На правах рукописи

Апаринов Андрей Александрович

Быстрые матричные вычисления в методе дискретных вихрей

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва – 2010

Работа выполнена в Учреждении Российской Академии наук
Институте вычислительной математики РАН

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
доцент Сетуха Алексей Викторович

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук,
профессор Захаров Евгений Владимирович
доктор технических наук,
профессор Вышинский Виктор Викторович

Ведущая организация:
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

Защита диссертации состоится «*26*» *мая* 20*10* года в *15* часов на заседании диссертационного совета Д 002.045.01 в Учреждении Российской академии наук Институте вычислительной математики РАН по адресу: 119333, г. Москва, ул. Губкина, д. 8.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Учреждения Российской академии наук Институте вычислительной математики РАН.

Автореферат разослан «*26*» *апреля* 20*10* г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.045.01
доктор физико-математических наук Бочаров Г.А.

Общая характеристика работы

Объект исследования и актуальность темы. Метод дискретных вихрей (МДВ) и его модификации – одно из наиболее активно развивающихся и широко применяемых направлений среди вихревых методов аэрогидродинамики.

В настоящее время метод дискретных вихрей применяется для решения задач в различных областях: аэродинамика летательных аппаратов, парашютов, зданий и сооружений, изучение вопросов образования и развития вихревых структур, таких как, например, спутные следы за самолетами.

При моделировании вихревых течений рассматриваемыми методами основные вычислительные затраты по числу операций и следовательно времени расчета приходятся на преобразования формы вихревых структур, осуществляемые на каждом шаге интегрирования по времени. Каждое такое преобразование можно свести к задаче умножения некоторой матрицы большой размерности на вектор.

В настоящей работе рассматриваются возможность и эффективность применения метода мозаично-скелетонных аппроксимаций матриц в рамках метода дискретных вихревых отрезков для трехмерного моделирования вихревых течений идеальной жидкости в безграничной области, а также при обтекании системы тел.

Следует отметить, что разделение задач на два класса: распространение завихренности в безграничном объеме идеальной жидкости; трехмерное моделирование обтекания тел; обусловлено тем фактом, что развитие численного метода (МДВ) и его внедрение в практическую деятельность происходило существенно быстрее, чем развитие математического аппарата, дающего строгое обоснование применимости метода. В настоящий момент существует обоснованная математическая теория только для задач первого класса, в рамках которой в настоящей работе формулируются новые теоремы и приводятся доказательства, обосновывающие применение предложенных идей ускорения вычислений. Что касается второго класса задач, то практика показывает, что использование МДВ дает хорошие результаты (при сравнении с экспериментальными данными). Таким образом, учитывая сложившуюся практику апробации численных методов МДВ для задач трехмерного обтекания системы тел, в работе проводится ряд исследований, позволяющих продемонстрировать хорошее совпадение результатов моделирования с данными физических экспериментов.

В связи с изложенными обстоятельствами **объектом** исследования в настоящей работе являются метод дискретных вихрей, трехмерные математические модели движения идеальной жидкости в безграничном объеме и обтекание тел идеальной жидкостью, а **предметом** исследования – вопросы ускорения вычислений в методе дискретных вихрей.

Целью диссертационной работы является формулировка, обоснование и программная реализация «быстрого» численного алгоритма для задач, решаемых методом дискретных вихрей («быстрого» означает ускорение в 10 и более раз по сравнению с алгоритмами, основанными на прямых вычислениях).

Для достижения указанной цели в работе решены задачи:

1) разработка модификации метода дискретных вихревых отрезков (МДВО) эффективно совместимой с методом мозаично-скелетонных аппроксимаций для решения трехмерных задач переноса завихренности в безграничной области и задач обтекания тел;

2) доказательство сходимости решений, полученных сформулированным численным методом, к решению непрерывной задачи о переносе завихренности в безграничной области;

3) теоретическое обоснование применимости метода мозаично-скелетонных аппроксимаций в сформулированном численном алгоритме для ускорения расчетов;

4) интеграция программных комплексов, реализующих МДВО и метод мозаично-скелетонных аппроксимаций;

5) проведение исследовательских расчетов по оценке эффективности быстрых алгоритмов.

<u>Методы исследования</u>. Вихревые методы, методы вычислительной линейной алгебры, дифференциальные уравнения, численное моделирование.

<u>Научная новизна</u>.

1) Сформулирована новая модификация метода дискретных вихревых отрезков с использованием мозаично-скелетонных аппроксимаций для ускорения вычислений для трехмерных задач переноса завихренности в безграничном объеме и задач обтекания тел идеальной жидкостью.

2) Доказаны сходимость численных решений, получаемых модифицированным алгоритмом, к решению исходной непрерывной задачи о переносе завихренности в безграничной области на сетке.

3) Получено теоретическое обоснование применимости метода мозаично-скелетонных аппроксимаций в сформулированном численном алгоритме для ускорения расчетов.

4) Произведена оценка возможностей по ускорению вычислений за счет использования метода мозаично-скелетонных аппроксимаций матриц в новой области: вихревых методах вычислительной аэродинамики.

