УДК 519.6
На правах рукописи

Калинина Анастасия Борисовна

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ

01.01.07 — вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2009

Работа выполнена на кафедре вычислительной математики
механико-математического факультета
Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, доцент Корнев Андрей Алексеевич.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Фурсиков Андрей Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент Клиншпонт Наталья Эдуардовна.
Ведущая организация:	Научно-исследовательский институт математики и механики им. Н.Г. Чеботарева Казанского государственного университета.

Защита состоится «_28_» _апреля_ 2009г. в _14:00_ часов на заседании диссертационного совета Д 002.045.01 при Учреждении Российской академии наук Институте вычислительной математики РАН, расположенном по адресу: 119333, г. Москва, ул. Губкина, д. 8.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института вычислительной математики РАН.

Автореферат разослан «_26_» _марта_ 2009г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук Бочаров Г.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Задачи стабилизации занимают особое место среди задач управления движением. В задачах управления движением обычно рассматривается некоторая физическая система. Ее математическая модель задается при помощи эволюционных уравнений, которые могут иметь неустойчивые решения. В этом случае внесение сколь угодно малых возмущений в начальные данные может привести к конечному возмущению решения. Цель стабилизации — создание специальных алгоритмов, позволяющих подавлять такие возмущения.

Задача стабилизации к заданному решению при помощи замены переменных обычно сводится задаче стабилизации к нулю. Задачу асимптотической стабилизации к нулю можно сформулировать следующим образом. Необходимо внести в систему такие изменения в пределах заданных ограничений, чтобы норма рассматриваемого решения стремилась к нулю при $t \to \infty$.

Методы стабилизации по способу воздействия на систему разделяют на стабилизацию по начальным данным (изменение начальных условий), стабилизацию по граничным условиям (сводится к решению задачи стабилизации по начальным данным на расширенной области), стабилизацию по правой части (внесение поправки в правую часть уравнений в течение некоторого интервала времени). Теория асимптотической стабилизации к неустойчивым решениям различных дифференциальных уравнений посредством управления с границы области активно развивается в работах А.В. Фурсикова. Первые расчеты проведены Е.В. Чижонковым. Задача асимптотической стабилизации по правой части для нелинейных эволюционных систем рассмотрена в работе А.А. Корнева.

Решение многих задач стабилизации можно свести к проецированию на устойчивое многообразие $\mathcal{W}_-$, состоящее из решений данного уравнения, стремящихся к нулю. В достаточно малой окрестности нуля множество $\mathcal{W}_-$ может быть задано в виде графика некоторого отображения. Таким образом, численное построение этого отображения — основа решения задач стабилизации.

Свойства устойчивых многообразий и различные методы их построения рассматривались в работах Д.В. Аносова, Я.Б. Песина, О.А. Ладыженской, В.И. Юдовича, А.А. Корнева.

Объектом исследования первой части диссертации является численная реализация метода функционально-аналитических рядов проецирования на устойчивое многообразия для дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа и обыкновенных дифференциальных уравнений седлового типа. Суть метода рядов заключается в построении отображения, задающего устойчивое многообразие, в виде ряда. До настоящего момента этот метод не применялся для практических расчетов. Существенное отличие данного подхода от других заключается том, что метод рядов позволяет получить искомое отображение в целом, а не образы отдельных точек.

Объектом исследования второй части диссертации является разработка алгоритмов стабилизации по правой части для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. До настоящего момента при решении задач стабилизации по правой части либо учитывалась только линейная часть рассматриваемых уравнений, либо решение дифференциальной задачи предлагалось в терминах ее конечно-разностной аппроксимации. Алгоритмы решения исходной дифференциальной задачи, учитывающие нелинейность, могут существенно повысить точность стабилизации.

Из всего вышесказанного следует, что проблемы, решению которых посвящена настоящая работа, являются важными и трудными задачами современной вычислительной математики.

