

**ОТЗЫВ**  
официального оппонента, доктора физико-математических наук Капорина Игоря  
Евгеньевича на диссертационную работу

Засько Григория Владимировича  
«Численный анализ немодовой устойчивости турбулентных течений»,

представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по  
специальности 1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы  
программ.

**Актуальность темы исследования.** В рамках анализа немодовой устойчивости гидродинамических течений исследуют так называемые оптимальные возмущения основного течения, испытывающие наибольший рост энергии на конечных временных интервалах, а также развитие и последствия развития таких возмущений. Развитие возмущений на фоне основного течения описывается линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений, а наиболее затратным этапом при вычислении оптимального возмущения является вычисление максимума нормы матричной экспоненты матрицы системы. При проведении параметрических расчетов представляют интерес верхние оценки этой величины.

Оптимальные возмущения используются при исследовании обходного сценария ламинарно-турбулентного перехода и ранее применялись для исследования организованных структур, представляющих собой крупномасштабные продольные вихри и стрики, в нейтрально-стратифицированных турбулентных течениях. Сравнительно недавно такие структуры были обнаружены в сдвиговых турбулентных течениях при устойчивой стратификации, близких по свойствам к течению в атмосферном пограничном слое. Наблюдаемые структуры проявляются во мгновенных полях турбулентных флуктуаций в виде наклонных температурных фронтов. Физические механизмы появления и развития таких наклонных организованных структур ранее не исследовались.

Актуальной задачей является поиск подхода к исследованию организованных структур в турбулентных течениях, обладающего предсказательной силой об их пространственных размерах и конфигурации и являющегося менее вычислительно затратным чем прямое численное моделирование. Также актуальным является исследование механизмов появления и развития организованных структур в турбулентных

течениях, так как их наличие приводит к расхождению между результатами прямого численного моделирования и результатами, которые дают модели турбулентности, используемые в климатических моделях.

**Структура и содержание работы.** Диссертация состоит из введения, 3 глав и заключения.

Во введении отмечается актуальность и цели исследования. Излагаются основные положения, выносимые на защиту, практическая и научная ценность работы, научная новизна полученных результатов и личный вклад соискателя.

В первой главе для стационарного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений вводится понятие оптимального возмущения и максимальной амплификации нормы решения. Описываются алгоритмы вычисления этих величин. Выводятся несколько новых верхних оценок максимума нормы матричной экспоненты и показываются преимущества полученных оценок по сравнению с ранее известными. Указывается область применимости полученных оценок. Демонстрируется, как полученные оценки можно использовать для ускорения параметрических расчетов в задачах гидродинамической устойчивости. Ставится задача о поиске оптимальной спектральной плотности стохастического форсинга, представляющего собой дельта-коррелированный по времени гауссовский случайный процесс, для линейных динамических систем. Предлагаются и обосновываются алгоритмы вычисления оптимальной спектральной плотности в первой, второй и бесконечной нормах Шэттена.

Во второй главе представлен обзор литературы, посвященной исследованию крупномасштабных организованных структур в турбулентных течениях. Вводится стратифицированное турбулентное течение Куэтта, близкое по свойствам к течению в атмосферном пограничном слое и используемое в качестве модельной задачи во всей диссертации. Представлены результаты прямого численного моделирования этого течения, из которых в диссертации выделяются наблюдаемые организованные структуры. На примере стратифицированного турбулентного течения Куэтта поэтапно описывается технология численного анализа немодовой устойчивости турбулентных течений, включающая в себя построение линейной модели эволюции крупномасштабных возмущений и алгоритмы вычисления максимальной амплификации энергии и оптимальных возмущений.

В третьей главе представлены результаты вычисления оптимальных возмущений стратифицированного турбулентного течения Куэтта при различных числах Рейнольдса и

Ричардсона. Найденные оптимальные возмущения сравниваются с выделенными из результатов прямого численного моделирования крупномасштабными Фурье-гармониками, проявляющимися в виде организованных структур. Исследуется спектральный (модовый) состав оптимальных возмущений. Исследуется вклад отдельных физических механизмов в рост оптимальных возмущений в рамках линейной модели при различных числах Ричардсона. Строится нелинейная динамико-стохастическая модель, на основе интегрирования которой вычисляются временные ряды энергии крупномасштабных Фурье-гармоник, проявляющихся в виде организованных структур. На основе полученных временных рядов изучаются механизмы появления и развития оптимальных возмущений в нелинейной модели.

