

На правах рукописи

Терехов Кирилл Михайлович

**Применение адаптивных сеток типа
восьмеричное дерево для решения задач
фильтрации и гидродинамики**

05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2013

Работа выполнена в *Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте вычислительной математики Российской академии наук.*

Научный руководитель: *Василевский Юрий Викторович, доктор физико-математических наук, доцент.*

Официальные оппоненты: *Гаранжа Владимир Анатольевич, доктор физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Вычислительный центр им. А. А. Дородницына Российской академии наук, заведующий сектором,*

Горобец Андрей Владимирович, кандидат физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, старший научный сотрудник.

Ведущая организация: *Механико-математический факультет Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова".*

Защита состоится «31» октября 2013 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 002.045.01 при *Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте вычислительной математики Российской академии наук (ИВМ РАН)*, расположенном по адресу: 119333, г. Москва, ул. Губкина, д. 8, ауд. 727.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *ИВМ РАН.*

Автореферат разослан «__» сентября 2013 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета,

доктор физико-математических наук

Бочаров Г. А.

Общая характеристика работы

Актуальность работы. При численном моделировании задач математической физики часто приходится сталкиваться с недостатком компьютерных ресурсов. Причиной тому является необходимость выполнять расчет на достаточно мелкой сетке для разрешения ключевых физических эффектов. Существует два подхода к решению данной проблемы. Первый подход заключается в переходе к параллельным вычислениям, что позволяет эксплуатировать большие компьютерные ресурсы. Второй подход заключается в использовании алгоритмов и методов, адаптирующихся к особенностям решения и позволяющих эффективно использовать ограниченные ресурсы компьютера.

При изучении нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости важными критериями является устойчивость, низкая численная вязкость, высокий порядок аппроксимации расчетной схемы, возможность быстро решать прикладные задачи. Для эффективного решения подобных задач требуются динамические сетки, сгущающиеся к особенностям задачи в сочетании с вычислительно дешевыми, но высокоточными методами аппроксимации дифференциальных уравнений.

При решении задачи заводнения пористого нефтеносного геологического слоя важно определить как расположение фронта распространения воды, так и его скорость распространения. Качественное разрешение фронта требует мелкого шага сетки в части расчетной области и является хорошим примером применения динамических локально сгущающихся сеток. Одной из фундаментальных трудностей данной задачи является невозможность в общем случае построить сетку, грани которой были бы ортогональны тензору проницаемости, что делает невозможным применение простых методов аппроксимации потоков концентрации через грань.

Цель диссертационной работы. Целями диссертационной работы являются разработка структур данных и алгоритмов для хранения сеточной информации, позволяющих производить как параллельные расчеты, так и работать с динамическими сетками; разработка на их основе генератора динамических адаптивных сеток типа восьмеричное дерево; разработка и реализация полностью неявного нелинейного метода для задачи двухфазной фильтрации в пористой среде; разработка устойчивых низкодиссипативных схем для решения уравнений Навье-Стокса, применимых на сетках типа восьмеричное дерево.

Научная новизна. В работе предложены и реализованы структуры данных и алгоритмы для хранения сеточной информации и работы с данными на сетках общего вида, позволяющие как быстро динамически перестраивать сетки, так и производить параллельные вычисления.

Предложена экономичная технология моделирования нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости на основе адаптивных сеток типа восьмеричное дерево. Предложен и реализован конечно-разностный метод дискретизации линеаризованных уравнений конвекции-реакции-диффузии для сеток типа восьмеричное дерево и метод стабилизации паразитного вихревого слоя, появляющегося на этапе проекции скорости на бездивергентное пространство.

Реализована полностью неявная монотонная нелинейная схема дискретизации потока для уравнений двухфазной фильтрации на неструктурированных конформных сетках с многогранными ячейками. Показана эффективность расчета на динамических сетках типа восьмеричное дерево. Протестирована эффективность параллельного решения задачи на фиксированной сетке.

Практическая значимость. Практическая значимость диссертацион-

ной работы заключается в создании программной платформы для параллельной работы с распределенной сеточной информацией. На основе данной программной платформы реализован генератор сеток типа восьмеричное дерево. Создан комплекс программ для численного моделирования процесса двухфазной фильтрации в пористой среде для задачи заводнения пористого нефтеносного геологического пласта. Предложены схемы дискретизации и создан комплекс программ для численного моделирования нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости на динамических адаптивных сетках типа восьмеричное дерево.

