

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
НАУКИ ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМ. Г.И. МАРЧУКА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК (ИВМ РАН)

На правах рукописи

Засько Григорий Владимирович

**Численный анализ немодовой устойчивости
турбулентных течений**

Специальность 1.2.2

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, доцент
Нечепуренко Юрий Михайлович

Москва — 2024

Оглавление

Введение	4
1. Анализ немодовой устойчивости стационарных решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений	
1.1 Оптимальные возмущения стационарных решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений	11
1.2 Вычисление максимальной амплификации и оптимальных возмущений	14
1.3 Верхние оценки максимума нормы матричной экспоненты	16
1.3.1 Верхние оценки на основе уравнения Ляпунова	17
1.3.2 Сравнение верхних оценок	23
1.3.3 Об использовании предложенных оценок	28
1.3.4 Применение предложенных оценок в задачах гидродинамической устойчивости	28
1.4 Оптимальный стохастический форсинг для линейных динамических систем	32
1.4.1 Отклик на стохастический форсинг	33
1.4.2 Оптимальная спектральная плотность стохастического форсинга	35
1.4.3 Вычисление оптимальной спектральной плотности	40
2. Численная модель развития крупномасштабных возмущений в стратифицированном турбулентном течении	
2.1 Об исследовании организованных структур в турбулентных течениях	41
2.2 Стратифицированное турбулентное течение Куэтта и результаты прямого численного моделирования	46
2.2.1 Ролики при нейтральной стратификации	48
2.2.2 Наклонные структуры при устойчивой стратификации	50
2.3 Линейная модель развития крупномасштабных возмущений	54
2.3.1 Особенности спектра линейного оператора	58

2.4	Пространственная аппроксимация и алгебраическая редукция . . .	59
3.	Использование оптимальных возмущений для анализа	
	организованных структур в стратифицированном	
	турбулентном течении Куэтта	64
3.1	Крупномасштабные организованные структуры	64
3.1.1	Продольные стрики и наклонные структуры	64
3.1.2	Зависимость от чисел Рейнольдса и Ричардсона	67
3.1.3	Сравнение с результатами прямого численного моделирования	73
3.2	Спектральный состав оптимальных возмущений	77
3.3	Физические механизмы роста оптимальных возмущений	81
3.3.1	Влияние сил плавучести	81
3.3.2	Эффект опрокидывания и механизм Орра	82
3.4	Пристеночные структуры	89
3.5	Отклик линейной модели на оптимальный стохастический форсинг	94
3.6	Модель возникновения и развития крупномасштабных структур в стратифицированном турбулентном течении Куэтта	96
3.6.1	Анализ временных рядов	99
3.6.2	Появление оптимальных возмущений в рамках нелинейной модели	103
3.6.3	Сравнение развитых оптимальных возмущений с 1-ой ЭОФ	105
	Заключение	109
	Список литературы	110

Введение

Актуальность темы. В рамках традиционного (модового) анализа устойчивости гидродинамических течений исследуется появление, развитие и последствия развития наиболее нарастающих (ведущих) собственных мод [1–3]. Вычисленные характеристики ведущих собственных мод, такие как их инкременты нарастания, а также фазовая и групповая скорость, позволяют описать начальную стадию естественного сценария ламинарно-турбулентного перехода и решать такие прикладные задачи, как определение положения ламинарно-турбулентного перехода на поверхности обтекаемого тела и оптимизация формы обтекаемой поверхности (см., например, [4–6]). Помимо наиболее нарастающих собственных мод представляют интерес возмущения, испытывающие наибольший рост на конечных временных (или пространственных) интервалах, которые называют оптимальными возмущениями [2;3]. Поиск оптимальных возмущений для заданного стационарного решения динамической системы, а также исследование развития и последствий развития таких возмущений, называют анализом немодовой устойчивости [2; 3; 7]. Известно [2; 8; 9], что для ряда ламинарных течений оптимальные возмущения значительно отличаются по пространственной конфигурации от отдельных собственных мод и представляют собой пакет из большого числа неортогональных собственных мод. Оптимальные возмущения широко применяются для описания начального этапа обходного сценария ламинарно-турбулентного перехода [2; 10; 11].

Методы анализа немодовой устойчивости применялись [12–14] также и для исследования крупномасштабных организованных структур, проявляющихся на фоне мелкомасштабной турбулентности в сдвиговых турбулентных течениях при нейтральной стратификации. Анализ проводился на основе линейных моделей эволюции крупномасштабных составляющих течения, проявляющихся в виде организованных структур, в которых все взаимодействие с мелкомасштабной турбулентностью параметризовано с помощью оператора вихревой вязкости. Вычисленные в работах [12–14] оптимальные возмущения оказались близки по размерам и пространственной конфигурации к наблюдаемым организованным структурам.

При анализе результатов прямого численного и вихреразрешающего моделирования крупномасштабные организованные структуры были обнаружены в сдвиговых турбулентных течениях и при устойчивой стратификации [15–17]. Такие течения близки по свойствам к течению в пограничном слое атмосферы. Обнаруженные структуры проявляются в мгновенных полях температуры в виде тонких нерегулярных наклонных слоев с сильной стратификацией («фронтов» [16]), располагающихся между хорошо перемешанными слоями жидкости. Физические механизмы, ответственные за появление и развитие таких структур не были объяснены. Исследование этих механизмов является актуальной задачей, так как наличие организованных структур в турбулентном течении приводит к расхождению между результатами прямого численного моделирования и результатами одномерных моделей турбулентности, используемых в климатических моделях.

Актуальной задачей является разработка нового подхода к исследованию организованных структур в турбулентных течениях, который позволит объяснить физические механизмы и условия формирования этих структур и оценить их пространственные размеры и конфигурацию, а кроме того является менее затратным чем прямое численное моделирование.

Вычисление оптимальных возмущений сводится к вычислению максимума нормы матричной экспоненты, при этом само значение максимума определяет величину подскока энергии оптимального возмущения [7]. Для ускорения параметрических расчетов представляют интерес верхние оценки этой величины. Еще одной задачей, возникающей при анализе немодовой устойчивости, является разработка алгоритмов для анализа чувствительности заданного стационарного решения динамической системы к стохастическому форсингу и поиска оптимального стохастического форсинга. Указанные задачи матричного анализа представляют и самостоятельный интерес.

Целью диссертации является разработка технологии численного анализа немодовой устойчивости осредненных турбулентных течений и применение этой технологии для объяснения физических механизмов, ответственных за появление и развитие организованных структур в турбулентных течениях, близких по свойствам к течению в пограничном слое атмосферы.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Разработать технологию численного анализа немодовой устойчивости осредненных турбулентных течений.
2. Рассмотреть возникающие в рамках этой технологии матричные задачи: получение верхних оценок максимума нормы матричной экспоненты и вычисление оптимального стохастического форсинга.
3. Применить разработанную технологию к исследованию организованных структур, наблюдаемых в турбулентных течениях, близких по свойствам к течению в атмосферном пограничном слое.
4. Исследовать физические механизмы, отвечающие за появление и развитие организованных структур в турбулентных течениях, а также свойства оптимальных возмущений.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Получены новые верхние оценки максимума нормы матричной экспоненты. Показаны преимущества полученных оценок по сравнению с известными ранее.
2. Впервые поставлена задача о поиске оптимального стохастического форсинга для линейных динамических систем. Предложены и обоснованы алгоритмы вычисления оптимального стохастического форсинга в p -нормах Шэттена при $p = 1, 2$ и ∞ .
3. Разработана универсальная технология анализа немодовой устойчивости осредненных турбулентных течений, включающая в себя построение линейной модели развития организованных структур и эффективные численные алгоритмы.
4. Выполнен анализ немодовой устойчивости стратифицированного турбулентного течения Куэтта в широком диапазоне параметров. Показано, что для этого течения существует несколько типов оптимальных возмущений. Продемонстрировано хорошее согласование пространственной конфигурации и размеров найденных оптимальных возмущений с наблюдаемыми в результатах прямого численного моделирования организованными структурами.
5. Показано, что тип оптимальных возмущений определяется безразмерным параметром, равным отношению вертикального размера канала к масштабу длины Обухова. Оценен вклад отдельных физических меха-

низмов в развитие оптимальных возмущений. Показано, что диссипация энергии мала на всем этапе развития оптимальных возмущений.

Практическая значимость заключается в объяснении физических механизмов, отвечающих за появление и развитие организованных структур, наблюдаемых в сдвиговых турбулентных течениях при устойчивой стратификации. **Научная значимость** заключается в том, что разработана универсальная технология численного анализа немодовой устойчивости осредненных турбулентных течений, а также в новых верхних оценках максимума нормы матричной экспоненты и алгоритмах вычисления оптимального стохастического форсинга для линейных динамических систем.

Научная новизна:

1. Получен ряд новых верхних оценок максимума нормы матричной экспоненты и продемонстрированы преимущества этих оценок по сравнению с известными ранее.
2. Впервые поставлена задача о поиске оптимального стохастического форсинга и разработаны и обоснованы алгоритмы ее решения в p -нормах Шэттена при $p = 1, 2$ и ∞ .
3. Разработана универсальная технология анализа немодовой устойчивости осредненных турбулентных течений, в которой для вычисления оптимальных возмущений используются эффективные численные алгоритмы, а для построения линейной модели используются результаты прямого численного моделирования.
4. Для стратифицированных турбулентных течений впервые вычислены оптимальные возмущения. Впервые показано, что найденные оптимальные возмущения хорошо согласуются по пространственным масштабам и конфигурации с наблюдаемыми в таких течениях организованными структурами.
5. Впервые исследованы физические механизмы, отвечающие за появление и развитие наклонных организованных структур, наблюдаемых в устойчиво-стратифицированных сдвиговых турбулентных течениях.
6. Впервые исследовано развитие оптимальных возмущений в нелинейной модели, описывающей появление и развитие организованных структур в турбулентных течениях. Показано, что характеристики оптимальных

возмущений, найденные в рамках линейной модели, согласуются с развитием этих возмущений в нелинейной модели.

Достоверность результатов **первой главы** обоснована строгим доказательством математических утверждений и проиллюстрирована численными экспериментами. Достоверность результатов **второй и третьей глав** обоснована обширными численными экспериментами и сравнением их результатов с результатами прямого численного моделирования стратифицированных турбулентных течений.

Апробация работы. Соискатель **лично** докладывал основные результаты работы на научных семинарах (**4 доклада**): «Математическое моделирование геофизических процессов: прямые и обратные задачи» (НИВЦ МГУ, 2019), «Новые подходы к измерению и моделированию геофизической турбулентности» (ИВМ РАН - НИВЦ МГУ, 2019), «Матричные методы в математике и приложениях» (ИВМ РАН, 2020), «Вычислительная математика и приложения» (ИВМ РАН, 2024); на международных конференциях (**3 доклада**): «Аналитические и численные методы решения задач гидродинамики, математической физики и биологии» [18] (2019), «Марчуковские научные чтения» [19] (2021), «EGU General Assembly 2021» [20] (2021); на всероссийских конференциях (**6 докладов**): «Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии» [21–24] (2019–2022), 62-я и 64-я научная конференции МФТИ [25; 26] (2019–2021). Результаты работы также обсуждались в **6 докладах**, где соискатель участвовал **как соавтор**: Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики [27; 28] (2019, 2023); «EMS Annual Meeting 2019» [29] (2019); «EGU General Assembly 2020» [30] (2020); «Состав атмосферы. Атмосферное электричество. Климатические процессы» [31] (2020); «Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии» [32] (2023).

Публикации. По теме диссертации опубликовано **23 работы** [18–40], из них **8 работ** [33–40] — в рецензируемых научных изданиях, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание учёной степени кандидата наук. Из этих 8 работ **7 работ** [33; 35–40] опубликованы в научных журналах, индексируемых в международных базах данных Web of Science или Scopus.

Личный вклад. Соискатель участвовал в разработке всех элементов технологии численного анализа немодовой устойчивости турбулентных течений,

а также в постановке математических задач и доказательстве теорем. В работах [33–36; 40] соискатель участвовал в разработке и реализации технологии численного анализа немодовой устойчивости турбулентных течений и выполнил все численные эксперименты с этой технологией для анализа организованных структур в стратифицированном турбулентном течении Куэтта. В работе [37] соискатель разработал и реализовал технологию анализа временных рядов в модели появления и развития организованных структур в стратифицированном течении Куэтта. В работе [38] соискатель получил 2 новые верхние оценки максимума нормы матричной экспоненты и участвовал в получении других новых оценок. В работе [39] соискатель поставил задачу о поиске оптимального стохастического форсинга для линейных динамических систем, а также участвовал в разработке и обосновании алгоритмов его вычисления.

Объем и структура диссертационной работы. Диссертация состоит из введения, 3 глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 122 страницы, включая 27 рисунков и 10 таблиц. Список литературы содержит 115 наименований.

Содержание работы. **Первая глава** посвящена постановке задач, возникающих при исследовании немодовой устойчивости стационарных решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, численным методам решения таких задач и их обоснованию. Вводится понятие оптимального возмущения стационарного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений и понятие максимальной амплификации нормы решения. Предлагаются (и сравниваются с известными ранее) новые верхние оценки максимума нормы матричной экспоненты. Ставится задача о вычислении оптимального стохастического форсинга для линейных динамических систем и предлагаются и обосновываются численные алгоритмы ее решения. Во **второй главе** представлен обзор литературы, посвященной исследованию крупномасштабных организованных структур в турбулентных течениях. Из результатов прямого численного моделирования выделяются организованные структуры, наблюдаемые в стратифицированном турбулентном течении Куэтта. Описывается технология численного анализа немодовой устойчивости осредненных турбулентных течений, включающая в себя построение линейной модели развития организованных структур и эффективные численные алгоритмы. **Третья глава** посвящена применению разработанной технологии для исследования организованных

структур, наблюдаемых в стратифицированном турбулентном течении Куэтта. В широком диапазоне параметров исследуются свойства оптимальных возмущений, а также их пространственная конфигурация и размеры. Исследуются физические механизмы развития оптимальных возмущений. Выполняется сравнение результатов анализа немодовой устойчивости с результатами прямого численного моделирования. Строится (нелинейная) модель возникновения и развития организованных структур в стратифицированном турбулентном течении Куэтта и на ее основе исследуются механизмы появления таких структур. В **заключении** перечислены основные результаты данной работы.

Благодарности. Автор благодарен своему научному руководителю Ю.М. Нечепуренко и А.В. Глазунову за постановку задачи, внимание к работе и полезные обсуждения, а также соавторам работ — Е.В. Мортикову и П.А. Пережогину.

1. Анализ немодовой устойчивости стационарных решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений

1.1 Оптимальные возмущения стационарных решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Численное исследование устойчивости стационарных решений нелинейных динамических систем сводят к исследованию устойчивости нулевых решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{dt} = Au, \quad (1.1)$$

где $t > 0$ — время, u — вектор-функция (отклонения от исследуемого стационарного решения), а A — некоторая квадратная комплексная матрица не зависящая от времени. Для системы (1.1) можно поставить задачу Коши, дополнив ее начальным условием u_0 при $t = 0$. Решение этой задачи Коши представимо в виде $u(t) = \exp(tA)u_0$. Адекватной мерой величины решения в заданный момент времени t будем считать его вторую норму $\|u(t)\|_2$.

Если все собственные значения матрицы A лежат строго в левой полуплоскости, то нулевое решение системы (1.1) асимптотически устойчиво по Ляпунову, то есть $\|u(t)\|_2 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ при любом u_0 . Однако на конечных временных интервалах (при некоторых u_0) норма решения задачи Коши может испытывать значительный рост. Величины

$$\Gamma(t) := \max_{\|u_0\|_2=1} \|u(t)\|_2 = \|\exp(tA)\|_2, \quad \Gamma_{\max} = \max_{t \geq 0} \Gamma(t), \quad (1.2)$$

называют соответственно максимальной амплификацией нормы решения в момент времени t и глобальной максимальной амплификацией. Минимальный момент времени, при котором достигается Γ_{\max} , будем называть оптимальным моментом времени и обозначать через t_{opt} . Начальное возмущение u_0 , на котором достигается Γ_{\max} в оптимальный момент времени, называют оптимальным возмущением. Нетрудно заметить, что оптимальное возмущение — это нормированный правый сингулярный вектор, отвечающий максимальному сингулярно-

му числу матрицы $\exp(t_{\text{opt}}A)$. Оптимальные возмущения используются в гидродинамике и аэродинамике для описания начального этапа обходного сценария ламинарно-турбулентного перехода [2; 10; 11] и изучения крупномасштабных организованных структур в турбулентных течениях [12; 14].

Пусть все собственные значения матрицы A имеют кратность 1, а отвечающие им собственные векторы образуют ортонормированный базис. Нетрудно заметить, что в этом случае имеет место равенство $\Gamma(t) = \exp(r_{\text{max}}t)$, где

$$r_{\text{max}} = \max\{\text{Real}\lambda : \lambda \in \lambda(A)\} \quad (1.3)$$

максимальная вещественная часть собственных значений матрицы A . В этом случае $\Gamma_{\text{max}} = 1$ при $r_{\text{max}} \leq 0$ и $\Gamma_{\text{max}} = \infty$ при $r_{\text{max}} > 0$.

Соответственно, представляющий наибольший интерес случай $1 < \Gamma_{\text{max}} < \infty$ возможен только при наличии неортогональности между собственными векторами матрицы A , а оптимальное возмущение, на котором достигается Γ_{max} , представляет собой линейную комбинацию из некоторого числа неортогональных собственных векторов матрицы A . Продемонстрировать случай $1 < \Gamma_{\text{max}} < \infty$ можно на примере следующей матрицы размера 2×2 :

$$\begin{bmatrix} -1 & -100 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

с собственными значениями $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = -2$ и отвечающими им собственными векторами $v_1 = (0, 1)^T$ и $v_2 = (1, -50)^T$ соответственно. Так как все собственные значения матрицы (1.4) имеют отрицательные вещественные части, то $\Gamma_{\text{max}} < \infty$. Рассмотрим задачу Коши для системы (1.1) с матрицей (1.4) и начальным условием $u_0 = 50v_1 + v_2$, $\|u_0\|_2 = 1$. Решение этой задачи Коши имеет вид

$$u(t) = \begin{bmatrix} \exp(-2t) \\ 50(\exp(-t) - \exp(-2t)) \end{bmatrix}.$$

При $t = \tau = \ln(2)$ имеем $u(\tau) = (1/4, 25/2)^T$ и $\|u(\tau)\|_2 > \|u(0)\|_2$, и следовательно $\Gamma_{\text{max}} > 1$. Геометрическую интерпретацию амплификации на конечном временном интервале нормы решения задачи Коши для (1.1) можно найти, например, в [7].

Пусть Λ означает некоторое изолированное подмножество спектра матрицы A , \mathcal{U} — инвариантное подпространство матрицы A отвечающее подмножеству Λ , а $P_{\mathcal{U}}$ — соответствующий спектральный проектор (то есть, проектор на \mathcal{U} , коммутирующий с матрицей A) [41]. Рассмотрим задачу о вычислении максимальной амплификации на подпространстве \mathcal{U} :

$$\Gamma_{\max, \mathcal{U}} = \max_{t \geq 0} \max_{w \in \mathcal{U}, \|w\|_2=1} \|\exp(tA) w\|_2 \quad (1.5)$$

и обозначим через

$$c_{\mathcal{U}}(t) = \|P_{\mathcal{U}} \exp(tA) u_{0, \text{opt}}\|_2 \quad (1.6)$$

норму проекции оптимального возмущения $u_{0, \text{opt}}$, то есть начального возмущения на котором достигается Γ_{\max} (1.2), на подпространство \mathcal{U} .

Представляет интерес размер подпространства \mathcal{U} , при котором $\Gamma_{\max, \mathcal{U}}$ с хорошей точностью совпадает с Γ_{\max} , а также расположение на комплексной плоскости подмножества Λ , отвечающего этому подпространству. Величины $\Gamma_{\max, \mathcal{U}}$ и $c_{\mathcal{U}}$ можно вычислить на основе разложения Шура [42]

$$A = \begin{bmatrix} Q_1, Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 & S_{12} \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^* \\ Q_2^* \end{bmatrix}, \quad (1.7)$$

где S_1 и S_2 — верхние треугольные матрицы, причем $\lambda(S_1) = \Lambda$, а $[Q_1, Q_2]$ — унитарная матрица, разбитая на два блока в соответствии с разбиением на блоки формы Шура. Спектральный проектор на \mathcal{U} представим [41] в виде $P_{\mathcal{U}} = XY$, где $X = Q_1$, $Y = Q_1^* - MQ_2^*$, а M — решение уравнения Сильвестра

$$MS_2 - S_1M = S_{12}. \quad (1.8)$$

Отметим, что уравнение (1.8) однозначно разрешимо, так как спектры матриц S_1 и S_2 не пересекаются по построению. Матрицы X и Y по построению удовлетворяют [41] следующим равенствам

$$YX = I, \quad AX = XS_1, \quad YA = S_1Y,$$

поэтому P_U коммутирует с матрицей A . Также отметим, что

$$\|P_U\|_2 = \sqrt{1 + \|M\|_2^2}.$$

Соответственно, справедливо что

$$\Gamma_{\max, U} = \max_{t \geq 0} \|\exp(tS_1)\|_2, \quad c_U(t) = \|\exp(tS_1) Y_{u_{0, \text{opt}}}\|_2.$$

Вычисление матриц X , Y и S_1 можно реализовать с помощью стандартных процедур вычислительного матричного анализа [42], а именно, процедуры вычисления разложения Шура произвольной квадратной комплексной матрицы, процедуры вычисления на основе заданного разложения Шура нового разложения Шура с заданным порядком собственных значений на главной диагонали формы Шура и процедуры решения уравнения Сильвестра.

1.2 Вычисление максимальной амплификации и оптимальных возмущений

Пусть $W(A) = \{(Ax, x) : x \in \mathbb{C}^n, \|x\|_2 = 1\}$ — хаусдорфово множество матрицы A , а

$$h_{\min} = \min\{\text{Real}\lambda : \lambda \in W(A)\}, \quad h_{\max} = \max\{\text{Real}\lambda : \lambda \in W(A)\}, \quad (1.9)$$

его левая и правая границы. Величины h_{\min} и h_{\max} являются соответственно минимальным и максимальным собственными значениями эрмитовой матрицы $(A + A^*)/2$ [43].

Отметим, что $\Gamma_{\max} \geq 1$, причем $\Gamma_{\max} = 1$ если $h_{\max} < 0$ и $\Gamma_{\max} > 1$ если $h_{\max} > 0$ (см., например, [43] и ее библиографию). Также отметим, что $\Gamma_{\max} < \infty$ если $r_{\max} < 0$ и $\Gamma_{\max} = \infty$ если $r_{\max} > 0$. Далее будем предполагать, что для матрицы A в (1.1) выполнены неравенства $h_{\max} > 0$ и $r_{\max} < 0$. В этом случае величина Γ_{\max} конечна и требует вычисления.

Найти $t = \hat{t}_{\text{opt}}$, дающее Γ_{\max} с заданной относительной точностью δ , можно, вычислив $\Gamma(t)$ на равномерной сетке с узлами $t_j = \tau j$ и достаточно мел-

ким шагом τ . Для этого достаточно вычислить матрицу $E_1 = \exp(\tau A)$, а для остальных узлов сетки использовать рекуррентную формулу $E_j = E_1 E_{j-1}$. В настоящее время известно несколько различных алгоритмов вычисления матричной экспоненты. В обзорной работе [44] обсуждаются достоинства и недостатки известных к тому времени алгоритмов. Более эффективные алгоритмы предложены позднее в работах [45], [46] и лежат в основе процедуры `exrm` пакета MATLAB. Процедуру `exrm` можно применить для вычисления матрицы E_1 . Нормы полученных матриц E_j можно вычислить с помощью соответствующей процедуры пакета LAPACK.

Пусть при некотором j выполнено $\|E_j\|_2 = \Gamma(\tau j) < 1$. Тогда, так как

$$\Gamma(\tau j + t) \leq \Gamma(\tau j)\Gamma(t) < \Gamma_{\max},$$

при выполнении этого условия можно остановить вычисления и взять в качестве \hat{t}_{opt} тот узел τj_{opt} равномерной сетки, в котором норма матричной экспоненты наибольшая. Основываясь на неравенстве $\Gamma(t) \leq \exp(h_{\max} t)$ [41] можно показать [43], что найденное описанным выше способом \hat{t}_{opt} будет удовлетворять неравенству

$$|\Gamma(\hat{t}_{\text{opt}}) - \Gamma(t_{\text{opt}})|/\Gamma(t_{\text{opt}}) \leq \delta, \quad (1.10)$$

если выбрать $\tau = \ln(1 + \delta)/h_{\max}$. Таким образом, описанный алгоритм имеет четкий критерий остановки и позволяет найти Γ_{\max} с заданной относительной точностью δ .

Для матриц A , возникающих в практических приложениях, вычислительные затраты этого алгоритма могут оказаться очень большими, так как при большой величине $t_{\text{opt}} h_{\max}$ будет очень большой величина j , при которой $\Gamma(\tau j)$ достигает максимума. Для уменьшения вычислительных затрат в работе [43] было предложено, во-первых, заменить вычисления с матрицей A на вычисления с ее формой Шура [42] с диагональными элементами, упорядоченными по невозрастанию вещественных частей. Во-вторых, для ускорения вычисления матриц E_j , которые при использовании формы Шура также будут верхними треугольными, и их норм применять аппроксимацию вида

$$E_j \approx \begin{bmatrix} P_j \\ 0 \end{bmatrix} Q_j, \quad (1.11)$$

где P_j — квадратная верхняя треугольная матрица меньшего порядка, чем E_j , а Q_j — унитарная прямоугольная матрица. Учитывая, что норма правой части в (1.11) равна $\|P_j\|_2$, такая аппроксимация позволит вычислять, начиная с $k = j + 1$, матрицы $\tilde{E}_1^{k-j}P_j$ вместо E_j , где \tilde{E}_1 означает главную подматрицу матрицы E_1 того же порядка, что и P_j . В работе [43] показано, что если такую редукцию, где при разложении Шура обеспечивается упорядочение диагональных элементов по невозрастанию вещественных частей, выполнять время от времени в процессе работы исходного алгоритма, то вычислительные затраты существенно уменьшатся (в тысячи раз) при той же точности результата в смысле (1.10).

Аппроксимацию (1.11) можно выполнить с заданной точностью следующим образом. Разбиваем матрицу E_j по строкам на два блока:

$$E_j = \begin{bmatrix} E_j^{(1)} \\ E_j^{(2)} \end{bmatrix}$$

так, чтобы норма нижнего блока не превосходила заданную малую пороговую величину, и, отбросив нижний блок, выполняем разложение верхнего блока в произведение квадратной верхнетреугольной и унитарной прямоугольной матриц.

Когда вычислено приближение $\hat{t}_{\text{opt}} = \tau j_{\text{opt}}$ к оптимальному моменту времени t_{opt} , соответствующее оптимальное возмущение можно вычислить как правый нормированный сингулярный вектор, отвечающий максимальному сингулярному числу матрицы $E_{j_{\text{opt}}}$.

1.3 Верхние оценки максимума нормы матричной экспоненты

Анализ немодовой устойчивости нулевого решения системы (1.1) сводится к вычислению функции $\Gamma(t)$ и величины Γ_{\max} . В разделе 1.2 описан эффективный алгоритм [43], позволяющий вычислить величину Γ_{\max} с заданной точностью и основанный на разложении Шура и малоранговой аппроксимации. Этот алгоритм применим для плотных матриц общего вида средних размеров. Для вычисления величины Γ_{\max} для больших разреженных матриц можно исполь-

зовать алгоритмы, предложенные, например, в работе [47]. Однако даже эти специализированные алгоритмы [43; 47] могут оказаться слишком вычислительно затратными, если требуется только лишь верхняя оценка функции $\Gamma(t)$, либо величины Γ_{\max} . Представляет интерес получение достаточно точных и быстро-вычисляемых верхних оценок функции $\Gamma(t)$ и величины Γ_{\max} .

В настоящее время известно несколько подходов к получению верхних оценок функции $\Gamma(t)$. Одним из них является использование решения уравнения Ляпунова [41]. Существенное улучшение таких оценок было достигнуто в работе [48]. Эти оценки по-прежнему являются лучшими из известных и используются в различных приложениях (см., например, [49]). Похожие оценки были позднее получены в работе [50] для операторов в гильбертовом пространстве. Также отметим, что в работе [51] для квадратных матриц порядка 2 была получена наилучшая оценка величины Γ_{\max} , основанная на решении уравнения Ляпунова. Однако обобщить этот результат на матрицы произвольного порядка до сих пор никому не удалось.

Еще один подход к получению верхних оценок $\Gamma(t)$ предложен в работах [52; 53] и основан на использовании решения дискретного уравнения Ляпунова. Эти работы, так же как и [50], посвящены оператору $\exp(tA)$ в гильбертовом пространстве. Применение этих результатов для оценки величины Γ_{\max} дает сильно завышенные верхние оценки, поэтому далее они рассматриваться не будут.

Третий подход к получению верхних оценок величины Γ_{\max} основан на применении псевдоспектров и матричной теоремы Крейсса [54]. Верхние оценки величины Γ_{\max} , предложенные в [54], несомненно имеют определенное теоретическое значение, однако их вычисление сопоставимо по затратам с расчетом Γ_{\max} , а их качество уступает оценкам, полученным с помощью уравнений Ляпунова. Поэтому далее они также рассматриваться не будут.

1.3.1 Верхние оценки на основе уравнения Ляпунова

Пусть A — квадратная матрица, а Γ_{\max} , r_{\max} , h_{\min} и h_{\max} — это скалярные характеристики этой матрицы, определенные в (1.2), (1.3) и (1.9) соответствен-

но. Нас будет интересовать случай, когда $1 < \Gamma_{\max} < \infty$, что справедливо если выполнены неравенства $h_{\max} > 0$ и $r_{\max} < 0$.

При $r_{\max} < 0$ справедлива (см. например, [41], с. 147) следующая зависящая от времени экспоненциальная оценка

$$\Gamma(t) \leq \sqrt{c \exp(-\kappa t)}, \quad t \geq 0 \quad (1.12)$$

с константами

$$\kappa = (\|X\|_2 \|C^{-1}\|_2)^{-1}, \quad c = \|X\|_2 \|X^{-1}\|_2, \quad (1.13)$$

где $C = C^* > 0$ — произвольная эрмитова положительно-определенная матрица такого же порядка как и матрица A , а $X = X^* > 0$ — решение уравнения Ляпунова

$$A^*X + XA = -C, \quad (1.14)$$

которое однозначно разрешимо для любой матрицы C при $r_{\max} < 0$ [41]. Введем обозначение X_I для решения уравнения Ляпунова

$$A^*X_I + X_I A = -I \quad (1.15)$$

с единичной матрицей I в правой части. Из (1.13) следует, что оценка вида (1.12) справедлива с константами

$$\kappa = \|X_I\|_2^{-1}, \quad c = c_G := \|X_I\|_2 \|X_I^{-1}\|_2. \quad (1.16)$$

В работе [48] была получена оценка вида (1.12) с константами

$$\kappa = \|X_I\|_2^{-1}, \quad c = c_N := \begin{cases} 1, & \text{если } b = -1, \\ \exp(1 - a), & \text{если } b = 0, \\ \left(\frac{1+b}{1+ab}\right)^{1+1/b}, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (1.17)$$

где $a = (2\|X_I\|_2|h_{\min}|)^{-1}$, $b = 2\|X_I\|_2h_{\max}$. А также более грубая, но более простая оценка с константами

$$\kappa = \|X_I\|_2^{-1}, \quad c = \tilde{c}_N := \begin{cases} e, & \text{если } b \leq 0, \\ e(1+b), & \text{если } b \geq 0, \end{cases} \quad (1.18)$$

где e — основание натурального логарифма. Константы $\sqrt{c_G}$, $\sqrt{c_N}$ и $\sqrt{\tilde{c}_N}$, где c_G , c_N и \tilde{c}_N определены соответственно в (1.16), (1.17) и (1.18), очевидно являются верхними оценками величины Γ_{\max} .