<u>Научная и практическая значимость</u>.

1) В характерных аэродинамических задачах сформулированный «быстрый» алгоритм позволяет получить ускорение времени расчета в 10 и более раз по сравнению с алгоритмами, основанными на прямых вычислениях.

2) Сформулированный «быстрый» алгоритм открывает возможности для решения принципиально новых аэрогидродинамических задач, которые до настоящего времени не решались ввиду их большой вычислительной сложности.

3) Возросшая скорость вычислений позволяет проводить расчеты на более мелких сетках и правильно моделировать тонкие аэродинамические эффекты, такие, как, например, расчет подсасывающей силы на передней кромке крыла.

В диссертации получены следующие основные результаты, выносимые на защиту:

1) сформулирована модификация алгоритма метода дискретных вихревых отрезков с применением мозаично-скелетонных аппроксимаций для ускорения расчетов;

2) доказана сходимость на сетке численных решений, получаемых с помощью сформулированного численного алгоритма, к решению исходных уравнений для трехмерной задачи переноса завихренности в безграничном объеме идеальной жидкости;

3) интегрированы программные комплексы, реализующие метод дискретных вихревых отрезков и метод мозаично-скелетонных аппроксимаций;

4) произведено тестирование алгоритмов ускоренного умножения матриц на основе мозаично-скелетонных аппроксимаций в трехмерных модельных задачах о переносе завихренности в безграничном объеме и об отрывном обтекании тел. Получены данные об ускорении вычислений при применении ускоренного алгоритма.

Апробация работы. Результаты работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях:

- международная школа-семинар «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики», 2008 год, Орел;
- международная научно-образовательная конференция «Наука в вузах: математика, физика, информатика. Проблемы высшего и среднего профессионального образования», 2009 год, Москва;
- XX школа-семинар «Аэродинамика летательных аппаратов», 2009 год, пос. Володарка, ЦАГИ им. проф. Н.Е. Жуковского;
- конференция Тихоновские чтения – 2009 год, Москва;

Кроме того, результаты докладывались и обсуждались на семинарах:

- отчетная сессия Института Вычислительной математики РАН, декабрь 2008;

- семинар имени проф. С.М. Белоцерковского, ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского – ЦАГИ им. проф. Н.Е. Жуковского, февраль 2009;
- семинар на факультете ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством проф. Е.В.Захарова;
- семинар «Вычислительные и информационные технологии в математике» ИВМ РАН под руководством чл.-корр РАН, проф. Е.Е. Тыртышникова, сентябрь 2009.

Публикации: По теме работы опубликовано 4 статьи, 2 тезиса докладов на конференциях. Основные результаты содержатся в работах [1-6], в том числе [5,6] из перечня ВАК РФ.

Структура работы. Работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации - 124 страницы. Список литературы включает 83 наименования.

Личный вклад автора. Личный вклад автора в совместные работы оценивается как равный с соавторами.

Краткое содержание работы

Во **введении** описываются цели работы, обосновывается ее актуальность и практическая значимость, приводится обзор работ по исследуемому вопросу.

В **первой главе** формулируются постановки трехмерной задачи переноса завихренности в безграничном объеме идеальной жидкости и трехмерной задачи отрывного обтекания системы тел идеальной жидкостью. Обе задачи ставятся в лагранжевых координатах: в каждый момент времени положения жидких частиц и завихренность в них рассматриваются как функции от их начальных положений.

Задача переноса завихренности в безграничном объеме описывается следующей интегро-дифференциальной системой уравнений:

$$\partial_t \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi},t) = \mathbf{w}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi},t),t), \quad \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi},0) = \boldsymbol{\xi}, \qquad (1.1)$$

$$\partial_t \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\xi},t) = \sum_{i=1}^{3} \psi_i(\boldsymbol{\xi},t)\partial_i \mathbf{w}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi},t),t)\,,\ \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\xi},0) = \boldsymbol{\omega}_0(\boldsymbol{\xi})\,, \tag{1.2}$$

$$\mathbf{w}(\mathbf{y},t) = \frac{1}{4\pi}\int_{R^3} \frac{\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\xi},t)\times(\mathbf{y}-\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi},t))}{\left|\mathbf{y}-\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi},t)\right|^3} d\boldsymbol{\xi}\,,\ \mathbf{y}\in R^3\,. \tag{1.3}$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi},t) \in R^3$ - точка, в которой в момент времени t находится частица с лагранжевыми координатами $\boldsymbol{\xi} = (\xi_{1,}\xi_{2,}\xi_3) \in R^3$, $\mathbf{w}(\mathbf{x},t)$ - скорость жидкости в точке $\mathbf{x}$ в момент времени t, $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\xi},t) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi},t),t)$, $\boldsymbol{\omega} = rot\,\mathbf{w}$ - завихренность, $\boldsymbol{\omega}_0$ - заданное начальное распределение завихренности, причем предполагается, что функция $\boldsymbol{\omega}_0(\boldsymbol{\xi})$ равна нулю вне некоторой ограниченной области B, $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $\partial_t = \partial/\partial t$, x_i, $i = 1,2,3$ - координаты точки $\mathbf{x}$.

