустойчивости в виде дорожки Кармана за препятствием.

В ходе эксперимента вычислена зависимость силы, действующей на кова-фильтр, от времени. График этой силы сопротивления по форме напоминает график скорости на границе втекания в одномерный сосуд  $\Omega_{1D}^{up}$ . Профили скорости в центральных точках одномерных сосудов до и после трехмерной области с кова-фильтром очень близки. Таким образом, граничные условия на стыке областей разных размерностей сохраняют осредненные гемодинамические характеристики, в частности, величину потока.

Результаты третьей главы опубликованы в работе [1].

**В Заключении** кратко сформулированы результаты диссертационной работы.

## Список публикаций

1. Dobroserdova T. K., Olshanskii M. A. A finite element solver and energy stable coupling for 3D and 1D fluid models // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2013. V. 259. P. 166 – 176.
2. Vassilevski Yu., Simakov S., Salamatova V., Ivanov Yu., Dobroserdova T. Numerical issues of modelling blood flow in networks of vessels with pathologies // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2011. V. 26(6). P. 605–622.
3. Vassilevski Yu., Simakov S., Salamatova V., Ivanov Yu., Dobroserdova T. Vessel wall models for simulation of atherosclerotic vascular networks // Mathematical Modelling of Natural Phenomena. 2011. V. 6(7). P. 82–99.
4. Vassilevski Yu., Simakov S., Salamatova V., Ivanov Yu., Dobroserdova T. Blood flow simulation in atherosclerotic vascular network using fiber-spring representation of diseased wall // Mathematical Modelling of Natural Phenomena. 2011. V. 6(5). P. 333–349.
5. Иванов Ю. А., Добросердова Т. К. Математическое моделирование влияния установки кова-фильтра на гемодинамику кровеносной системы // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. 2010. Т. 04(68). С. 94–98.