Эти оценки можно существенно улучшить, используя предложенный в работе [48] подход, позволяющий получать семейство оценок вида (1.12) с различными константами κ . Рассмотрим уравнение Ляпунова

$$A(r)^*X_I(r) + X_I(r)A(r) = -I \quad (1.19)$$

с матрицей $A(r) = A - rI$. Уравнение (1.19) однозначно разрешимо при $r > r_{\max}$ и при $r = 0$ совпадает с (1.15). Для дальнейшего изложения полезен следующий результат.

Лемма 1. Пусть A — квадратная матрица с $h_{\max} > 0$ и $r_{\max} < 0$. Тогда уравнение

$$-2r\|X_I(r)\|_2 + 1 = 0 \quad (1.20)$$

имеет единственный корень при $r > r_{\max}$.

Доказательство. В работе [48] доказано, что в условиях Леммы 1 функция $\kappa(r) = -2r + \|X_I(r)\|_2^{-1}$ является монотонно убывающей, причем

$$\lim_{r \rightarrow r_{\max}+0} \kappa(r) = -2r_{\max} > 0, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \kappa(r) = -2h_{\max} < 0,$$

откуда непосредственно следует требуемое утверждение. \square

Обозначим через r_* корень уравнения (1.20), о котором говорит Лемма 1, а через X_* — решение уравнения Ляпунова (1.19) при $r = r_*$. Новые верхние оценки величины Γ_{\max} дает следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть A — квадратная матрица с $h_{\max} > 0$ и $r_{\max} < 0$. Тогда

$$\Gamma_{\max} \leq \Gamma_G := \sqrt{\|X_*\|_2\|X_*^{-1}\|_2}, \quad (1.21)$$

$$\Gamma_{\max} \leq \Gamma_N := \sqrt{c_{N*}} \leq \tilde{\Gamma}_N := \sqrt{\tilde{c}_{N*}}, \quad (1.22)$$

где

$$c_{N*} = \begin{cases} 1, & \text{если } b_* = -1, \\ \exp(1 - a_*), & \text{если } b_* = 0, \\ \left(\frac{1 + b_*}{1 + a_* b_*} \right)^{1+1/b_*}, & \text{иначе,} \end{cases}, \quad \tilde{c}_{N*} = \begin{cases} e, & \text{если } b_* \leq 0, \\ e(1 + b_*), & \text{если } b_* \geq 0, \end{cases},$$

где $a_* = (2\|X_*\|_2|h_{\min} - r_*|)^{-1}$, $b_* = 2\|X_*\|_2(h_{\max} - r_*)$.

Доказательство. При $r > r_{\max}$ спектр матрицы $A(r) = A - rI$ лежит строго в левой полуплоскости. Поэтому к матрице $A(r)$ при $r > r_{\max}$ можно применить оценки (1.16), (1.17) и (1.18). Умножая полученные неравенства на $\exp(2rt)$, получим оценки вида (1.12) с константами

$$\kappa = \kappa(r) = -2r + \|X_I(r)\|_2^{-1}, \quad c = c(r),$$

где величина $c(r)$ вычислена по одной из формул (1.16), (1.17) или (1.18), примененной к матрице $A(r)$ вместо матрицы A .

В условиях Теоремы 1 справедлива Лемма 1, поэтому при $r > r_{\max}$ существует единственное r_* : $\kappa(r_*) = 0$. Для завершения доказательства остается заметить, что $h_{\min}(A(r)) = h_{\min} - r$ и $h_{\max}(A(r)) = h_{\max} - r$. \square

Для реализации этих оценок необходимо вычислить величину r_* и найти решение X_* уравнения Ляпунова (1.19) при $r = r_*$. Дополнительно, для оценки Γ_N — необходимо вычислить величины h_{\min} и h_{\max} , а для $\tilde{\Gamma}_N$ — величину h_{\max} . Величины h_{\min} и h_{\max} являются экстремальными собственными значениями эрмитовой матрицы $(A + A^*)/2$ и поэтому могут быть эффективно вычислены с помощью стандартных методов [55]. Наиболее затратной частью этих вычислений является вычисление r_* . Для этого можно применить итерационный метод решения нелинейного уравнения (1.20), где на каждой итерации потребуется решать уравнение Ляпунова (1.19) при соответствующем r . Отметим, что вычислительные затраты на решение уравнений Ляпунова можно существенно снизить, предварительно сделав разложение Шура [42] матрицы A и заменив вычисления с матрицей A на вычисления с ее формой Шура.

Верхние оценки величины Γ_{\max} , основанные на решении уравнения Ляпунова, можно улучшить не только за счет сдвига матрицы A , но и за счет сдвига решения уравнения Ляпунова.

Лемма 2. Пусть A — квадратная матрица с $h_{\max} > 0$ и $r_{\max} < 0$. Тогда при любом s из интервала $0 \leq s < (2h_{\max})^{-1}$, оценка вида (1.12) справедлива с константами

$$\kappa = \kappa_Z(s) = \frac{1 - 2sh_{\max}}{\|X_I\|_2 + s}, \quad c = c_Z(s) = \frac{\|X_I\|_2 + s}{\|X_I^{-1}\|_2^{-1} + s}. \quad (1.23)$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение Ляпунова (1.14) с матрицей $C = C(s) = I - s(A + A^*)$ в правой части. Его решением будет $X = X(s) = X_I + sI$. При $0 \leq s < (2h_{\max})^{-1}$ матрица $C(s)$ является положительно определенной и, следовательно, решение уравнения Ляпунова будет положительно определенным. Таким образом, при любом значении s из этого интервала справедлива оценка (1.12) с константами

$$\kappa = (\|X(s)\|_2 \|C(s)^{-1}\|_2)^{-1}, \quad c = \|X(s)\|_2 \|X(s)^{-1}\|_2.$$

Осталось учесть, что так как $X(s)$ и $C(s)$ эрмитовы положительно определенные, справедливы следующие равенства:

$$\|X(s)\|_2 = \|X_I\|_2 + s, \quad \|X(s)^{-1}\|_2^{-1} = \|X_I^{-1}\|_2^{-1} + s, \quad \|C(s)^{-1}\|_2^{-1} = 1 - 2sh_{\max}.$$

□

Теорема 2. Пусть A — квадратная матрица с $h_{\max} > 0$ и $r_{\max} < 0$. Тогда

$$\Gamma_{\max} \leq \Gamma_Z := \sqrt{\frac{1 + 2h_{\max}\|X_I\|_2}{1 + 2h_{\max}\|X_I^{-1}\|_2^{-1}}} < \tilde{\Gamma}_Z := \sqrt{1 + 2h_{\max}\|X_I\|_2}. \quad (1.24)$$

Доказательство. Применяя Лемму 2 при $s \rightarrow (2h_{\max})^{-1}$ получаем оценку Γ_Z . Так как $h_{\max} > 0$, то $\Gamma_Z < \tilde{\Gamma}_Z$. □

Для реализации оценок (1.24) необходимо вычислить величину h_{\max} и однократно решить уравнение Ляпунова (1.15), что существенно менее затратно, чем вычисление оценок (1.21), (1.22). Кроме того, оценки Γ_Z и $\tilde{\Gamma}_Z$ имеют явный вид, что позволяет использовать их для теоретических исследований.

Отметим, что оценка Γ_N включает в себя только левую и правую границу хаусдорфова множества $W(A)$ и норму решения уравнения Ляпунова, в то время как оценки $\tilde{\Gamma}_N$ и $\tilde{\Gamma}_Z$ включают правую границу $W(A)$ и норму решения уравнения Ляпунова. Поэтому оценки Γ_N , $\tilde{\Gamma}_N$ и $\tilde{\Gamma}_Z$ можно использовать и в случае когда A — это большая разреженная матрица.

В заключении раздела, отметим возможность получения новых верхних оценок путем одновременного сдвига как матрицы A , так и решения уравнения Ляпунова.

Лемма 3. Пусть A — квадратная матрица с $h_{\max} > 0$ и $r_{\max} < 0$. Тогда для любых r из интервала $r_{\max} < r < h_{\max}$ и любых s из интервала $0 \leq s < (2(h_{\max} - r))^{-1}$, а также для любых r из интервала $h_{\max} \leq r < +\infty$ и любых $s \geq 0$, справедлива оценка вида (1.12) с константами

$$\kappa = \frac{1 - 2sh_{\max} - 2r\|X_I(r)\|_2}{\|X_I(r)\|_2 + s}, \quad c = \frac{\|X_I(r)\|_2 + s}{\|X_I(r)^{-1}\|_2^{-1} + s}. \quad (1.25)$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение Ляпунова

$$A(r)^*(X_I(r) + sI) + (X_I(r) + sI)A(r) = -C(r,s) \quad (1.26)$$

с матрицей $C(r,s) = I - s(A(r) + A(r)^*)$ в правой части. В условиях Леммы 3, эта матрица является положительно определенной, а спектр матрицы $A(r)$ лежит строго в левой полуплоскости. Следовательно, справедлива оценка вида (1.12) с константами

$$\kappa = (\|X_I(r) + sI\|_2 \|C(r,s)^{-1}\|_2)^{-1}, \quad c = \|X_I(r) + sI\|_2 \|(X_I(r) + sI)^{-1}\|_2.$$

Осталось учесть, что

$$\|X_I(r) + sI\|_2 = \|X_I(r)\|_2 + s, \quad \|(X_I(r) + sI)^{-1}\|_2^{-1} = \|X_I(r)^{-1}\|_2^{-1} + s,$$

$$\|C(r,s)^{-1}\|_2^{-1} = 1 - 2s(h_{\max} - r).$$

□

Теорема 3. Пусть A — квадратная матрица с $h_{\max} > 0$ и $r_{\max} < 0$. Тогда

$$\Gamma_{\max} \leq \Gamma_{GZ} = \min_{r_{\max} < r \leq r_*} \sqrt{\frac{\|X_I(r)\|_2 + s(r)}{\|X_I(r)^{-1}\|_2^{-1} + s(r)}}, \quad (1.27)$$

где $s(r) = s_1(r)$ при $r_{\max} < r \leq 0$ и $s(r) = s_2(r)$ при $0 < r \leq r_*$, где

$$s_1(r) = \frac{1}{2(h_{\max} - r)}, \quad s_2(r) = \frac{1 - 2r\|X_I(r)\|_2}{2h_{\max}}.$$

Доказательство. Если $r_{\max} < r \leq 0$ и $0 \leq s < s_1(r)$, то в соответствии с Леммой 3, оценка вида (1.12) справедлива с константами κ и c , определяемыми в (1.25). В этом случае $\kappa \geq 0$ и, следовательно, оценка (1.12) справедлива и при $\kappa = 0$. При $s \rightarrow s_1(r)$ получаем оценку вида (1.12) с $\kappa = 0$ и c , определяемой в (1.25), при $r_{\max} < r \leq 0$ и $s = s_1(r)$.

Пусть теперь $0 < r \leq r_*$ и $s = s_2(r)$ (это условие обеспечивает $\kappa = 0$ в (1.25)). Если $0 < r < h_{\max}$, то $0 \leq s < s_1(r)$. Если $h_{\max} \leq r \leq r_*$, то $s \geq 0$. Значит, в обоих случаях в соответствии с Леммой 3, оценка вида (1.12) справедлива с $\kappa = 0$ и c , определяемой в (1.25), при $r_{\max} < r \leq 0$ и $s = s_2(r)$. \square

1.3.2 Сравнение верхних оценок

В предыдущем подразделе установлено, что величину Γ_{\max} мажорируют константы Γ_G , Γ_N и $\tilde{\Gamma}_N$ (см. Теорему 1), константы Γ_Z и $\tilde{\Gamma}_Z$ (см. Теорему 2), а также константа Γ_{GZ} (см. Теорему 3). В данном подразделе на примере квадратных матриц порядка 2 показывается как точность этих оценок зависит от расположения хаусдорфова множества матрицы A и собственных значений в нем и, кроме того, рассматривается ряд матриц существенно большего порядка из известной коллекции NEP (см. <http://math.nist.gov/MatrixMarket/data/NEP/>). Как показали расчеты для всех рассматриваемых тестовых матриц, минимум в (1.27) достигается при $r = 0$. В этом случае оценка Γ_{GZ} совпадает с оценкой Γ_Z . Поэтому оценка Γ_{GZ} в данном подразделе не рассматривается.

Известно [41], что любую вещественную матрицу размера 2×2 можно привести ортогональным преобразованием подобия к виду

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha & \gamma + \beta \\ \gamma - \beta & -\alpha \end{bmatrix}, \quad (1.28)$$

где α , β и γ — вещественные. Рассмотрим два двухпараметрических семейства таких матриц — матрицы вида (1.28), где

$$\gamma = \alpha + \delta, \beta = \sqrt{\gamma^2 - (\gamma - 1 - \delta)^2}, \quad \alpha \gg 1, \delta \geq 1, \quad (1.29)$$

и матрицы вида (1.28), где

$$\gamma = 1 + \delta, \beta = \sqrt{\gamma^2 + \mu^2}, \quad \alpha = 1, \delta \geq 1. \quad (1.30)$$

Спектр матрицы вида (1.28) при (1.29) — вещественный, причем хаусдорфово множество $W(A)$ вытянуто вдоль вещественной оси:

$$h_{\min} = -2\alpha - \delta, h_{\max} = \delta, \lambda_1 = -2\alpha + 1, \lambda_2 = -1.$$

Спектр матрицы вида (1.28) при (1.30) состоит из комплексно-сопряженной пары собственных значений, причем хаусдорфово множество $W(A)$ вытянуто вдоль мнимой оси:

$$h_{\min} = -2 - \delta, h_{\max} = \delta, \lambda_1 = -1 - i\mu, \lambda_2 = -1 + i\mu.$$

Чем больше величина δ , тем глубже внутри хаусдорфова множества расположены собственные значения и тем взаимно неортогональнее собственные векторы.

Наконец, хаусдорфово множество матрицы вида (1.28) при (1.30) и $\mu = 0$ представляет собой круг радиуса $1 + \delta$, а ее единственное кратное собственное значение равно -1 и является центром этого круга.

Отметим, что хаусдорфово множество $W(A)$, вытянутое вдоль вещественной оси, характерно для конечномерных пространственных аппроксимаций вида (1.1) параболических уравнений, а хаусдорфово множество, вытянутое вдоль мнимой оси, характерно для конечномерных пространственных аппроксимаций вида (1.1) гиперболических уравнений. Таким образом, рассматриваемые матри-

цы можно интерпретировать, как простейшие модели конечномерных аналогов соответствующих операторов.

Наименьшая возможная константа в оценке вида (1.12), (1.13) есть

$$c = c_{\min} = \min\{\|X\|_2\|X^{-1}\|_2 : A^*X + XA \leq 0\}.$$

В работе [51] было доказано, что для матрицы вида (1.28)

$$c_{\min} = \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 + |\beta||\gamma| - \alpha\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}}{|\beta|\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2} + \alpha|\gamma|} \right)^2. \quad (1.31)$$

Обобщения этого результата для матриц произвольного порядка неизвестны.

Округленные до 4 значащих десятичных цифр величины Γ_G , Γ_N , $\tilde{\Gamma}_N$, Γ_Z , $\tilde{\Gamma}_Z$ и $\sqrt{c_{\min}}$, мажорирующие Γ_{\max} , и сама величина Γ_{\max} , вычисленная с помощью алгоритма [43], приведены для случаев, когда хаусдорфово множество матрицы A вытянуто вдоль вещественной оси (Таблица 1.1), когда хаусдорфово множество матрицы A вытянуто вдоль мнимой оси (Таблица 1.2) и случая кратного собственного значения (Таблица 1.3). Мажорирующие величину Γ_{\max} константы $\sqrt{c_G}$, где c_G определена в (1.16), и $\sqrt{c_N}$, где c_N определена в (1.17), по построению заведомо больше соответственно Γ_G и Γ_N , поэтому их значения не приведены. Например, при $\alpha = 10^2$ и $\delta = 1$, $r_* = 41$ значения были следующие: $\sqrt{c_G} = 14.39$, $\Gamma_G = 2.423$, $\sqrt{c_N} = 2.003$, $\Gamma_N = 1.045$, а при том же значении α и $\delta = 10^3$, $r_* = 8.3 \cdot 10^{-3}$ и значения были следующие: $\sqrt{c_G} = 156.0$, $\Gamma_G = 155.3$, $\sqrt{c_N} = 257.6$, $\Gamma_N = 256.5$.

Результаты, приведенные в Таблице 1.1 – 1.3, позволяют сделать ниже следующие выводы. Величина Γ_G достаточно точно мажорирует Γ_{\max} , когда хаусдорфово множество матрицы вытянуто вдоль мнимой оси, и неудовлетворительно, когда хаусдорфово множество вытянут вдоль вещественной оси. Противоположная картина наблюдается для Γ_N . При этом, в случае хаусдорфова множества вытянутого вдоль вещественной оси величина Γ_N может оказаться даже меньше, чем оптимальная константа $\sqrt{c_{\min}}$ (см., например, Таблицу 1.1, $\alpha = 10^2$, $\delta = 1$). Здесь нет противоречия, так как из определения величины Γ_N не следует, что можно предъявить уравнение Ляпунова (1.14), решением которого будет матрица с числом обусловленности, равным Γ_N^2 .

Во всех рассмотренных случаях, величина Γ_Z оказывается меньше, чем величина Γ_G , и как правило немного больше, чем величина Γ_N в случае хаусдорфова множества вытянутого вдоль вещественной оси. В остальных случаях Γ_Z меньше, чем Γ_N . Иногда Γ_Z оказывается меньше Γ_N даже в случае хаусдорфова множества вытянутого вдоль вещественной оси (см., например, Таблицу 1.1, $\alpha = 10^2$, $\delta = 10^3$). Величина $\tilde{\Gamma}_Z$ близка к Γ_Z только для матриц с хаусдорфовым множеством вытянутым вдоль вещественной оси.

В случае матриц со спектром, вытянутым вдоль вещественной оси, даже лучшая из верхних оценок Γ_{\max} может завышать эту величину больше, чем на порядок.

Таблица 1.1 — Оценки для матриц вида (1.28) при (1.29).

α	δ	Γ_G	Γ_N	$\tilde{\Gamma}_N$	Γ_Z	$\tilde{\Gamma}_Z$	$\sqrt{c_{\min}}$	Γ_{\max}
10^2	1	2.423	1.045	1.649	1.425	1.428	1.060	1.005
	10	6.647	2.001	2.423	3.560	3.648	1.384	1.086
	10^2	24.60	15.19	28.65	16.42	20.11	3.276	1.960
	10^3	155.3	256.5	572.6	142.4	348.7	19.24	10.76
10^4	1	2.414	1.001	1.649	1.414	1.414	1.006	1.000
	10	6.481	1.041	1.649	3.319	3.320	1.033	1.000
	10^2	20.10	2.000	2.340	10.13	10.15	1.136	1.010
	10^3	34.10	14.34	23.90	33.96	34.80	1.537	1.100

Таблица 1.2 — Оценки для матриц вида (1.28) при (1.30) и $\mu \neq 0$.

μ	δ	Γ_G	Γ_N	$\tilde{\Gamma}_N$	Γ_Z	$\tilde{\Gamma}_Z$	$\sqrt{c_{\min}}$	Γ_{\max}
10^2	1	1.018	1.012	1.649	1.010	1.421	1.010	1.007
	10	1.116	1.370	1.823	1.105	3.497	1.105	1.099
	10^2	2.431	11.27	25.83	2.414	18.62	2.407	2.394
	10^3	20.07	317.1	738.9	20.05	449.3	19.87	19.76
10^4	1	1.000	1.000	1.649	1.000	1.414	1.000	1.000
	10	1.001	1.004	1.649	1.001	3.318	1.001	1.000
	10^2	1.010	1.292	1.665	1.010	10.10	1.010	1.009
	10^3	1.105	7.613	17.34	1.105	33.34	1.105	1.105

Сравним теперь Γ_{\max} с ее верхними оценками Γ_N , $\tilde{\Gamma}_N$, Γ_Z и $\tilde{\Gamma}_Z$ на матрицах средних размеров из коллекции NEP с $h_{\max} > 0$ и $r_{\max} < 0$, а именно, на матрицах TOLS, возникающих в задачах аэроупругости, матрицах TUB, возникающих при моделировании реакторов, и матрицах CDDE, полученных в результате конечно-разностной аппроксимации нестационарного двумерного

Таблица 1.3 — Оценки для матриц вида (1.28) при (1.30) и $\mu = 0$.

δ	Γ_G	Γ_N	$\tilde{\Gamma}_N$	Γ_Z	$\tilde{\Gamma}_Z$	$\sqrt{c_{\min}}$	Γ_{\max}
1	3.732	2.621	4.191	2.618	3.236	2.000	1.570
10	21.95	36.28	80.86	20.13	49.36	11.00	8.110
10^2	202.0	1015	2355	200.0	1428	101.0	74.31
10^3	2002	$3.167 \cdot 10^4$	$7.381 \cdot 10^4$	2000	$4.477 \cdot 10^4$	1001	736.5

уравнения конвекции-диффузии в единичном квадрате с граничными условиями Дирихле при различных значениях параметров. Также мы рассмотрим матрицу STCouette (не из коллекции), возникающую при анализе немодовой устойчивости стратифицированного турбулентного течения Куэтта (см. последующие главы диссертации). Результаты представлены в Таблице 1.4.

Таблица 1.4 — Оценки для матриц из коллекции NER.

	n	Γ_{\max}	Γ_N	Γ_Z	$\tilde{\Gamma}_N$	$\tilde{\Gamma}_Z$
STCouette	300	5.508	62.31	63.49	103.4	63.96
TOLS90	90	123.4	4985	580.5	$1.162 \cdot 10^4$	7046
TOLS340	340	304.2	$6.284 \cdot 10^4$	4538	$1.464 \cdot 10^5$	$8.882 \cdot 10^4$
TOLS1090	1090	908.1	$1.885 \cdot 10^5$	7926	$4.395 \cdot 10^5$	$2.666 \cdot 10^5$
TUB100	100	7.514	32.80	33.01	54.06	33.10
TUB1000	1000	7.397	239.3	241.6	395.1	241.9
CDDE2	961	1.014	1.049	1.072	1.649	1.073
CDDE4	961	1.252	1.483	1.532	1.649	1.538
CDDE6	961	4.118	6.147	6.173	9.757	6.262

Наибольший интерес представляют тесты на матрицах TOLS, так как для них прямое вычисление величины Γ_{\max} является крайне вычислительно затратным [43], в отличие от вычисления оценок.

В большинстве случаев оценка Γ_Z дает результаты незначительно хуже, а для матриц TOLS — значительно лучше, чем оценка Γ_N . Как и в тестах с матрицами порядка 2, оценки могут завышать реальное значение Γ_{\max} на 1-2 порядка.

1.3.3 Об использовании предложенных оценок

Численные эксперименты показали, что Γ_Z всегда меньше чем Γ_G , в то время как Γ_N меньше чем Γ_Z для матриц, чье хаусдорфово множество вытянуто вдоль вещественной оси, и больше чем Γ_Z для матриц, чье хаусдорфово множество вытянуто вдоль мнимой оси.

Можно дать следующие рекомендации по использованию предложенных оценок. Для матрицы A не слишком большого размера, вычисления с исходной матрицей следует заменить на вычисления с ее формой Шура. Если требуется хорошая верхняя оценка величины Γ_{\max} при низких вычислительных затратах, то следует использовать оценку Γ_Z . Если требуется наиболее точная оценка, то следует дополнить вычислить оценку Γ_N и взять минимум из величин Γ_N и Γ_Z в качестве верхней оценки. Для больших разреженных матриц следует использовать оценки Γ_N , $\tilde{\Gamma}_N$ и $\tilde{\Gamma}_Z$, включающие в себя только левую и правую границы хаусдорфова множества и норму решения уравнения Ляпунова.

1.3.4 Применение предложенных оценок в задачах гидродинамической устойчивости

В декартовых координатах x (продольная), y (вертикальная) и z (поперечная) рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале $-1 < y < 1$ единичной полувысоты. На фоне основного течения будем рассматривать трехмерные зависящие от времени малые возмущения, представимые в виде

$$(u', v', w', p') = \text{Real}\{(u, v, w, p)e^{i\alpha x + i\gamma z}\},$$

где u , v , w и p — это комплекснозначные амплитуды продольной, вертикальной и поперечной компонент скорости и давления, соответственно. Амплитуды зависят только от y и t . Здесь t — время, α — продольное волновое число, а γ — поперечное волновое число. Будем предполагать, что амплитуды компонент

скорости возмущений удовлетворяют условию прилипания на стенках канала

$$u = v = w = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm 1. \quad (1.32)$$

Рассмотрим две известные задачи. Первая задача — это исследование временной устойчивости плоского течения Пуазейля. В этом случае предполагается, что линейные обезразмеренные уравнения, описывающие эволюцию амплитуд возмущений имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + i\alpha U u + \frac{dU}{dy} v + i\alpha p - \frac{1}{Re} \Delta_{\alpha\gamma} u &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + i\alpha U v + \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{Re} \Delta_{\alpha\gamma} v &= 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + i\alpha U w + i\gamma p - \frac{1}{Re} \Delta_{\alpha\gamma} w &= 0, \\ i\alpha u + \frac{\partial v}{\partial y} + i\gamma w &= 0, \end{aligned} \quad (1.33)$$

где Re — число Рейнольдса, $\Delta_{\alpha\gamma} = -\alpha^2 + \partial^2/\partial y^2 - \gamma^2$, а продольная компонента основного течения $U = U_p(y) := 1 - y^2$ зависит только от y и задана аналитически. Физическую интерпретацию уравнений (1.33), а также определение числа Рейнольдса можно найти, например, в монографиях [2; 3].

Вторая задача — это исследование временной устойчивости плоскопараллельного течения Куэтта. В этом случае предполагается, что эволюция амплитуд возмущений также описывается уравнениями (1.33), где профиль $U = U_c(y) := y/2$ зависит только от y и известен аналитически. Физическую интерпретацию уравнений (1.33), а также определение числа Рейнольдса можно найти, например, в монографии [2].

При анализе устойчивости амплитуды компонент скорости удовлетворяет граничным условиям (1.32) для обеих задач, а в качестве физически-значимой меры величины возмущений можно выбрать плотность кинетической энергии возмущений:

$$\mathcal{E} = \int_{-1}^1 (|u|^2 + |v|^2 + |w|^2) dy. \quad (1.34)$$

После пространственной аппроксимации по y уравнений (1.33) с граничными условиями (1.32) и проектирования на подпространство бездивергентных

сеточных функций [48], получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида (1.1) с матрицей

$$A = A(Re, \alpha, \gamma) \quad (1.35)$$

непрерывно зависящей от трех вещественных скалярных параметров α , γ и Re . Обычно при фиксированном числе Рейнольдса представляет интерес решение следующих оптимизационных задач:

$$\Gamma_{\max}(Re) = \max_{\alpha, \gamma} \Gamma_{\max}^{\alpha\gamma}, \quad \Gamma_{\max}^{\alpha\gamma} = \max_{t \geq 0} \|\exp(tA(Re, \alpha, \gamma))\|_2.$$

Для течения Пуазейля величина $\Gamma_{\max}(Re)$ достигается при $\alpha = \alpha_{\text{opt}} = 0$ и некотором ненулевом значении $\gamma = \gamma_{\text{opt}}(Re)$ [2]. Известно [2], что спектр матрицы A (1.35) лежит строго в левой полуплоскости при $Re < 5773$. Известно [2], что $\Gamma_{\max}(Re) \sim Re$.

Для течения Пуазейля сравнение величины Γ_{\max} с мажорирующими ее константами Γ_N и Γ_Z при различных значениях числа Рейнольдса дано на Рисунок 1.1. Величины Γ_N и Γ_Z почти не отличаются друг от друга и превышают значение Γ_{\max} на 1 – 2 порядка, причем разница растет с увеличением числа Рейнольдса (Рис 1.1, слева).

Интересно, что максимальные значения величин Γ_N , Γ_Z и Γ_{\max} достигаются на близких значениях поперечного волнового числа γ (Рисунок 1.1, справа). Учитывая, что вычисление Γ_N (и особенно Γ_Z) гораздо менее затратно, чем вычисление Γ_{\max} — эти величины можно использовать для получения начального приближения к оптимальному волновому числу γ_{opt} .

Для течения Куэтта величина $\Gamma_{\max}(Re)$ достигается при $\alpha = \alpha_{\text{opt}} = 0$ и некотором ненулевом значении $\gamma = \gamma_{\text{opt}}(Re)$ [2], причем $\Gamma_{\max}(Re) \sim Re$ [2]. Известно, что спектр матрицы A (1.35) лежит строго в левой полуплоскости при всех Re [56].

Для течения Куэтта сравнение величины Γ_{\max} с мажорирующими ее константами Γ_N и Γ_Z при различных значениях числа Рейнольдса дано на Рисунке 1.2. Величины Γ_N и Γ_Z почти не отличаются друг от друга и превышают значение Γ_{\max} на 2 порядка, причем разница растет с увеличением числа Рейнольдса (Рис 1.2, слева). Также отметим, что максимальные значения величин Γ_N , Γ_Z

и Γ_{\max} достигаются на близких значениях поперечного волнового числа γ (Рисунок 1.2, справа).

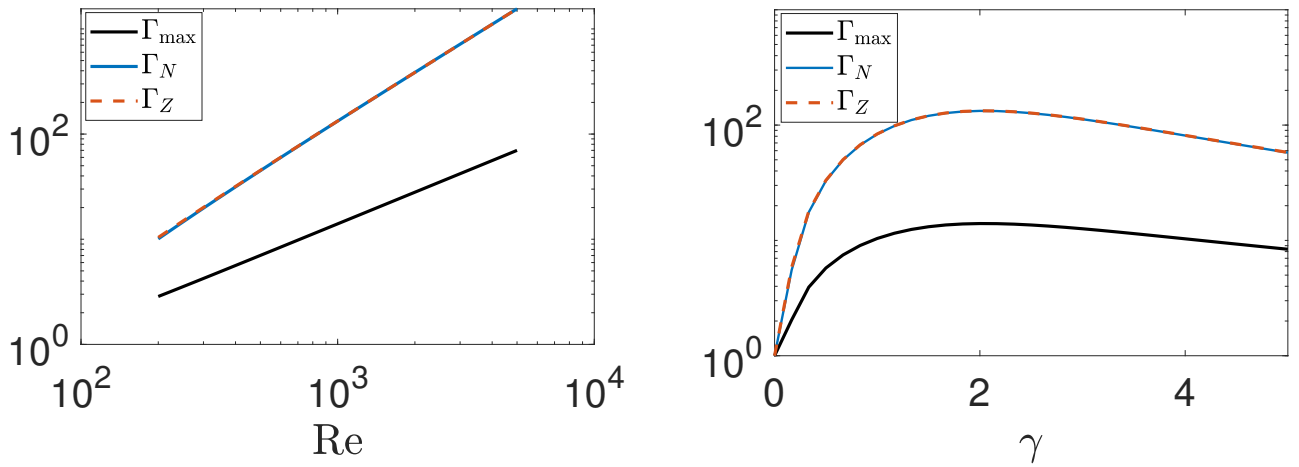


Рисунок 1.1 — Сравнение оценок для задачи временной устойчивости течения Пуазейля в плоском канале. Оценки Γ_N , Γ_Z и величина Γ_{\max} в зависимости от числа Рейнольдса (слева) и в зависимости от волнового числа γ при $\alpha = 0$, $Re = 1000$ (справа).