Цели диссертационной работы

Первой целью настоящей работы является исследование применимости метода функционально-аналитических рядов проецирования на устойчивое многообразие для расчетов при численном решении задач стабилизации по начальным данным для уравнений в частных производных параболического типа и систем обыкновенных дифференциальных уравнений седлового типа.

Второй целью работы является разработка алгоритма решения задачи стабилизации по правой части для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Научная новизна

Основные результаты работы являются новыми и состоят в следующем.

1. Впервые метод функционально-аналитических рядов проецирования на устойчивое многообразие применен для практических расчетов для квазилинейного параболического уравнения в частных производных.

2. Разработаны, реализованы и успешно применены алгоритмы решения задачи стабилизации по правой части для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, учитывающие их нелинейность. Впервые доказано существование искомого вектора управления для нелинейной дифференциальной задачи и обоснована сходимость предложенных алгоритмов.

Достоверность, теоретическая и практическая ценность работы

Работа носит теоретический характер. Достоверность полученных результатов обеспечивается строгими доказательствами сформулированных утверждений и подтверждается численными экспериментами. Теоретическая ценность диссертации состоит в разработке нового семейства алгоритмов решения задач асимптотической стабилизации. Практическая ценность работы заключается в обширном наборе формул и алгоритмов, которые могут быть использованы при решении различных прикладных задач.

Апробация результатов диссертации

Результаты диссертации докладывались автором на следующих конференциях и семинарах: международная научная конференция "Математическая гидродинамика" (Москва, июнь 2006г.); ежегодные научные конференции "Ломоносовские чтения" (Москва, апрель 2007г., апрель 2008г.); научно-исследовательский семинар кафедры вычислительной математики механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством проф. Г.М. Кобелькова; научно-исследовательский семинар кафедры вычислительных методов факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством проф. А.В. Гулина (Москва, октябрь 2008г.); научно-исследовательский семинар "Нелинейная динамика и управление" кафедры нелинейных динамических систем и процессов управления факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством акад. С.В. Емельянова и акад. С.К. Коровина (Москва, ноябрь 2008г.); научно-исследовательский семинар ИВМ РАН "Вычислительная математика, математическая физика, управление" под руководством проф. Г.М. Кобелькова, проф. В.И. Лебедева, проф. А.В. Фурсикова (Москва, октябрь 2006г., ноябрь 2008г.).

Публикации

По теме диссертации опубликовано 5 работ: 4 работы — [1], [2], [3], [4] — в рецензируемых журналах, из них [2] и [4] — в журналах, рекомендованных ВАК для публикации результатов кандидатских диссертаций; [5] — в материалах конференций.

Личный вклад автора

Результаты диссертации получены автором самостоятельно. Работ, написанных в соавторстве, нет.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения, списка литературы из 48 наименований и одного приложения. Она изложена на 98 страницах, содержит 13 таблиц и 3 рисунка.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении отражается место диссертации среди других исследований в этой области и дается общая характеристика работы.

В главе 1 метод рядов проецирования на устойчивое многообразие применяется к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений Лоренца.

В разделе 1.1 формулируется постановка задачи проецирования данного вектора $z \in \mathbb{R}^3$ на устойчивое многообразие $\mathcal{W}_-$ системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \mu_1 u_1 - \dfrac{u_2 + u_1}{k_2 + k_1} u_3, \\ \dot{u}_2 = -\mu_2 u_2 + \dfrac{u_2 + u_1}{k_2 + k_1} u_3, \\ \dot{u}_3 = -\mu_3 u_3 + (u_2 + u_1)(-k_2 u_2 + k_1 u_1), \end{cases}$$

где $\mu_i > 0$, при $i = 1, 2, 3$, значения параметров μ_i, k_j фиксированы.

В некоторой окрестности нуля устойчивое многообразие имеет вид

$$\mathcal{W}_- = \{(f(u_2, u_3), u_2, u_3)\}.$$

Отображение $f(u_2, u_3)$ будем искать в виде ряда с неизвестными коэффициентами

$$f(u_2, u_3) = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} a_{k,i} u_2^i u_3^{k-i}.$$

В разделе 1.2 выводятся рекуррентные соотношения, позволяющие вычислять коэффициенты $a_{k,i}$ разложения искомого отображения $f(u_2, u_3)$ в ряд последовательно по k.