В заключении приводятся основные результаты диссертации.

**Научная новизна.** Все результаты диссертации, вынесенные на защиту, являются новыми. Получены новые верхние оценки максимума нормы матричной экспоненты и продемонстрированы преимущества этих оценок по сравнению с известными ранее. Поставлена задача о поиске оптимального стохастического форсинга для линейной динамических систем и разработаны и обоснованы численные алгоритмы ее решения в первой, второй и бесконечной нормах Шэттена. Разработана технология численного анализа немодовой устойчивости осредненных турбулентных течений. Впервые вычислены оптимальные возмущения сдвиговых турбулентных течений при устойчивой стратификации и показано, что найденные возмущения совпадают по пространственным масштабам и конфигурации с наблюдаемыми в таких течениях наклонными температурными фронтами. Впервые исследован вклад отдельных физических механизмов в появление и развитие наблюдаемых наклонных фронтов.

**Практическая и научная ценность работы.** Научная ценность диссертации состоит в новых верхних оценках максимума нормы матричной экспоненты и алгоритмах вычисления оптимального стохастического форсинга для линейных динамических систем, а также разработанной технологии численного анализа немодовой устойчивости турбулентных течений. Практическая ценность диссертации состоит в объяснении физических механизмов, отвечающих за появление и развитие наклонных температурных фронтов, проявляющихся на фоне мелкомасштабной турбулентности в сдвиговых турбулентных течениях при устойчивой стратификации.

## **Обоснованность и достоверность научных положений и выводов.**

Обоснованность и достоверность результатов первой главы диссертации подтверждается строгим доказательством математических утверждений и иллюстрируется численными экспериментами. Обоснованность и достоверность результатов второй и третьей глав диссертации подтверждается всесторонними численными экспериментами и сравнением их результатов с результатами прямого численного моделирования.

### **Замечания по работе:**

1. Присутствует некоторая несогласованность в обозначениях. В первой главе диссертации  $\Gamma_{\max}$  означает максимум нормы матричной экспоненты, а в последующих главах это обозначение используется для максимума квадрата нормы матричной экспоненты.
2. На странице 3 (в оглавлении) используется нерасшифрованное сокращение ЭОФ, причем ссылка идет на стр.105, где оно также не объясняется. Узнать, что это означает «базис Эмпирических Ортогональных Функций», можно только на стр.34.
3. Иллюстративный пример (1.4) 2x2-матрицы A на стр.12 содержит много ошибок. Например, собственные векторы этой матрицы суть  $[1, 0]^T$  и  $[100, 1]^T$ , а вовсе не то, что там написано. Более того, приведенный строкой ниже вектор решения  $u(t)$ , как нетрудно проверить, не удовлетворяет уравнению  $du/dt = Au$ .
4. В тексте диссертации есть опечатки, например, на стр.28 находим «дополнить вычислить», а на стр.57 видим «комплексного».

**Общая оценка работы.** Вышеуказанные замечания не снижают общей положительной оценки работы, которую можно охарактеризовать как законченное исследование, выполненное на высоком научном уровне. Результаты работы являются новыми и имеют научную и практическую ценность.

Основные результаты диссертации докладывались на многих международных и всероссийских конференциях и на научных семинарах.

Результаты диссертации опубликованы в 25 работах, из которых 8 – в рецензируемых научных изданиях, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Из этих 8 работ 7 работ опубликованы в научных изданиях,

индексируемых международными базами данных Web of Science или Scopus. Автореферат полностью и точно отражает содержание диссертации.

Считаю, что диссертация отвечает всем квалификационным требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук, установленным «Положением о присуждении ученых степеней», а ее автор **Засько Григорий Владимирович** заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

Официальный оппонент,

доктор физ.-мат. наук,

главный научный сотрудник  
Федерального исследовательского центра  
«Информатика и Управление»  
Российской академии наук

Капорин Игорь  
Евгеньевич

«31» мая 2024 г.

Подпись главного научного сотрудника ФИЦ ИУ РАН, доктора физ.-мат. наук Капорина  
Игоря Евгеньевича заверяю

Ученый секретарь ФИЦ ИУ РАН



Захаров Виктор  
Николаевич

«3» июня 2024 г.