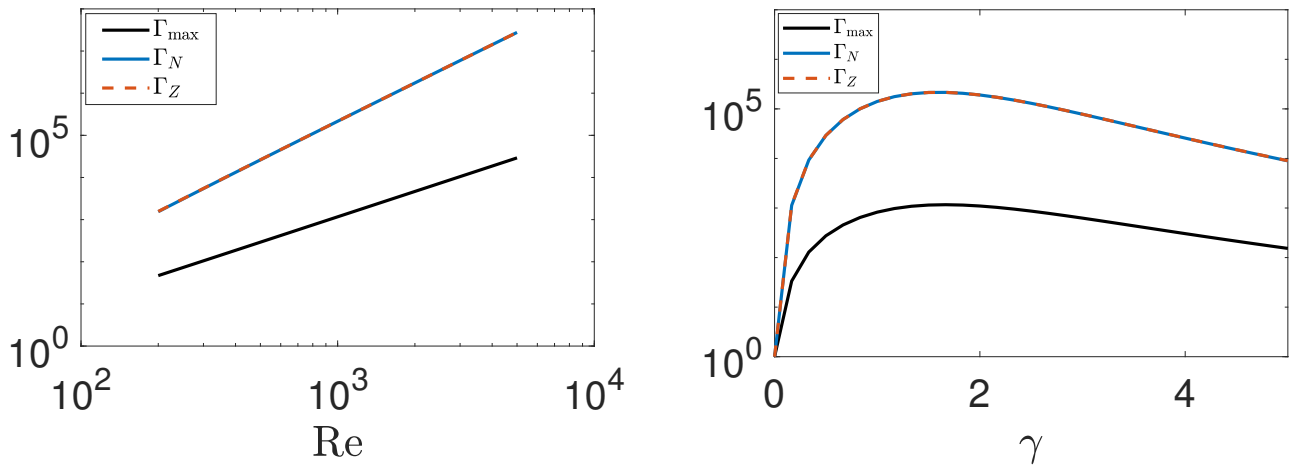


Рисунок 1.2 — Сравнение оценок для задачи временной устойчивости течения Куэтта в плоском канале. Оценки Γ_N , Γ_Z и величина Γ_{\max} в зависимости от числа Рейнольдса (слева) и в зависимости от волнового числа γ при $\alpha = 0$, $Re = 1000$ (справа).

1.4 Оптимальный стохастический форсинг для линейных динамических систем

Одним из подходов к анализу чувствительности к внешнему воздействию динамической системы, находящейся в стационарном состоянии, является анализ ее отклика на стохастический форсинг в этом состоянии. С помощью стохастического форсинга моделируют различные внешние воздействия, не учтенные в рамках исходной системы. Если интерес представляют малые воздействия, то достаточно рассматривать систему, линеаризованную относительно исследуемого стационарного состояния. В частности, этот подход применяют для исследования ламинарных [57–59], и турбулентных [60;61] гидродинамических течений. Например, анализ, выполненный в [60;61], позволил выделить характерные пространственные масштабы и конфигурацию крупномасштабных организованных структур, проявляющихся (см. [62] и ее библиографию) в турбулентных течениях на фоне мелкомасштабной турбулентности. В частности, для турбулентных течений стохастический форсинг может описывать нескоррелированную часть турбулентных напряжений Рейнольдса.

Во всех упомянутых выше работах стохастический форсинг представлял собой дельта-коррелированный по времени гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и единичной матрицей спектральной плотности. Однако упрощающее предположение о единичной спектральной плотности может оказаться не адекватным, например, когда стохастический форсинг моделирует генерацию мелкомасштабной турбулентности, интенсивность которой может быть анизотропной и зависеть от пространственных координат. Данный раздел посвящен выбору оптимального стохастического форсинга, представляющего собой дельта-коррелированный по времени гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и вообще говоря не единичной спектральной плотностью. Задача оптимизации ставится по аналогии с задачей линейного управления [63] и решается в p -нормах Шэттена при $p = 1, 2$ и ∞ .

Под линейной динамической системой понимается неоднородная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{dt} = Au + Vf. \quad (1.36)$$

Здесь t — время, u — вектор-функция (отклонения от исследуемого стационарного решения), A — некоторая квадратная комплексная матрица порядка n не зависящая от времени, f — m -компонентный вектор столбец ($m \leq n$), вообще говоря зависящий от времени, который мы будем называть форсингом, а V — матрица размера $n \times m$. Вектор Vf лежит в линейной оболочке столбцов матрицы V . Это позволяет, в частности, выбирая соответствующим образом матрицу V , рассматривать случаи, когда внешнему воздействию подвергается лишь часть переменных системы. Если представляет интерес внешнее воздействие общего вида, то матрицу V можно выбрать единичной.

Представляющим интерес откликом системы (1.36) на форсинг является следующая линейная функция решения:

$$g = W^*u, \quad (1.37)$$

где W — матрица размера $n \times r$ ($n \geq r$). Если необходимо максимизировать влияние форсинга на все решение u , то матрицу W можно выбрать единичной. В противном случае, когда, например, необходимо максимизировать влияние форсинга на компоненты решения с заданными номерами, в качестве W можно выбрать прямоугольную матрицу составленную из столбцов единичной матрицы порядка n с этими номерами.

1.4.1 Отклик на стохастический форсинг

Пусть форсинг $f(t)$ в (1.36), где $-\infty < t < +\infty$, является дельта-коррелированным гауссовским случайным процессом с нулевым математическим ожиданием и спектральной плотностью C , то есть

$$\langle f(t) \rangle = 0, \quad \langle f(t)f(t')^* \rangle = C\delta(t - t'), \quad C = C^* \geq 0, \quad (1.38)$$

где $\delta(\tau)$ — это дельта-функция Дирака, а $\langle \cdot \rangle$ — осреднение по ансамблю. Тогда отклик g , определенный в (1.37), будет гауссовским случайным процессом с нулевым математическим ожиданием и не зависящей от времени ковариационной матрицей (см. [64])

$$\langle g(t)g(t)^* \rangle = \mathcal{M}(C) = W^*XW, \quad (1.39)$$

где $X = X(C)$ является решением уравнения Ляпунова

$$AX + XA^* = -VCV^*. \quad (1.40)$$

Уравнение (1.40) однозначно разрешимо при любой матрице C , если для матрицы A выполнено неравенство $r_{\max} < 0$ [41]. Решение уравнения Ляпунова может быть найдено с помощью стандартных численных алгоритмов [65; 66].

Ортонормированный базис собственных векторов ковариационной матрицы отклика $\tilde{X} = \mathcal{M}(C)$ называют базисом эмпирических ортогональных функций (ЭОФ). Первая ЭОФ, то есть собственный вектор матрицы \tilde{X} , отвечающий ее максимальному собственному значению $\lambda_{\max}(\tilde{X})$, является основной пространственной конфигурацией, наблюдаемой во временном ряде отклика системы (1.36) со стохастическим форсингом. Доля полной дисперсии, приходящейся на первую ЭОФ, равна $s(C) = \lambda_{\max}(\tilde{X})/\text{tr}(\tilde{X})$, где $\text{tr}(\tilde{X})$ означает след матрицы \tilde{X} .

Отметим один важный частный случай. Пусть $f(t) = c\varphi(t)$, где c — постоянный детерминированный вектор, а $\varphi(t)$ — скалярный гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и единичной спектральной плотностью. Тогда, по аналогии с формулой (1.39), для следа ковариационной матрицы отклика справедлива следующая формула:

$$\text{tr}\langle g(t)g(t)^* \rangle = \langle \|g(t)\|_2^2 \rangle = c^*\tilde{Y}c,$$

где $\tilde{Y} = V^*YV$, а Y является решением уравнения Ляпунова

$$A^*Y + YA = -WW^*, \quad (1.41)$$

с оператором, сопряженным оператору уравнения (1.40) в смысле скалярного произведения Гильберта-Шварца (см. [67], стр. 92).

Если выбрать в качестве вектора с собственный вектор матрицы \tilde{Y} , отвечающий ее максимальному собственному значению, то соответствующий форсинг будет максимизировать средний квадрат второй нормы решения на множестве форсингов вида $f(t) = c\varphi(t)$, с вектором c , имеющим ту же вторую норму, что и этот собственный вектор.

1.4.2 Оптимальная спектральная плотность стохастического форсинга

Для матрицы B порядка n величину

$$|||B|||_p = \left(\sum_{j=1}^n \sigma_j(B)^p \right)^{1/p}$$

называют p -нормой Шэттена [67], где $\sigma_1(B) \geq \dots \geq \sigma_n(B)$ означает алгебраически полный набор сингулярных чисел матрицы B . Отметим, что $|||B|||_2 = \|B\|_F$ — норма Фробениуса, а $|||B|||_\infty = \|B\|_2$ — спектральная матричная норма. Если матрица B эрмитова неотрицательно определенная, то $|||B|||_1 = \text{tr}(B)$ — след матрицы B . Кроме того, без дополнительных пояснений будет использоваться следующее несложно проверяемое утверждение: пусть B' — произвольная, а B'' неотрицательно определенная эрмитовы матрицы одинакового порядка, и $-B'' \leq B' \leq B''$. Тогда $|||B'\|||_p \leq |||B''\|||_p$ для $p = 1, 2$ и ∞ .

Рассмотрим задачу построения форсинга, дающего максимальный относительный отклик в p -норме Шэттена при $p = 1, 2$ и ∞ . Эта задача сводится к нахождению спектральной плотности C , являющейся решением оптимизационной задачи

$$C \neq 0 : \frac{|||\mathcal{M}(C)\|||_p}{|||C\|||_p} \rightarrow \max, C = C^* \geq 0, \quad (1.42)$$

где \mathcal{M} означает отображение определенное в (1.39).

Теорема 4. Пусть A — квадратная матрица порядка n с $r_{\max} < 0$ и заданы матрицы V (размера $n \times m$, $n \geq m$) и W (размера $n \times r$, $n \geq r$). Тогда решением задачи (1.42) в случае $p = 1$ является матрица $C = cc^*$, где c — собственный вектор эрмитовой матрицы $\tilde{Y} = V^*YV$ отвечающий ее макси-

маленькому собственному значению, где Y — решение уравнения (1.41); в случае $p = 2$ — правый сингулярный вектор отображения \mathcal{M} (1.39), отвечающий его максимальному сингулярному числу; а в случае $p = \infty$ — единичная матрица порядка m .

Доказательство. Отметим [41], что если $r_{\max} < 0$, то отображение (1.39) обладает свойством $\mathcal{M}(C') \leq \mathcal{M}(C'')$ для любых эрмитовых матриц $C' \leq C''$ порядка m .

Начнем со случая $p = \infty$. Пусть C — произвольная ненулевая эрмитова неотрицательно определенная матрица. Тогда, во-первых,

$$\|C\|_{\infty} = \lambda_{\max}(C)\|I\|_{\infty},$$

где $\lambda_{\max}(C)$ означает максимальное собственное значение матрицы C . Во-вторых,

$$C \leq \lambda_{\max}(C)I \Rightarrow \mathcal{M}(C) \leq \lambda_{\max}(C)\mathcal{M}(I),$$

и следовательно,

$$\|\mathcal{M}(C)\|_{\infty} \leq \lambda_{\max}(C)\|\mathcal{M}(I)\|_{\infty}.$$

Таким образом,

$$\frac{\|\mathcal{M}(C)\|_{\infty}}{\|C\|_{\infty}} \leq \frac{\|\mathcal{M}(I)\|_{\infty}}{\|I\|_{\infty}}.$$

Рассмотрим теперь случай $p = 1$. Представим матрицу C в виде суммы эрмитовых неотрицательно определенных матриц ранга 1 (например, на основе спектрального разложения):

$$C = \sum_{j=1}^n C_j.$$

Обозначим через C' матрицу, решающую оптимизационную задачу (1.42) при $p = 1$ на множестве ненулевых эрмитовых неотрицательно определенных матриц ранга 1. Введем обозначение $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, где $\alpha_j = \|C_j\|_1 / \|C'\|_1$.

Нетрудно видеть, что, во-первых, $\|C\|_1 = \alpha\|C'\|_1$, во-вторых,

$$\|\mathcal{M}(C)\|_1 = \left\| \sum_{j=1}^n \mathcal{M}(C_j) \right\|_1 =$$

$$= \sum_{j=1}^n \|\mathcal{M}(C_j)\|_1 \leq \sum_{j=1}^n \|\mathcal{M}(\alpha_j C')\|_1 = \alpha \|\mathcal{M}(C')\|_1.$$

Таким образом,

$$\frac{\|\mathcal{M}(C)\|_1}{\|C\|_1} \leq \frac{\|\mathcal{M}(C')\|_1}{\|C'\|_1}.$$

Осталось учесть, что, как это было показано в разделе 1.4.1, оптимальной спектральной плотностью ранга 1 при $p = 1$ является матрица cc^* , где c — собственный вектор матрицы $\tilde{Y} = V^* Y V$ отвечающий ее максимальному собственному значению, где Y — решение уравнения (1.41).

Рассмотрим теперь случай $p = 2$. Используя уравнение Ляпунова (1.40), представим отображение (1.39) в матрично-векторном виде $\tilde{x} = M c$. Здесь \tilde{x} и c — это r^2 и m^2 компонентные столбцы, составленные из столбцов матриц \tilde{X} и C соответственно, M — матрица отображения (1.39) размера $r^2 \times m^2$, имеющая вид

$$M = (W^T \otimes W^*) (I \otimes A + \bar{A} \otimes I)^{-1} (\bar{V} \otimes V), \quad (1.43)$$

где \otimes — символ Кронекерова произведения, а черта означает комплексное сопряжение. Нетрудно видеть, что

$$\|\tilde{X}\|_2 = \|\tilde{x}\|_2, \quad \|C\|_2 = \|c\|_2$$

и, таким образом, задача (1.42) при $p = 2$ сводится к следующей матричной оптимизационной задаче

$$c \neq 0 : \frac{\|M c\|_2}{\|c\|_2} \rightarrow \max, \quad (1.44)$$

на множестве m^2 -компонентных столбцов c , составленных из столбцов ненулевых эрмитовых неотрицательно определенных матриц порядка m . Если задачу (1.44) рассматривать на всем множестве ненулевых m^2 -компонентных столбцов, то ее решением очевидно будет правый сингулярный вектор матрицы M , отвечающий ее максимальному сингулярному числу. Соответствующая матрица C будет правым сингулярным вектором отображения (1.39), отвечающим его максимальному сингулярному числу. Таким образом, для завершения доказательства достаточно показать, что правый сингулярный вектор отображения (1.39), отвечающий его максимальному сингулярному числу, можно выбрать

эрмитовой неотрицательно определенной матрицей. Это утверждение является следствием более общего утверждения, представляющего самостоятельный интерес. Оно формулируется и доказывается ниже. \square

Теорема 5. Пусть A — квадратная матрица порядка n с $r_{\max} < 0$ и заданы матрицы V (размера $n \times t$, $n \geq t$) и W (размера $n \times r$, $n \geq r$). Тогда правый сингулярный вектор отображения (1.39), отвечающий любому из его сингулярных чисел, можно выбрать эрмитовой матрицей, а правый сингулярный вектор, отвечающий максимальному сингулярному числу, можно выбрать эрмитовой неотрицательно определенной матрицей.

Доказательство. Покажем, что правый сингулярный вектор отображения (1.39), отвечающий любому его фиксированному сингулярному числу, можно выбрать эрмитовым. Введем в рассмотрение отображение

$$\mathcal{M}^*(\tilde{X}) = V^*ZV, \quad (1.45)$$

сопряженное отображению (1.39), где Z означает решение уравнения Ляпунова

$$A^*Z + ZA = -W\tilde{X}W^*. \quad (1.46)$$

Формулу (1.45) можно вывести на основе матрицы, сопряженной матрице (1.43). Правый сингулярный вектор C отображения (1.39), отвечающий его фиксированному сингулярному числу σ , является собственным вектором отображения $\mathcal{M}^*(\mathcal{M}(\cdot))$, отвечающим его собственному значению $\lambda = \sigma^2$:

$$\mathcal{M}^*(\mathcal{M}(C)) = \lambda C. \quad (1.47)$$

Если C является косоэрмитовой матрицей, то искомым собственным вектором будет матрица C , умноженная на мнимую единицу, являющаяся эрмитовой. В противном случае, учитывая, следующее равенство

$$\mathcal{M}^*(\mathcal{M}(C^*)) = \lambda C^*,$$

которое непосредственно получается из (1.47) операцией сопряжения, искомым собственным вектором будет эрмитова матрица $C + C^*$.

Пусть теперь C — произвольная эрмитова матрица порядка m и $C = Q\Lambda Q^*$ — ее спектральное разложение, где Q — унитарная матрица собственных векторов, а Λ — диагональная матрица собственных значений. Заменяем в матрице Λ ее диагональные элементы на их абсолютные величины, обозначим полученную матрицу через Λ' и рассмотрим матрицу $C' = Q\Lambda'Q^*$. Во-первых, $\|C\|_2 = \|C'\|_2$, во-вторых, $-C' \leq C \leq C'$, и следовательно,

$$-\mathcal{M}(C') \leq \mathcal{M}(C) \leq \mathcal{M}(C') \Rightarrow \|\mathcal{M}(C)\|_2 \leq \|\mathcal{M}(C')\|_2.$$

Если C — это правый сингулярный вектор, отвечающий максимальному сингулярному числу оператора (1.39), то последнее неравенство становится равенством и из него следует, что и построенная ненулевая эрмитова неотрицательно определенная матрица C' является правым сингулярным вектором отображения (1.39), отвечающим его максимальному сингулярному числу. \square

Отметим, что в работе [68] было доказано, что сингулярный вектор, отвечающий минимальному сингулярному числу вещественного оператора Ляпунова, со спектром лежащим в левой полуплоскости, может быть выбран симметричной матрицей. В Теореме 5 рассматривается значительно более общий комплексный оператор (в случае, когда V и W — единичные матрицы, он является обратным к оператору Ляпунова) и помимо эрмитовости доказывается неотрицательная определенность. Таким образом эта теорема существенно обобщает и дополняет результаты работы [68].

Утверждения, аналогичные Теореме 4 при $p = 1$ и ∞ , для случая, когда V и W — единичные матрицы, были доказаны в работах [69; 70]. Впоследствии было показано [71; 72], что эти утверждения следуют из более общих утверждений о нормах линейных положительных операторов, к которым в этом случае относится и введенное в (1.39) отображение \mathcal{M} . Предложенное в данном разделе доказательство Теоремы 4 оригинально и основано лишь на широко известных результатах матричного анализа.

Постановка (1.42) задачи о поиске оптимального стохастического форсинга предложена впервые.

1.4.3 Вычисление оптимальной спектральной плотности

Согласно Теореме 4 для случаев $p = 1$ и ∞ оптимальными спектральными плотностями являются соответственно матрица ранга 1 вида $C = cc^*$, где c — собственный вектор матрицы \tilde{Y} , отвечающий ее максимальному собственному значению, и единичная матрица порядка t соответственно, а в случае $p = 2$ оптимальная спектральная плотность — это правый сингулярный вектор отображения (1.39), отвечающий его максимальному сингулярному числу. В соответствии с Теоремой 5 расчет требуемой спектральной плотности в последнем случае можно организовать следующим образом. Сначала вычисляем собственный вектор матрицы M^*M , отвечающий ее максимальному собственному значению, где M — матрица (1.43) отображения (1.39). Для этого можно использовать любой метод решения частичной проблемы собственных значений, не требующий явного формирования матрицы, а использующий только процедуру умножения матрицы на вектор, например, метод Ланцоша, одновременных итераций или метод сопряженных градиентов [55]. При этом умножение матриц M и M^* на вектор можно сводить к решению соответствующих уравнений Ляпунова (1.40) и (1.46), соответственно. После того как искомым собственным вектор будет найден, из него формируем матрицу и далее эту матрицу преобразуем к эрмитовой неотрицательно определенной матрице алгоритмом описанным в доказательстве Теоремы 5.

2. Численная модель развития крупномасштабных возмущений в стратифицированном турбулентном течении

2.1 Об исследовании организованных структур в турбулентных течениях

В нейтрально-стратифицированных сдвиговых турбулентных течениях на фоне мелкомасштабной турбулентности наблюдаются 2 типа организованных структур: вытянутые в продольном направлении противовращающиеся вихри и продольные стрики. Вытянутые в продольном направлении вихри часто называют роликами или валиками. Ролики развиваются в стрики за счет эффекта опрокидывания (см. [73; 74], а также обзор [75]). Эффект опрокидывания сопровождается преобразованием кинетической энергии основного течения в кинетическую энергию флуктуаций продольной скорости, что значительно увеличивает энергию стриков по сравнению с первоначальной энергией роликов. Размеры стриков в поперечном и вертикальном направлениях варьируются в широком диапазоне: от значений, сравнимых с толщинами вязкого и буферного слоев [76–78], до величин того же порядка, что и толщины логарифмического и внешнего слоев (см. обзор [62]). Для турбулентного течения Куэтта организованные структуры с поперечным и вертикальными масштабами, близкими к высоте канала, были впервые обнаружены численно в работах [79; 80], а затем и подтверждены лабораторными измерениями [81]. Вторичная неустойчивость и нелинейные эффекты могут обеспечить самоподдержание этих структур (то есть, цикл «ролики-стрики-ролики») в турбулентном течении [82; 83]. Было показано [84], что этот цикл не определяется нелинейным взаимодействием организованных структур с мелкомасштабной турбулентностью.

Еще одним типом организованных структур, наблюдаемых в нейтрально-стратифицированных сдвиговых турбулентных течениях, являются шпилькообразные вихри [85]. Однако для плоскопараллельного турбулентного течения Куэтта современные результаты прямого численного моделирования не показывают наличия крупномасштабных шпилькообразных вихрей, в то время как крупномасштабные ролики и стрики наблюдаются и вносят значительный вклад в поток импульса вблизи центра канала (см., например, [86], где были проведены

расчеты при больших числах Рейнольдса, и [87], где были проведены расчеты в большой расчетной области).

Организованные структуры похожие на крупномасштабные ролики и стрики наблюдаются на фоне мелкомасштабной турбулентности также и в пограничном слое атмосферы и вносят существенный вклад в обмен импульсом, теплом и влагой между свободной атмосферой и подстилающей поверхностью [88]. В шестидесятые и семидесятые годы прошлого века предпринимались попытки объяснить пространственную конфигурацию, физические механизмы и условия формирования этих структур при помощи анализа гидродинамической устойчивости системы, линеаризованной относительно осредненного турбулентного течения и учитывающей наличие мелкомасштабной турбулентности через эффективные коэффициенты вязкости и диффузии. Такой анализ проводился, в частности, для исследования организованных крупных вихрей, ориентированных под небольшим углом к направлению приземного ветра. В работах [89; 90] образование этих вихрей объяснялось неустойчивостью, связанной с наличием точки перегиба в профиле скорости. Однако результаты анализа собственных мод линеаризованной системы не совпадают с натурными измерениями в пограничном слое атмосферы и прямым численным моделированием турбулентных течений при больших числах Рейнольдса. Расхождения отчасти связаны с тем, что в теоретических исследованиях часто использовались приближения, не согласующиеся с теорией подобия Мони́на-Обухова [91] и дающие средние профили скорости и плавучести, принципиально отличающиеся от наблюдаемых. Например, в упомянутых работах [89; 90] ролики рассматривались на фоне ламинарной спирали Экмана. При этом профиль скорости, относительно которого выполнялась линеаризация, не совпадал с профилем скорости турбулентного течения (см. результаты прямого численного моделирования в работе [92]). Подобные различия между реальными турбулентными течениями и течениями, исследуемыми теоретически, отмечались уже в ранних работах [89], посвященных данной теме. Однако до появления результатов численного моделирования с высоким пространственным разрешением и большими горизонтальными размерами расчетной области (например, [16; 17; 92–95]), не было возможности точно определить все параметры атмосферного пограничного слоя, влияющие на возникновение тех или иных крупномасштабных структур. Еще одной возможной причиной несоответствия структур, наблюдаемых в турбулентных течениях

и структур, получаемых как наиболее нарастающие собственные моды линеаризованного оператора, является относительно медленное нарастание их энергии. Нелинейные взаимодействия между мелкомасштабной турбулентностью и неустойчивыми модами могут приводить к разрушению последних раньше, чем их энергия достигнет заметных значений. Более того, профили осредненных турбулентных течений зачастую оказываются линейно устойчивыми к малым возмущениям, что отмечалось еще в ранних работах [96; 97].

Вместо анализа линейной неустойчивости осредненных турбулентных течений представляет интерес анализ их немодовой неустойчивости, т.е. поиск возмущений, испытывающих наибольший рост энергии на конечных временных интервалах [8; 9; 98; 99]. Такие возмущения обычно называют оптимальными возмущениями [2; 7]. Наличие возмущений, значительно нарастающих на конечных временных интервалах, но затухающих впоследствии, связано с существенной неортогональностью собственных мод уравнений эволюции возмущений, линеаризованных относительно основного течения. Математическому описанию этого явления, а также алгоритмам вычисления оптимальных возмущений, посвящена значительная часть Главы 1 данной диссертации.

Анализ оптимальных возмущений, представленный в вышеупомянутых работах, проводился для ламинарных течений с постоянной вязкостью, для которых известны аналитические выражения для профилей основного течения. Оптимальные возмущения осредненных турбулентных течений были впервые вычислены в работах [12; 13] (турбулентное течение Пуазейля) и [14] (турбулентный пограничный слой с нулевым внешним градиентом давления). При построении линейной модели эволюции крупномасштабных возмущений в этих работах использовались эмпирические аппроксимации (например, [100]) эффективного коэффициента вязкости. Среднее течение, на фоне которого рассматривались возмущения, также отражало турбулентный характер профиля скорости. Во всех этих работах были обнаружены оптимальные возмущения двух видов: пристеночные стрики с характерными поперечными размерами около 80-100 (в безразмерных пристеночных единицах длины) и крупномасштабные стрики с размерами, превышающими высоту всего турбулентного пограничного слоя. Эти результаты качественно и количественно согласуются с экспериментальными наблюдениями и численным моделированием.

Для всех рассмотренных нейтрально-стратифицированных сдвиговых турбулентных течений с нулевой поперечной компонентой средней скорости наибольший рост энергии возмущений достигается на возмущениях с нулевым продольным волновым числом. Такие возмущения представляют собой вытянутые в продольном направлении вихри, которые за счет эффекта опрокидывания развиваются в продольные стрики. С другой стороны, согласно результатам прямого численного и вихреразрезающего моделирования [16;17], в устойчиво-стратифицированных турбулентных течениях наблюдается еще один тип крупномасштабных организованных структур. Эти структуры проявляются в мгновенных полях температуры как нерегулярные наклонные тонкие слои жидкости с большими градиентами температуры («температурные фронты» [16]), отстоящие друг от друга на расстояния, сравнимые с высотой всего турбулентного слоя, и разделенные хорошо перемешанными областями. Наличие таких структур косвенно подтверждается натурными измерениями в устойчивом атмосферном пограничном слое [16;17;101], а также на их наличие указывает ненулевой третий момент распределения градиентов флуктуаций температуры [16;17].

В работе [16] из результатов вихреразрезающего моделирования (см. Рисунок 18 в [16]) с помощью условного осреднения и методов визуализации была выделена некоторая вихревая структура, связанная с наблюдаемыми температурными фронтами. Пространственная конфигурация, размеры и физические механизмы, отвечающие за их появление, не были объяснены.

Отметим, что образование таких наклонных структур было обнаружено как для устойчиво-стратифицированного турбулентного слоя Экмана [16], так и для устойчиво-стратифицированного турбулентного течения Куэтта [17] (см. Рисунок 2.1, где показаны изолинии поля температуры, а фронты соответствуют областям большой концентрации изолиний). Кроме того, аналогичные структуры наблюдались в устойчиво стратифицированном турбулентном течении над поверхностью городского типа [15]. Эти наблюдения подчеркивают, что наличие устойчивой стратификации наиболее важно для появления наклонных структур, а другие эффекты, такие как вращение спирали Экмана или особенности турбулентности вблизи поверхности, оказывают меньшее влияние.

Наблюдаемые на Рисунке 2.1 наклонные структуры имеют ненулевое продольное волновое число. Оптимальные возмущения с ненулевым продольным волновым числом также ранее наблюдались: в частности, для ламинарного те-

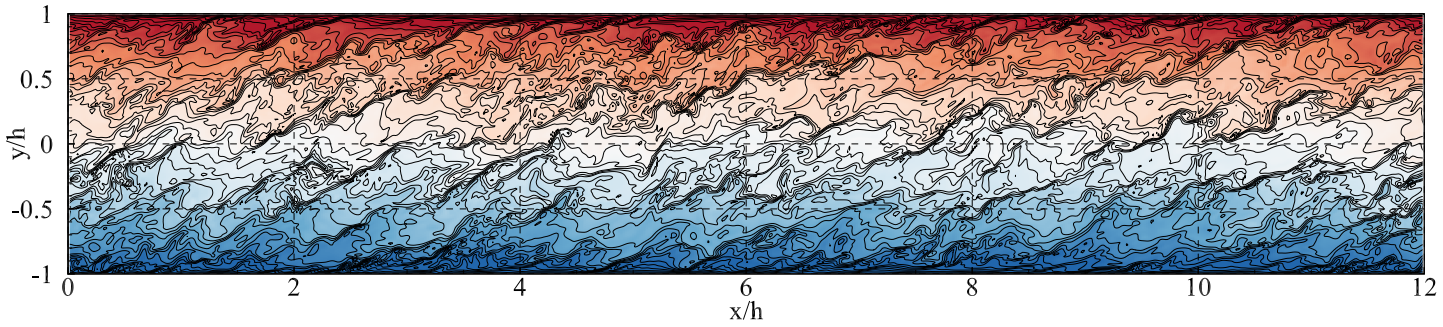


Рисунок 2.1 — Линии уровня мгновенного поля температуры в продольном сечении канала для устойчиво-стратифицированного турбулентного течения Куэтта по результатам прямого численного моделирования [17] при числе Рейнольдса $Re = 4 \times 10^4$ и числе Ричардсона $Ri = 0.03$. Здесь h — полуввысота канала, x и y — продольная и вертикальная координаты соответственно.

чения Куэтта при небольших числах Рейнольдса [9]. Рост энергии таких существенно трехмерных возмущений объяснялся в [9] совместным действием эффекта опрокидывания и механизма Орра. Оптимальные возмущения с ненулевым продольным волновым числом были также обнаружены для устойчиво-стратифицированных струй [102; 103].

Для анализа немодовой устойчивости (поиска оптимальных возмущений) осредненных турбулентных течений необходимо построить линейную модель развития возмущений, представляющих собой организованные структуры. Часто используемый подход для построения такой линейной модели — это использование модифицированных уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости, в которых введен оператор эффективной вязкости, включающей как молекулярную, так и турбулентную составляющие [104]. В плоскопараллельных течениях, таких как течение Куэтта или течение Пуазейля, этот коэффициент может выбрать либо по результатам прямого численного моделирования как отношение полного вертикального потока импульса к градиенту средней скорости [60], либо с помощью эмпирических приближений, согласующихся с известными данными измерений и моделирования.

2.2 Стратифицированное турбулентное течение Куэтта и результаты прямого численного моделирования

Рассмотрим в декартовых координатах x (продольная), y (вертикальная), z (поперечная) движение вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном трехмерном канале полувьсоты h : $-h < y < h$ в поле силы тяжести. Верхняя стенка канала движется со скоростью $(U_0/2, 0, 0)$, нижняя — со скоростью $(-U_0/2, 0, 0)$, на стенках поддерживаются постоянные температуры $T_2 > T_1$ соответственно, а для скорости на стенках канала предполагается условие прилипания.