Доказано следующее утверждение, позволяющее существенно снизить объем необходимых вычислений.

Утверждение. *Если s четное $(0 \leqslant s \leqslant k)$, то $a_{k,s} = 0$ при любом $k \geqslant 2$.*

Далее приведены формулы для вычисления некоторых ненулевых коэффициентов (**раздел 1.3**), результаты численных экспериментов (**раздел 1.4**) и краткие выводы (**раздел 1.5**): отмечены основные достоинства и недостатки рассмотренного метода.

Идея решения задачи стабилизации по правой части параболических уравнений в частных производных в терминах проецирования на устойчивое многообразие принадлежит А.В. Фурсикову. Им обоснована аналитичность отображения, задающего это многообразие. Для доказательства аналитичности выведены рекуррентные соотношения, связывающие коэффициенты разложения отображения в ряд и позволяющие вычислять их по порядку: от младших к старшим. **В главе 2** исследуется применимость предложенных формул для практических расчетов.

В разделе 2.1 формулируется постановка задачи нахождения проекции данной функции $z_o(x)$ на устойчивое многообразие $\mathcal{W}_-$ следующего квазилинейного параболического уравнения

$$\begin{gathered}\partial_t z(t,x) = \partial_{xx} z(t,x) + \alpha z(t,x) + \beta z^2(t,x),\\ z(t,0) = z(t,\pi) = 0, \quad z(0,x) = z_o(x),\end{gathered}$$

где $x \in [0,\pi]$, $t \in [0,+\infty)$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$.

В некоторой окрестности нуля устойчивое многообразие имеет вид

$$\mathcal{W}_- = \{z_- + F(z_-) |\ z_- \in H_-,\ F(z_-) \in H_+\},$$

где H_- — бесконечномерное устойчивое подпространство системы, H_+ — конечномерное неустойчивое подпространство. Отображение F будем искать в виде ряда с неизвестными коэффициентами

$$F(z_-) = \sum_{j=1}^{N} F^j(z_-) e_j,$$

$$F^j(z_-) = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{\eta_1=N+1}^{\infty} \dots \sum_{\eta_k=N+1}^{\infty} F_k^j(\eta_1,\dots,\eta_k) z^{\eta_1} \dots z^{\eta_k},$$

где $e_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx$.

Вывод вычислительных формул для коэффициентов $F_k^j(\eta_1,\dots,\eta_k)$ описывается **в разделе 2.2**. Для практических вычислений по предложенным формулам, требуется их адаптация (**раздел 2.3**). Доказано следующее утверждение, позволяющее существенно повысить скорость вычислений.

Утверждение. *Если сумма* $\left(j+k+\sum\limits_{i=1}^{k}\eta_i\right)$ *четна, тогда* $F_k^j(\eta_1,\ldots,\eta_k)=0$ *(*$j\leqslant N$*,* $k\geqslant 2$*).*

Раздел 2.4 посвящен практической реализации итерационного процесса построения последовательных приближений устойчивого многообразия при помощи метода рядов. Далее приводятся результаты численных расчетов (**раздел 2.5**) и краткие выводы (**раздел 2.6**): отмечены основные достоинства и недостатки рассмотренного метода.

В главе 3 исследуется квадратичное приближение устойчивого многообразия. Приводятся вычислительные формулы для квазилинейного параболического уравнения с аналитичной нелинейностью вида $f(z)$, системы обыкновенных дифференциальных уравнений Лоренца. Выводятся формулы для дискретной полудинамической системы, заданной в общем виде: $\hat{u}=Lu+R(u)$.