Автором предложена модификация численной схемы решения трехмерной задачи распространения завихренности в безграничном объеме, эффективно совместимая с методом мозаично-скелетонных аппроксимаций. Вопросы эффективной совместимости подробно рассматриваются в Главе 3. Численная схема получается при дискретизации системы уравнений (1.1)-(1.3). При этом осуществляется разбиение исходной области на ячейки B_j (рис. 1) и для каждой ячейки строится вихревой элемент $(\mathbf{l}_j, \Gamma_j)$, такой что $\Gamma_j \cdot \mathbf{l}_j = b_j \cdot \boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{x}_j)$, где $\mathbf{l}_j$ - вихревой отрезок заданной длины l, Γ_j - интенсивность отрезка, b_j - объем ячейки B_j, $\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{x}_j)$ - завихренность, сосредоточенная в ячейке, $\mathbf{x}_j$ - середина отрезка $\mathbf{l}_j$, $j = 1,...,N$, $\mathbf{x}_j^+(t)$ и $\mathbf{x}_j^-(t)$ - конец и начало отрезка $\mathbf{l}_j$. Далее в каждый момент времени $t \geq 0$ будем аппроксимировать поле завихренности вихревыми элементами $(\mathbf{l}_j, \Gamma_j)$, где $\mathbf{l}_j = \mathbf{l}_j(t) = \mathbf{x}_j^+(t) - \mathbf{x}_j^-(t)$, значения $\left|\Gamma_j \mathbf{l}_j\right|$ не меняются с течением времени.

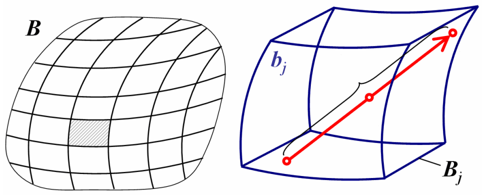

Рис. 1

Аппроксимация уравнений (1.1)-(1.3) осуществляется следующей дискретной системой уравнений, описывающих движение концов вихревых отрезков: $\dfrac{d\mathbf{x}_j^{\pm}}{dt} = \mathbf{w}(\mathbf{x}_j^{\pm}, t)$, $j = 1,...,n$, $\quad \mathbf{x}_j^{\pm} = \mathbf{x}_j^{0\pm}$ при $t = 0$, $j = 1,...,n$.

Выражение для скорости получается путем регуляризации несобственного интеграла в формуле (1.3)

$$\mathbf{w}_{\varepsilon}(\mathbf{x},t) = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}_j) \times \mathbf{V}_{\varepsilon}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) b_j \text{, где } \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}_j, 0) b_j = \Gamma_j \cdot \mathbf{l}_j, \tag{1.4}$$

$$\mathbf{V}_{\varepsilon}(\mathbf{y} - \mathbf{x}_j) = (\mathbf{y} - \mathbf{x}_j) / 4\pi \left| \mathbf{y} - \mathbf{x}_j \right|^{-3} \cdot \theta_{\varepsilon}(\left| \mathbf{y} - \mathbf{x}_j \right|),$$

$\theta_{\varepsilon}(r)$ - функция, которая должна сгладить особенность в указанном интеграле.

Перемещение вихревых отрезков во времени аппроксимируется схемой Эйлера с уточнением:

$$\hat{\mathbf{x}}_{j,k+1}^{\pm} = \mathbf{x}_{j,k}^{\pm} + \mathbf{w}^k(\mathbf{x}_{j,k}^{\pm}) \Delta t, \; \mathbf{x}_{j,k+1}^{\pm} = \mathbf{x}_{j,k}^{\pm} + 0.5(\mathbf{w}^k(\mathbf{x}_{j,k}^{\pm}) + \hat{\mathbf{w}}^{k+1}(\hat{\mathbf{x}}_{j,k+1}^{\pm}))\Delta t,$$
$$\text{где } \mathbf{w}^k(\mathbf{x}) = \mathbf{W}\left[\left\{ \mathbf{x}_{j,k}^{-}, \mathbf{x}_{j,k}^{+} \right\}_{j=1,...,n} \right](\mathbf{x}), \hat{\mathbf{w}}^k(\mathbf{x}) = \mathbf{W}\left[\left\{ \hat{\mathbf{x}}_{j,k}^{-}, \hat{\mathbf{x}}_{j,k}^{+} \right\}_{j=1,...,n} \right](\mathbf{x}), \tag{1.5}$$

$$\mathbf{W}\left[\left\{ \mathbf{x}_j^{-}, \mathbf{x}_j^{+} \right\}_{j=1,...,n} \right](\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \Gamma_j [\mathbf{l}_j \times \mathbf{V}_{\varepsilon}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)],$$
$$\mathbf{l}_j = \mathbf{x}_j^{+} - \mathbf{x}_j^{-}, \; \mathbf{x}_j = (\mathbf{x}_j^{+} + \mathbf{x}_j^{-}) / 2 \tag{1.6}$$