В приближении Буссинеска движение жидкости определяется системой уравнений Навье-Стокса, теплопроводности и неразрывности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} - (0, RiT, 0)^T &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T - \frac{1}{PrRe} \Delta T &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)^T$ — оператор набла, $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ — оператор Лапласа. Здесь x, y, z — безразмерные декартовы координаты; $\mathbf{u} = (U, V, W)^T$, p и T — безразмерные компоненты вектора скорости (в направлениях x, y и z), удельное давление и температура соответственно; $Re = U_0 h / \nu$, $Ri = g(T_2 - T_1)h / (T_1 U_0^2)$ и $Pr = \nu / \chi$ — число Рейнольдса, число Ричардсона и число Прандтля соответственно, где ν — кинематическая вязкость, χ — так называемый коэффициент теплопроводности, g — ускорение свободного падения. Температура жидкости T на верхней ($y = 1$) и нижней ($y = -1$) стенках равна соответственно 2 и 1. Стенки движутся со скоростями $1/2$ и $-1/2$ в продольном направлении.

Прямое численное моделирование системы уравнений (2.1) было выполнено в работах [17; 86] в вычислительной области с размерами $L_x = 12$, $L_y = 2$, $L_z = 8$. Для компонент скорости и температуры предполагались периодические граничные условия в направлениях x и z . Горизонтальные размеры области были выбраны таким образом, чтобы статистические характеристики турбулентного течения не зависели от размеров области при их дальнейшем увеличении. Расчеты проводились при фиксированном числе Прандтля $Pr = 0.7$ и чис-

лах Рейнольдса и Ричардсона, лежащих в диапазонах $1 \leq Re \times 10^{-4} \leq 6$ и $0 \leq Ri \leq 0.06$. Для вычисления профилей осредненного турбулентного течения производилось осреднение (далее обозначаемое как $\bar{(\cdot)}$) по горизонтальным координатам и времени на достаточно большом участке модельной траектории после достижения турбулентным течением квазистационарного состояния. Средние значения продольной компоненты скорости U и температуры T мы далее будем обозначать через $\bar{U} = \bar{U}(y)$ и $\bar{T} = \bar{T}(y)$ соответственно. Средние значения остальных компонент скорости на достаточно больших временных интервалах оказались, как и следовало ожидать, пренебрежимо малыми и далее они будут полагаться равными нулю.

Профили средней скорости $\bar{U}(y)$ и температуры $\bar{T}(y)$ показаны на Рисунке 2.2 при различных числах Рейнольдса и Ричардсона, начиная от случая нейтральной стратификации ($Ri = 0$), где температуру можно считать пассивным скаляром, до случая сильно-устойчивой стратификации ($Ri = 0.055$). С увеличением числа Ричардсона профили вблизи центра канала стремятся к линейным, а их средний градиент увеличивается.

Определим средние значения полных безразмерных потоков импульса и тепла как

$$\tau = \overline{UV} - \frac{1}{Re} \frac{d\bar{U}}{dy}, \quad F_T = \overline{TV} - \frac{1}{PrRe} \frac{d\bar{T}}{dy}.$$

Нетрудно убедиться [105], что величины τ и F_T являются константами в виду отсутствия внутренних источников импульса и тепла в течении Куэтта.

Динамические свойства турбулентного течения характеризуются скоростью трения $u_* = \sqrt{|\tau_0|/\rho}$, где τ_0 — размерный поток импульса, а ρ — плотность жидкости, и соответствующим числом Рейнольдса $Re_\tau = u_* Re / U_0$, а турбулентный масштаб температуры — это $T_* = |F_{T_0}|/u_*$, где F_{T_0} — размерный поток тепла. Для переменных обезразмеренных на турбулентные масштабы далее будем использоваться индекс ”+”:

$$y_+ = Re_\tau(y + 1), \quad \bar{U}_+ = Re_\tau(\bar{U} + 0.5), \quad \bar{T}_+ = \frac{T_1}{T_*}(\bar{T} - 1),$$

где для удобства восприятия сделан сдвиг чтобы добиться равенства нулю на нижней стенке канала. Профили $\bar{U}_+(y_+)$, $\bar{T}_+(y_+)$ вблизи нижней стенки канала также показаны на Рисунке 2.2 (д-е) при различных числах Рейнольдса и Ричардсона. Профили совпадают в вязком подслое (приблизительно, при

$y_+ \leq 10$), что подчеркивает что, прямое численное моделирование было выполнено с достаточным сеточным разрешением. Логарифмический слой явно выражен при нейтральной и слабоустойчивой стратификации, в то время как при большей стратификации влияние сил плавучести начинается с буферного слоя.

Устойчиво-стратифицированная турбулентность характеризуется масштабом длины Обухова $L = u_*^2 T_1 / (g T_*)$. Отметим, что масштаб Обухова L определен без дополнительного множителя $1/\kappa$, где κ — константа фон Кармана, чтобы сохранить обозначения из работы [17], где представлены результаты прямого численного моделирования. Этот масштаб длины используется в теории подобию Монино-Обухова [91] для описания статистических свойств турбулентности в атмосферном пограничном слое. Безразмерный параметр $\zeta = h/L$, который далее будет называться параметром устойчивости, характеризует рассматриваемое стратифицированное турбулентное течение (за исключением вязкого подслоя) в пределе очень больших чисел Рейнольдса.

2.2.1 Ролики при нейтральной стратификации

Некоторое мгновенное поле скорости (W, V) в сечении канала $x = 0$, вычисленное в случае нейтральной стратификации $Ri = 0$ при $Re = 4 \cdot 10^4$, изображено на Рисунке 2.3 сверху. Какие-либо организованные структуры в нем не видны. Аналогичная картина наблюдается и в других сечениях по x . После исключения мелкомасштабной компоненты флуктуации путем осреднения вдоль оси x , рассматриваемое мгновенное поле скорости преобразуется в чередующиеся по направлению вращения вихри, представленные на Рисунке 2.3 снизу. В трехмерном пространстве эти структуры представляют собой вытянутые в продольном направлении противовращающиеся вихри («ролики»). При нейтральной стратификации ролики явно выражены и могут быть выделены из мгновенных полей флуктуаций. С увеличением статической устойчивости, характеризующейся числом Ричардсона, их кинетическая энергия уменьшается и появляются промежутки времени, на которых ролики почти полностью затухают, что может быть объяснено необходимостью совершения работы против

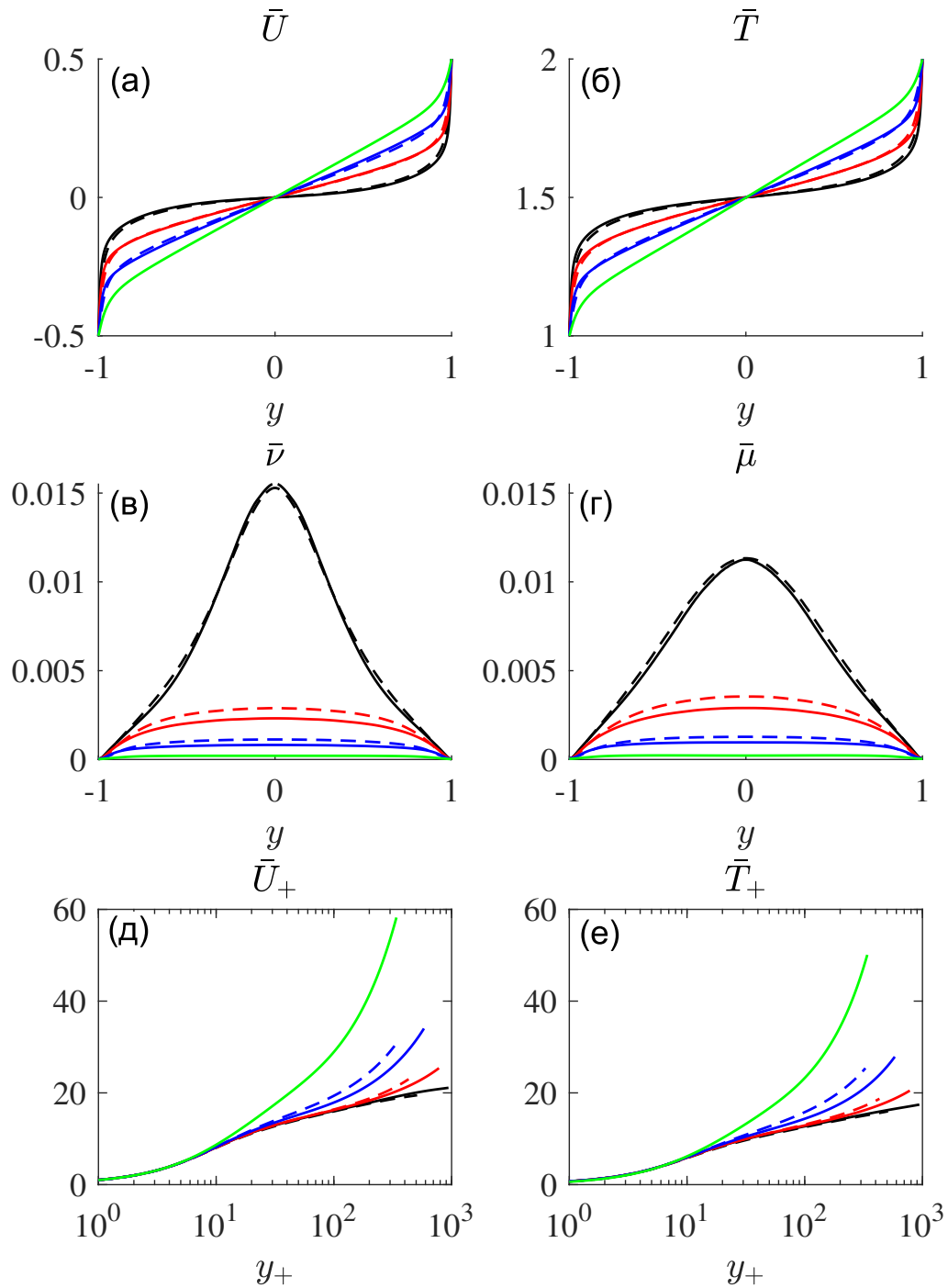


Рисунок 2.2 — Профили $\bar{U}(y)$, $\bar{T}(y)$, $\bar{v}(y)$, $\bar{\mu}(y)$, $\bar{U}_+(y_+)$, $\bar{T}_+(y_+)$ (а-е) среднего турбулентного течения при $Re = 2 \times 10^4$ (пунктир), 4×10^4 (сплошная линия) и $Re = 0$ (черным), $Ri = 0$ (черным), 0.01 (красным), 0.03 (синим). Зеленой линии соответствуют профили при $Re = 4 \times 10^4$, $Ri = 0.055$. Профили $\bar{U}_+(y_+)$, $\bar{T}_+(y_+)$ показаны только в нижней половине канала.

сил плавучести при совершении вертикальных перемещений в стратифицированной жидкости. В результатах прямого численного моделирования ролики явно проявляются вплоть до значения числа Ричардсона $Ri \approx 0.015$.

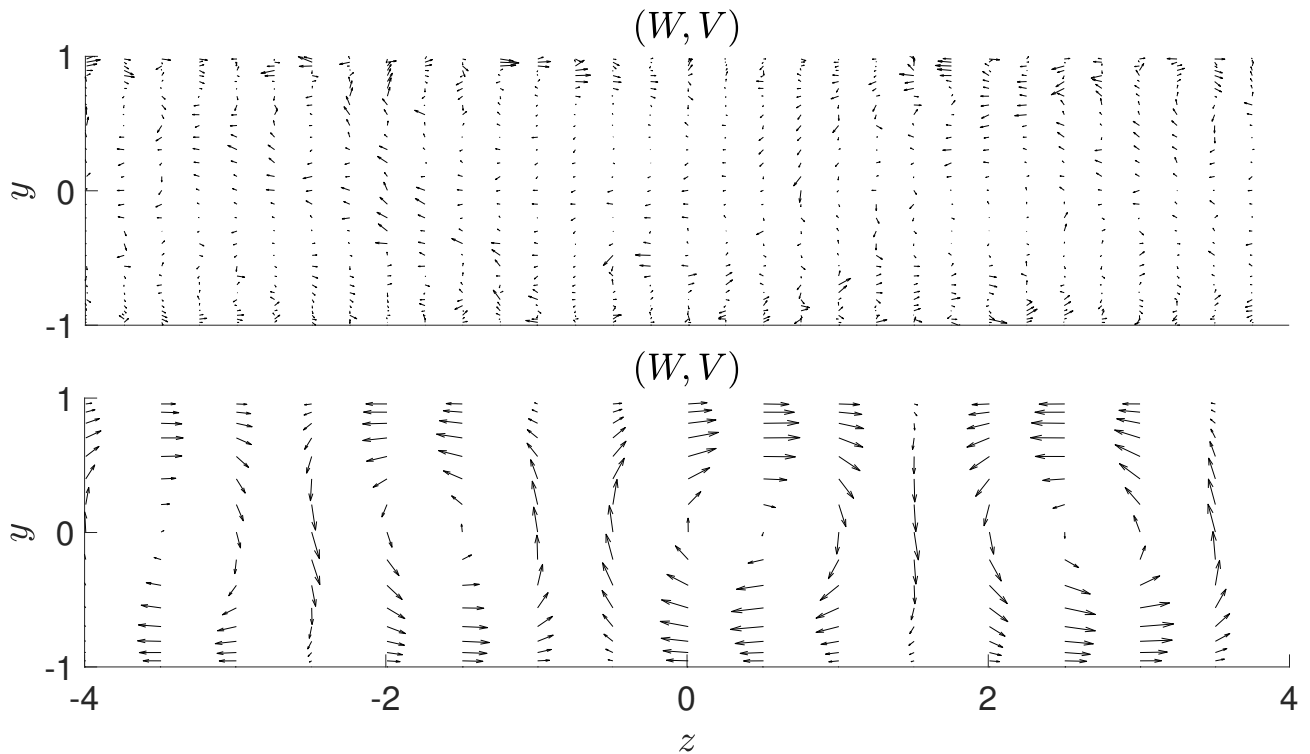


Рисунок 2.3 — Некоторое мгновенное поле скорости (W, V) в сечении $x = 0$ (сверху); оно же, осредненное вдоль оси x (снизу).

2.2.2 Наклонные структуры при устойчивой стратификации

При устойчивой стратификации в работе [17] была зафиксирована наклонная слоистая структура поля температуры, представляющая собой крупномасштабные нерегулярные наклонные слои жидкости со слабой стратификацией, разделенных очень тонкими слоями с большими градиентами температуры. Это явление проиллюстрировано на Рисунке 2.1, а также на Рисунке 2.5 сверху, где изображены изолинии одного из мгновенных полей температуры T в расчете с $Re = 4 \cdot 10^4$, $Ri = 0.03$ в сечении канала $z = 0$.

Штрихом будем обозначать флуктуации, то есть отклонения соответствующих величин от их средних значений:

$$U' = U - \bar{U}, V' = V, W' = W, T' = T - \bar{T}.$$

Плотность полной энергии флуктуации $F = (U', V', W', T')^T$ определим как

$$\mathcal{E}(F) = \frac{1}{L_x L_y L_z} \int_{-L_z/2}^{L_z/2} \int_{-L_y/2}^{L_y/2} \int_{-L_x/2}^{L_x/2} \left(|U'|^2 + |V'|^2 + |W'|^2 + \frac{Ri}{d\bar{T}/dy} |T'|^2 \right) dx dy dz,$$

т.е. как сумму кинетической и потенциальной составляющих. Отметим, что плотность потенциальной энергии определена по аналогии с доступной потенциальной энергией устойчиво стратифицированной атмосферы [106].

В этом случае для того, чтобы выделить крупномасштабные составляющие течения, проявляющиеся в виде организованных структур, разложим мгновенное поле флуктуаций в комплексный ряд Фурье по горизонтальным переменным

$$F(x, y, z) = \sum_{k_x=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_z=-\infty}^{+\infty} F_{k_x k_z}(y) \exp\left(\frac{2\pi i k_x x}{L_x}\right) \exp\left(\frac{2\pi i k_z z}{L_z}\right),$$

где k_x и k_z — номера гармоник в направлениях x и z соответственно. Плотность полной энергии отдельной Фурье-гармоники равна

$$\mathcal{E}_{k_x k_z} = \frac{1}{L_y} \int_{-L_y/2}^{L_y/2} \left(|U_{k_x k_z}|^2 + |V_{k_x k_z}|^2 + |W_{k_x k_z}|^2 + \frac{Ri}{d\bar{T}/dy} |T_{k_x k_z}|^2 \right) dy. \quad (2.2)$$

Отметим, что поскольку поле флуктуаций F является чисто вещественным, то гармоники с номерами k_x, k_z и $-k_x, -k_z$ являются комплексно-сопряженными. Комплексное сопряжение не меняет плотность полной энергии (2.2), поэтому достаточно ограничиться, например, рассмотрением гармоник с неотрицательными k_z .

На Рисунке 2.4 изображена энергетическая спектрограмма, то есть распределение плотности полной энергии $\mathcal{E}(F)$ мгновенного поля флуктуаций по отдельным Фурье-гармоникам, в диапазонах номеров гармоник $-20 \leq k_x \leq 20$, $0 \leq k_z \leq 20$. Видно, что наибольших значений $\mathcal{E}_{k_x k_z}$ достигает на крупномас-

штабных гармониках с номерами $(k_x, k_z) = (1,1)$, $(2,1)$ и $(2,2)$. На Рисунке 2.5 ниже изображены вещественные части температуры вышеперечисленных гармоник в сечении канала $z = 0$. Они являются крупномасштабными структурами, представляющими собой наклонные чередующиеся слои в продольном сечении канала. Именно эти крупномасштабные гармоники, по-видимому, проявляются в качестве организованных структур в поле температуры на Рисунке 2.5.

Отметим, что большое значение средней плотности полной энергии некоторых гармоник с другими номерами на Рисунке 2.4 — случайно. При осреднении по ансамблю из нескольких спектрограмм, построенных по различным мгновенным полям, энергия, отвечающая гармоникам с этими номерами, существенно уменьшается.

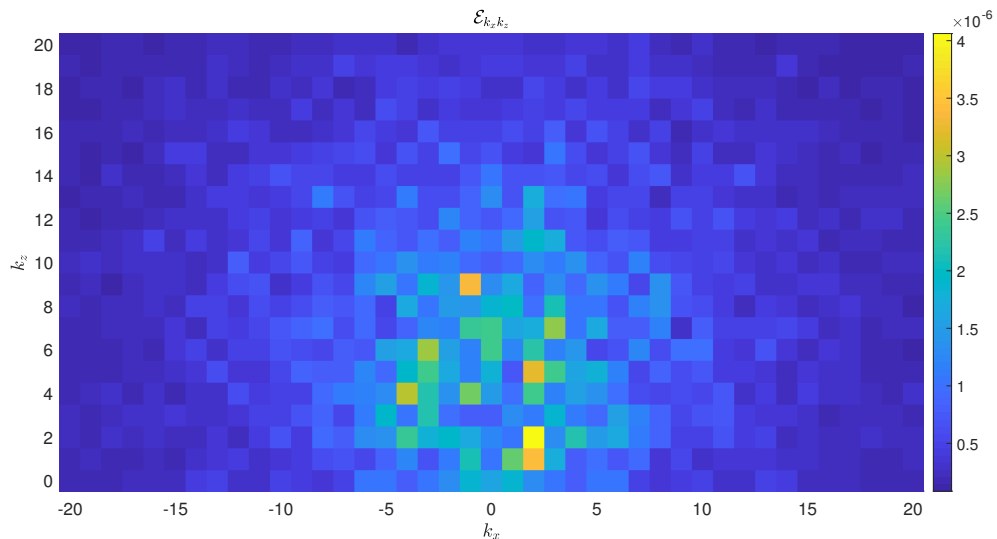


Рисунок 2.4 — Энергетическая спектрограмма флуктуации мгновенного поля скорости и температуры.

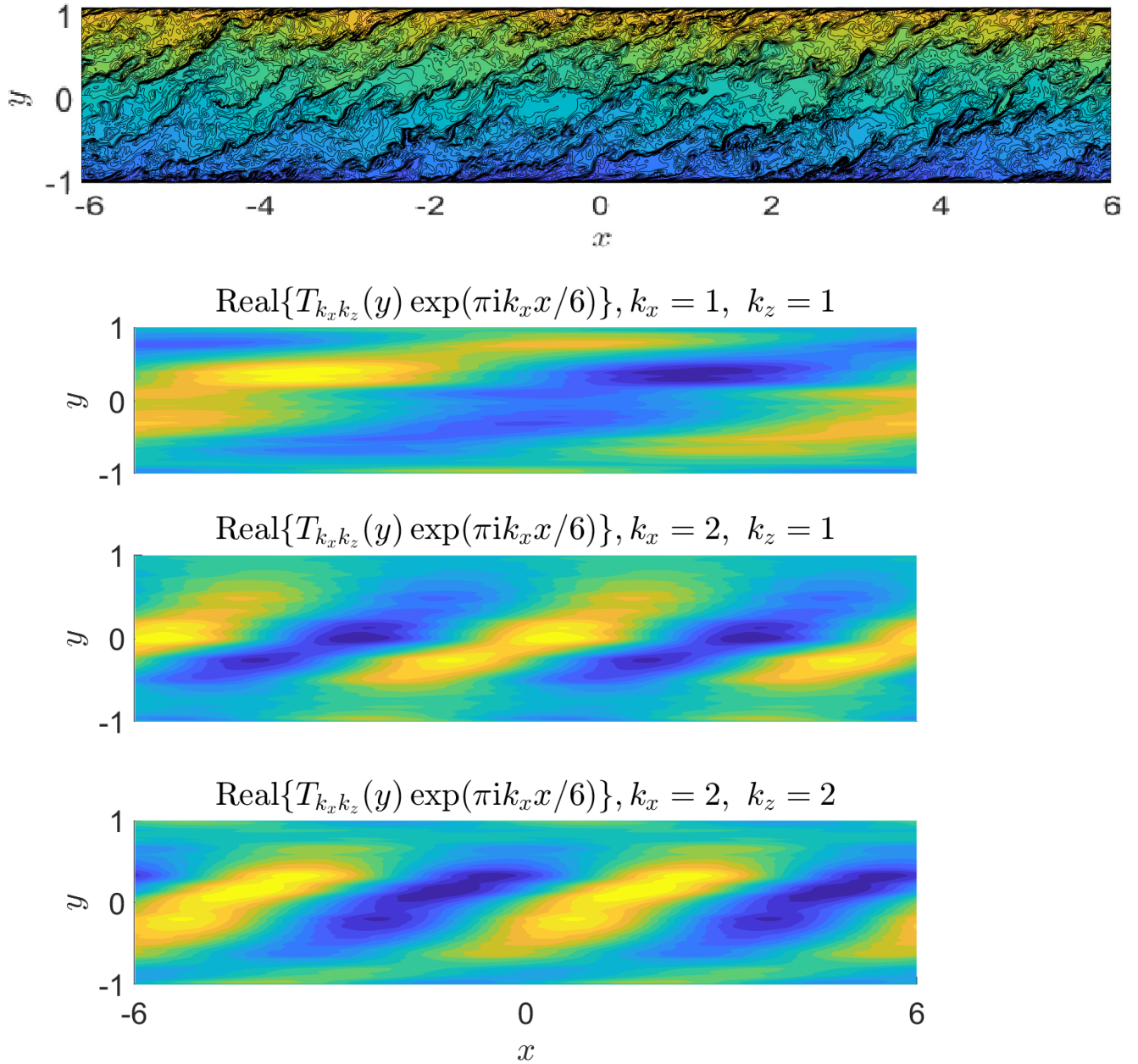


Рисунок 2.5 — Сверху вниз: в сечении канала $z = 0$ линии уровня мгновенного поля температуры; изолинии вещественных частей крупномасштабных гармоник с номерами $(k_x, k_z) = (1, 1), (2, 1)$ и $(2, 2)$, вычисленных для флуктуации этого поля.

2.3 Линейная модель развития крупномасштабных возмущений

Будем считать, что флуктуации компонент скорости и температуры можно разделить на возмущения \tilde{U}' , \tilde{V}' , \tilde{W}' , \tilde{T}' крупного пространственного масштаба, проявляющиеся в виде организованных структур, и мелкомасштабные турбулентные флуктуации U' , V' , W' , T' . Представим турбулентные поля скорости и температуры в виде

$$U = \bar{U} + \tilde{U}' + U', \quad V = \bar{V}' + V', \quad W = \tilde{W}' + W', \quad T = \bar{T} + \tilde{T}' + T' \quad (2.3)$$

и подставим (2.3) в исходные уравнения (2.1), отфильтровывая мелкомасштабные турбулентные флуктуации с помощью операции осреднения по Рейнольдсу. Тогда получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} - (0, RiT, 0)^T + \overline{(\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}'} &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T - \frac{1}{PrRe} \Delta T + \overline{(\mathbf{u}' \cdot \nabla) T'} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\mathbf{u} = (\bar{U} + \tilde{U}', \tilde{V}', \tilde{W}')^T$, $\mathbf{u}' = (U', V', W')^T$, $p = \bar{P} + \tilde{P}'$ и $T = \bar{T} + \tilde{T}'$.

Рассмотрим задачу эволюции крупномасштабных составляющих течения, параметризуя взаимодействие с мелкомасштабной турбулентностью $\overline{(\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}'}$ и $\overline{(\mathbf{u}' \cdot \nabla) T'}$ в (2.4) при помощи операторов $\bar{\nu}$ и $\bar{\mu}$ турбулентной вязкости и диффузии соответственно, зависящих только от вертикальной переменной y . Будем предполагать, что операторы турбулентной вязкости и диффузии изотропны вдоль направлений x , y , z . Выберем коэффициенты турбулентной вязкости и диффузии следующим образом:

$$\bar{\nu}(y) = -\tau / \left(\frac{d\bar{U}}{dy} \right), \quad \bar{\mu}(y) = -F_T / \left(\frac{d\bar{T}}{dy} \right). \quad (2.5)$$

Отметим, что на стенках канала коэффициенты турбулентной вязкости и диффузии равны молекулярным значениям $1/Re$ и $1/PrRe$ соответственно. На Рисунке 2.2 (в-г) показаны профили $\bar{\nu}(y)$ и $\bar{\mu}(y)$ при различных числах Рейнольдса и Ричардсона. С увеличением числа Ричардсона, устойчивая стратификация

подавляет турбулентное перемешивание, ограничивая характерные пространственные масштабы турбулентных вихрей, что приводит к уменьшению коэффициентов турбулентной вязкости и диффузии.

Используя коэффициенты турбулентной вязкости и диффузии (2.5), получим уравнения, описывающие эволюцию крупномасштабных составляющих течения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}} + \nabla \tilde{p} - \Delta_\nu \tilde{\mathbf{u}} - \left(0, Ri\tilde{T}, 0\right)^T &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \tilde{T} - \Delta_\mu \tilde{T} &= 0, \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} &= 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$\Delta_\nu = \bar{\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\nu} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{\nu} \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \Delta_\mu = \bar{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\mu} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{\mu} \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

оператор Δ_ν действует на вектор скорости покомпонентно, $\bar{\cdot}$ означает операцию осреднения по Рейнольдсу, а из давления \tilde{p} исключена изотропная часть непряжений Рейнольдса.

Как и для исходной математической модели (2.1), на верхней и нижней стенках канала для скорости предполагается условие прилипания, а для температуры постоянные значения 2 и 1, соответственно. Верхняя и нижняя стенки движутся со скоростями соответственно $1/2$ и $-1/2$ в направлении x .

Система уравнений (2.6) по построению имеет стационарное решение

$$\tilde{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}} := (\bar{U}(y), 0, 0)^T, \quad \tilde{p} = \bar{P}(y), \quad \tilde{T} = \bar{T}(y)$$

с профилями продольной компоненты скорости, давления и температуры, удовлетворяющими соотношениям

$$-\bar{\nu} \frac{d\bar{U}}{dy} = \tau, \quad -\bar{\mu} \frac{d\bar{T}}{dy} = F_T, \quad \frac{d\bar{P}}{dy} = Ri\bar{T}. \quad (2.7)$$

Профили средней скорости $\bar{U}(y)$ и температуры $\bar{T}(y)$ турбулентного течения, а также соответствующие коэффициенты турбулентной вязкости $\bar{\nu}(y)$ и теплопроводности $\bar{\mu}(y)$ возьмём из результатов работ [17;86], где было выполнено прямое численное моделирование стратифицированного турбулентного течения Куэтта в широком диапазоне чисел Рейнольдса и Ричардсона.

Представим произвольное решение этой системы в окрестности основного течения следующим образом:

$$(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}, \tilde{T}) = (\bar{\mathbf{u}}, \bar{P}, \bar{T}) + \varepsilon(\mathbf{u}', p', T') + o(\varepsilon), \quad (2.8)$$

где $\mathbf{u}' = (u', v', w')$, а ε — малый параметр. Требуя, чтобы для любого сколь угодно малого по абсолютной величине ε , (2.8) было решением системы уравнений (2.6), получим следующие линеаризованные уравнения эволюции малых возмущений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial x} + \left(\frac{d\bar{U}}{dy} v', - Ri T', 0 \right)^T + \nabla p' - \Delta_\nu \mathbf{u}' &= 0, \\ \frac{\partial T'}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial T'}{\partial x} + \frac{d\bar{T}}{dy} v' - \Delta_\mu T' &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}' &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Уравнения (2.9) рассматриваются с нулевыми граничными условиями для u' , v' , w' , T' на стенках канала.

Нас будут интересовать периодические по x и z решения системы (2.9), дающие максимальный подскок плотности полной энергии возмущений:

$$\frac{1}{8l_x l_z} \int_{-l_x}^{l_x} \int_{-1}^1 \int_{-l_z}^{l_z} \left(u'^2 + v'^2 + w'^2 + \frac{Ri}{d\bar{T}/dy} T'^2 \right) dx dy dz,$$

где $2l_x$ и $2l_z$ — периоды возмущений в направлениях x и z соответственно. Так как основное течение не зависит от x и z , любое периодическое по x и z решение системы (2.9) можно разложить в ряд по решениям вида

$$(u_{\alpha\gamma}, v_{\alpha\gamma}, w_{\alpha\gamma}, p_{\alpha\gamma}, T_{\alpha\gamma}) e^{i\alpha x + i\gamma z}, \quad (2.10)$$

где α и γ — вещественные продольное и поперечное волновые числа соответственно, а $u_{\alpha\gamma}$, $v_{\alpha\gamma}$, $w_{\alpha\gamma}$, $p_{\alpha\gamma}$, $T_{\alpha\gamma}$ — комплексные амплитуды, зависящие только от y и t . Кроме того, можно показать [107], что максимальный подскок средней плотности полной энергии достигается на решениях вида (2.10). Таким образом, можно ограничиться рассмотрением только таких решений. Для получения

физически значимых величин следует взять вещественную часть комплексного возмущения вида (2.10).