Приведены результаты численных расчетов, в том числе пример повышения скорости сходимости наиболее эффективного метода сжимающих отображений проецирования на устойчивое многообразие при использовании в качестве начального приближения квадратичного приближения устойчивого многообразия вместо линейного.

В главе 4 рассматривается задача стабилизации по правой части для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений при отсутствии ограничений на подпространство допустимых смещений.

В разделе 4.1 формулируется следующая задача. Задана система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{u}&=A^{-}u+h(u,v),\\ \dot{v}&=A^{+}v+g(u,v),\end{aligned}$$

где $u\in U=\mathbb{R}^l$, $v\in V=\mathbb{R}^m$, $l+m=n$, $\operatorname{spec}A^{-}$ лежит слева от мнимой оси, $\operatorname{spec}A^{+}$ — справа от мнимой оси, функции g и h непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности нуля и равны нулю вместе со своими первыми производными в нуле. Заданы $u_o\in U$, $v_o,v_1\in V$ и $T\in\mathbb{R}$. Требуется найти такой не зависящий от времени вектор управления $f^{+}=f^{+}(u_o,v_o,v_1,T)\in V$, чтобы для системы

$$
\begin{aligned}
&\dot{u} = A^{-}u + h(u,v), &\quad & u(0) = u_o,\\
&\dot{v} = A^{+}v + g(u,v) + f^{+}, && v(0) = v_o
\end{aligned}
\tag{1}
$$

в фиксированный момент времени T выполнялось условие

$$
v(T) = v_1. \tag{2}
$$

В разделе 4.2 предлагается алгоритм решения поставленной задачи. Для построения вектора поправки правой части линеаризованной системы требуется решить систему линейных алгебраических уравнений. Затем решение линейной задачи используется в качестве начального приближения для следующего итерационного процесса. Пусть известно некоторое приближение искомого управления f^{N+}, $N \geqslant 0$.

1. Найдем решение $u^N(t), v^N(t)$ краевой задачи

$$
\begin{aligned}
&\dot{u} = A^{-}u + h(u,v), &\quad & u(0) = u_o,\\
&\dot{v} = A^{+}v + g(u,v) + f^{N+}, && v(T) = v_1
\end{aligned}
\tag{3}
$$

2. Значение $f^{(N+1)+}$ определим из условия

$$
v_o = v^N(0) + \int\limits_0^T e^{-A^{+}s} f^{N+} ds - \int\limits_0^T e^{-A^{+}s} f^{(N+1)+} ds.
$$

В разделе 4.3 доказывается следующая теорема.

Теорема 4.1. *Пусть* $\operatorname{spec} A^{-}$ *лежит слева от мнимой оси,* $\operatorname{spec} A^{+}$ *— справа от мнимой оси, функции g и h непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности нуля и равны нулю вместе со своими первыми производными в нуле. Тогда для любого $T > 0$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что при произвольных $u_o \in U$, $v_o, v_1 \in V$: $\|u_o\| \leqslant \varepsilon$, $\|v_1\| \leqslant \|v_o\| \leqslant \varepsilon$, существует вектор $f^{+} = f^{+}(u_o, v_o, v_1, T) \in V$, обеспечивающий выполнение условия* (2) *для системы уравнений* (1).

При доказательстве теоремы обосновывается сходимость предложенного вычислительного алгоритма.

В главе 5 рассматривается задача стабилизации по правой части для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений при наличии ограничений на подпространство допустимых смещений.

В разделе 5.1 формулируется следующая задача. Задана система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{u} &= A^{-}u + h(u,v), \\ \dot{v} &= A^{+}v + g(u,v), \end{aligned}$$