При постановке трехмерных задач об отрывном обтекании системы тел идеальной несжимаемой жидкостью поверхности обтекаемых тел и вихревой след, образующийся за ними, заменяются вихревыми слоями. Предполагается, что течение жидкости является потенциальным всюду вне обтекаемых тел и вихревых следов, возникающих при отрыве потока с заданных линий отрыва, а вихревые следы представляют собой тонкие поверхности разрыва касательной составляющей поля скоростей. При такой постановке поле скоростей жидкости в каждый момент времени может быть представлено в виде градиента потенциала двойного слоя, размещенного на поверхностях обтекаемых тел и вихревой пелене. В диссертации приводится полная постановка краевой задачи для поля скоростей и давления и вытекающая из нее система интегродифференциальных уравнений для траекторий движения точек вихревого следа и плотностей потенциала двойного слоя, размещенного на поверхностях обтекаемых тел и вихревой пелене.

Дискретизация трехмерной задачи обтекания системы тел осуществляется методом дискретных вихревых отрезков. Его суть сводится к тому, что непрерывный вихревой слой, заменяющий поверхности обтекаемых объектов и вихревые следы аппроксимируются системой дискретных вихрей так, чтобы в пределе при увеличении числа вихрей получить исходный вихревой слой (рис. 2).

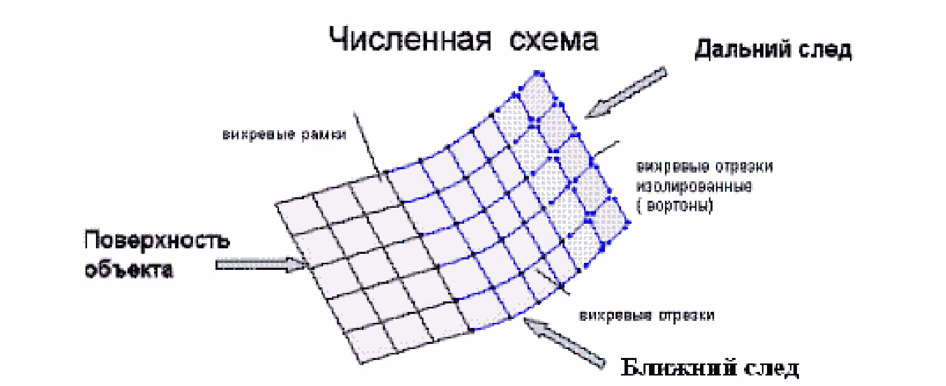

Рис. 2

В работе рассмотрен подход, при котором в вихревом следе выделяются две зоны: «ближний» след и «дальний» след. Поверхность обтекаемого объекта и «ближний» вихревой след аппроксимируются системой замкнутых вихревых рамок, а «дальний» след системой изолированных вихревых отрезков.

При численном решении задачи вихревые рамки и вихревые отрезки, моделирующие вихревой след перемещаются по скорости жидкости. При этом необходимо рассчитать скорость жидкости в массиве точек приемников (угловых точках рамок, в концах вихревых отрезков). Такая процедура является наиболее трудоемкой с точки зрения затрат машинного времени в ходе решения всей задачи. Выполнение этой процедуры можно свести к умножению матрицы большой размерности на вектор.

Во **второй** главе доказывается сходимость описанного в первой главе численного метода решения трехмерной задачи переноса завихренности в безграничной области.

Для исследования уравнений (1.1)-(1.3) вводятся следующие функциональные пространства. Пусть $H^{\alpha}(\Omega)$, где $\alpha \in (0,1)$, $\Omega \subset R^3$ есть пространство действительных функций, определенных и непрерывных по Гельдеру с показателем α на множестве Ω, с нормой $\|f\|_{\alpha} = \sup_{\mathbf{x}\in\Omega}|f(\mathbf{x})| + \sup_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in\Omega,\mathbf{x}\neq\mathbf{y}} |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})|/|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-\alpha}$ и $H^{1,\alpha}(\Omega)$ - пространство действительных функций $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in\Omega$, таких, что $\partial_i f \in H^{\alpha}(\Omega)$, с нормой $\|f\|_{1,\alpha} = \|f\|_{\alpha} + \sum_{i=1}^{3}\|\partial_i f\|_{\alpha}$. Обозначим, также, $\mathbf{H}^{\alpha}(\Omega)$ и $\mathbf{H}^{1,\alpha}(\Omega)$, $\alpha \in (0,1)$ - пространства векторных функций $\mathbf{X}: \boldsymbol{\xi} \in R^3 \to \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ таких, что $x_i \in H^{\alpha}(\Omega)$ или $x_i \in H^{1,\alpha}(\Omega)$ с нормами $\|\mathbf{X}\|_{\alpha} = \sum_{i=1}^{3}\|x_i\|_{\alpha}$, $\|\mathbf{X}\|_{1,\alpha} = \sum_{i=1}^{3}\|x_i\|_{1,\alpha}$.