Подставив возмущения вида (2.10) в (2.9), получим следующую систему уравнений относительно амплитуд возмущений:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_{\alpha\gamma}}{\partial t} + i\alpha\bar{U}u_{\alpha\gamma} + \frac{d\bar{U}}{dy}v_{\alpha\gamma} + i\alpha p_{\alpha\gamma} + \Delta_{\nu}^{\alpha\gamma}u_{\alpha\gamma} &= 0, \\
\frac{\partial v_{\alpha\gamma}}{\partial t} + i\alpha\bar{U}v_{\alpha\gamma} + \frac{\partial p_{\alpha\gamma}}{\partial y} + \Delta_{\nu}^{\alpha\gamma}v_{\alpha\gamma} - RiT_{\alpha\gamma} &= 0, \\
\frac{\partial w_{\alpha\gamma}}{\partial t} + i\alpha\bar{U}w_{\alpha\gamma} + i\gamma p_{\alpha\gamma} + \Delta_{\nu}^{\alpha\gamma}w_{\alpha\gamma} &= 0, \\
\frac{\partial T_{\alpha\gamma}}{\partial t} + i\alpha\bar{U}T_{\alpha\gamma} + \frac{d\bar{T}}{dy}v_{\alpha\gamma} + \Delta_{\mu}^{\alpha\gamma}T_{\alpha\gamma} &= 0, \\
i\alpha u_{\alpha\gamma} + \frac{\partial v_{\alpha\gamma}}{\partial y} + i\gamma w_{\alpha\gamma} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

где

$$\Delta_{\nu}^{\alpha\gamma} = \alpha^2\bar{\nu} - \frac{\partial}{\partial y}\bar{\nu}\frac{\partial}{\partial y} + \gamma^2\bar{\nu}, \quad \Delta_{\mu}^{\alpha\gamma} = \alpha^2\bar{\mu} - \frac{\partial}{\partial y}\bar{\mu}\frac{\partial}{\partial y} + \gamma^2\bar{\mu}.$$

Для возмущения вида (2.10) в момент времени t , плотность полной энергии это сумма ее кинетической и потенциальной составляющих

$$\mathcal{E}_t = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(|u_{\alpha\gamma}|^2 + |v_{\alpha\gamma}|^2 + |w_{\alpha\gamma}|^2 + \frac{Ri}{d\bar{T}/dy} |T_{\alpha\gamma}|^2 \right) dy. \tag{2.12}$$

Отметим, что похожий функционал использовался в работах [102; 103] при исследовании оптимальных возмущений струйных течений при сильно-устойчивой стратификации.

Максимально возможное увеличение

$$\Gamma^{\alpha\gamma}(t) = \max \frac{\mathcal{E}_t}{\mathcal{E}_0}$$

плотности полной энергии возмущения, где максимум берется по всем начальным условиям удовлетворяющим дискретному аналогу уравнения неразрывности, будем называть максимальной амплификацией средней плотности полной энергии при фиксированных значениях α , γ и t .

Введем обозначения

$$\Gamma_{\max}^{\alpha\gamma} = \max_{t \geq 0} \Gamma^{\alpha\gamma}(t), \quad \Gamma_{\max} = \max_{\alpha, \gamma} \Gamma_{\max}^{\alpha\gamma}, \quad (\alpha_{\text{opt}}, \gamma_{\text{opt}}, t_{\text{opt}}) = \arg \max_{\alpha, \gamma, t} \Gamma^{\alpha\gamma}(t).$$

для максимальной амплификации средней плотности полной энергии при фиксированных волновых числах, глобальной максимальной амплификации и оптимальных значений волновых чисел и оптимального момента времени соответственно. Начальные возмущения, на которых достигаются $\Gamma_{\max}^{\alpha\gamma}$ и Γ_{\max} , будем называть оптимальным (при фиксированных значениях α и γ) и глобальным оптимальным возмущениями соответственно.

2.3.1 Особенности спектра линейного оператора

Решение вида

$$(u_{\alpha\gamma}, v_{\alpha\gamma}, w_{\alpha\gamma}, T_{\alpha\gamma}, p_{\alpha\gamma}) = (\tilde{u}_{\alpha\gamma}, \tilde{v}_{\alpha\gamma}, \tilde{w}_{\alpha\gamma}, \tilde{T}_{\alpha\gamma}, \tilde{p}_{\alpha\gamma}) e^{\lambda t} \quad (2.13)$$

системы (2.11), где λ — комплексное число, а $\tilde{f}_{\alpha\gamma}$ — комплексные амплитуды, зависящие только от y , называют ее собственной модой, отвечающей собственному значению λ . Подставляя (2.13) в (2.11), получим следующую проблему собственных значений:

$$\begin{aligned} \lambda \tilde{u}_{\alpha\gamma} + i\alpha \bar{U} \tilde{u}_{\alpha\gamma} + \frac{d\bar{U}}{dy} \tilde{v}_{\alpha\gamma} + i\alpha \tilde{p}_{\alpha\gamma} + \Delta_{\nu}^{\alpha\gamma} \tilde{u}_{\alpha\gamma} &= 0, \\ \lambda \tilde{v}_{\alpha\gamma} + i\alpha \bar{U} \tilde{v}_{\alpha\gamma} + \frac{d\tilde{p}_{\alpha\gamma}}{dy} + \Delta_{\nu}^{\alpha\gamma} \tilde{v}_{\alpha\gamma} - Ri \tilde{T}_{\alpha\gamma} &= 0, \\ \lambda \tilde{w}_{\alpha\gamma} + i\alpha \bar{U} \tilde{w}_{\alpha\gamma} + i\gamma \tilde{p}_{\alpha\gamma} + \Delta_{\nu}^{\alpha\gamma} \tilde{w}_{\alpha\gamma} &= 0, \\ \lambda \tilde{T}_{\alpha\gamma} + i\alpha \bar{U} \tilde{T}_{\alpha\gamma} + \frac{d\bar{T}}{dy} \tilde{v}_{\alpha\gamma} + \Delta_{\mu}^{\alpha\gamma} \tilde{T}_{\alpha\gamma} &= 0, \\ i\alpha \tilde{u}_{\alpha\gamma} + \frac{d\tilde{v}_{\alpha\gamma}}{dy} + i\gamma \tilde{w}_{\alpha\gamma} &= 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Комплексным сопряжением уравнений (2.14) с последующей заменой переменных $y \rightarrow -y$ можно доказать свойство проблемы (2.14), сформулированное в качестве Теоремы 6.

Теорема 6. Пусть $\bar{U}(y)$, $\bar{T}(y)$, $\bar{v}(y)$, $\bar{\mu}(y)$ удовлетворяют соотношениям (2.7), причем профили скорости и температуры являются нечетными функциями относительно центра канала. Тогда спектр проблемы собственных значений (2.14) симметричен относительно вещественной оси, и если

$$\left(\lambda, \tilde{u}_{\alpha\gamma}(y), \tilde{v}_{\alpha\gamma}(y), \tilde{w}_{\alpha\gamma}(y), \tilde{T}_{\alpha\gamma}(y), \tilde{p}_{\alpha\gamma}(y) \right)$$

является решением проблемы (2.14), то

$$\left(\lambda^*, \tilde{u}_{\alpha\gamma}(-y)^*, \tilde{v}_{\alpha\gamma}(-y)^*, \tilde{w}_{\alpha\gamma}(-y)^*, \tilde{T}_{\alpha\gamma}(-y)^*, -\tilde{p}_{\alpha\gamma}(-y)^* \right)$$

также является решением проблемы (2.14), где " * " означает комплексное сопряжение.

Теорема 6 является непосредственным обобщением соответствующего утверждения [2], справедливого для ламинарного течения Куэтта, то есть течения с $Re = 0$, $\bar{v} = 1/Re$, и линейным профилем продольной скорости основного течения $\bar{U}(y) = y/2$.

2.4 Пространственная аппроксимация и алгебраическая редукция

Обозначим через L_k полином Лежандра степени k . Пусть $-1 = y_0 < \dots < y_{n+1} = 1$ — это узлы Гаусса–Лобатто, то есть корни полинома $(1 - y^2)L'_{n+1}(y)$, где штрих означает производную по y . Узлы y_i являются узлами квадратурной формулы Гаусса–Лобатто

$$\int_{-1}^1 f(y) dy \approx \sum_{i=0}^{n+1} \kappa_i f(y_i), \quad \kappa_i = \frac{2}{(n+1)(n+2)L_{n+1}^2(y_i)} \quad (2.15)$$

для вычисления интегралов с единичным весом на отрезке $[-1, 1]$. Квадратурная формула (2.15) точна для любого полинома степени не выше $2n + 1$.

Пусть $\psi_i(y)$ и $\varphi_i(y)$ — это элементарные интерполяционные полиномы Лагранжа на сетках $y_0 < \dots < y_{n+1}$ и $y_1 < \dots < y_n$ соответственно. Эти полиномы представимы в явном виде как

$$\psi_i(y) = \frac{(y^2 - 1)L'_{n+1}(y)}{(n+1)(n+2)(y - y_i)L_{n+1}(y_i)}, \quad (2.16)$$

$$\varphi_i(y) = \frac{(y_i^2 - 1)L'_{n+1}(y)}{(n+1)(n+2)(y - y_i)L_{n+1}(y_i)}, \quad (2.17)$$

причем $\psi_i(y)$ — это полиномы степени $n+1$, а $\varphi_i(y)$ — полиномы степени $n-1$. Отметим, что $\psi_i(y)$ при $1 \leq i \leq n$ равны 0 при $y = \pm 1$.

Для аппроксимации по y системы уравнений (2.11) будем использовать метод Галеркина–коллокаций [108]. Функции $\psi_i(y)$ при $1 \leq i \leq n$ будем использовать в качестве базисных функций для амплитуд компонент скорости и температуры, а также в качестве пробных функций для первых четырех уравнений в (2.11). Функции $\varphi_i(y)$ будем использовать в качестве базисных функций для давления, а также в качестве пробных функций для последнего уравнения в (2.11). Для расчета фигурирующих в слабой постановке скалярных произведений будем использовать квадратурную формулу (2.15).

Таким образом, компоненты возмущения мы будем аппроксимировать как

$$g_{\alpha\gamma}(y, t) \approx \sum_{i=1}^n g_i(t) \psi_i(y), \quad p_{\alpha\gamma}(y, t) \approx \sum_{i=1}^n p_i(t) \varphi_i(y),$$

где g означает u , v , w или T . Коэффициенты $g_i(t)$, $p_i(t)$ являются значениями аппроксимантов в узле y_i .

Обозначим через K_0 диагональную матрицу порядка $n+2$, составленную из квадратурных весов (2.15), а через K — ее диагональную подматрицу, отвечающую внутренним узлам. Введем также диагональные матрицы U , U_y , N , M и T_y , составленные из значений профиля и производной профиля скорости основного течения, значений коэффициентов турбулентной вязкости и диффузии и значений производной профиля температуры основного течения, соответственно, во внутренних узлах сетки (все эти матрицы — порядка n). Обозначим через N_0 , M_0 диагональные матрицы порядка $n+2$, составленные из значений коэффициентов турбулентной вязкости и диффузии в узлах сетки $y_0 < \dots < y_{n+1}$.

Для вычисления значений производной функции, заданной во внутренних узлах сетки и удовлетворяющей нулевым граничным условиям, будем использовать матрицу дифференцирования D размера $(n+2) \times n$, составленную из значений первых производных функций $\psi_i(y)$ при $1 \leq i \leq n$ в узлах $y_0 < \dots < y_{n+1}$. Также нам потребуется матрица проектирования P размера $(n+2) \times n$, восстанавливающая по значениям функции во внутренних узлах ее значения в узлах $y_0 < \dots < y_{n+1}$. Эффективные методы вычисления матриц D и P описаны в [109].

Выполнив описанную аппроксимацию системы уравнений (2.11) методом Галеркина-коллокаций, получим систему обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений

$$\frac{dq}{dt} = Jq - Gp, \quad Fq = 0 \quad (2.18)$$

относительно векторов $q = E^{1/2}(u^T, v^T, w^T, T^T)^T$ и p , где

$$E = \frac{1}{2} \text{diag} (K, K, K, RiKT_y^{-1}),$$

а u, v, w, p, T — это n -компонентные векторы, зависящие только от t , компонентами которых являются значения соответствующих амплитуд во внутренних узлах сетки по y . Отметим, что при такой нормировке дискретным аналогом функционала (2.12) плотности полной энергии будет $\|q\|_2^2$.

Матрицы в (2.18) устроены следующим образом: J — квадратная матрица порядка $4n$, а G и F — прямоугольные матрицы размеров $4n \times n$ и $n \times 4n$ соответственно:

$$J = \begin{bmatrix} S_\nu & -U_y & 0 & 0 \\ 0 & S_\nu & 0 & R \\ 0 & 0 & S_\nu & 0 \\ 0 & -R & 0 & S_\mu \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} i\alpha I \\ G_y \\ i\gamma I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F = -G^*,$$

где I — единичная матрица порядка n ,

$$S_\nu = -i\alpha U - \alpha^2 N + L_\nu - \gamma^2 N, \quad S_\mu = T_y^{-1/2}(-i\alpha U - \alpha^2 M + L_\mu - \gamma^2 M)T_y^{1/2},$$

а G_y , F_y , L_ν , L_μ и R — квадратные вещественные матрицы порядка n : $G = -K^{-1/2}D^TK_0PK^{-1/2}$ и $F_y = -G_y^T$ — дискретные аналоги оператора $\partial/\partial y$ в градиенте давления и уравнении неразрывности соответственно, $L_\nu = -K^{-1/2}D^TK_0N_0DK^{-1/2}$ и $L_\mu = -K^{-1/2}D^TK_0M_0DK^{-1/2}$ — соответственно дискретные аналоги операторов

$$\frac{\partial}{\partial y}\bar{\nu}\frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\bar{\mu}\frac{\partial}{\partial y},$$

а $R = \sqrt{Ri}T_y^{1/2}$.

Из второго уравнения системы (2.18) следует, что q при всех t принадлежит ядру матрицы F . После замены переменных $q = V\phi$, где V — прямоугольная матрица, столбцы которой образуют ортонормированный базис в ядре матрицы F , и умножения полученного уравнения слева на V^* , а также с учетом того, что $G = -F^*$, мы получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\phi}{dt} = A\phi, \quad (2.19)$$

где $A = V^*JV$ — квадратная матрица порядка $3n+1$ при $\alpha = \gamma = 0$ и порядка $3n$ в остальных случаях. Подробное обоснование такого типа редукций линейных дифференциально-алгебраических систем дано в [110].

Для вычисления вектора значений амплитуды $(u_{\alpha\gamma}, v_{\alpha\gamma}, w_{\alpha\gamma}, T_{\alpha\gamma})$ возмущения вида (2.10) в узлах расчетной сетки необходимо сделать обратную замену переменных

$$(u^T, v^T, w^T, T^T)^T = E^{-1/2}V\phi. \quad (2.20)$$

Каждой собственной паре $(\lambda, \tilde{\phi})$ матрицы A соответствует (с точностью до погрешности аппроксимации) собственная мода (2.13) исходной системы (2.11). Ее амплитуда в узлах расчетной сетки может быть вычислена по формуле (2.20) с $\phi = \tilde{\phi}$.

Для вычисления $t = t_{\text{opt}}^{\alpha\gamma}$ применим матричный алгоритм, предложенный в [43] и кратко описанный в Разделе 1.2 данной диссертационной работы. После того, как $t_{\text{opt}}^{\alpha\gamma}$ найдено, вычисляем максимальное сингулярное число σ_{opt} и отвечающие ему правый ϕ_{opt} и левый χ_{opt} нормированные сингулярные векторы матрицы $\exp(t_{\text{opt}}^{\alpha\gamma}A)$. Максимальная амплификация $\Gamma_{\text{max}}^{\alpha\gamma}$ равна σ_{opt}^2 , а ампли-

туда оптимального возмущения в моменты времени $t = 0$ и $t = t_{\text{opt}}^{\alpha\gamma}$ в узлах расчетной сетки может быть вычислена по формуле (2.20) с $\phi = \phi_{\text{opt}}$ и $\phi = \chi_{\text{opt}}$ соответственно.

Эволюция плотности полной энергии E_{opt} и эволюция плотности кинетической энергии E_{opt}^K оптимального возмущения могут быть вычислены как

$$E_{\text{opt}}(t) = \|\Phi(t)\|_2^2, \quad E_{\text{opt}}^K(t) = \|\text{diag}(\mathbf{I}, \mathbf{I}, \mathbf{I}, 0)\mathbf{V}\Phi(t)\|_2^2,$$

где $\Phi(t) = \exp(t\mathbf{A})\phi_{\text{opt}}$.

3. Использование оптимальных возмущений для анализа организованных структур в стратифицированном турбулентном течении Куэтта

Во всех дальнейших экспериментах с линейной моделью, число узлов n сетки по y равно 100. Было проверено, что увеличение числа узлов сетки не влияет на описанные ниже результаты.

3.1 Крупномасштабные организованные структуры

3.1.1 Продольные стрики и наклонные структуры

Рассмотрим стратифицированное турбулентное течение при фиксированном числе Рейнольдса $Re = 4 \cdot 10^4$ и двух различных числах Ричардсона $Ri = 0.01$ и 0.03 , соответствующих случаю, близкому к нейтральной стратификации, и случаю устойчивой стратификации соответственно. При $Re = 4 \cdot 10^4$, $Ri = 0.01$ согласно результатам прямого численного моделирования [86] в турбулентном течении на фоне мелкомасштабной турбулентности выделяются крупномасштабные вытянутые в продольном направлении вихри в поперечном сечении канала, в то время как при $Ri = 0.03$ — проявляются наклонные слоистые структуры в поле температуры [17].

На Рисунке 3.1 изображены линии уровня максимальной амплификации $\Gamma_{\max}^{\alpha\gamma}$ плотности полной энергии возмущений в плоскости волновых чисел (α, γ) . Приведена только четверть плоскости, так как $\Gamma_{\max}^{\alpha\gamma}$ инвариантна относительно замены переменных $(\alpha, \gamma) \rightarrow (-\alpha, \gamma)$ и $(\alpha, \gamma) \rightarrow (\alpha, -\gamma)$. При $Ri = 0.01$ глобальная максимальная амплификация достигается при значении продольного волнового числа $\alpha_{\text{opt}} = 0$, то есть оптимальное возмущение не зависит от продольной координаты x , в то время как при $Ri = 0.03$ глобальная максимальная амплификация достигается при ненулевых значениях волновых чисел $\alpha_{\text{opt}} \approx 0.4$, $\gamma_{\text{opt}} \approx 1.1$ (оптимальное возмущение является существенно трехмерным).

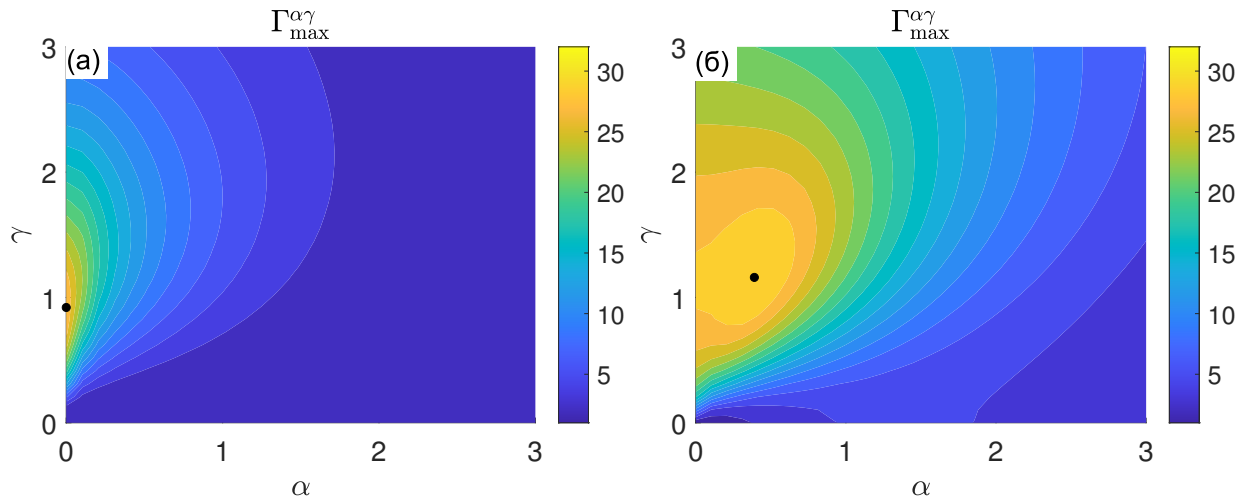


Рисунок 3.1 — Линии уровня максимальной амплификации $\Gamma_{\max}^{\alpha\gamma}$ при $Re = 4 \times 10^4$, $Ri = 0.01$ (слева) и $Re = 4 \cdot 10^4$, $Ri = 0.03$ (справа) в плоскости волновых чисел (α, γ) . Точки глобального максимума выделены черным.

Пространственная конфигурация соответствующих оптимальных возмущений показана на Рисунке 3.2, где u , v , w , T — это вещественные части компонент скорости и температуры возмущения вида (2.10). На Рисунке 3.2 (а-г) показаны компоненты скорости и температуры оптимального возмущения при $Re = 4 \cdot 10^4$, $Ri = 0.01$ в сечении канала $x = 0$ для одного периода в поперечном направлении. Значения продольного и поперечного волновых чисел этого оптимального возмущения равны $\alpha_{\text{opt}} = 0$ и $\gamma_{\text{opt}} \approx 0.92$ (т.е., поперечная длина волны $\lambda_z = 2\pi/\gamma_{\text{opt}} \approx 6.8$) соответственно. В этом случае оптимальное возмущение представляет собой крупномасштабные чередующиеся по направлению вращения продольные вихри. В начальном (при $t = 0$) оптимальном возмущении преобладает кинетическая энергия вращения поперечной и вертикальной (w, v) компонент скорости, то есть это возмущение представляет собой ролики. Особенностью роликов при наличии устойчивой стратификации (в отличие от нейтрально-стратифицированного случая) является то, что их температура не постоянна и сосредоточена прежде всего вблизи стенок канала. Развитое (при $t = t_{\text{opt}}$) оптимальное возмущение представляет собой стрики, то есть крупномасштабные вытянутые в продольном направлении структуры в которых преобладают продольные движения. Температура стриков в момент максимального роста энергии распределена так же, как и продольная компонента скорости. В нейтрально-стратифицированных течениях, развитие роликов в стрики происходит за счет эффекта опрокидывания. Эффект опрокидывания также опреде-

ляет рост энергии возмущений при малых числах Ричардсона. Отметим, что поперечный размер роликов при наличии устойчивой стратификации может оказаться больше ($\lambda_z \approx 4 - 6$) чем аналогичная величина из работ [13; 14; 111], где рассматривались только нейтрально-стратифицированные течения.

На Рисунке 3.2 (д-з) показаны компоненты скорости и температуры оптимального возмущения при $Re = 4 \cdot 10^4$, $Ri = 0.03$ в сечении канала $x = 0$ для одного периода в поперечном направлении. Значения продольного и поперечного волновых чисел этого оптимального возмущения равны $\alpha_{opt} \approx 0.39$ (т.е., продольная длина волны $\lambda_x = 2\pi/\alpha_{opt} \approx 16$) и $\gamma_{opt} \approx 1.16$ (т.е., поперечная длина волны $\lambda_z = 2\pi/\gamma_{opt} \approx 5.4$) соответственно. Форма оптимального возмущения в продольном сечении канала ($z = 0$) отличается только большим горизонтальным размером. В начальный момент времени $t = 0$ продольная скорость и температуры оптимального возмущения сильно наклонены против сдвига скорости основного течения. За время эволюции возмущения к моменту $t = t_{opt}$, они приобретают противоположный наклон. Похоже наклонные возмущения были ранее обнаружены при исследовании оптимальных возмущений ламинарного течения Куэтта при нейтральной стратификации [9]. Их развитие занимало меньше времени чем развитие роликов в стрики. В работе [9] механизм роста энергии таких наклонных возмущений объяснялся совместным действием эффекта опрокидывания и механизма Орра (возмущение может получить энергию из основного течения в момент поворота относительно сдвига средней скорости). Однако, в отличие от рассматриваемых устойчиво-стратифицированных турбулентных течений, наклонные возмущения являются глобальными оптимальными возмущениями только при малых числах Ричардсона и имеют гораздо большую продольную длину волны $\lambda_x > 41.9$ [9].

На Рисунке 3.3 вещественная часть компонент скорости наклонного оптимального возмущения (при $Re = 4 \cdot 10^4$, $Ri = 0.03$) показана в горизонтальном сечении $y = 0$. При $t = 0$ горизонтальная скорости почти перпендикулярна фронту волны, а при $t = t_{opt}$ направлена вдоль него. Изоповерхности вещественной части температуры этого оптимального возмущения при $t = t_{opt}$ изображены на Рисунке 3.4 (а-б). Таким образом, в соответствии с Рисунке 3.2-3.4, наклонные оптимальные возмущения так же представляют собой ролики (при $t = 0$) и стрики (при $t = t_{opt}$), но наклоненные под некоторым углом в горизонтальной и вертикальной плоскостях.

Отметим, что $\Gamma_{\max}^{\alpha\gamma} = \Gamma_{\max}^{-\alpha,\gamma} = \Gamma_{\max}^{\alpha,-\gamma}$. Поэтому если глобальный максимальная амплификация достигается при волновых числах $(\alpha_{\text{opt}}, \gamma_{\text{opt}})$, то существуют возмущения вида (2.10) с волновыми числами $(-\alpha_{\text{opt}}, \gamma_{\text{opt}})$ и $(\alpha_{\text{opt}}, -\gamma_{\text{opt}})$, которым соответствует такой же подскок энергии. Из-за взаимной ортогональности возмущений вида (2.10) при различных парах волновых чисел и линейности задачи, произвольная линейная комбинация оптимальных возмущений с положительными и отрицательными поперечными волновыми числами также достигает того же самого подскока энергии. В качестве примера такой линейной комбинации на Рисунке 3.4 (в) показана вещественная часть полусуммы двух оптимальных возмущений. Это возмущение тоже представляет собой наклонное существенно трехмерное движение и напоминает структуры, выделенные в работе [16] с помощью метода условного осреднения из результатов вихре-разрешающего моделирования устойчиво-стратифицированного турбулентного слоя Экмана. В работе [16] пространственная конфигурация выделенных структур интерпретировалась как шпилькообразные вихри. Рисунок 3.4 (в) показывает, что похожая вихревая структура может быть получены и в случае, если крупномасштабные структуры являются наклонными стриками, так как положительные и отрицательные поперечные волновые числа не отличимы друг от друга в используемом в [16] методе визуализации.

3.1.2 Зависимость от чисел Рейнольдса и Ричардсона

Рассмотрим стратифицированное турбулентное течение Куэтта при 27 различных парах чисел Рейнольдса и Ричардсона (Re, Ri) , изменяющихся в диапазонах: $Re \cdot 10^{-4} = 1, 2, 4, 6$ и $0 \leq Ri \leq 0.055$. Результаты вычисления глобальной амплификации Γ_{\max} , оптимальных волновых чисел $(\alpha_{\text{opt}}, \gamma_{\text{opt}})$ и оптимального момента времени t_{opt} приведены в Таблице 3.1. В этой же Таблице приведены соответствующие значения параметра устойчивости ζ . Напомним, что оптимальные возмущения с $\alpha_{\text{opt}} = 0$ представляют собой крупномасштабные продольные вихри развивающиеся в продольные стрики, а оптимальные возмущения с $\alpha_{\text{opt}} > 0$ - наклонные структуры.

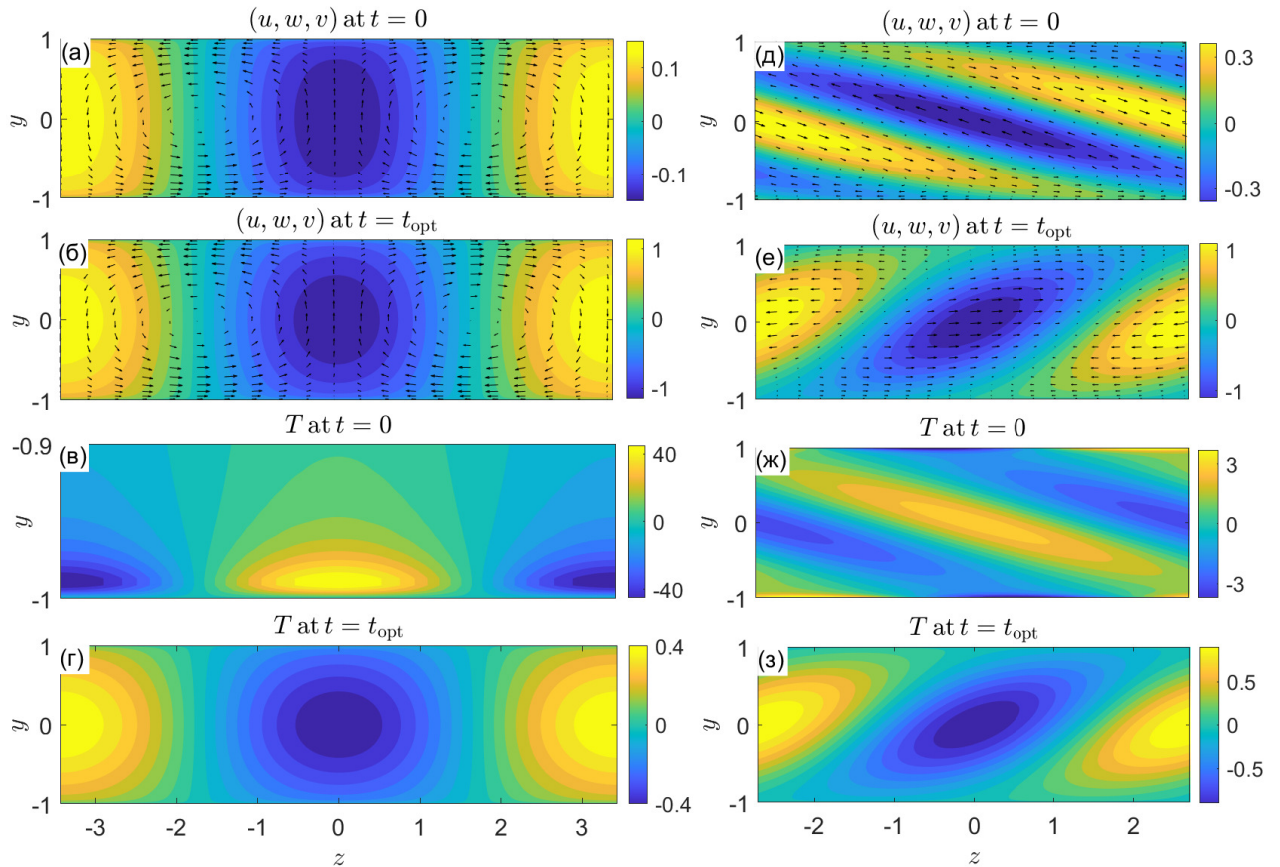


Рисунок 3.2 — Вещественная часть компонент оптимального возмущения при $Re = 4 \cdot 10^4$, $Ri = 0.01$ (а-г) и $Re = 4 \cdot 10^4$, $Ri = 0.03$ (д-з) в сечении канала $x = 0$. Изолинии продольной скорости u (цветом) и компонент скорости (w, v) (стрелками) при $t = 0$ (а, д) и при $t = t_{\text{opt}}$ (б, е). Изолинии температуры T (цветом) при $t = 0$ (в, ж) и при $t = t_{\text{opt}}$ (г, з). На Рисунке 3.2 (в) показана только часть канала вблизи нижней стенки.