где $u \in U = \mathbb{R}^l$, $v \in V = \mathbb{R}^m$, $l + m = n$, $\operatorname{spec} A^-$ лежит слева от мнимой оси, $\operatorname{spec} A^+$ — справа от мнимой оси, функции g и h непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности нуля и равны нулю вместе со своими первыми производными в нуле. Заданы $u_o \in U$, $v_o, v_1 \in V$, $T \in \mathbb{R}$ и такое подпространство $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$, что $P_V\mathcal{F} = V$, где P_V — ортогональный проектор на V. Требуется найти такой не зависящий от времени вектор управления $(f^-, f^+) = f(u_o, v_o, v_1, T) \in \mathcal{F}$, $f^- \in U$, $f^+ \in V$, чтобы для системы

$$\begin{aligned} \dot{u} &= A^{-}u + h(u,v) + f^{-}, \qquad u(0) = u_o, \\ \dot{v} &= A^{+}v + g(u,v) + f^{+}, \qquad v(0) = v_o \end{aligned} \tag{4}$$

в фиксированный момент времени T выполнялось условие

$$v(T) = v_1. \tag{5}$$

В разделе 5.2 предлагается алгоритм решения поставленной задачи.

Если известен вектор f^+, то соответствующий вектор f^- определяется структурой подпространства $\mathcal{F}$.

Для построения вектора поправки правой части линеаризованной системы требуется решить систему линейных алгебраических уравнений. Затем решение линейной задачи используется в качестве начального приближения для следующего итерационного процесса. Пусть известно некоторое приближение искомого управления f^N, $N \geqslant 0$.

1. Найдем решение $u^N(t), v^N(t)$ краевой задачи

$$\begin{aligned} \dot{u} &= A^{-}u + h(u,v) + f^{N-}, \qquad u(0) = u_o, \\ \dot{v} &= A^{+}v + g(u,v) + f^{N+}, \qquad v(T) = v_1 \end{aligned}$$

2. Значение $f^{(N+1)+}$ определим из условия

$$v_o = v^N(0) + \int\limits_0^T e^{-A^+ s} f^{N+} ds - \int\limits_0^T e^{-A^+ s} f^{(N+1)+} ds.$$

3. Для найденного вектора $f^{(N+1)+} \in V$ строим соответствующий вектор $f^{(N+1)-} \in U$.

В разделе 5.3 доказывается следующая теорема.

Теорема 4.1. *Пусть* $\operatorname{spec} A^-$ *лежит слева от мнимой оси,* $\operatorname{spec} A^+$ *— справа от мнимой оси, функции g и h непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности нуля и равны нулю вместе со своими первыми производными в нуле, и задано такое подпространство $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$, что $P_V \mathcal{F} = V$. Тогда для любого $T > 0$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что при произвольных $u_o \in U$, $v_o, v_1 \in V$: $\|u_o\| \leqslant \varepsilon$, $\|v_1\| \leqslant \|v_o\| \leqslant \varepsilon$, существует вектор $f = f(u_o, v_o, v_1, T) \in \mathcal{F}$, обеспечивающий выполнение условия* (5) *для системы уравнений* (4).

При доказательстве теоремы обосновывается сходимость предложенного вычислительного алгоритма.

В главе 6 приведены примеры использования алгоритмов, предложенных в главах 4 и 5, для практических расчетов.

Для уравнения в частных производных

$$\begin{aligned} &w_t(t,x) = w_{xx}(t,x) + \alpha w(t,x) + \beta w^3(t,x), \\ &w(0,x) = w_o(x), \quad w(t,0) = w(t,\pi) = 0, \end{aligned}$$

где $x \in [0,\pi]$, $t \geqslant 0$, $\alpha > 0$, запишем n-е приближение по методу Галеркина. Получим систему из n обыкновенных дифференциальных уравнений, к которой можно применить предложенные алгоритмы.

При численных расчетах будем учитывать свойства конкретной задачи, что существенно ускорит вычисления.

Результаты численных экспериментов показывают, что алгоритмы, предложенные в главах 4 и 5, позволяют решать задачи асимптотической стабилизации к неустойчивым решениям систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности.

В заключении подводятся итоги работы, обсуждаются основные достоинства и недостатки разработанных и исследованных методов.

Достоинства и недостатки использования **метода рядов** для численного проецирования на устойчивое многообразие.