Пусть $\mathbf{H}^{*\alpha} = \mathbf{H}^{1,\alpha}(\Omega_0) \times \mathbf{H}^{\alpha}(\Omega_0)$ - нормированное пространство, элементами которого являются пары отображений $u = (\mathbf{X}, \boldsymbol{\Psi})$, ставящих в соответствие элементу $\boldsymbol{\xi} \in \Omega_0$ векторы $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$ и $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\xi})$, а норма определена формулой $\|u\|_{\alpha} = \|\mathbf{X}\|_{1,\alpha} + \|\boldsymbol{\Psi}\|_{\alpha}$. Предполагается, что задача (1.1)-(1.3) имеет и при том единственное решение, определенное на отрезке времени $[0,T]$ такое, что при каждом $t \in [0,T]$ выполнено условие $u(t) \equiv \left(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi},t), \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\xi},t)\right) \in \mathbf{H}^{*\alpha}$ (существование такого промежутка времени доказано ранее в работе Сетухи А.В., Кирякина В.Ю).

Численно задача решается по схеме, предложенной в Главе 1, причем, предполагается, что при каждом вычислении вектора скорости по формуле (1.6) может возникать дополнительная ошибка, по модулю не превосходящая величины δ_0. В диссертации доказана теорема.

ТЕОРЕМА. *Для задачи (1.1)-(1.3) существуют константы* $\varepsilon_0 > 0$, $h_0 = h_0(\varepsilon) > 0$, *такие, что для любых* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *и разбиения* $\mathbf{T}$ *с диаметром* $h \in (0, h_0)$ *дискретная задача, аппроксимирующая задачу (1.1)-(1.3) имеет решение* u_*^k, *такое, что при каждом* k *выполнены оценки* $\left|\mathbf{x}_i^k - \mathbf{x}(\xi_i, t_k)\right| \le d_k$, $\left|\boldsymbol{\psi}_i^k - \boldsymbol{\psi}(\xi_i, t_k)\right| \le d_k$, $\left|(\mathbf{x}_{i,k} - \mathbf{x}(\xi_i, t_k)) - (\mathbf{x}_{j,k} - \mathbf{x}(\xi_j, t_k))\right| \le d_k \left|\xi_i - \xi_j\right|$, *где* $\left|d_k\right| \le C\left[\left(\left|\ln\varepsilon\right| + 1\right)^2 \Delta t + \dfrac{\delta_0}{h} + \dfrac{h^\alpha}{\varepsilon^\alpha}\right]\varepsilon^{-Ct_k}$, $\boldsymbol{\psi}_{i,k} = \Gamma_j\left(\mathbf{x}_{j,k}^+ - \mathbf{x}_{j,k}^-\right)$, $\mathbf{x}_{j,k} = (\mathbf{x}_{j,k}^+ + \mathbf{x}_{j,k}^-)/2$, C *- константа,* $t_k = k\Delta t$.

В **третьей** главе рассматриваются вопросы ускорения вычислений с использованием метода мозаично-скелетонных аппроксимаций и программной реализации предложенного алгоритма.

На каждом шаге интегрирования по времени происходит преобразование массива неизвестных величин, которое можно свести к умножению матрицы на вектор, которое при прямом счете требует порядка $O(N^2)$ операций. Метод мозаично-скелетонных аппроксимаций позволяет сократить число операций до $O(N\log_2 N)$, а соответственно и время расчета, за счет приближенного представления исходной матрицы.

В основе метода мозаично-скелетонных аппроксимаций лежит идея разбиения матрицы на блоки, каждый из которых затем аппроксимируется суммой матриц скелетонов (скелетоном называется матрица ранга 1, причем, элементы такого скелетона можно представить в виде $a_{ij} = b_i c_j$).

Автором показано, что:

во-первых, модификация МДВ предложенная в Главе 1, является эффективно совместимой с методом мозаично-скелетонных аппроксимаций в том смысле, что она позволяет аппроксимировать только одну скалярную матрицу, в то время как другие известные модификации МДВ требуют аппроксимации трех и более матриц того же размера;

во-вторых, предложенная модификация МДВ позволяет избежать проблемы неэффективной аппроксимации матрицы при наличии в ней больших нулевых блоков. При аппроксимации блока матрицы методом мозаично-скелетонных аппроксимаций выбираются опорные строки и столбцы блока, на основе которых строится приближение блока. Все элементы этих строк и столбцов вычисляются. Если строка или столбец оказываются полностью нулевыми, то они не могут быть использованы в качестве опорных. Выбирается новая строка или столбец и опять вычисляются все элементы. Т.е. вычисления нулевых строк/столбцов происходит «вхолостую». При наличии в матрице больших нулевых блоков мозаично-скелетонная аппроксимация может не только не уменьшить общее время счета, но и увеличить его.