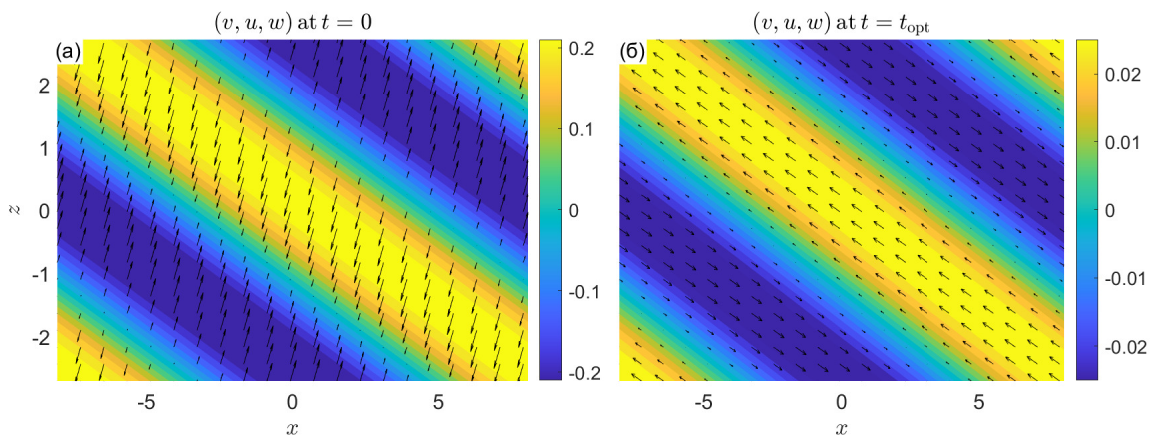


Рисунок 3.3 — Линии уровня вертикальной скорости v (цветом) и компонент скорости (u, w) (стрелками) вещественной части оптимального возмущения при $Re = 4 \cdot 10^4$, $Ri = 0.03$ в момент времени $t = 0$ (а) и $t = t_{\text{opt}}$ (б) в сечении канала $y = 0$.

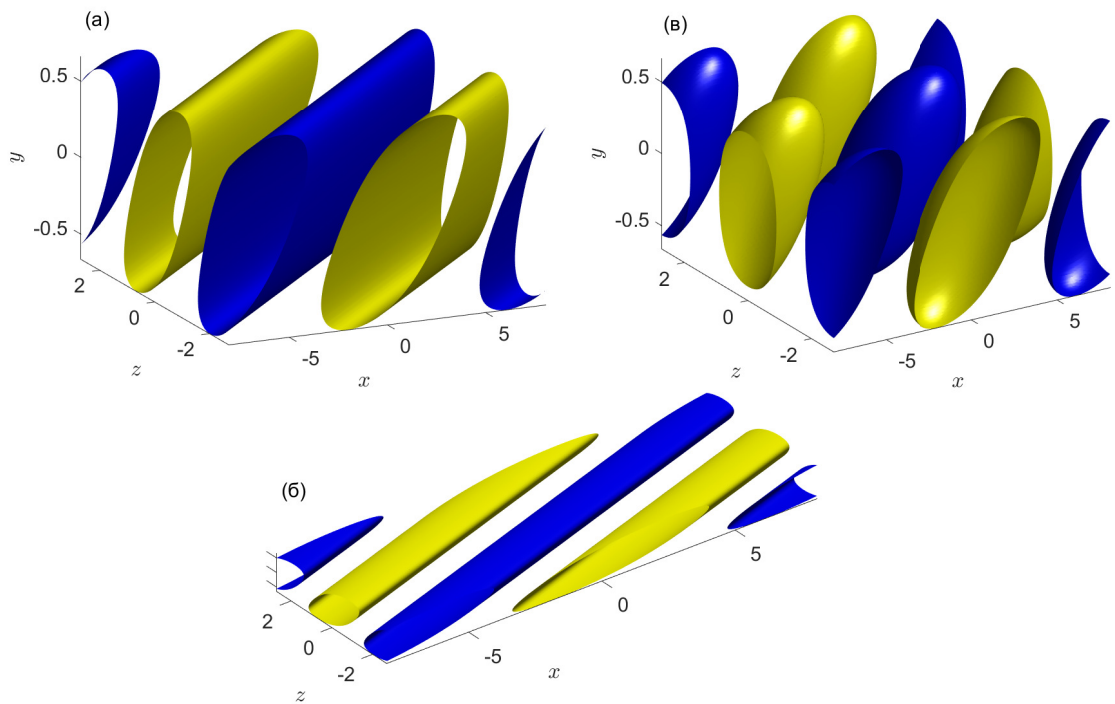


Рисунок 3.4 — Изоповерхности температуры T оптимальных возмущений при $Re = 4 \cdot 10^4$, $Ri = 0.03$ и $t = t_{\text{opt}}$. (а): Вещественная часть оптимального возмущения с волновыми числами $(\alpha_{\text{opt}}, \gamma_{\text{opt}})$. (б): то же, что и (а), но с соблюдением масштаба. (в): Вещественная часть полусуммы двух оптимальных возмущений с волновыми числами $(\alpha_{\text{opt}}, \gamma_{\text{opt}})$ и $(\alpha_{\text{opt}}, -\gamma_{\text{opt}})$.

Из Таблицы 3.1 видно, что в случае нейтральной стратификации ($Ri = 0$) значения глобальной максимальной амплификации Γ_{\max} и оптимального поперечного волнового числа γ_{opt} уменьшаются с ростом числа Рейнольдса, причем значения Γ_{\max} лежат в диапазоне 2 – 3, что согласуется с результатами работы [111]. Оптимальное поперечное волновое число γ_{opt} при $Ri = 0$ также хорошо согласуется с характерным поперечным размером крупномасштабных стриков, полученным по результатам прямого численного моделирования в недавней работе [87].

Наличие устойчивой стратификации ($Ri > 0$) приводит к значительному росту глобальной максимальной амплификации. Также амплификация увеличивается с увеличением числа Рейнольдса. Зависимость глобальной максимальной амплификации от числа Ричардсона показана на Рисунке 3.5 (а). На кривой $\Gamma_{\max}(Ri)$ наблюдаются три характерных участка: рост амплификации для роликов (красные точки), переход от роликов к наклонным структурам и рост амплификации для наклонных структур (синие точки). Может показаться парадоксальным, что максимальная амплификации растет с увеличением числа Ричардсона, однако следует учесть следующее: увеличение Ri приводит к уменьшению коэффициентов турбулентной вязкости и турбулентной диффузии (см. Рисунок 2.2).

Отметим, что при прямом численном моделировании турбулентного нейтрально-стратифицированного течения Куэтта наиболее интенсивными крупномасштабными движениями являются ролики и стрики, а при переходе к устойчивой стратификации наблюдается резкое ослабление всех крупномасштабных флуктуаций. Поэтому малые значения глобальной максимальной амплификации при $Ri = 0$, скорее всего, связаны с существенным вкладом рассматриваемых крупномасштабных структур в коэффициент турбулентной вязкости, что отмечалось в Разделе 2.1.

Зависимость оптимального продольного волнового числа от параметра устойчивости ζ представлена на Рисунке 3.5 (б). Оптимальное продольное волновое число отлично от нуля при большей устойчивости, причем наблюдается явно выраженное критическое значение $\zeta_{\text{cr}} \approx 2.32$ такое что при $\zeta < \zeta_{\text{cr}}$ оптимальное возмущение представляет собой крупномасштабные ролики, развивающиеся в продольные стрики, а при $\zeta > \zeta_{\text{cr}}$ оптимальное возмущение представляет собой наклонные структуры с ненулевым продольным волновым числом.

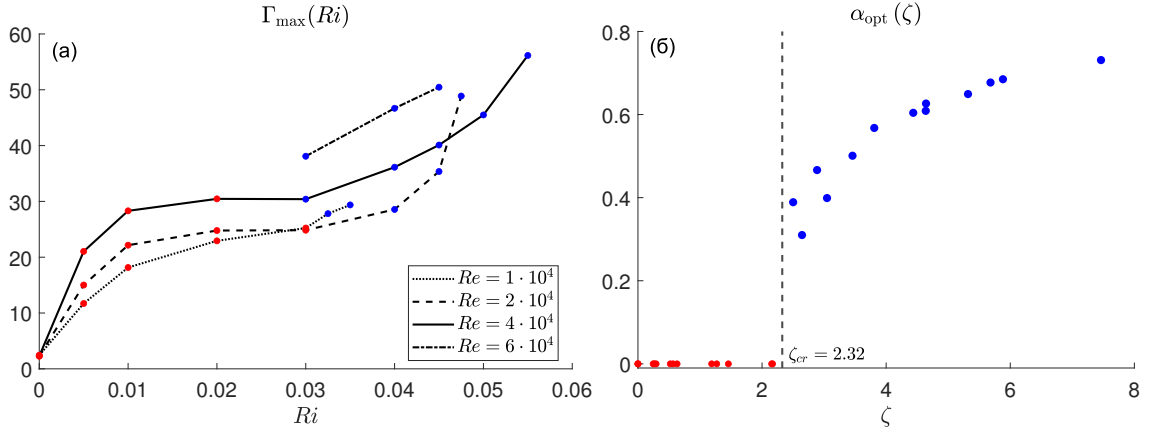


Рисунок 3.5 — (а): Зависимость максимальной амплификации Γ_{\max} от Ri при фиксированном Re . (б): Зависимость оптимального продольного волнового числа α_{opt} от безразмерного параметра ζ . Значения, для которых $\alpha_{\text{opt}} = 0$ и $\alpha_{\text{opt}} \neq 0$, отмечены красным и синим соответственно.

Рассматриваемый диапазон ζ соответствует значениям, измеряемым в устойчивом атмосферном пограничном слое. В частности, $\zeta_{\text{cr}} = 2.32$ соответствует $\zeta = 0.81$, если в определение масштаба длины Обухова ввести дополнительный множитель $1/\kappa$ при $\kappa = 0.35$, как было сделано в [112].

Отсутствие данных прямого численного моделирования вблизи критического значения ζ_{cr} не позволяет сделать строгих выводов, но можно предположить, что переход от $\alpha_{\text{opt}} = 0$ к $\alpha_{\text{opt}} > 0$ происходит непрерывно, поскольку, во-первых, зависимость $\Gamma_{\max}^{\alpha\gamma}$ от волнового числа всегда имеет только один локальный максимум в крупномасштабной части плоскости (α, γ) (что видно на Рисунке 3.1 и при аналогичных расчетах для других рассматриваемых пар (Re, Ri)). Вторым аргументом является то, что оптимальные возмущения при $\alpha_{\text{opt}} > 0$ представляют собой наклонные ролики и стрики, т.е. можно предположить гладкое изменение формы возмущения от случая $\alpha_{\text{opt}} = 0$, когда оптимальные возмущения представляют собой продольные ролики и стрики.

Также отметим, что при всех рассмотренных парах (Re, Ri) не было обнаружены неустойчивых собственных мод, то есть все рассматриваемые профили осредненного турбулентного течения являются линейно-устойчивыми.

Таблица 3.1 — Вычисленные значения Γ_{\max} , $(\alpha_{\text{opt}}, \gamma_{\text{opt}})$, t_{opt} для глобальных оптимальных возмущений, а также параметр статической устойчивости ζ при различных Ri и Re . Строка отмеченная индексом "*" соответствует данным из работы [111].

$Ri \cdot 10^2$	$Re \cdot 10^{-4}$	Γ_{\max}	$(\alpha_{\text{opt}}, \gamma_{\text{opt}})$	t_{opt}	ζ
	0.075*	3.31*	(0.00, 1.46)*	-	0
0	1	2.44	(0.00, 1.20)	41.9	0
	2	2.31	(0.00, 1.15)	46.7	0
	4	2.26	(0.00, 1.14)	50.8	0
0.5	1	11.7	(0.00, 1.00)	121	0.24
	2	15.0	(0.00, 0.94)	148	0.27
	4	21.0	(0.00, 0.91)	171	0.29
1	1	18.2	(0.00, 0.99)	108	0.52
	2	22.2	(0.00, 0.94)	122	0.57
	4	28.3	(0.00, 0.92)	131	0.63
2	1	22.9	(0.00, 1.06)	74.4	1.19
	2	24.8	(0.00, 1.00)	81.2	1.27
	4	30.4	(0.00, 1.01)	80.5	1.46
3	1	25.2	(0.00, 1.23)	52.3	2.15
	2	24.8	(0.00, 1.12)	57.5	2.17
	4	30.4	(0.39, 1.16)	46.6	2.50
	6	38.1	(0.47, 1.14)	46.7	2.89
3.25	1	27.8	(0.31, 1.33)	41.6	2.64
3.5	1	29.4	(0.40, 1.37)	38.9	3.05
	2	28.6	(0.50, 1.18)	40.1	3.46
	4	36.1	(0.57, 1.10)	41.8	3.81
4	6	46.7	(0.60, 1.05)	44.1	4.44
	2	35.3	(0.61, 1.15)	39.7	4.64
	4	40.1	(0.63, 1.06)	41.4	4.64
4.5	6	50.5	(0.65, 1.02)	43.7	5.32
	2	48.9	(0.69, 1.07)	41.7	5.88
4.75	2	48.9	(0.69, 1.07)	41.7	5.88
5	4	45.5	(0.68, 1.02)	41.6	5.69
5.5	4	56.1	(0.73, 0.97)	43.8	7.46

3.1.3 Сравнение с результатами прямого численного моделирования

Ограничимся теперь рассмотрением только тех возмущений вида (2.10), которые удовлетворяют периодическим условиям в горизонтальной плоскости на границах расчетной области модели DNS с размерами $L_x = 12$, $L_z = 8$. Таким образом, допустимые волновые числа определены как

$$\alpha = \frac{2\pi k_x}{L_x}, \quad \gamma = \frac{2\pi k_z}{L_z}, \quad (3.1)$$

где номера гармоник k_x, k_z — произвольные целые числа.

Поле (w, v) скорости вещественной части оптимального возмущения при $(\alpha, \gamma) = (0, \pi/4)$ в случае, близком к нейтральной стратификации ($Re = 4 \cdot 10^4$, $Ri = 0.01$), в момент времени $t = t_{\text{opt}}^{\alpha\gamma}$ изображено на Рисунке 3.6 (а). Это оптимальное возмущение имеет амплификацию, равную 27.9, максимальную среди всех возмущений вида (2.10) с $\alpha = 0$ и γ , удовлетворяющим (3.1). Видно, что пространственная структура этого оптимального возмущения в момент его максимальной амплификации совпадает с пространственной структурой роликов при нейтральной стратификации, изображенных на Рисунке 2.3. Отметим, что оптимальное возмущение с волновыми числами $(0, \pi/2)$ имеет амплификацию 22.8, а остальные возмущения, не зависящие от x и удовлетворяющие (3.1), имеют значительно меньшую амплификацию (см. Рисунок 3.1 слева). Следует также отметить, что оптимальное возмущение с $(\alpha, \gamma) = (0, \pi/4)$ достигает максимальной амплификации при $t_{\text{opt}}^{\alpha\gamma} \approx 150$, а с $(0, \pi/2)$ при $t_{\text{opt}}^{\alpha\gamma} \approx 83$.

На Рисунке 3.6 (б-г) изображены линии уровня температуры вещественных частей оптимальных возмущений в случае устойчивой стратификации ($Re = 4 \cdot 10^4$, $Ri = 0.03$) при значениях волновых чисел $(\alpha, \gamma) = (\pi/6, \pi/4)$, $(\pi/3, \pi/4)$ и $(\pi/3, \pi/2)$ при $t = t_{\text{opt}}^{\alpha\gamma}$. Эти волновые числа соответствуют крупномасштабным гармоникам с номерами $(k_x, k_z) = (1, 1)$, $(2, 1)$ и $(2, 2)$, выделенным из результатов DNS (см. Рисунок 2.5). Видно хорошее совпадение пространственных структур крупномасштабных гармоник и соответствующих оптимальных возмущений. Обратим внимание на то, что оптимальные возмущения и структуры, наблюдаемые в DNS, характеризуются близким наклоном линий

уровня, а совпадение периода по оси x является тривиальным следствием того, что соответствующие продольные волновые числа одинаковы.

Отметим, что оптимальные возмущения определены с точностью до произвольной ненулевой комплексной мультипликативной константы. Следовательно, при визуальном сравнении крупномасштабных структур, изображенных на Рисунке 2.3 и 2.5, с оптимальными возмущениями, изображенными на Рисунке 3.6, нужно учитывать произвольность фазы этих возмущений, отвечающей за пространственный сдвиг в горизонтальной плоскости.

Для количественного сравнения крупномасштабных гармоник и соответствующих им по волновым числам оптимальных возмущений были вычислены коэффициенты их корреляции $r_{\mathcal{E}}$ в энергетическом скалярном произведении, отвечающем функционалу энергии (2.12). Для этого, амплитуды оптимальных возмущений интерполировались на сетку по y , использованную в при прямом численном моделировании. В каждом случае была проведена максимизация $r_{\mathcal{E}}$ по фазе оптимального возмущения. Вычисления дали следующие результаты: $r_{\mathcal{E}} = 0.826$, 0.812 и 0.842 для соответственно $(k_x, k_z) = (1,1)$, $(2,1)$ и $(2,2)$.

На Рисунке 3.7 линии уровня максимальной амплификации $\Gamma_{\max}^{\alpha\gamma}$ (Рисунок 3.1) и линии уровня оптимального момента времени $t_{\text{opt}}^{\alpha\gamma}$ при $Ri = 0.03$ сопоставляются с энергетической спектрограммой (Рисунок 2.4). Волновые числа и номера гармоник связаны соотношениями (3.1). Видно, что выделенным в Разделе 2.2 крупномасштабным гармоникам соответствуют оптимальные возмущения, достигающие больших значений максимальной амплификации при сравнительно небольшом времени их нарастания.

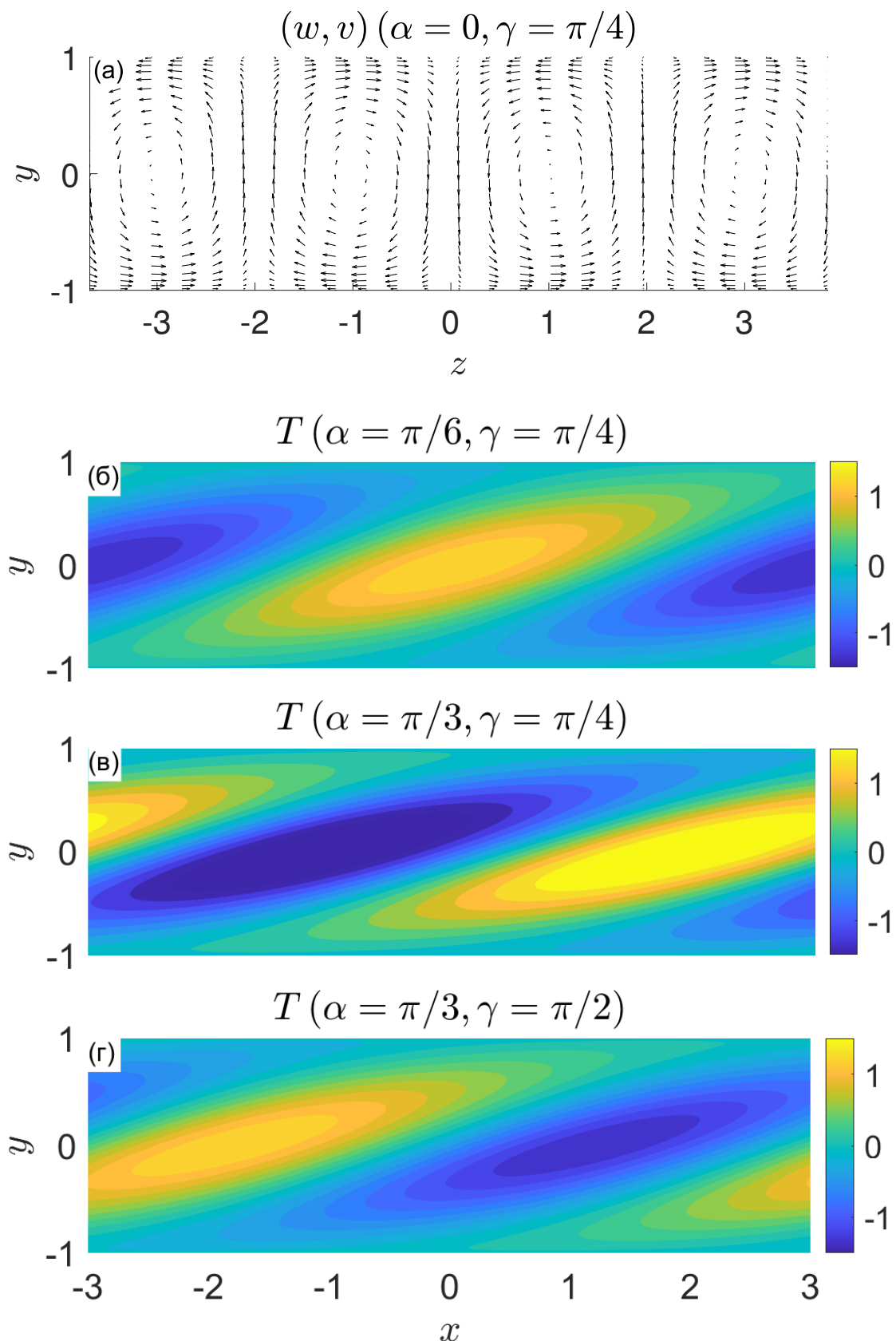


Рисунок 3.6 — (а): поле скорости вещественной части оптимального возмущения в сечении $x = 0$ при $Ri = 0.01$, $\alpha = 0$ и $\gamma = \pi/4$. (б-г): температура вещественных частей оптимальных возмущений в сечении $z = 0$ при $Ri = 0.03$ и значениях $(\alpha, \gamma) = (\pi/6, \pi/4)$, $(\pi/3, \pi/4)$ и $(\pi/3, \pi/2)$.

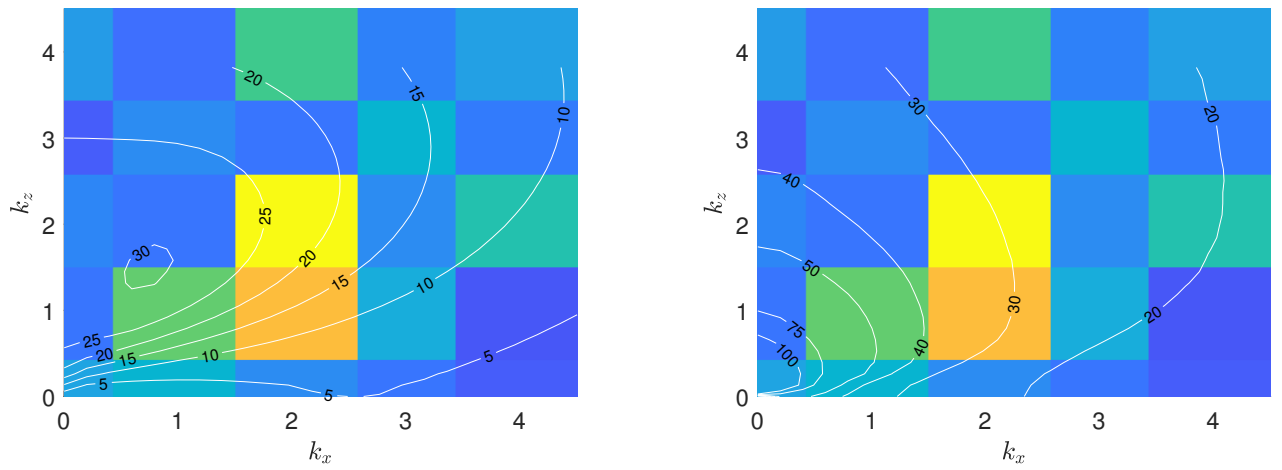


Рисунок 3.7 — Сравнение энергетической спектрограммы (Рисунок 2.4) с линиями уровня $\Gamma_{\max}^{\alpha\gamma}$ (слева) и $t_{\text{opt}}^{\alpha\gamma}$ (справа).

3.2 Спектральный состав оптимальных возмущений

Данный раздел посвящен анализу спектрального состава оптимальных возмущений, то есть ответу на вопрос: можно ли выделить инвариантное подпространство небольшой размерности, отвечающее некоторому подмножеству спектра матрицы системы (2.19), по элементам которого можно с хорошей точностью разложить оптимальное возмущение при $t = 0$ и $t = t_{\text{opt}}$.

Для численных экспериментов рассмотрим стратифицированное турбулентное течение при числе Ричардсона $Ri = 0.03$, соответствующего случаю устойчивой стратификации, и числах Рейнольдса $Re = 2 \cdot 10^4$, $4 \cdot 10^4$ и $6 \cdot 10^4$. По результатам параметрических расчетов (см. Таблицу 3.1) известно, что при $Re = 2 \cdot 10^4$ глобальное оптимальное возмущение имеет продольное волновое число $\alpha = 0$ и представляет собой крупномасштабные вытянутые в продольном направлении ролики, развивающиеся в стрики, в то время как при больших числах Рейнольдса оптимальные возмущения представляют собой наклонные слоистые структуры. Таким образом, тип оптимального возмущения меняется с увеличением числа Рейнольдса для данного набора параметров.

На Рисунке 3.8 изображена ведущая часть спектра матрицы A (2.19) при $Ri = 0.03$ и различных числах Рейнольдса при соответствующих оптимальных значениях волновых чисел $(\alpha_{\text{opt}}, \gamma_{\text{opt}})$ и числе узлов сетки $n = 100$ и 200 . В изображенных ведущих частях спектров кратных собственных значений обнаружено не было. Видно, что при $n = 100$ достигается сходимость собственных значений по шагу сетки. Изображенные спектры симметричны относительно вещественной оси, так как каждой собственной моде системы (2.19) соответствует (с точностью до погрешности аппроксимации) собственный вектор проблемы (2.14), для которой в Разделе 2.3.1 доказана Теорема 6 о симметричности спектра. Отметим, что при минимальном из рассмотренных чисел Рейнольдса максимальную вещественную часть имеет вещественное собственное значение, а при больших числах Рейнольдса максимальную вещественную часть имеет комплексно-сопряженная пара собственных значений. Также отметим, что с увеличением числа Рейнольдса спектр вытягивается вдоль мнимой оси.

Пусть Λ означает некоторое изолированное подмножество спектра матрицы H , \mathcal{U} — инвариантное подпространство, отвечающее Λ , а $P_{\mathcal{U}}$ — соответ-

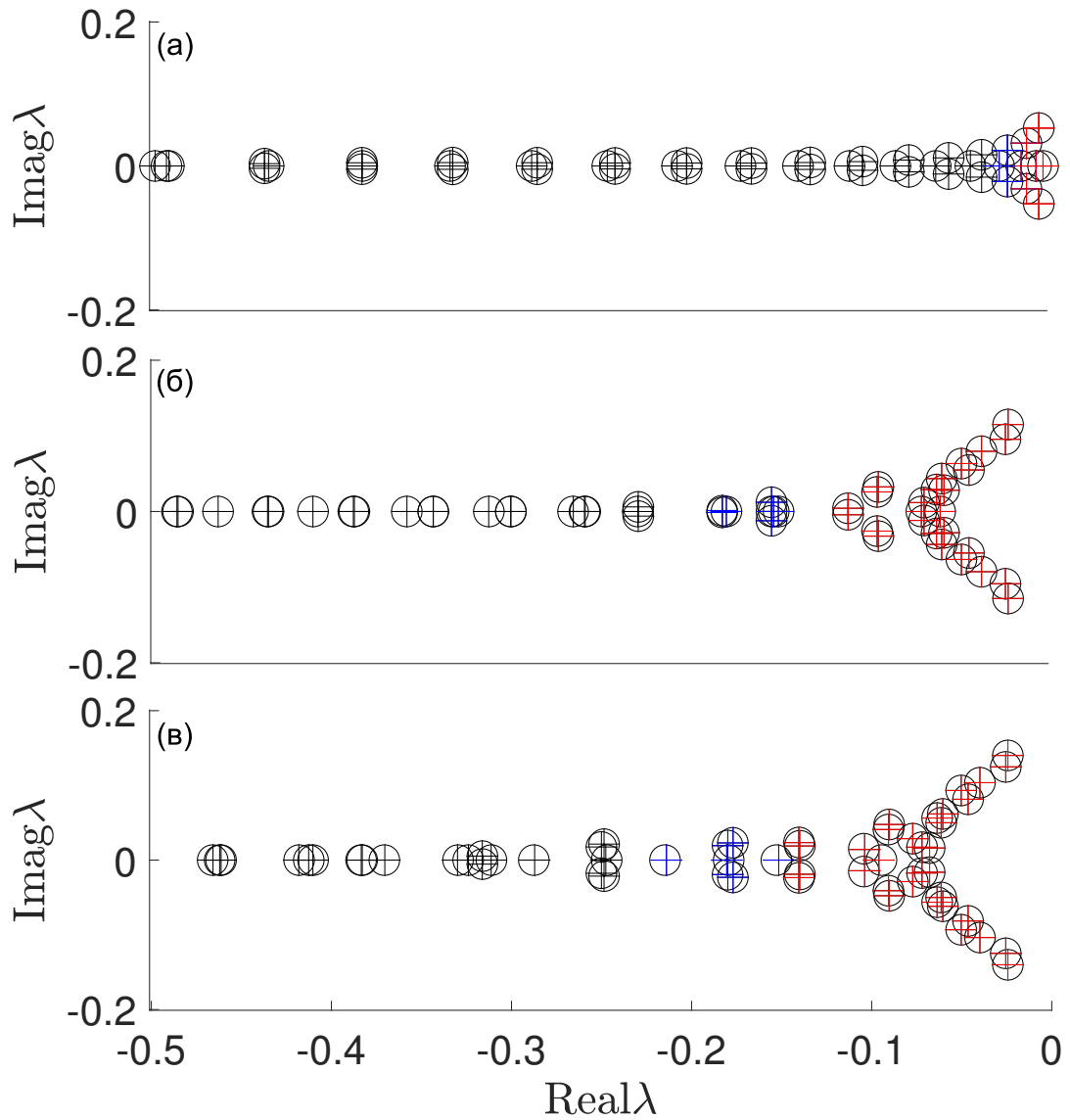


Рисунок 3.8 — Ведущая часть спектра матрицы A (2.19) при $Ri = 0.03$, $Re = 2 \cdot 10^4$ (а), $4 \cdot 10^4$ (б), $6 \cdot 10^4$ (в) и оптимальных значениях волновых чисел $(\alpha_{\text{opt}}, \gamma_{\text{opt}})$, вычисленная на сетках с $n = 100$ ("+") и 200 ("o"). Подмножества спектра Λ_{11} и Λ_{12} выделены красным и синим цветами соответственно.

ствующий спектральный проектор, то есть проектор на \mathcal{U} , коммутирующий с матрицей A . Нас будет интересовать максимальная амплификация (1.5) на подпространстве и норма проекции (1.6) оптимального возмущения на это подпространство. Алгоритмы вычисления этих характеристик для заданного подмножества спектра описаны в Разделе 1.1, а данный раздел посвящен результатам численных экспериментов. Далее будем использовать величины $\Gamma_{\max, \mathcal{U}}^2$, где $\Gamma_{\max, \mathcal{U}}$ определено в (1.5), и $c_{\mathcal{U}}^2(t)$, где $c_{\mathcal{U}}(t)$ определено в (1.6), так как они согласуются с функционалом энергии (2.12).

Для каждого из выбранных наборов параметров введем инвариантные подпространства, отвечающие изолированным подмножествам спектра $\lambda(A)$ матрицы A следующего вида:

$$\Lambda_1 = \{\lambda \in \lambda(A) : \text{Real}\lambda > r_1\}, \quad \Lambda_2 = \lambda(A) \setminus \Lambda_1,$$

$$\Lambda_{11} = \{\lambda \in \lambda(H) : \text{Real}\lambda > r_2\}, \quad \Lambda_{12} = \Lambda_1 \setminus \Lambda_{11},$$

где $r_1 < r_2 < 0$. Подмножества Λ_{11} и Λ_{12} отличаются для разных наборов параметров и выделены на Рисунке 3.8 красным и синим цветами соответственно. Обозначим через $\dim \mathcal{U}$ размерность (т.е., суммарную алгебраическую кратность собственных значений, входящих в Λ) инвариантного подпространства. Результаты вычисления $\dim \mathcal{U}$, $\Gamma_{\max, \mathcal{U}}^2$ и $c_{\mathcal{U}}^2(t)$ для введенных подмножеств спектра приведены в Таблице 3.2.