- Метод рядов, в отличие от других методов, формально позволяет получать сколь угодно точные приближения отображения, задающего устойчивое многообразие, в целом в некоторой окрестности нуля, а не образы отдельных точек. Это важно при необходимости многочисленного проецирования на устойчивое многообразие.

- Если рассматривать метод рядов как итерационный процесс получения последовательных приближений устойчивого многообразия, то следует отметить его быструю сходимость: уже первые приближения позволяют получить хорошую точность. Однако с повышением точности вычислительные затраты возрастают экспоненциально.

- Методы сжимающих отображений используют некоторую конечно-разностную аппроксимацию исходной дифференциальной задачи, тогда как вычислительные формулы метода рядов выведены именно для дифференциальной задачи. Однако на практике нам приходится ограничиваться лишь конечным числом членов ряда.

- Использование квадратичного приближения устойчивого многообразия вместо линейного в качестве начального приближения для итерационных методов стабилизации существенно повышает скорость их сходимости.

- В отличие от других методов, метод рядов жестко ориентирован на конкретную задачу. При изменении дифференциальных уравнений, неустойчивые решения которых необходимо стабилизировать, требуется выводить новые вычислительные формулы. Однако стоит, например, отметить, что для уравнения

$$\partial_t z = \partial_{xx} z + \alpha z + g(z),$$

где $g(z) = \beta_2 z^2 + \beta_3 z^3 + \ldots$, квадратичное приближение устойчивого многообразия совпадает с квадратичным приближением устойчивого многообразия уравнения

$$\partial_t z = \partial_{xx} z + \alpha z + \beta_2 z^2,$$

для которого вычислительные формулы уже выведены.

Предложенный в настоящей работе **алгоритм построения решения задачи стабилизации по правой части** для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений послужил для теоретического обоснования существования искомого вектора управления.

Приведем его основные достоинства и недостатки.

- В отличие от большинства известных методов стабилизации по правой части, предложенный алгоритм позволяет учитывать влияние нелинейности. Однако из-за этого метод обладает бо́льшей трудоемкостью.

- Отметим, что предложенный алгоритм устойчив к вычислительным погрешностям, поскольку интегрирование на устойчивом подпространстве ведется по возрастающему времени, на неустойчивом подпространстве — по убывающему. Однако именно это существенно повышает необходимые вычислительные затраты.

- Алгоритм применим для решения задач большой размерности. Возможно его использование при решении задач стабилизации по правой части для уравнений в частных производных.

- Сходимость предложенного алгоритма теоретически обоснована при наличии ограничений на подпространство допустимых смещений.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Метод рядов проецирования на устойчивое многообразие адаптирован для численного решения задач асимптотической стабилизации. Проведены расчеты для квазилинейного параболического уравнения и системы обыкновенных дифференциальных уравнений Лоренца.

2. Разработаны, реализованы и успешно применены алгоритмы решения задач стабилизации по правой части для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Алгоритмы позволяют учитывать нелинейность задачи и ограничения на подпространство допустимых смещений.

3. Обоснована сходимость предложенных алгоритмов и доказаны теоремы существования искомых векторов управления.

Публикации по теме диссертации

[1] *Калинина А.Б.* Численная реализация метода функционально-аналитических рядов проецирования на устойчивое многообразие // Вычислительные методы и программирование. 2006. Т. 7. №1. С. 65–72.

[2] *Калинина А.Б.* Метод стабилизации по правой части для системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестн. Моск. Уни-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2008. №4. С. 57–59.

[3] *Калинина А.Б.* Об одном методе стабилизации по правой части // Вычислительные методы и программирование. 2008. Т. 9. №2. С. 200–206.

[4] *Калинина А.Б.* Численно-аналитические методы решения задач асимптотической стабилизации // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. №2. С. 284–285.

[5] *Kalinina A.B.* Numerical realization of the method of functional-analytic series for projecting on a stable manifold // International Conference "Mathematical Hydrodynamics". Abstracts. 2006. p. 43.