Применение методов мозаично-скелетонных аппроксимаций матриц, возникающих при аппроксимации ядер интегральных операторов, основано на следующей теореме, доказанной в работах Тыртышникова Е.Е.:

Теорема: *Пусть* $K(\mathbf{x},\mathbf{y})$ *- асимптотически гладкая функция по* $\mathbf{y}$, $\{\mathbf{x}_i\}$ *и* $\{\mathbf{y}_j\}$, $i=1,...,n$, $j=1,...,n$ *- две сетки, принадлежащие семейству квазиравномерных сеток* $\tilde{\mathbf{T}}$ *в некотором кубе* Ω *пространства* R^m. *Тогда для любого* $\delta>0$ *существует* C *такое, что матрица* $A=[f(\mathbf{x}_i,\mathbf{y}_j)]_{n\times n}$ *может быть представлена в виде* $A=\tilde{A}+R$, *где* $mr\tilde{A}\le C\log_2^{m+1}n$, $\|R\|_F\le Cn^{-\delta}$ *(здесь* $\|R\|_F=\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}|r_{ij}|^2}$ *- норма Фробениуса матрицы* $R=(r_{ij})$*).*

Асимптотическая гладкость функции $f_0(\mathbf{x},\mathbf{y})=1/|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-3}$ (ядро интегрального оператора Био-Савара) доказана в работах Тыртышникова Е.Е..

Автором доказана квазиравномерность сеток, возникающих при решении задачи распространения завихренности в безграничном объеме численным методом, предложенным в Главе 1.

Предположим, что Ω - куб с достаточно большой стороной a и центром в начале координат, и пусть сетка $\{\xi_i\}$ удовлетворяет условию квазиравномерности с параметром τ_0. Пусть Ω' -некоторый куб со стороной $b \neq 0$, такой что $\Omega' \subset \Omega$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Сетки $\{\mathbf{x}_i\} = \{\mathbf{x}_i^k\}$, $\{\mathbf{y}_i^+\} = \{\mathbf{x}_i^{+k}\}$, $\{\mathbf{y}_i^-\} = \{\mathbf{x}_i^{-k}\}$, возникающие в момент времени t_k при решении дискретной задачи (1.5)-(1.6) принадлежат классу квазиравномерных сеток с параметрами

$$\mu(\{\mathbf{x}_i\},\Omega') \leq \frac{\tau_0 b^3 M^3 3^{3/2} N}{V(\Omega)},\ \mu(\{\mathbf{y}_i^{\pm}\},\Omega') \leq \frac{\tau_0 b^3 (2M)^3 3^{3/2} N}{V(\Omega)},$$

M - некоторая константа, зависящая от начальных условий исходной задачи (1.1)-(1.3), N - число вихревых элементов, $V(\Omega)$ - объем куба.

В **четвертой главе** осуществлено тестирование предложенных численных алгоритмов в задачах гидродинамики. При решении ряда модельных задач: чехарды вихревых колец; обтекания полусферы; обтекания цилиндра; обтекания прямоугольного крыла с удлинением $\lambda = 5$; обтекания системы зданий и сооружений - показано, что предложенные численные алгоритмы дают ускорение времени счета более 10 раз, по сравнению с прямыми методами расчета. Результаты численного моделирования хорошо согласуются с данными физических экспериментов.

На примере задачи о «чехарде» вихревых колец проводятся исследования устойчивости предложенных алгоритмов по времени. На Рис. 3 изображены зависимости параметра h – разности координат проекций центров сечений торов на ось Ox_3 от времени, полученные при использовании различной априорной точности аппроксимации матрицы скоростей (кривая 1 - $\delta = 10^{-4}$, кривая 2 - $\delta = 10^{-3}$, кривая 3 - $\delta = 10^{-2}$, а также полученные при точном вычислении этой матрицы (кривая 4)).

Теоретический анализ явления «чехарды» предсказывает наличие периодической зависимости $h(t)$. Накопление вычислительных ошибок может приводить к быстрому разрушению вихревых колец. Так, например, из Рис. 3 видно (кривая 5), что при использовании схемы Эйлера 1-го порядка точность аппроксимации поля скоростей на начальных шагах достаточно высокая (кривые 4 и 5 при $t < 9$ практически совпадают). Однако, по схеме Эйлера 1-го порядка, не удается смоделировать в полной мере даже один период движения. При расчете по схеме Эйлера с уточнением и с использованием ускоренного алгоритма вычисления матрицы скоростей удается смоделировать около 1 периода (в зависимости от параметра δ) при высокой точности совпадения траекторий центров вихревых колец с траекторией, полученной при точном вычислении матрицы, вплоть до момента разрушения решения.