Таблица 3.2 — Размерность инвариантного подпространства \mathcal{U} , максимальная амплификация $\Gamma_{\max, \mathcal{U}}^2$ на этом подпространстве и величина $c_{\mathcal{U}}^2$ проекции оптимального возмущения на \mathcal{U} при $t = 0$ и $t = t_{\text{opt}}$.

	\mathcal{U}	$\dim \mathcal{U}$	$\Gamma_{\max, \mathcal{U}}^2$	$c_{\mathcal{U}}^2(0)$	$c_{\mathcal{U}}^2(t_{\text{opt}})$
$Re = 2 \cdot 10^4$ $r_1 = -0.11$ $r_2 = -0.025$	\mathcal{U}_1	21	24.6367	1.0133	24.8382
	\mathcal{U}_2	279	1.0000	0.0133	0.0000
	\mathcal{U}_{11}	9	24.0670	1.0584	24.8702
	\mathcal{U}_{12}	12	1.6596	0.0685	0.0004
$Re = 4 \cdot 10^4$ $r_1 = -0.24$ $r_2 = -0.13$	\mathcal{U}_1	37	30.3495	1.0216	30.4001
	\mathcal{U}_2	263	1.0900	0.0216	0.0000
	\mathcal{U}_{11}	26	30.0807	3.2660	30.4001
	\mathcal{U}_{12}	11	1.0000	2.3251	0.0000
$Re = 6 \cdot 10^4$ $r_1 = -0.38$ $r_2 = -0.15$	\mathcal{U}_1	52	38.0686	1.0122	38.0889
	\mathcal{U}_2	248	1.1516	0.0122	0.0000
	\mathcal{U}_{11}	33	37.8930	10.5533	38.0889
	\mathcal{U}_{12}	19	1.0000	9.5607	0.0000

Из Таблицы 3.2 видно, что глобальное оптимальное возмущение лежит главным образом в подпространстве \mathcal{U}_1 , поскольку квадрат нормы его проекции на дополнительное инвариантное подпространство \mathcal{U}_2 при $t = 0$ меньше 10^{-2} , а при t_{opt} становится равным 10^{-4} либо меньше. При этом необходимая для этого размерность подпространства \mathcal{U}_1 растет (21, 37 и 52) с ростом числа Рейнольдса. Поясним, что размерность подпространства \mathcal{U}_1 означает количе-

ство собственных мод, которого с допустимой точностью достаточно для формирования начального оптимального возмущения. Таким образом, оптимальное возмущение во всех случаях представляет собой пакет из большого числа собственных мод системы (2.19), причем для формирования наклонных структур требуется значительно больше собственных мод, чем для формирования роликов.

Учитывая, что $\Gamma_{\max, \mathcal{U}}^2$ примерно равно $c_{\mathcal{U}}^2(t_{\text{opt}})/c_{\mathcal{U}}^2(0)$ для $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1$, можно также заключить, что проекция глобального оптимального возмущения на подпространство \mathcal{U}_1 является в этом подпространстве оптимальным возмущением, то есть имеет наибольшую амплификацию. В то же время, любой вектор из дополнительного подпространства \mathcal{U}_2 не может иметь амплификацию, большую максимальной амплификации на этом подпространстве, которая в случае $Re = 6 \cdot 10^4$ равна 1.1516.

Для более детального спектрального анализа глобального оптимального возмущения разложим инвариантное подпространство \mathcal{U}_1 в прямую сумму двух инвариантных подпространств \mathcal{U}_{11} и \mathcal{U}_{12} и рассмотрим проекции глобального оптимального возмущения на каждое из этих подпространств. Результаты некоторых возможных вариантов таких разбиений показаны в остальной части Таблицы 3.2. Видно, что подскок глобального оптимального возмущения достигается за счет двух различных факторов. Во-первых, величина квадрата нормы его проекции на подпространство \mathcal{U}_{11} при $t = 0$ больше единицы. Во-вторых, квадрат нормы этой проекции возрастает при $t = t_{\text{opt}}$, а проекция глобального оптимального возмущения на подпространство \mathcal{U}_{12} становится малозначимой. При максимальном числе Рейнольдса наиболее значим первый фактор, при минимальном — второй. В соответствии с Таблицей 3.2 величина проекции оптимального возмущения при $t = t_{\text{opt}}$ на подпространство \mathcal{U}_{12} пренебрежимо мала, поэтому размерность подпространства \mathcal{U}_{11} означает количество собственных мод, требуемое для формирования развитого оптимального возмущения. Размерность подпространства \mathcal{U}_{11} также увеличивается с ростом числа Рейнольдса (9, 26 и 33).

3.3 Физические механизмы роста оптимальных возмущений

3.3.1 Влияние сил плавучести

Данный раздел посвящен ответу на вопрос: является ли ненулевое продольное волновое число оптимального возмущения устойчиво-стратифицированного течения следствием формы профиля средней скорости $\bar{U}(y)$ и профиля турбулентной вязкости $\bar{\nu}(y)$ или оно ненулевое из-за влияния сил плавучести. Для этого вычислим оптимальные возмущения при исключении сил плавучести, используя те же профили $\bar{U}(y)$ и $\bar{\nu}(y)$. В этом случае фиксируется $Ri = 0$ в уравнении для амплитуд возмущений (2.11) и в функционале (2.12), который в данном случае представляет собой плотность кинетической энергии возмущений. В качестве примера рассматриваются профили при $Ri \geq 0.03$. Для выяснения влияния формы профилей $\bar{U}(y)$ и $\bar{\nu}(y)$ полученные результаты сравниваются с еще более упрощенной задачей — нейтрально-стратифицированным ламинарным течением Куэтта. Поскольку при сильно-устойчивой стратификации профиль скорости $\bar{U}(y)$ в центре канала близок к линейному, для описания ламинарного течения выберем следующие параметры: постоянную вязкость равную $\bar{\nu}(0)$ и скорость стенок канала равную $\pm\tilde{U}/2$, где

$$\tilde{U} = 2 \frac{d\bar{U}}{dy}(0)h.$$

Для пары параметров (Ri, Re) определим эффективное число Рейнольдса $Re_* = \tilde{U}h/\bar{\nu}(0)$ и сравним оптимальные возмущения на основе трех моделей: с учетом сил плавучести (данные из Таблицы 3.1), турбулентное течение без учета сил плавучести и ламинарное течение при эффективном числе Рейнольдса Re_* и без учета сил плавучести. На Рисунке 3.9 показана зависимость глобальной максимальной амплификации Γ_{\max} и оптимального волнового числа α_{opt} от эффективного числа Рейнольдса для этих трех типов оптимальных возмущений. Данные из [9] для ламинарного течения также приведены на Рисунке 3.9 для дополнительной верификации используемой вычислительной технологии.

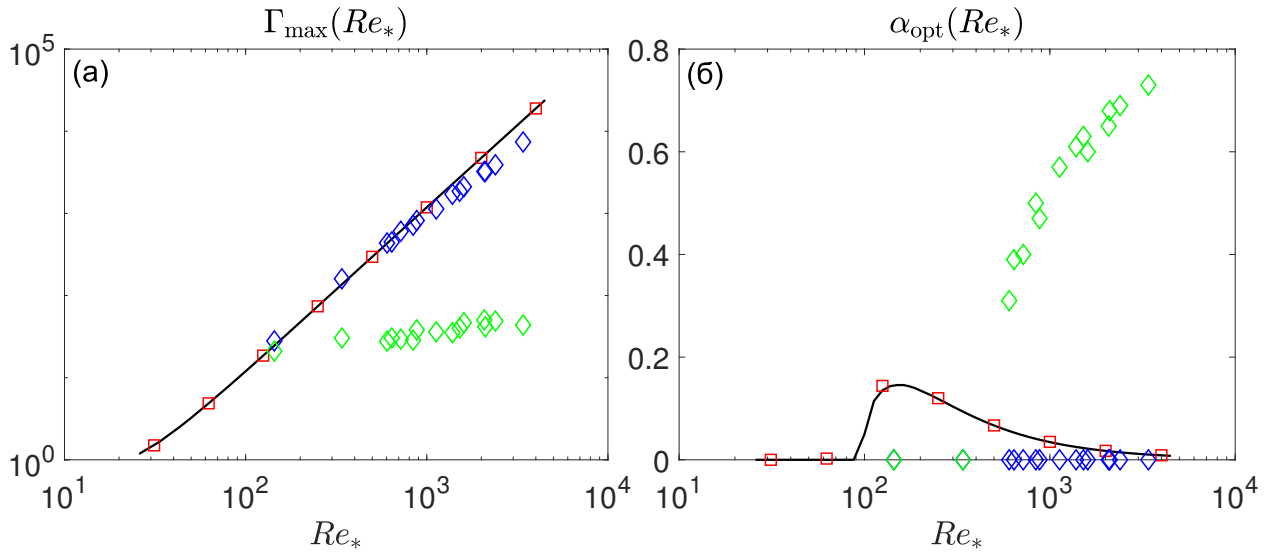


Рисунок 3.9 — Глобальная максимальная амплификация Γ_{\max} (а) и оптимальное продольное волновое число α_{opt} (б) в зависимости от эффективного числа Рейнольдса Re_* для ламинарного течения Куэтта (черным — результаты расчетов в данной работе, красным — данные из работы [9]) и турбулентного течения (зеленым — с учетом сил плавучести, синим — без учета сил плавучести).

Значения глобальной максимальной амплификации, рассчитанные для турбулентного и ламинарного профилей скорости без учета сил плавучести, близки друг к другу и на 1-2 порядка превышают значения, полученные для турбулентного течения при учете сил плавучести. Без учета сил плавучести оптимальные возмущения турбулентного течения имеют в точности нулевое продольное волновое число, в отличие от нетривиальной зависимости оптимального продольного волнового числа от эффективного числа Рейнольдса в ламинарном случае. Таким образом, можно сделать вывод, что ненулевое оптимальное продольное волновое число не может быть объяснено только формой профилей $\bar{U}(y)$ и $\bar{\nu}(y)$, а обусловлено влиянием сил плавучести.

3.3.2 Эффект опрокидывания и механизм Орра

Для вязких несжимаемых течений известно два механизма роста кинетической энергии возмущений: эффект опрокидывания [73–75] и механизм Орра [2; 9]. Для того чтобы разделить действие этих механизмов для возмуще-

ний вида (2.10) с ненулевыми волновыми числами α и γ , повернем систему координат в плоскости (x, z) на угол $\theta = \arcsin(\alpha/\gamma')$ по часовой стрелке, где $\gamma' = \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}$. Новые горизонтальные координаты $x' = x \cos \theta - z \sin \theta$ и $z' = x \sin \theta + z \cos \theta$ направлены соответственно вдоль и перпендикулярно фронту волны (см. Рисунок 3.3). Скорость основного течения в повернутой системе координат имеет ненулевые продольную $\bar{U}' = \bar{U} \cos \theta$ и поперечную $\bar{W}' = \bar{U} \sin \theta$ составляющие, а компоненты скорости возмущений в этих направлениях равны $u'_{\alpha\gamma} = u_{\alpha\gamma} \cos \theta - w_{\alpha\gamma} \sin \theta$ и $w'_{\alpha\gamma} = u_{\alpha\gamma} \sin \theta + w_{\alpha\gamma} \cos \theta$, соответственно. В новых координатах, возмущение вида (2.10) можно записать в виде

$$(u'_{\alpha\gamma}, v_{\alpha\gamma}, w'_{\alpha\gamma}, p_{\alpha\gamma}, T_{\alpha\gamma})e^{i\gamma'z'}, \quad (3.2)$$

а эволюция амплитуды возмущения удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'_{\alpha\gamma}}{\partial t} + i\gamma'\bar{W}'u'_{\alpha\gamma} + \frac{d\bar{U}'}{dy}v_{\alpha\gamma} - \Delta_{\nu}^{\alpha\gamma}u'_{\alpha\gamma} &= 0, \\ \frac{\partial v_{\alpha\gamma}}{\partial t} + i\gamma'\bar{W}'v_{\alpha\gamma} + \frac{\partial p_{\alpha\gamma}}{\partial y} - \Delta_{\nu}^{\alpha\gamma}v_{\alpha\gamma} - RiT_{\alpha\gamma} &= 0, \\ \frac{\partial w'_{\alpha\gamma}}{\partial t} + i\gamma'\bar{W}'w'_{\alpha\gamma} + \frac{d\bar{W}'}{dy}v_{\alpha\gamma} + i\gamma'p_{\alpha\gamma} - \Delta_{\nu}^{\alpha\gamma}w'_{\alpha\gamma} &= 0, \\ \frac{\partial T_{\alpha\gamma}}{\partial t} + i\gamma'\bar{W}'T_{\alpha\gamma} + \frac{d\bar{T}}{dy}v_{\alpha\gamma} - \Delta_{\mu}^{\alpha\gamma}T_{\alpha\gamma} &= 0, \\ \frac{\partial v_{\alpha\gamma}}{\partial y} + i\gamma'w'_{\alpha\gamma} &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Отметим, что в последние четыре уравнения в (3.3) не входит переменная $u'_{\alpha\gamma}$, т.е. эти уравнения образуют полную систему уравнений, описывающих эволюцию остальных четырех переменных. Эволюция переменной $u'_{\alpha\gamma}$ описывается только первым уравнением и однозначно определяется ее начальным значением и переменной $v_{\alpha\gamma}$.

Из (3.3) можно вывести уравнения эволюции кинетической \mathcal{E}_t^K и потенциальной $\mathcal{E}_t^P = \mathcal{E}_t - \mathcal{E}_t^K$ компонент плотности полной энергии возмущений вида

(3.2):

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{E}_t^K}{dt} = & \underbrace{- \int_{-1}^1 \frac{d\bar{U}'}{dy} \text{Real}\{v_{\alpha\gamma} u'_{\alpha\gamma*}\} dy}_{\text{эффект опрокидывания}} - \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{d\bar{W}'}{dy} \text{Real}\{v_{\alpha\gamma} w'_{\alpha\gamma*}\} dy}_{\text{механизм Орра}} + \\
& \underbrace{Ri \int_{-1}^1 \text{Real}\{T_{\alpha\gamma} v'_{\alpha\gamma*}\} dy}_{\text{силы плавучести}} - \\
& \underbrace{\int_{-1}^1 \bar{\nu} [\gamma'^2 (|u'_{\alpha\gamma}|^2 + |v_{\alpha\gamma}|^2 + |w'_{\alpha\gamma}|^2) + \left| \frac{\partial u'_{\alpha\gamma}}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial v_{\alpha\gamma}}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial w'_{\alpha\gamma}}{\partial y} \right|^2] dy}_{\text{диссипация кинетической энергии}},
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{E}_t^P}{dt} = & -Ri \int_{-1}^1 \text{Real}\{v_{\alpha\gamma} T_{\alpha\gamma*}\} dy - Ri \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{\bar{\mu}}{d\bar{T}/dy} (\gamma'^2 |T_{\alpha\gamma}|^2 + \left| \frac{\partial T_{\alpha\gamma}}{\partial y} \right|^2) dy}_{\text{диссипация потенциальной энергии}}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

На Рисунке 3.10 показан вклад слагаемых уравнений (3.4), (3.5) в развитие оптимальных возмущений при $Re = 4 \cdot 10^4$, $Ri = 0.01$ (слабо устойчивая стратификация, продольные ролики и стрики) и $Re = 4 \cdot 10^4$, $Ri = 0.055$ (сильно устойчивая стратификация, наклонные структуры).

Первые два слагаемых в правой части уравнения (3.4) отвечают за за продукцию кинетической энергии возмущения за счет эффекта опрокидывания и невязкого двумерного механизма Орра соответственно. Когда $\cos \theta \neq 0$, эффект опрокидывания может увеличить кинетическую энергию возмущения вдоль оси x' за счет вертикального переноса продольной компонентой скорости \bar{U}' основного течения. Если $\sin \theta \neq 0$, то механизм Орра может увеличить кинетическую энергию вихревого движения в плоскости (y, z') , что сопровождается вращением замкнутых циркуляций под действием сдвига основного течения.

Сумма третьего слагаемого в правой части (3.4) и первого слагаемого в правой части (3.5) равна нулю и отражает то, что силы плавучести не изменяют полную энергию возмущения и отвечают только за перераспределение между потенциальной и кинетической энергией.

На Рисунке 3.10 (а) показан энергетический цикл оптимального возмущения с нулевым продольным волновым числом. Хотя перераспределение энергии между потенциальной и кинетической составляющими за счет влияния сил плавучести относительно невелико, именно за счет этих членов энергетический цикл аналогичен энергетическому циклу внутренней гравитационной волны: флуктуации скорости в поперечном сечении деформируют изоповерхности температуры, что приводит к накоплению потенциальной энергии флуктуаций. Во время высвобождения потенциальной энергии, ролики раскручиваются в противоположном направлении. Следовательно, вклад эффекта опрокидывания меняет знак с периодом приблизительно равным $2t_{\text{opt}}$. Момент времени, в который происходит первое изменение направления вращения, близок к t_{opt} . В этот момент возмущение представляет собой стрик, то есть почти вся кинетическая энергия возмущения сосредоточена в продольной компоненте скорости. Поскольку вертикальный пространственный масштаб такого возмущения мало изменяется во времени, момент максимальной диссипации кинетической энергии также близок к t_{opt} . Механизм аналогичный развитию внутренней гравитационной волны ограничивает время, в течение которого может развиваться оптимальное возмущение. Как следствие, уменьшается и максимальная амплификация энергии по сравнению (см. Рисунок 3.9) со случаем, описанным в предыдущем подразделе, когда силы плавучести искусственно исключались. Оценим оптимальное время t_{opt} , используя частоту внутренней гравитационной волны (частоту Брента-Вяйсяля) в центре канала:

$$N = \sqrt{Ri \frac{d\bar{T}}{dy}(0)}.$$

Момент времени t_{opt} приходится приблизительно на половину периода энергетического цикла, что соответствует четверти периода волны. Высоту канала (вертикальной волновое число $k_y = \pi$) можно взять в качестве характерного вертикального масштаба волны. Тогда получим следующую оценку:

$$t_{\text{opt}}^* = \frac{\pi}{2\omega}, \quad \omega = N \sqrt{\frac{\alpha^2 + \gamma^2}{\alpha^2 + \gamma^2 + \pi^2}}.$$

При $Re = 4 \cdot 10^4$, $Ri = 0.01$ и $Re = 4 \cdot 10^4$, $Ri = 0.055$, оптимальные моменты времени равны $t_{\text{opt}} = 131$ и 43.8 , соответственно, в то время как предложенная оценка дает значения: $t_{\text{opt}}^* = 138.2$ и 29.9 . Отметим, что оценка более точна для оптимальных возмущений с нулевым продольным волновым числом, а для наклонных структур (где k_y меняется со временем) дает только очень грубое приближение к t_{opt} .

С увеличением числа Ричардсона частота Брента-Вяйсяля увеличивается, и как следствие характерный масштаб времени связанный с ней уменьшается. Из Рисунка 3.10 (б) видно, что при наиболее устойчивой стратификации из рассмотренных ($Ri = 0.055$) вклад сил плавучести в энергетический цикл существенно возрастает по сравнению со случаем $Ri = 0.01$. Механизм Орра, который может реализоваться только для возмущений с ненулевым продольным волновым числом, оказывается выгодным с энергетической точки зрения на коротких временах. Наклонные структуры разрушаются сдвигом основного потока с образованием больших вертикальных градиентов, и в результате энергетический цикл завершается только за один период, в отличие от возмущений с нулевым продольным волновым числом. Момент времени максимальной диссипации кинетической энергии смещается от оптимального момента времени t_{opt} к $t \approx 1.5t_{\text{opt}}$, когда формируются большие вертикальные градиенты у температуры возмущения. Также подчеркнем, что рост энергии оптимальных возмущений для рассматриваемого диапазона значений числа Ричардсона происходит в основном за счет эффекта опрокидывания.

Следует подчеркнуть, что диссипация кинетической энергии при развитии наклонных структур мала. Это означает, что полученные результаты должны слабо зависеть от выбора оператора турбулентной вязкости. Как показали дополнительные расчеты, не представленные в тексте диссертации, энергетический цикл наклонных структур (см. Рисунок 3.10 (б)) слабо чувствителен к уменьшению или увеличению коэффициентов турбулентной вязкости и турбулентной диффузии.

В линейной модели (2.11) развивающееся оптимальное возмущение не вносит вклад в профили основного течения, так как является гармоническим в продольном и поперечном направлениях. Однако и в линейной модели оно может приводить к пространственной неоднородности характеристик потока. Далее

рассмотрим эволюцию оптимального возмущения на фоне основного течения

$$(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{T}) = (\bar{U}(y), 0, 0, \bar{T}(y)) + \epsilon \text{Real}\{(u_t, v_t, w_t, T_t)e^{i\alpha_{\text{opt}}x + i\gamma_{\text{opt}}z}\}$$

в линейной модели (2.11), где ϵ — это не зависящий от времени параметр, а u_t, v_t, w_t, T_t — зависящие от времени амплитуды развивающегося оптимального возмущения, отнормированные так чтобы при $t = 0$ возмущение имело плотность полной энергии равную 1. Стратификация основного течения характеризуется градиентным числом Ричардсона

$$Ri_g = Ri \frac{d\bar{T}/dy}{(d\bar{U}/dy)^2},$$

а вклад в градиентное число Ричардсона от развивающегося оптимального возмущения можно определить как:

$$\widetilde{Ri}_g = Ri \frac{\partial \tilde{T} / \partial y}{(\partial \tilde{u} / \partial y)^2} - Ri_g.$$

Величина \widetilde{Ri}_g изменяется со временем по мере развития оптимального возмущения. На Рисунке 3.11 показана форма \widetilde{Ri}_g для наклонного оптимального возмущения при $Re = 4 \cdot 10^4$, $Ri = 0.055$ в оптимальный момент времени $t = t_{\text{opt}}$ (а) и в момент времени $t = 1.5t_{\text{opt}}$ (б), который близок к моменту максимальной диссипации кинетической энергии (см. Рисунок 3.10 (г)). Постоянный коэффициент ϵ был взят равным $\epsilon^2 = 3 \cdot 10^{-6}$, что соответствует 1% от энергии турбулентных флуктуаций по данным прямого численного моделирования. Средний профиль Ri_g почти постоянен вблизи центра канала и равен 0.17 [17]. Вклад оптимального возмущения достаточно велик (до 20% от максимального значения Ri_g), особенно при $t = 1.5t_{\text{opt}}$, хотя плотность энергии возмущения в этот момент меньше, чем при t_{opt} . Таким образом, развитие наклонного оптимального возмущения может приводить к пространственно-неоднородной стратификации течения после достижения оптимального момента времени. Аналогичный эффект наблюдался в работе [103], где рассматривалось ламинарное устойчиво-стратифицированное струйное течение. В условиях развитой турбулентности (в DNS, а не в линейной модели) это может привести к появлению крупномасштабных наклонных температурных фронтов.

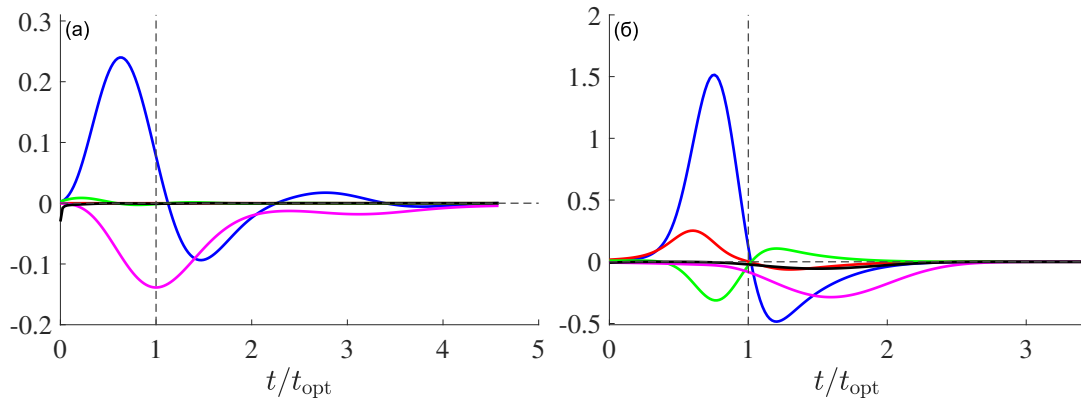


Рисунок 3.10 — В уравнениях (3.4) и (3.5): вклад эффекта опрокидывания (синим) и механизма Орра (красным), действие сил плавучести (зеленым), диссипация кинетической (розовым) и потенциальной (черным) энергии при развитии оптимального возмущения. (а): $Re = 4 \cdot 10^4$, $Ri = 0.01$; (б): $Re = 4 \cdot 10^4$, $Ri = 0.055$.

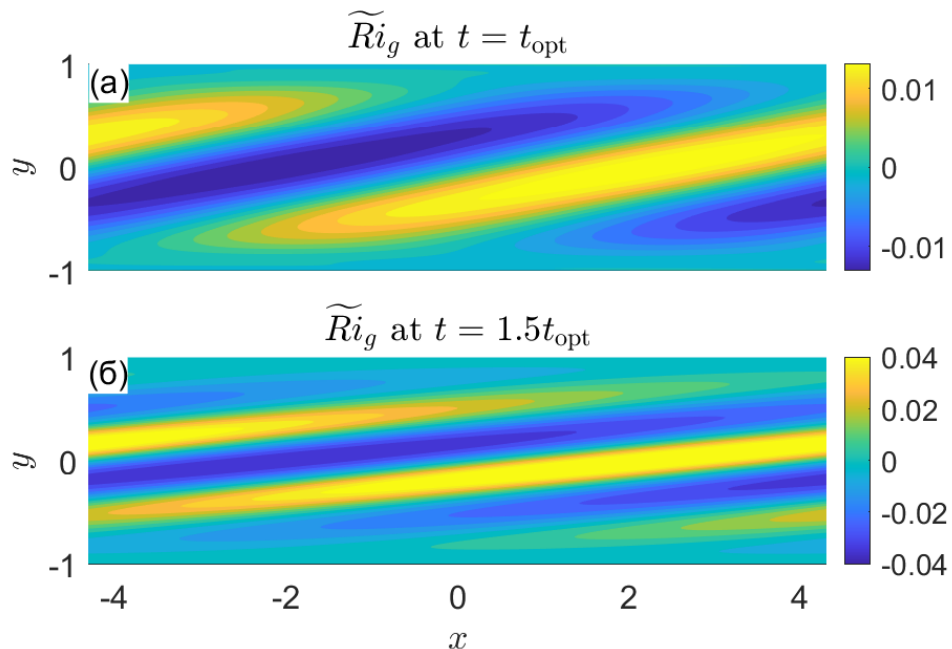


Рисунок 3.11 — Аномалии \widetilde{Ri}_g в градиентном числе Ричардсона в сечении канала $z = 0$ от оптимального возмущением при $Re = 4 \cdot 10^4$, $Ri = 0.055$ в оптимальный момент времени $t = t_{\text{opt}}$ (а) и в момент $t = 1.5t_{\text{opt}}$ (б).

3.4 Пристеночные структуры

В предыдущих работах по исследованию оптимальных возмущений турбулентного течения Пуазейля ([12], [13]) и турбулентного пограничного слоя над плоской пластиной [14] было обнаружено, что помимо глобального максимума по волновым числам α и γ , максимальная амплификация $\Gamma_{\max}^{\alpha\gamma}$ имеет также локальный максимум, который достигается при нулевом продольном волновом числе и достаточно большом поперечном волновом числе. В указанных работах этот локальный максимум связывается с организованными структурами, имеющими форму пристеночных продольных роликов развивающихся в пристеночные стрики, которые сосредоточены в вязком и буферном слоях. При исследовании оптимальных возмущений турбулентного течения Куэтта [60] этого локального максимума обнаружено не было. Как отмечают авторы работы [60] возможной причиной для этого является недостаточно большое рассмотренное число Рейнольдса.

Локальный максимум соответствует пристеночным структурам, а потому для его анализа целесообразно использовать следующие безразмерные пространственные координаты: $y_+ = Re_\tau(y + 1)$, $z_+ = Re_\tau z$, $\gamma_+ = \gamma/Re_\tau$. Значения числа Рейнольдса Re_τ для всех рассмотренных пар (Re, Ri) представлены в Таблице 3.1. Отметим, что новая вертикальная координата y_+ сдвинута так, чтобы удовлетворить условию $y_+ = 0$ на нижней стенке канала.

На Рисунке 3.12 (а) при $Re = 4 \cdot 10^4$ и $Ri = 0.02$ показана зависимость максимальной амплификации $\Gamma_{\max}^{\alpha\gamma}$ от поперечного волнового числа γ в диапазоне от 0.1 до 1000 при нескольких значениях продольного волнового числа. Эта зависимость содержит ярко выраженный локальный максимум величины $\Gamma_{\max}^{\alpha\gamma}$, причем точка максимума слабо зависит от продольного волнового числа. Это согласуется с результатами, полученными ранее в работах [12–14] для нейтрально-стратифицированных турбулентных течений. Отметим, что локальный максимум наблюдается также и при нейтральной стратификации. Соответствующие этому локальному максимуму значения поперечного волнового числа, оптимального времени развития возмущения и максимальной амплификации будем далее обозначать как $\tilde{\gamma}_{\text{opt}}$, \tilde{t}_{opt} и $\tilde{\Gamma}_{\max}$, соответственно. Эти величины,

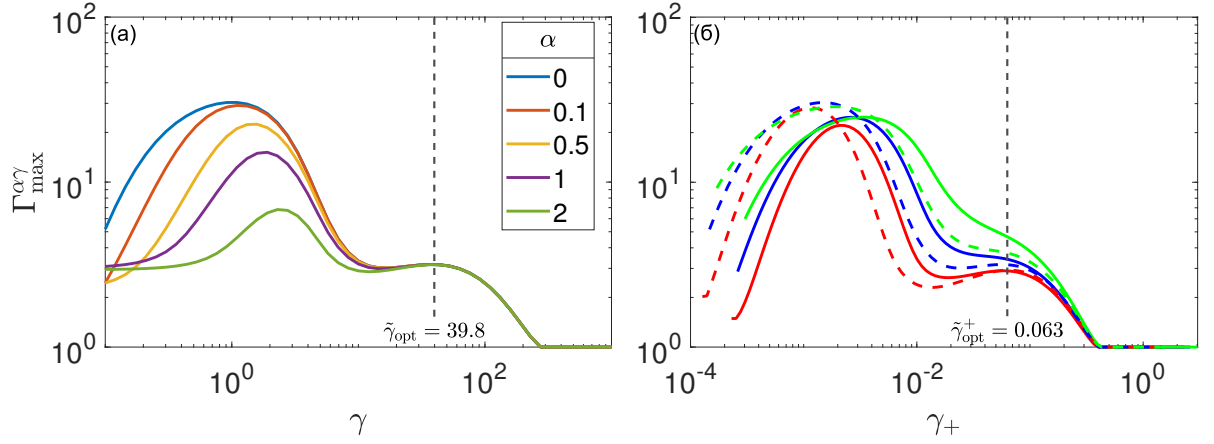


Рисунок 3.12 — (а): Зависимость максимальной амплификации $\Gamma_{\max}^{\alpha\gamma}$ от поперечного волнового числа γ при различных значениях продольного волнового числа α при $Re = 4 \cdot 10^4$, $Ri = 0.02$. (б): Зависимость максимальной амплификации $\Gamma_{\max}^{\alpha\gamma}$ от поперечного волнового числа в пристеночных единицах γ_+ при $\alpha = 0$ и $Re \cdot 10^4 = 2$ (сплошная линия), 4 (пунктирная линия), $Ri = 0.01$ (красным), 0.02 (синим), 0.03 (зеленым)

рассчитанные для различных значений чисел Рейнольдса и Ричардсона, представлены в Таблице 3.3.