## ОТЗЫВ

официального оппонента, доктора физико-математических наук Капорина Игоря Евгеньевича на диссертационную работу

Засько Григория Владимировича  
«Численный анализ немодовой устойчивости турбулентных течений»,

представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

**Актуальность темы исследования.** В рамках анализа немодовой устойчивости гидродинамических течений исследуют так называемые оптимальные возмущения основного течения, испытывающие наибольший рост энергии на конечных временных интервалах, а также развитие и последствия развития таких возмущений. Развитие возмущений на фоне основного течения описывается линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений, а наиболее затратным этапом при вычислении оптимального возмущения является вычисление максимума нормы матричной экспоненты матрицы системы. При проведении параметрических расчетов представляют интерес верхние оценки этой величины.

Оптимальные возмущения используются при исследовании обходного сценария ламинарно-турбулентного перехода и ранее применялись для исследования организованных структур, представляющих собой крупномасштабные продольные вихри и стрики, в нейтрально-стратифицированных турбулентных течениях. Сравнительно недавно такие структуры были обнаружены в сдвиговых турбулентных течениях при устойчивой стратификации, близких по свойствам к течению в атмосферном пограничном слое. Наблюдаемые структуры проявляются во мгновенных полях турбулентных флюктуаций в виде наклонных температурных фронтов. Физические механизмы появления и развития таких наклонных организованных структур ранее не исследовались.

Актуальной задачей является поиск подхода к исследованию организованных структур в турбулентных течениях, обладающего предсказательной силой об их пространственных размерах и конфигурации и являющегося менее вычислительно затратным чем прямое численное моделирование. Также актуальным является исследование механизмов появления и развития организованных структур в турбулентных

течениях, так как их наличие приводит к расхождению между результатами прямого численного моделирования и результатами, которые дают модели турбулентности, используемые в климатических моделях.

**Структура и содержание работы.** Диссертация состоит из введения, 3 глав и заключения.

Во введении отмечается актуальность и цели исследования. Излагаются основные положения, выносимые на защиту, практическая и научная ценность работы, научная новизна полученных результатов и личный вклад соискателя.

В первой главе для стационарного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений вводится понятие оптимального возмущения и максимальной амплификации нормы решения. Описываются алгоритмы вычисления этих величин. Выводятся несколько новых верхних оценок максимума нормы матричной экспоненты и показываются преимущества полученных оценок по сравнению с ранее известными. Указывается область применимости полученных оценок. Демонстрируется, как полученные оценки можно использовать для ускорения параметрических расчетов в задачах гидродинамической устойчивости. Ставится задача о поиске оптимальной спектральной плотности стохастического форсинга, представляющего собой дельта-коррелированный по времени гауссовский случайный процесс, для линейных динамических систем. Предлагаются и обосновываются алгоритмы вычисления оптимальной спектральной плотности в первой, второй и бесконечной нормах Шэттена.

Во второй главе представлен обзор литературы, посвященной исследованию крупномасштабных организованных структур в турбулентных течениях. Вводится стратифицированное турбулентное течение Куэтта, близкое по свойствам к течению в атмосферном пограничном слое и используемое в качестве модельной задачи во всей диссертации. Представлены результаты прямого численного моделирования этого течения, из которых в диссертации выделяются наблюдаемые организованные структуры. На примере стратифицированного турбулентного течения Куэтта поэтапно описывается технология численного анализа немодовой устойчивости турбулентных течений, включающая в себя построение линейной модели эволюции крупномасштабных возмущений и алгоритмы вычисления максимальной амплификации энергии и оптимальных возмущений.

В третьей главе представлены результаты вычисления оптимальных возмущений стратифицированного турбулентного течения Куэтта при различных числах Рейнольдса и

Ричардсона. Найденные оптимальные возмущения сравниваются с выделенными из результатов прямого численного моделирования крупномасштабными Фурье-гармониками, проявляющимися в виде организованных структур. Исследуется спектральный (модовый) состав оптимальных возмущений. Исследуется вклад отдельных физических механизмов в рост оптимальных возмущений в рамках линейной модели при различных числах Ричардсона. Строится нелинейная динамико-стохастическая модель, на основе интегрирования которой вычисляются временные ряды энергии крупномасштабных Фурье-гармоник, проявляющихся в виде организованных структур. На основе полученных временных рядов изучаются механизмы появления и развития оптимальных возмущений в нелинейной модели.