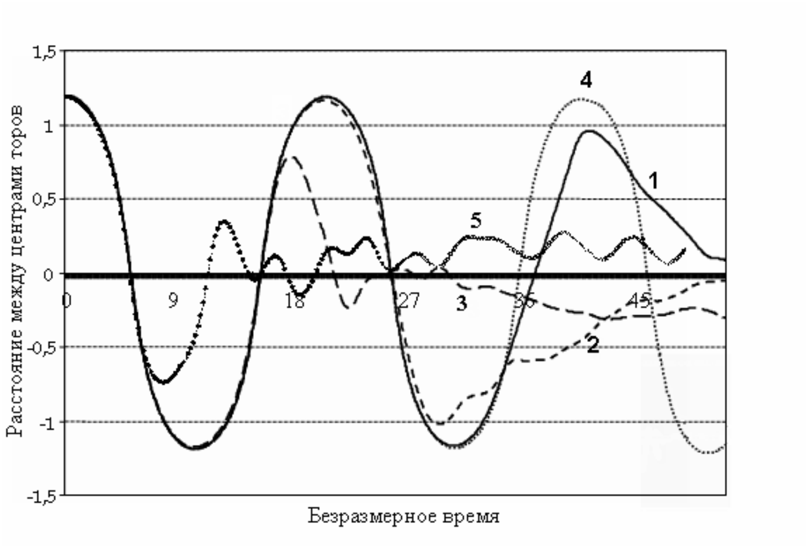

Рис. 3

На Рис. 4 приведены результаты обтекания полусферы. Предполагалось, что отрыв потока происходит по всей кромке. Приведены формы вихревых структур, полученные при расчете с приближенным вычислением матрицы скоростей, зависимости коэффициента сопротивления от безразмерного времени и времени выполнения одного шага расчета для вариантов с точным и ускоренным вычислением матрицы скоростей.

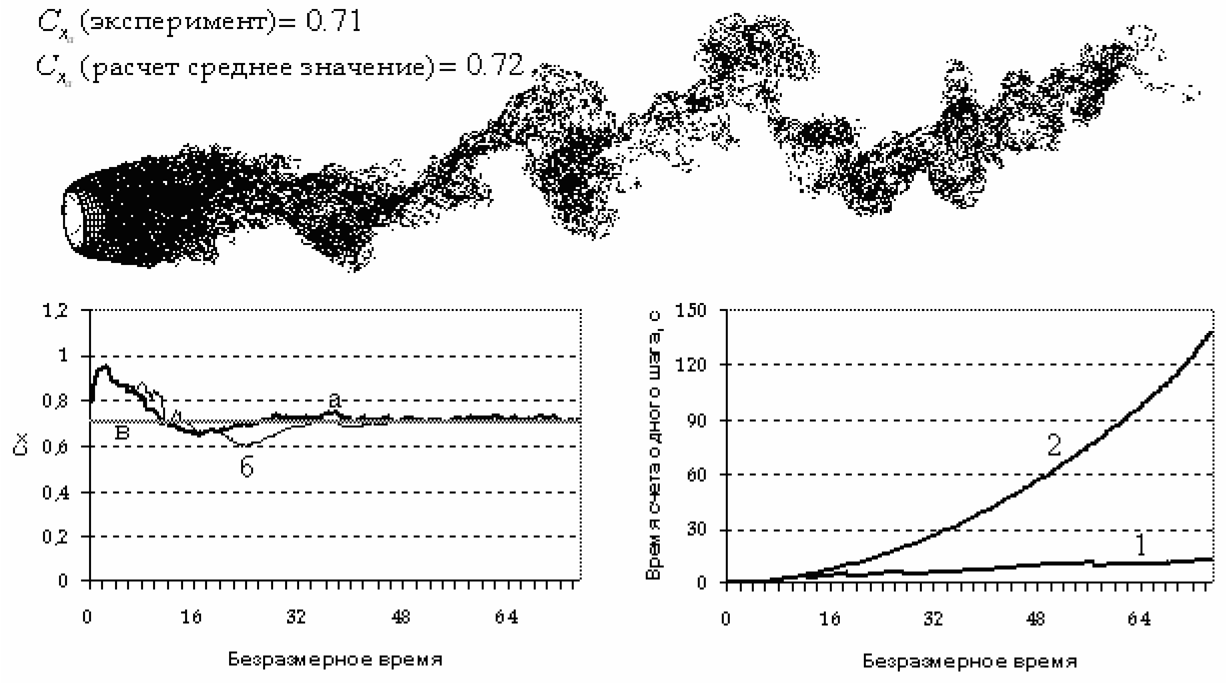

Рис. 4

На левом графике: а – зависимость $C_{x_a}(\tau)$ при «быстром счете», б – зависимость $C_{x_a}(\tau)$ при «прямом счете», в - экспериментальное значение $C_{x_a} = 0.71$. На правом графике: 1 – время счета одного шага алгоритма при «быстром счете», 2 - время счета одного шага алгоритма при «прямом счете».

На Рис. 5 приведены аналогичные результаты, полученные в задаче об обтекании восьмигранного цилиндра с удлинением $\lambda = 5$, ориентированного одним из ребер в сторону набегающего потока.