На защиту выносятся следующие основные результаты:

1. Разработаны структуры данных и алгоритмы для хранения и работы с сеточной информацией общего вида в параллельном режиме.
2. С помощью данных алгоритмов разработан и реализован генератор сеток типа восьмеричное дерево.
3. На основе предложенного генератора разработана экономичная численная модель двухфазной фильтрации в пористой среде.
4. Разработана экономичная технология, включающая методы дискретизации и алгоритмы построения динамических адаптивных сеток для моделирования трехмерных нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались автором и обсуждались на научных семинарах Института вычислительной математики РАН, Института прикладной математики РАН, Вычислительного центра РАН, Института проблем безопасности развития атомной энергетики РАН, Upstream Research Center of ExxonMobil corp. (г.Хьюстон,

США) и на следующих научных конференциях: конференция “Тихоновские чтения”, (МГУ, Москва, 2009 г.); конференция “Лобачевские чтения” (Казань, 2009 г.); 53-я научная конференция МФТИ (ИВМ РАН, 26 ноября 2010г.); международные конференции “Numerical geometry, grid generation and high performance computing” (ВЦ РАН, Москва, 13 октября 2010г., 17 декабря 2012г.); международная конференция “4th Workshop on Advanced Numerical Methods for Partial Differential Equation Analysis” (Санкт-Петербург, 22 августа 2011г.); международная конференция “Математическое моделирование природных катастроф и техногенных угроз” (Сьон, Швейцария, 20 августа 2013); европейская конференция “ENUMATH” (Лозанна, Швейцария, 26 августа 2013).

Публикации автора по теме диссертации. Основные материалы диссертации опубликованы в 10 печатных работах: 1 монография [1]; 5 статей – в рецензируемых журналах, входящих в перечень ВАК [5, 7–10]; 4 статьи – в сборниках научных трудов и материалов конференций [2–4, 6].

Личный вклад автора. В монографии [1] вклад автора заключался в предложении и реализации алгоритмов для хранения и работы с сетками общего вида, тестирования конкурентных пакетов; внедрения в программную платформу пакетов для решения систем линейных уравнений и пакетов для декомпозиции расчетной области на подобласти, приписанные к доступным процессорам; разработка и реализация программы для моделирования двухфазной фильтрации в пористой среде; параллелизация пакета “Povray” для визуализации посредством трассировки лучей. В совместной работе [9] вклад автора заключался в параллелизации существующей модели общей циркуляции океана, данный опыт лег в основу программной платформы для работы с сеточными данными. В совместных работах [5, 10] вклад заключался в разработке технологии моделирования течения вязкопластичной несжима-

емой жидкости со свободной границей, а именно в дискретизации оператора дивергенции от тензора напряжений, технологической цепочки для задания областей с реальной топографией, верификации реализованного метода, постановке и проведении численных экспериментов со сходом оползня и разрушения дамбы. В совместной работе [8] вклад заключался в реализации динамических сеток типа восьмеричное дерево и полностью неявного метода для решения задачи двухфазной фильтрации в пористой среде. Был предложен критерий сгущения, разгрубления, метод интерполяции сеточных функций и произведена верификация метода. В совместной работе [7] вклад автора заключался в разработке конечно-разностного неявного метода для решения задачи конвекции-реакции-диффузии. Кроме того, в [7] автором была обнаружена неустойчивость, предложен и реализован метод стабилизации паразитного вихревого слоя; проведен ряд численных экспериментов для апробации метода и сравнения с референтными значениями.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, обзора используемой терминологии, трех глав, заключения и списка литературы из 90 наименований. Диссертационная работа содержит 34 рисунка и 19 таблиц. Общий объем диссертационной работы – 124 страницы.

Содержание работы

Во *введении* определяется область практического применения предлагаемых в диссертации методов, обосновывается актуальность диссертации, приводится обзор работ, посвященных программным пакетам, предназначенных для хранения и работы с сетками общего вида; работ, посвященных приближенному решению уравнений Навье-Стокса, описывающих течение вяз-

кой несжимаемой жидкости; работ, посвященных моделированию двухфазной фильтрации. Так же во *введении* формулируются основные результаты, и описывается структура диссертации.