В заключении приводятся основные результаты диссертации.

**Научная новизна.** Все результаты диссертации, вынесенные на защиту, являются новыми. Получены новые верхние оценки максимума нормы матричной экспоненты и продемонстрированы преимущества этих оценок по сравнению с известными ранее. Поставлена задача о поиске оптимального стохастического форсинга для линейной динамических систем и разработаны и обоснованы численные алгоритмы ее решения в первой, второй и бесконечной нормах Шэттена. Разработана технология численного анализа немодовой устойчивости осредненных турбулентных течений. Впервые вычислены оптимальные возмущения сдвиговых турбулентных течений при устойчивой стратификации и показано, что найденные возмущения совпадают по пространственным масштабам и конфигурации с наблюдаемыми в таких течениях наклонными температурными фронтами. Впервые исследован вклад отдельных физических механизмов в появление и развитие наблюдавшихся наклонных фронтов.

**Практическая и научная ценность работы.** Научная ценность диссертации состоит в новых верхних оценках максимума нормы матричной экспоненты и алгоритмах вычисления оптимального стохастического форсинга для линейных динамических систем, а также разработанной технологии численного анализа немодовой устойчивости турбулентных течений. Практическая ценность диссертации состоит в объяснении физических механизмов, отвечающих за появление и развитие наклонных температурных фронтов, проявляющихся на фоне мелкомасштабной турбулентности в сдвиговых турбулентных течениях при устойчивой стратификации.

## **Обоснованность и достоверность научных положений и выводов.**

Обоснованность и достоверность результатов первой главы диссертации подтверждается строгим доказательством математических утверждений и иллюстрируется численными экспериментами. Обоснованность и достоверность результатов второй и третьей глав диссертации подтверждается всесторонними численными экспериментами и сравнением их результатов с результатами прямого численного моделирования.

### **Замечания по работе:**

1. Присутствует некоторая несогласованность в обозначениях. В первой главе диссертации  $\Gamma_{\max}$  означает максимум нормы матричной экспоненты, а в последующих главах это обозначение используется для максимума квадрата нормы матричной экспоненты.
2. На странице 3 (в оглавлении) используется нерасшифрованное сокращение ЭОФ, причем ссылка идет на стр.105, где оно также не объясняется. Узнать, что это означает «базис Эмпирических Ортогональных Функций», можно только на стр.34.
3. Иллюстративный пример (1.4) 2x2-матрицы A на стр.12 содержит много ошибок. Например, собственные векторы этой матрицы суть  $[1, 0]^T$  и  $[100, 1]^T$ , а вовсе не то, что там написано. Более того, приведенный строкой ниже вектор решения  $u(t)$ , как нетрудно проверить, не удовлетворяет уравнению  $du/dt = Au$ .
4. В тексте диссертации есть опечатки, например, на стр.28 находим «дополнить вычислить», а на стр.57 видим «комплексного».

**Общая оценка работы.** Вышеуказанные замечания не снижают общей положительной оценки работы, которую можно охарактеризовать как законченное исследование, выполненное на высоком научном уровне. Результаты работы являются новыми и имеют научную и практическую ценность.

Основные результаты диссертации докладывались на многих международных и всероссийских конференциях и на научных семинарах.

Результаты диссертации опубликованы в 25 работах, из которых 8 – в рецензируемых научных изданиях, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Из этих 8 работ 7 работ опубликованы в научных изданиях,

индексируемых международными базами данных Web of Science или Scopus. Автореферат полностью и точно отражает содержание диссертации.

Считаю, что диссертация отвечает всем квалификационным требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук, установленным «Положением о присуждении ученых степеней», а ее автор **Засько Григорий Владимирович** заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

Официальный оппонент,

доктор физ.-мат. наук,

главный научный сотрудник  
Федерального исследовательского центра  
«Информатика и Управление»  
Российской академии наук

Капорин Игорь  
Евгеньевич

«31» мая 2024 г.

Подпись главного научного сотрудника ФИЦ ИУ РАН, доктора физ.-мат. наук Капорина  
Игоря Евгеньевича заверяю

Ученый секретарь ФИЦ ИУ РАН, дтн

Захаров Виктор  
Николаевич



«июня 2024 г.