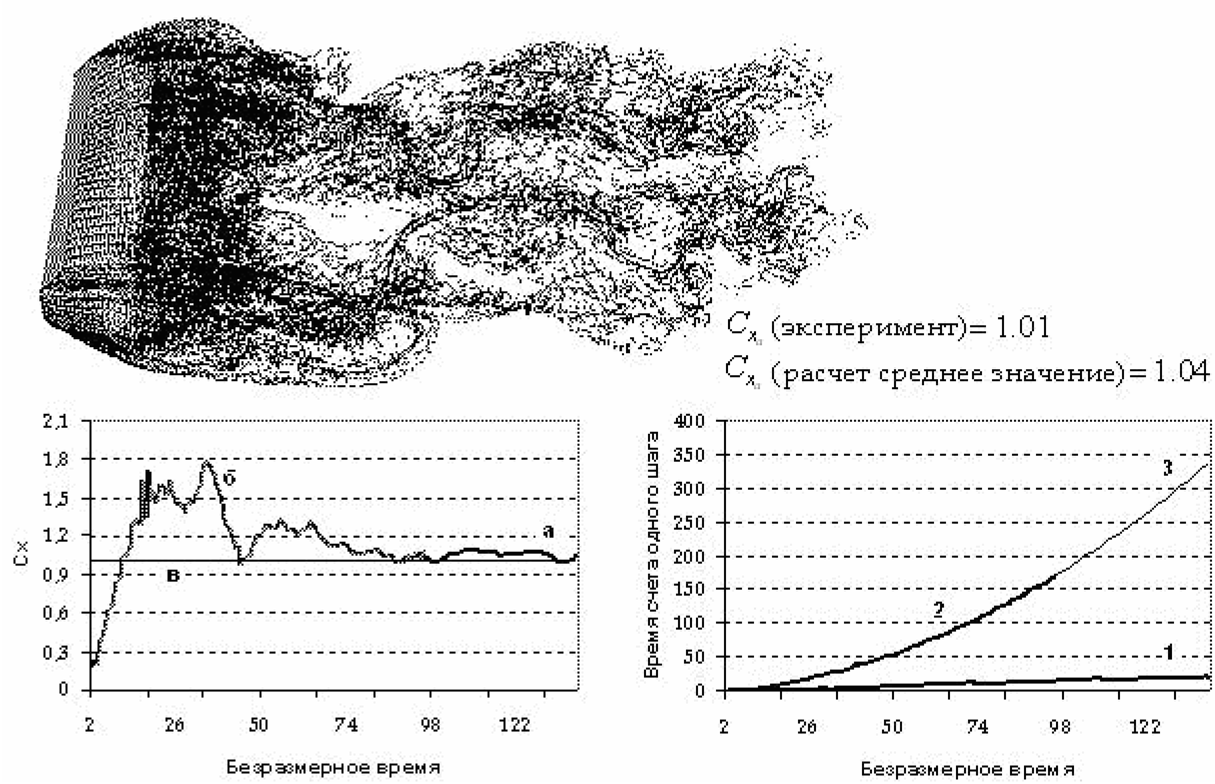

Рис. 5

На левом графике: а –зависимость $C_{x_a}(\tau)$ при «быстром счете», б – зависимость $C_{x_a}(\tau)$ при «прямом счете», в - экспериментальное значение $C_{x_a} = 1.01$, 3 – прогнозируемое время счета одного шага при «прямом счете».

В заключении сформулированы основные результаты работы, выносимые на защиту.

Публикации по теме диссертации

1. Апаринов А.А. О применении метода мозаично-скелетонных аппроксимаций при вычислении поля скоростей в двумерных вихревых течениях в безграничной области. // Труды международных школ-семинаров «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» - ГОУ ВПО «Орловский государственный университет». 2008. – Вып. 6. - С. 6-12

2. Апаринов А.А., Сетуха А.В. Применение мозаично-скелетонных аппроксимаций в методе дискретных вихрей. // Труды Международных школ-семинаров «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики», - Орел: издательство ГОУ ВПО «Орловский государственный университет», 2009. – Вып. 7. – С. 12-16.
3. Апаринов А.А., Сетуха А.В. О применении ускоренного умножения матриц в вихревом методе для трехмерных задач гидродинамки. // Тезисы докладов международной научно-образовательной конференции «Наука в вузах: математика, физика, информатика. Проблемы высшего и среднего профессионального образования». – М.:РУДН. 2009. - С. 322-333
4. Апаринов А.А., Сетуха А.В. Использование методов быстрого матричного умножения для ускорения вычислений при моделировании трехмерных вихревых течений. //Материалы XX школы семинара «Аэродинамика летательных аппаратов» - ЦАГИ. 2009. - С. 8
5. **Апаринов А.А., Сетуха А.В. О применимости мозаично-скелетонных аппроксимаций матриц для ускорения вычислений в вихревом методе для трехмерных уравнений Эйлера. //Дифференциальные уравнения. 2009. – Т. 45. № 9. – С. 1329-1340**
6. **Апаринов А.А. Сетуха А.В. О применении метода мозаично-скелетонных аппроксимаций при моделировании трехмерных вихревых течений вихревыми отрезками. //ЖВМ и МФ. 2010. - Т. 50. №5. - С. 937-948**