В *обзоре используемой терминологии* дано краткое разъяснение используемых в работе понятий и терминов.

В *первой главе* диссертации разработана программная платформа для хранения и работы с сетками общего вида. Предложены гибкие структуры данных для хранения полного набора сеточных элементов, таких как вершины, ребра, грани, ячейки, и связей между ними. Введена дополнительная сеточная сущность – множество элементов, которая может содержать в себе произвольный набор сеточных элементов, в том числе сеточные множества, что в свою очередь позволяет задать иерархию сеточных множеств. Определены данные, такие как, например, температура, давление, концентрация, которые могут быть заданы на сеточных элементах или множествах, и ярлыки, позволяющие управлять этими данными.

В *разделе 1.1* предложены операции для модификации сеток общего вида, включающие возможность переноса данных со старых сеточных элементов на новые.

В *разделе 1.2* дан подход к реализации адаптивных сеток типа восьмиричное дерево с помощью предложенной программной платформы.

В *разделе 1.3* разработаны алгоритмы, и структуры данных, позволяющие производить параллельный расчет на распределенных сетках общего вида. Предложенные алгоритмы основаны на концепции добавления слоев фиктивных элементов для дублирования сеточных элементов, принадлежащих другим процессорам и обмена данными между оригинальными элементами, расположенными на других процессорах, и фиктивными элементами, расположенными на данном процессоре. Представлен ряд алгоритмов, позво-

ляющих реализовать данную концепцию с помощью программной платформы, такие как:

- обмен данных и множеств элементов между процессорами,
- создание произвольного числа слоев фиктивных элементов,
- перераспределение элементов между процессорами,

а также множество промежуточных алгоритмов, позволяющих реализовать данные алгоритмы. Используемые алгоритмы в том числе описаны автором в монографии [1].

Во *второй главе* рассматривается численная модель, основанная на уравнениях Навье-Стокса. Предложены низкодиссипативные схемы дискретизации второго порядка точности по пространству и по времени для адаптивных сеток типа восьмеричное дерево с разнесенным расположением степеней свободы скорости. Данная схема является схемой расщепления, основанной на методе проекции Темама-Яненко-Шорина.

В *разделе 2.1* приводятся уравнения течения вязкой несжимаемой жидкости:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{0} & \text{в } \Omega \times (0, T), \\
 \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 & \text{в } \Omega \times [0, T), \\
 \mathbf{u}|_{t=0} &= \mathbf{u}_0, \quad p|_{t=0} = p_0 & \text{в } \Omega, \\
 \mathbf{u}|_{\Gamma_1} &= \mathbf{g}, \quad \left(\nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} - p \mathbf{n} \right) \Big|_{\Gamma_2} &= \mathbf{0},
 \end{aligned} \tag{1}$$

где Ω – область с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, \mathbf{u} , p – неизвестные скорость жидкости и кинематическое давление, ν – кинематическая вязкость, Γ_2 – граница с условием свободного вытока, \mathbf{n} – вектор-нормаль к Γ_2 , а Γ_1 – остальная граница $\partial\Omega$.

В разделе 2.2 предложена полунейвная схема расщепления для интегрирования уравнений (1) по времени:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha \widetilde{\mathbf{u}}^{n+1} + \beta \mathbf{u}^n + \gamma \mathbf{u}^{n-1}}{\Delta t^n} + \\ G \circ ((\mathbf{u}^n + \xi(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1})) \cdot \nabla \widetilde{\mathbf{u}}^{n+1}) - \\ \nu \Delta \widetilde{\mathbf{u}}^{n+1} = -\nabla p^n, \\ \widetilde{\mathbf{u}}^{n+1}|_{\Gamma_1} = \mathbf{g}, \quad \left. \frac{\partial \widetilde{\mathbf{u}}^{n+1}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma_2} = 0. \end{array} \right. \quad (2)$$

Здесь $\xi = \Delta t^n / \Delta t^{n-1}$, $\alpha = 1 + \xi / (\xi + 1)$, $\beta = -(\xi + 1)$, $\gamma = \xi^2 / (\xi + 1)$. Далее, спроектируем $\widetilde{\mathbf{u}}^{n+1}$ на бездивергентное пространство, чтобы получить \mathbf{u}^{n+1} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(\mathbf{u}^{n+1} - \widetilde{\mathbf{u}}^{n+1}) / \Delta t^n - \nabla q = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^{n+1}|_{\Gamma_1} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{g}, \quad q|_{\Gamma_2} = 0. \end{array} \right. \quad (3)$$

Задача (3) сводится к уравнению Пуассона для q :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta q = \alpha \operatorname{div} \widetilde{\mathbf{u}}^{n+1} / \Delta t^n, \\ q|_{\Gamma_2} = 0, \quad \left. \frac{\partial q}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma_1} = 0. \end{array} \right. \quad (4)$$

Получим новую скорость:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \widetilde{\mathbf{u}}^{n+1} + \Delta t^n \nabla q / \alpha, \quad (5)$$

и новое давление:

$$p^{n+1} = p^n + q / \alpha + \nu \operatorname{div} \widetilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \quad (6)$$

Данная схема разделена на шаг решения уравнений конвекции-диффузии-реакции с фильтром, действующим на конвективный член (2), и на шаг проекции скорости на бездивергентное пространство (3). Для дискретизации уравнений конвекции-реакции-диффузии по времени используется формула обратных разностей второго порядка точности, применяемая для переменного шага по времени. Для шага проекции скорости на бездивергентное пространство решается задача для поправки к давлению, что также дает второй порядок точности.

В *разделе 2.3* рассматривается задача о разложении Гельмгольца, возникающая на шаге проекции скорости на бездивергентное пространство (4). Введены конечно-объемные дискретизации для данной задачи. На аналитическом примере проиллюстрирована неустойчивость разложения Гельмгольца при решении задачи на разнесенных сетках типа восьмеричное дерево. Данная неустойчивость заключается в возникновении паразитного вихревого слоя на стыках ячеек разных размеров. На основе анализа характера возникающей неустойчивости предложен низкочастотный фильтр, действующий на конвективный член в задаче конвекции-реакции-диффузии, позволяющий исключить паразитный вихревой слой из получаемого в результате проекции поля скорости.

В *разделе 2.4* рассмотрен способ задания конечного объема для степеней свободы скорости, расположенных в гранях сетки типа восьмеричное дерево. Введены пространственные интерполяции, применяемые при дискретизации оператора конвекции и диффузии и при переинтерполяции данных при измельчении или разгрублении сетки. Предложены конечно-объемные дискретизации для операторов конвекции и диффузии.

В *разделе 2.5* предложен подход к заданию граничных условий на сетках типа восьмеричное дерево с учетом криволинейных границ. Данный подход

основан на введении дополнительных фиктивных степеней свободы скорости и на использовании дополнительной функции φ , определяющей минимальное расстояние от узла до границы расчетной области.

В *разделе 2.6* приведены результаты следующих численных экспериментов, демонстрирующих корректность и эффективность предложенных дискретизаций:

- пример Эшера-Стейнмана с известным аналитическим решением для уравнений Навье-Стокса;
- моделирование течения в трехмерной каверне при разном числе Рейнольдса (100,400,1000);
- обтекание цилиндров с квадратным и круглым сечением в узком канале при разном числе Рейнольдса (20,100,0–100).

На задаче Эшера-Стейнмана демонстрируется эффективность применения фильтра в подавлении паразитного вихревого слоя на сетках со сгущением и достижение схемой второго порядка точности. При моделировании течения в трехмерной каверне и обтекания цилиндров была продемонстрирована низкая численная вязкость схемы. Моделирование обтекания цилиндра с круглым сечением демонстрирует корректность подхода, описанного в *разделе 2.5*. Полученные данные, соответствующие моделированию течения жидкости в каверне, попадают в референтные значения, представленные в статье Вонга и Бэйкера. Коэффициенты подъемной силы и лобового сопротивления, полученные при моделировании обтекания цилиндров, сходятся к результатам, полученным Шафером и Туреком, Брааком и Рихтером.

Основные результаты, представленные в данной главе, опубликованы в статье [7].

В *третьей главе* диссертации рассматривается задача заводнения пористого нефтеносного геологического пласта. Для решения задачи используется численная модель двухфазной фильтрации. Данная модель реализована на основе программной платформы для работы с сетками общего вида, описанной в *первой главе*.

В *разделе 3.1* рассматривается течение двух фаз неперемешиваемых жидкостей в пористой среде. Фазу, которая обладает большей смачиваемостью, назовем смачивающей фазой и обозначим индексом w . Другую, несмачивающую фазу обозначим индексом o . Здесь и далее S_α и p_α будут обозначать насыщенность и давление соответствующей фазы $\alpha = w, o$. Без потери общности будем называть фазу w водой, а фазу o нефтью.

Базовые уравнения двухфазного течения имеют следующий вид:

- Сохранение масс для каждой фазы:

$$\frac{\partial \phi S_\alpha}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{u}_\alpha + q_\alpha, \quad \alpha = w, o. \quad (7)$$

- Закон Дарси:

$$\mathbf{u}_\alpha = -\lambda_\alpha \mathbb{K} (\nabla p_\alpha - \rho_\alpha g \nabla z), \quad \alpha = w, o. \quad (8)$$

- Обе жидкости заполняют все пустоты:

$$S_w + S_o = 1. \quad (9)$$

- Разница давлений между фазами определяется капиллярным давлением $p_c = p_c(S_w)$:

$$p_o - p_w = p_c, \quad (10)$$

Здесь \mathbb{K} – абсолютный тензор проницаемости, ϕ – пористость, g – ускорение свободного падения, z – глубина, для фазы α : p_α – неизвестное давление, S_α – неизвестная насыщенность, \mathbf{u}_α – неизвестные скорости Дарси, ρ_α – неизвестная плотность, $\rho_{\alpha,0}$ – известная плотность фазы на поверхности, $B_\alpha = \rho_{\alpha,0}/\rho_\alpha$ – коэффициент объемного расширения, μ_α – вязкость, $k_{r\alpha}$ – относительная фазовая проницаемость, $\lambda_\alpha = k_{r\alpha}/(\mu_\alpha B_\alpha)$ – мобильность, q_α – источник или сток.

Возьмем за основные неизвестные давление нефти p_o и насыщенность воды S_w . В дальнейшем мы также будем использовать следующие зависимости: $k_{r\alpha} = k_{r\alpha}(S_w)$, $\mu_\alpha = \mu_\alpha(p_o)$, $B_\alpha = B_\alpha(p_o)$ и $\phi = \phi_0(1 + c_R(p_o - p_o^0))$, где c_R – константа сжимаемости породы, ϕ_0 и p_o^0 – некоторые заданные значения пористости и давления.

На границах резервуара поставим условия непротекания (однородные условия Неймана). Скважины учитываются через источники или стоки в уравнении (7). Предполагается, что каждая скважина является вертикальной, подключена к центру ячейки. Будем считать, что в скважине нет капиллярного давления. Таким образом, потоки нефти и воды в скважине зависят только от давления нефти. В данной работе используется формула для скважин, предложенная Писманом.

В *разделе 3.2* вводится полностью неявная схема дискретизации по времени для уравнений сохранения массы (7). Так как схема является нелинейной, она решается методом Ньютона, для которого требуется определить матрицу частных производных.

В *разделе 3.3* описан конечно-объемный метод дискретизации по пространству, основанный на нелинейной двухточечной дискретизации диффузионного потока, предложенной Даниловым и Василевским.

В *разделе 3.4* выписан метод вычисления матрицы частных производ-

ных – Якобиана с учетом вариации коэффициентов в нелинейной двухточечной дискретизации диффузионного потока. Предложено несколько подходов к учету вариации данных коэффициентов для получения более разреженной матрицы.

В *разделе 3.5* произведено сравнение решения, полученного с помощью реализованной нелинейной двухточечной аппроксимации диффузионного потока на не \mathbb{K} -ортогональных сетках и решение, полученное при использовании известной линейной аппроксимации на \mathbb{K} -ортогональных сетках. Проверена сходимость решения на последовательности сгущающихся сеток. Показано, что нелинейная двухточечная дискретизация потока хорошо аппроксимирует дифференциальный поток на не \mathbb{K} -ортогональных сетках.

В *разделе 3.6* для решения аналогичной задачи применены адаптивные сетки типа восьмеричное дерево и нелинейная двухточечная аппроксимация. В результате получено значительное ускорение процесса решения на адаптивных сетках при сравнимой точности решения.

В *разделе 3.7* на задаче заводнения демонстрируется применение различных подходов учета вариации коэффициентов в нелинейной дискретизации диффузионного потока, предложенных в *разделе 3.4*.

В *разделе 3.8* на данной численной модели демонстрируется применимость предложенных в *первой главе* алгоритмов для проведения параллельных расчетов на распределенных по процессорам сетках. Продемонстрирована эффективность распараллеливания модели на кластере ИВМ РАН и на суперкомпьютере ВМК МГУ BlueGene/P.

Основные результаты опубликованы в статье [8].

В *заключении* кратко сформулированы результаты диссертационной работы и сделаны выводы о ее теоретической и практической ценности.

Основные результаты и выводы

Диссертационная работа посвящена разработке инструментария для хранения и работы с сетками общего вида, а также разработке и исследованию численных моделей гидродинамики и фильтрации на адаптивных сетках типа восьмиричное дерево.

В работе предложена, реализована и проверена программная платформа для работы с сетками общего вида в параллельном режиме.

Предложена новая низкодиссипативная проекционная схема дискретизации уравнений Навье-Стокса для адаптивных сеток типа восьмиричное дерево с разнесенным расположением степеней свободы. Обнаружена неустойчивость в задаче проекции скорости на бездивергентное пространство и предложен низкочастотный фильтр для ее стабилизации. Предложенная схема показывает второй порядок сходимости в дискретных L_2 и L_∞ нормах на аналитическом решении.

Предложен подход к решению задачи двухфазного заводнения с помощью полностью неявного нелинейного конечно-объемного метода на динамически адаптируемых сетках типа восьмиричное дерево. Использование нелинейных двухточечных шаблонов позволяет получать решение на сетках типа восьмиричное дерево вне зависимости от их \mathbb{K} -ортогональности. Предложенный критерий сгущения сеток основан на определении области с большим градиентом насыщенности воды и давления нефти. Показано, что выбранный критерий ведет к минимальной потере точности и большому выигрышу в скорости расчета.

Основные публикаций по теме диссертации

1. Ю. В. Василевский, И. Н. Коньшин, Г. В. Копытов, К. М. Терехов. INMOST – Программная платформа и графическая среда для разработки параллельных численных моделей на сетках общего вида. Москва: Издательство Московского Университета, 2012. С. 144.
2. К. Д. Никитин, А. Ф. Сулейманов, К. М. Терехов. Технология моделирования течений со свободной поверхностью в реалистичных сценах // Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского. 2009. Т. 39. С. 305–307.
3. К. М. Терехов. Параллельная реализация модели общей циркуляции океана // Сборник тезисов лучших дипломных работ 2010. ВМИК МГУ, Москва: МАКС ПРЕСС, 2010. С. 30–31.
4. K. D. Nikitin, M. A. Olshanskii, K. M. Terekhov, Y. V. Vassilevski. Preserving distance property of level set function and simulation of free surface flows on adaptive grids // Численная геометрия, построение расчетных сеток и высокопроизводительные вычисления. 2010. P. 25–32.
5. K. D. Nikitin, M. A. Olshanskii, K. M. Terekhov, Yu. V. Vassilevski. A numerical method for the simulation of free surface flows of viscoplastic fluid in 3D // Journal of Computational Mathematics. 2011. V. 29. P. 605–622.
6. K. D. Nikitin, M. A. Olshanskii, K. M. Terekhov, Yu. V. Vassilevski. Numerical modelling of viscoplastic free surface flows in complex 3D geometries // Proceedings of European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS 2012. Vienna, Austria: September 10-12, 2012. P. 14. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).
7. M. A. Olshanskii, K. M. Terekhov, Yu. V. Vassilevski. An octree-based solver

for the incompressible Navier-Stokes equations with enhanced stability and low dissipation. // *Computers and Fluids*. 2013. V. 84. P. 231–246.

8. K. M. Terekhov, Yu. V. Vassilevski. Two-phase water flooding simulations on dynamic adaptive octree grids with two-point nonlinear fluxes // *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. 2013. V. 28, no. 3. P. 267–288.
9. K. M. Terekhov, E. M. Volodin, A. V. Gusev. Methods and efficiency estimation of parallel implementation of the sigma-model of general ocean circulation // *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. 2011. V. 26, no. 2. P. 189–208.
10. Yu. V. Vassilevski, K. D. Nikitin, M. A. Olshanskii, K.M. Terekhov. CFD technology for 3D simulation of large-scale hydrodynamic events and disasters // *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. 2012. V. 27, no. 4. P. 399–412.