Хотя поперечное волновое число $\tilde{\gamma}_{\text{opt}}$ сильно меняется с изменением чисел Рейнольдса и Ричардсона, в пристеночных единицах оно остается практически постоянным, а именно $\tilde{\gamma}_{\text{opt}}^+ = \tilde{\gamma}_{\text{opt}}/Re_\tau \approx 0.063$. Это проиллюстрировано на Рисунке 3.12 (б), где показана зависимость максимальной амплификации при $\alpha = 0$ от поперечного волнового числа в пристеночных единицах γ_+ . Отметим, что локальный максимум становится менее выраженным с увеличением числа Ричардсона. Если локальный максимум не найден для некоторой конкретной пары чисел Рейнольдса и Ричардсона, определим $\tilde{\Gamma}_{\max}$ как значение максимальной амплификации при $\alpha = 0$ и $\gamma_+ = 0.063$, полагая, что поперечный размер пристеночных структур остается постоянным. Таким образом, поперечный размер оптимальных возмущений, соответствующий локальному максимуму (если он существует) максимальной амплификации, равен $\lambda_z^+ = 2\pi/\tilde{\gamma}_{\text{opt}}^+ \approx 100$ в пристеночных единицах и не зависит от чисел Рейнольдса и Ричардсона при слабой стратификации. Эти результаты согласуются с данными, полученными для нейтрально-стратифицированных турбулентных течений.

Вещественные части компонент скорости и температуры оптимального возмущения, соответствующего локальному максимуму $\tilde{\Gamma}_{\max}$ при $Re = 4 \cdot 10^4$,

Таблица 3.3 — Значения $\tilde{\Gamma}_{\max}$, $\tilde{\gamma}_{\text{opt}}$, \tilde{t}_{opt} для пристеночных возмущений, а число Рейнольдса по скорости трения Re_{τ} при различных Ri и Re .

$Ri \cdot 10^2$	$Re \cdot 10^{-4}$	Re_{τ}	$\tilde{\Gamma}_{\max}$	$\tilde{\gamma}_{\text{opt}}$	\tilde{t}_{opt}
0	1	276	2.72	17.4	2.49
	2	513	2.68	32.3	1.43
	4	947	2.81	63.6	0.80
0.5	1	252	2.78	15.9	3.03
	2	463	2.76	28.7	1.79
	4	843	2.88	56.1	1.03
1	1	236	3.06	14.9	3.68
	2	434	2.90	25.0	2.26
	4	786	2.93	51.5	1.21
2	1	205	4.41	12.9	5.95
	2	383	3.44	22.9	3.10
	4	679	3.17	39.8	1.89
3	1	168	8.90	10.6	11.04
	2	330	4.67	20.8	4.63
	4	586	3.77	33.9	2.84
	6	782	3.63	45.7	2.34
3.25	1	151	13.1	9.50	14.3
3.5	1	140	17.6	8.81	16.4
	2	271	8.93	15.6	9.2
4	4	500	5.03	31.5	4.1
	6	664	4.81	41.8	3.5
4.5	2	228	15.2	14.4	12.5
	4	456	6.37	28.7	5.4
	6	612	5.82	38.6	4.4
4.75	2	195	21.7	12.3	15.5
5	4	409	8.65	25.8	7.3
5.5	4	342	15.2	21.5	10.9

$Ri = 0.01$ в сечении канала $x = 0$, показаны на Рисунке 3.13. Это оптимальное возмущение имеет нулевое продольное волновое число и поперечное волновое число $\tilde{\gamma}_{\text{opt}} = 53$. Возмущение сосредоточено в основном в пристеночных участках (в силу симметрии относительно центра канала показан только участок вблизи нижней стенки). Это оптимальное возмущение представляет собой пристеночные вытянутые в продольном направлении структуры с характерным вертикальным размером $y_+ \approx 40$. При $t = 0$ в энергии оптимального возмущения преобладают кинетическая энергия вертикальной и поперечной компонент скорости, а также потенциальная энергия, т.е. это пристеночные продольные вихри (пристеночные ролики). К моменту времени $t = \tilde{t}_{\text{opt}}$ кинетическая энергия продольных движений начинает преобладать, т.е. это пристеночные стрики. Основным физическим механизмом, отвечающим за развитие пристеночных оптимальных возмущений, является эффект опрокидывания.

Зависимость локального максимума $\tilde{\Gamma}_{\text{max}}$ от числа Ричардсона для различных чисел Рейнольдса показана на Рисунке 3.14 (а). Наблюдается значительный (сверхлинейный) рост максимальной амплификации с увеличением числа Ричардсона. Таким образом, наличие стратификации слабо влияет на пространственную конфигурацию пристеночных оптимальных возмущений, но сильно влияет на их амплификацию энергии. Отметим, что при нейтральной стратификации величина $\tilde{\Gamma}_{\text{max}}$ не зависит от числа Рейнольдса, что согласуется с результатами работ [12–14], и только с увеличением числа Ричардсона эта зависимость проявляется.

Отметим, однако, что в результатах прямого численного моделирования [17] дисперсия флуктуаций продольной скорости уменьшается с увеличением числа Ричардсона (Рисунок 3.14 (б)), в отличие от в отличие от $\tilde{\Gamma}_{\text{max}}(Ri)$ (Рисунок 3.14 (а)). Такое несоответствие может быть обусловлено тем, что крупномасштабные структуры, возникающие в турбулентных течениях при нейтральной и слабоустойчивой стратификации, вносят существенный вклад в средний поток импульса, который входит в определение коэффициента турбулентной вязкости. Поскольку пристеночные оптимальные возмущения развиваются только за счет эффекта опрокидывания, турбулентная вязкость играет определяющую роль для количественных значений максимальной амплификации, так как энергетический цикл пристеночных оптимальных возмущений качественно совпадает с представленным на Рисунке 3.10 (в). Чем больше вклад пристеночных струк-

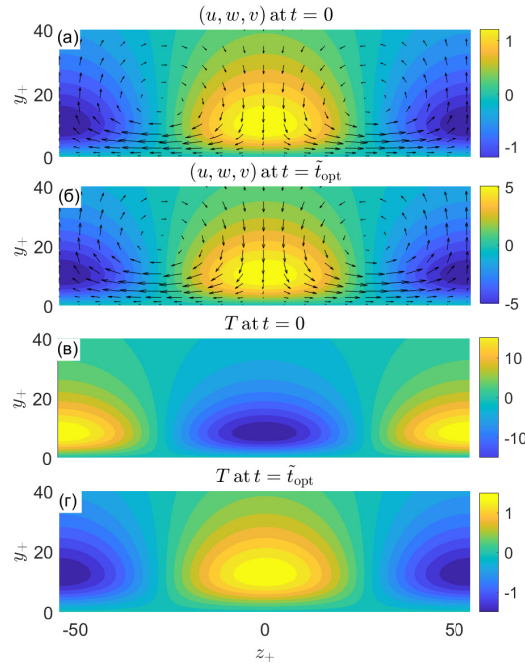


Рисунок 3.13 — Вещественная часть компонент пристеночных оптимальных возмущений при $Re = 4 \cdot 10^4$, $Ri = 0.01$ в сечении канала $x = 0$ вблизи нижней стенки. Изолинии продольной скорости u (цветом) и компоненты скорости (w, v) (стрелками) в момент времени $t = 0$ (а) и в момент $t = \tilde{t}_{\text{opt}}$ (б). Изолинии температуры T (цветом) в момент времени $t = 0$ (в) и в момент $t = \tilde{t}_{\text{opt}}$ (г).

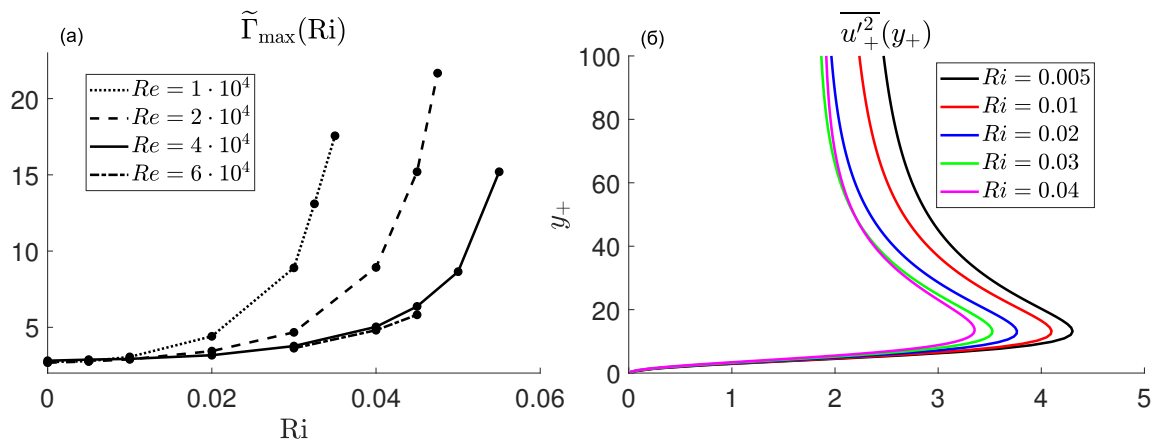


Рисунок 3.14 — (а): Зависимость локального максимума амплификации энергии $\tilde{\Gamma}_{\text{max}}$ от Ri при различных Re . (б): Дисперсия флуктуаций продольной скорости при $Re = 4 \cdot 10^4$ и различных Ri на основе результатов прямого численного моделирования [17]

тур в статистические характеристики турбулентного течения вблизи стенки, тем больше турбулентная вязкость и, как следствие, тем меньше амплификация оптимальных возмущений в линейной модели. Следует подчеркнуть, что подобные рассуждения неприменимы к крупномасштабным наклонным оптимальным возмущениям при устойчивой стратификации, поскольку диссипация кинетической энергии мала на этапе их развития (см. Рисунок 3.10 (б)).

3.5 Отклик линейной модели на оптимальный стохастический форсинг

В данном разделе мы применим технологию из Раздела 1.4 вычисления оптимального стохастического форсинга для линейных динамических систем и продемонстрируем результаты ее работы на примере динамической системы (2.19), описывающей эволюцию крупномасштабных составляющих турбулентного течения проявляющихся в виде организованных структур. Напомним, что система (2.19) получена в результате параметризации турбулентных напряжений с помощью операторов изотропной турбулентной вязкости и диффузии с последующей линеаризацией уравнений относительно среднего течения (см. Раздел 2.3) и аппроксимации полученных линейных уравнений по вертикальной переменной с численным проектированием на подпространство бездивергентных сеточных функций (см. Раздел 2.4).

Добавим в правую часть системы (2.19) стохастический форсинг вида (1.38) со спектральной плотностью $C = C^* \geq 0$. В соответствии с обозначениями Раздела 1.4 положим матрицы управления и наблюдения равными единичной матрице, то есть $V = W = I$. Технология, предложенная в Разделе 1.4, позволяет вычислить оптимальную спектральную плотность в различных нормах (см. Теорему 4).

Отклик на стохастический форсинг линейных систем, описывающих эволюцию крупномасштабных организованных структур в турбулентных течениях, исследовался ранее в работах [60; 61] для нейтрально-стратифицированных течений. В этих работах в качестве C выбиралась единичная матрица, что по Теореме 4 является оптимальным форсингом в спектральной норме. Нужно от-

метить, что если стохастический форсинг моделирует воздействие нескоррелированной части турбулентных напряжений Рейнольдса, то спектральная плотность этого форсинга, вообще говоря, неизотропна по вертикальному направлению, что иллюстрируется, например, на Рисунке 3.14 (б), где показана дисперсия флуктуаций продольной скорости по результатам прямого численного моделирования стратифицированного турбулентного течения Куэтта. Дисперсия флуктуаций значительно больше вблизи стенок канала. Целью численных экспериментов данного раздела является проверка насколько отличается отклик на оптимальный стохастический форсинг, вычисленный в различных нормах и соответственно, насколько оправдано предположение об изотропности форсинга из работ [60; 61].

Рассмотрим две матрицы A в (2.19), отвечающие $Re = 4 \cdot 10^4$, $Ri = 0.03$ и двум парам значений волновых чисел: $\alpha = 0.39$, $\gamma = 1.16$, при которых достигается максимальная амплификация плотности полной энергии возмущений (см. Таблицу 3.1), и $\alpha = 0$, $\gamma = 0.25$, при которых отклик на стохастический форсинг во всех рассмотренных нормах близок к максимальному.

Напомним (см. Раздел 1.4), что при $V = W = I$ ковариационная матрица отклика при заданной спектральной плотности форсинга C определяется отображением $\mathcal{M}(C) = X$, где X — это решение уравнения Ляпунова

$$AX + XA^* = -C.$$

Обозначим через C_p оптимальную спектральную плотность, рассчитанную в p -норме Шэттена, и введем в рассмотрение относительную величину q -нормы Шэттена ковариационной матрицы отклика $\mathcal{M}(C)$ для заданной матрицы C :

$$\rho_q(C) = \frac{|||\mathcal{M}(C)|||_q}{|||C|||_q}.$$

Для краткости эту величину мы будем называть относительным откликом.

В Таблицах 3.4 и 3.5 для двух рассматриваемых матриц A приведены величины относительных откликов на форсинги со спектральными плотностями, оптимальными в различных нормах. В последнем столбце приведены значения доли полной дисперсии отклика, приходящейся на 1-ю ЭОФ. Поскольку C_p — это оптимальная спектральная плотность в p -норме, максимумы по столбцам в этих Таблицах расположены на диагоналях. Оптимальные спектральные плот-

ности C_1 и C_2 приводят к малому относительному отклику в ∞ -норме (на 1–2 порядка меньше чем относительный отклик на C_∞), а оптимальная спектральная плотность C_∞ дает существенно меньший относительный отклик в 1-норме, чем C_1 .

Из Таблиц 3.4 и 3.5 видно, что оптимальные спектральные плотности C_1 , C_2 и C_∞ приводят к существенно различным ковариационным матрицам отклика. Например, значения доли полной дисперсии отклика, приходящейся на 1-ю ЭОФ, заметно больше при спектральных плотностях C_1 , C_2 , чем при C_∞ .

p	$\rho_1(C_p)$	$\rho_2(C_p)$	$\rho_\infty(C_p)$	$s(C_p)$
1	1366	1012	970	0.71
2	1042	1109	1135	0.67
∞	10	99	1485	0.46

Таблица 3.4 — Относительные отклики и доли полной дисперсии, приходящейся на 1-ю ЭОФ, при $\alpha = 0.39$, $\gamma = 1.16$.

p	$\rho_1(C_p)$	$\rho_2(C_p)$	$\rho_\infty(C_p)$	$s(C_p)$
1	8082	7886	7885	0.97
2	7296	7936	7984	0.97
∞	35	514	8872	0.84

Таблица 3.5 — Относительные отклики и доли полной дисперсии, приходящейся на 1-ю ЭОФ, при $\alpha = 0$, $\gamma = 0.25$.

3.6 Модель возникновения и развития крупномасштабных структур в стратифицированном турбулентном течении Куэтта

Взаимодействие крупномасштабных флуктуаций с мелкомасштабной турбулентностью описывается турбулентными напряжениями $\overline{(\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}'}$ и $\overline{(\mathbf{u}' \cdot \nabla) T'}$ в уравнении (2.4). При построении модели развития крупномасштабных структур в (см. Раздел 2.3) часть турбулентных напряжений, характеризующих диссипативные свойства турбулентного течения, была параметризована с помощью операторов изотропной турбулентной вязкости и диффузии соответственно с коэффициентами $\nu(y)$, $\mu(y)$, зависящими только от нормальной

координаты. Однако эта модель не может передать присущую турбулентным течениям возможность случайного возбуждения турбулентных флуктуаций посредством перераспределения энергии от более мелких к более крупным масштабам.

Предположим, что остаточную часть турбулентных напряжений можно описать стохастическими форсингами $f_{\mathbf{u}} = (f_u, f_v, f_w)^T$, f_T с нулевым средним и дисперсиями, равными $D[\overline{(\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}'}]$ и $D[\overline{(\mathbf{u}' \cdot \nabla) T'}]$ соответственно. Здесь $D[X]$ обозначает дисперсию случайного поля X . Тогда возникновение и развитие крупномасштабных составляющих течения, проявляющихся в виде организованных структур, можно описать системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \Delta_\nu \mathbf{u} - (0, RiT, 0)^T &= f_{\mathbf{u}}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T - \Delta_\mu T &= f_T, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Как и для исходной математической модели (2.1), на верхней и нижней стенках канала для скорости предполагается условие прилипания, а для температуры постоянные значения 2 и 1, соответственно. Верхняя и нижняя стенки движутся со скоростями соответственно $1/2$ и $-1/2$ в направлении x .

Вероятностное распределение случайных полей $f_{\mathbf{u}}$ и f_T неизвестно и до проведения прямого численного моделирования может быть выбрано только на основе физических соображений. Будем считать, что случайные поля $f_{\mathbf{u}}$, f_T — независимы, дельта-коррелированы по времени и горизонтальным координатам и имеют нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией, зависящей только от вертикальной переменной y .

Так как случайные поля $f_{\mathbf{u}}$ и f_T описывают генерацию мелкомасштабной турбулентности разумно предположить, что дисперсия случайного поля f_T пропорциональна мощности генерации турбулентной потенциальной энергии (ТПЭ) e_T :

$$e_T = \frac{1}{2} \frac{\overline{\partial T'^2}}{\partial t} = -\overline{T'V'} \frac{d\bar{T}}{dy},$$

а суммарная дисперсия компонент $f_{\mathbf{u}}$ пропорциональна мощности генерации турбулентной кинетической энергии (ТКЭ) e :

$$e = \frac{1}{2} \frac{\overline{\partial(U'^2 + V'^2 + W'^2)}}{\partial t} = -\overline{U'V'} \frac{d\bar{U}}{dy}.$$

Отметим, что наиболее интенсивная генерация мелкомасштабной турбулентности происходит вблизи стенок канала, что показано на Рисунке 3.15 (а).

Будем считать, что случайное поле $f_{\mathbf{u}}$ изотропно, т.е. дисперсия каждой из его компонент пропорциональна $e/3$, а временной масштаб корреляции случайных полей в численной модели равен Δt (шаг модели по времени), и он одинаков для скорости и температуры. Таким образом, окончательная стохастическая параметризация имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \overline{f_u} &= \overline{f_v} = \overline{f_w} = \overline{f_T} = 0, \\ \overline{f_u^2} &= \overline{f_v^2} = \overline{f_w^2} = \frac{2}{\Delta t} \cdot \frac{e}{3}, \\ \overline{f_T^2} &= \frac{2}{\Delta t} \cdot e_T, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где энергетическая мощность стохастического форсинга отнормирована таким образом, чтобы приток энергии не зависел от Δt .

Предложенная модель стохастического форсинга имеет недостатки. Например, предположение об изотропности компонент случайного поля $f_{\mathbf{u}}$ нарушается вблизи стенок канала. Однако следует подчеркнуть, что совместные статистические характеристики части тензора турбулентных напряжений, отвечающих за взаимодействие мелкомасштабной турбулентности с крупномасштабными флуктуации, неизвестны (и могут быть найдены только на основе подробных DNS экспериментов). Так как они неизвестны, то не представляется возможным определить какая модель стохастического форсинга лучше или хуже (в терминах сравнения с результатами прямого численного моделирования, что является единственной разумной метрикой качества). Поэтому вопрос о выборе более правильной модели стохастического форсинга остается за рамками данной работы. В данной работе рассматривается только одна модель стохастического форсинга (самая простая, изотропная).

Численное решение системы уравнений (3.6) с шумом (3.7) проводилось в области с горизонтальными размерами $L_x = 12$, $L_y = 2$, $L_z = 8$ и про-

странственным разрешением $48 \times 128 \times 32$ узлов сетки в направлениях x , y , z соответственно. Для компонент скорости и температуры предполагались периодические граничные условия в направлениях x , z . Параметры $e(y)$ и $e_T(y)$ стохастического форсинга, а также коэффициенты турбулентной вязкости $\bar{\nu}(y)$ и диффузии $\bar{\mu}(y)$ были получены по результатам DNS. Генерация случайных полей f_v , f_T выполнялась следующим образом: в каждый момент времени, в каждом узле расчетной сетки модели независимо генерировались нормальные случайные величины с дисперсиями (3.7), зависящими от расстояния до стенок канала. При генерации использовалась стандартная функция `rand` языка C++, позволяющая сгенерировать 2 независимые равномерные случайные величины, из которых конструировалась нормальная случайная величина с помощью преобразования Бокса-Мюллера [113].

Минимальный масштаб длины, воспроизводимый моделью (3.6) — это масштаб длины Колмогорова $\Delta_K = (\bar{\nu}^3/e)^{1/4}$, определяемый турбулентной вязкостью. На Рисунке 3.15 (б) в зависимости от нормальной координаты показано сравнение масштаба длины Δ_K и сеточного масштаба длины Δ_y в используемой численной реализации модели (3.6). Под сеточным масштабом длины Δ_y понимается расстояние между соседними узлами сетки. Отметим, что по вертикальному направлению в численной модели использовалась неравномерная сетка со сгущением к стенкам канала. Можно видеть, что во всей области (за исключением вязкого подслоя) сеточный масштаб длины значительно меньше масштаба длины Колмогорова, то есть выбранное пространственное разрешение достаточно для того чтобы разрешить наименьшие пространственные масштабы уравнений (3.6).

3.6.1 Анализ временных рядов

Результатом численного решения системы уравнений (3.6) с шумом (3.7) стал длинный временной ряд, состоящий из $N = 5000$ мгновенных полей скорости и температуры равномерно отстоящих с шагом $\delta t \approx 0.5$ и полученных после достижения системой квазистационарного состояния. Вычитая из каждого мгновенного поля средние (из DNS) профили продольной скорости $\bar{U}(y)$ и

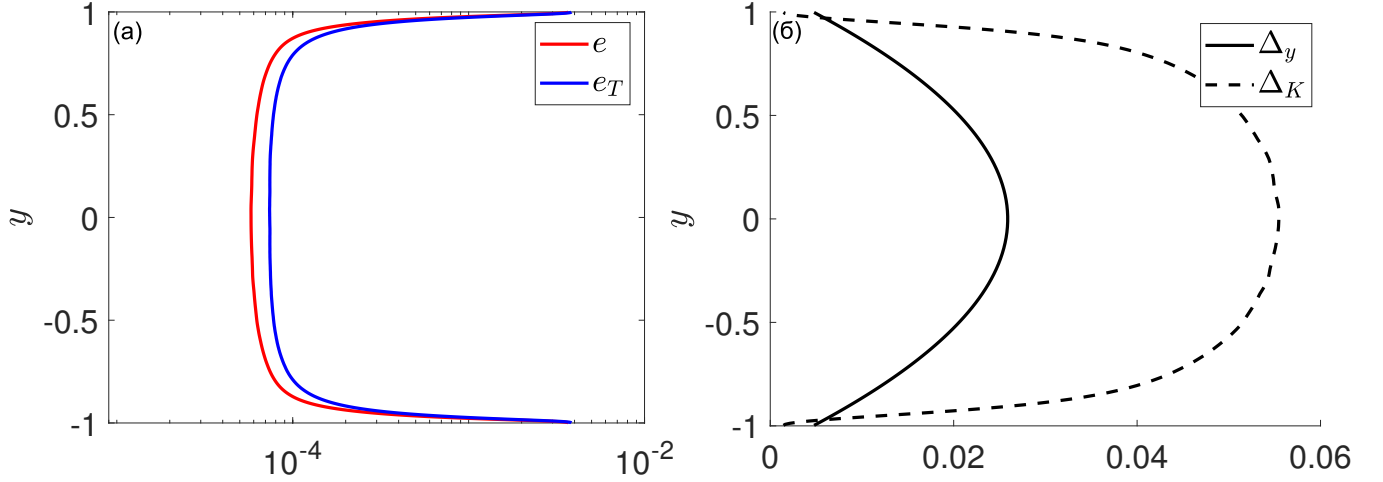


Рисунок 3.15 — (а): Параметры e и e_T стохастического форсинга (3.7) в зависимости от вертикальной координаты y . (б): масштаб длины Колмогорова Δ_K определяемый турбулентной вязкостью и сеточный масштаб длины Δ_y в зависимости от вертикальной координаты y .

температуры $\bar{T}(y)$, получим ряд мгновенных полей флуктуаций. Чтобы выделить крупномасштабные составляющие течения, проявляющиеся в виде организованных структур, разложим мгновенные поля флуктуаций в комплексный ряд Фурье по горизонтальным переменным

$$F(x, y, z) = \sum_{k_x=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_z=-\infty}^{+\infty} F_{k_x k_z}(y) \exp\left(\frac{2\pi i k_x x}{L_x}\right) \exp\left(\frac{2\pi i k_z z}{L_z}\right),$$

где k_x и k_z — номера гармоник в направлениях x и z соответственно, а i — мнимая единица.

При фиксированном номере (k_x, k_z) Фурье-гармоники мы имеем временной ряд амплитуды этой гармоники, на дискретном уровне представляющий собой прямоугольную комплексную матрицу:

$$S_{k_x k_z} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{k_x k_z}^1 & \cdots & \mathbf{f}_{k_x k_z}^N \end{bmatrix},$$

размера 513×5000 , каждый столбец которой

$$\mathbf{f}_{k_x k_z} = (U_{k_x k_z}(y_1), \dots, U_{k_x k_z}(y_n), V_{k_x k_z}(\tilde{y}_0), \dots, V_{k_x k_z}(\tilde{y}_n), \\ W_{k_x k_z}(y_1), \dots, W_{k_x k_z}(y_n), T_{k_x k_z}(y_1), \dots, T_{k_x k_z}(y_n))^T$$

является вектором значений амплитуд компонент скорости и температуры в узлах расчетной сетки по вертикали. Отметим, что при численном решении системы (3.6) использовались неравномерные разнесенные сетки по вертикали, сгущающиеся к границам канала: узлы сетки $-1 = \tilde{y}_0 < \dots < \tilde{y}_n = 1$ для вертикальной компоненты скорости включают в себя граничные узлы, а узлы сетки для остальных переменных $-1 < y_1 < \dots < y_n < 1$ находятся между ними.

Определим скалярное произведение, соответствующее дискретному аналогу функционала (2.2), как

$$(a, b)_{\mathcal{E}} = (K^2 a, b),$$

где $K = \text{diag}(K, \tilde{K}, K, RiKT_y^{-1})^{1/2}$ — диагональная матрица порядка $4n + 1$, K — значения квадратурных коэффициентов для формулы прямоугольников на неравномерной сетке $y_1 < \dots < y_n$, \tilde{K} — значения квадратурных коэффициентов для формулы трапеций на неравномерной сетке $\tilde{y}_0 < \dots < \tilde{y}_n$, а T_y — значения градиента средней температуры $d\bar{T}/dy$ в узлах сетки $y_1 < \dots < y_n$.

Номерам (k_x, k_z) Фурье-гармоники соответствует пара волновых чисел $\alpha = 2\pi k_x/L_x$, $\gamma = 2\pi k_z/L_z$, при которых можно вычислить начальное $\mathbf{u}_{\text{opt}}^0$ и развитое \mathbf{u}_{opt} оптимальные возмущения, время развития t_{opt} оптимального возмущения и амплификацию средней плотности полной энергии Γ_{max} оптимального возмущения.

Далее нас будет интересовать квадрат нормы проекции амплитуды Фурье-гармоники

$$P_{k_x k_z}^0(t) = |(\mathbf{f}_{k_x k_z}(t), \mathbf{u}_{\text{opt}}^0)_{\mathcal{E}}|^2, \quad P_{k_x k_z}^{\text{opt}}(t) = |(\mathbf{f}_{k_x k_z}(t), \mathbf{u}_{\text{opt}})_{\mathcal{E}}|^2$$

на начальное и на развитое оптимальные возмущения соответственно, а также временная эволюция энергии Фурье-гармоники:

$$E_{k_x k_z}(t) = |(\mathbf{f}_{k_x k_z}(t), \mathbf{f}_{k_x k_z}(t))_{\mathcal{E}}|^2.$$

Для каждого мгновенного поля флуктуаций можно построить энергетическую спектрограмму, т.е. распределение энергии по отдельным Фурье-гармоникам, а затем провести осреднение энергетической спектрограммы по всем мгновенным полям. Таким образом получим осредненную энергетическую спектро-

грамму, изображенную на Рисунке 3.16 в диапазонах неотрицательных номеров гармоник $0 \leq k_x \leq 20$, $0 \leq k_z \leq 20$.

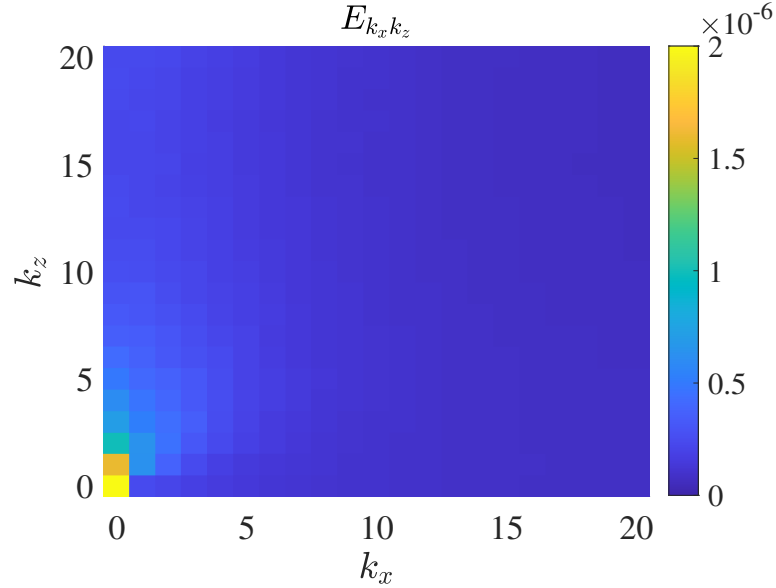


Рисунок 3.16 — Осредненная энергетическая спектрограмма флуктуаций мгновенного поля скорости и температуры, полученных из модели (3.6) с шумом (3.7).

Основная часть энергии на Рис. 3.16 сосредоточена в крупномасштабной части спектра. Наибольшей энергией обладают гармоники с нулевым продольным номером $(k_x, k_z) = (0, 1), (0, 2)$. Рисунок 3.16 отличается от характерной спектрограммы мгновенного поля флуктуаций из результатов прямого численного моделирования (см. Рисунок 2.4), где максимум энергии приходился на Фурье-гармоники с ненулевыми номерами. Отличие объясняется тем, что предложенная стохастическая параметризация (3.7) неверно описывает процессы генерации мелкомасштабной турбулентности в рассматриваемом стратифицированном турбулентном течении.

Также значительная часть энергии на Рисунке 3.16 приходится на гармонику с нулевыми номерами $(k_x, k_z) = (0, 0)$, что означает отличие средних профилей $\bar{U}(y)$ и $\bar{T}(y)$, полученных по результатам DNS, от средних профилей продольной скорости и температуры в модели (3.6) с шумом (3.7). Как показали дополнительные расчеты, это отличие незначительно и проявляется в основном в среднем профиле температуры.

3.6.2 Появление оптимальных возмущений в рамках нелинейной модели

В линейной модели, описанной в Разделе 2.3, развитое оптимальное возмущение \mathbf{u}_{opt} возникает из начального оптимального возмущения $\mathbf{u}_{\text{opt}}^0$ за время t_{opt} с увеличением энергии в Γ_{max} раз. Если бы развитие оптимального возмущения происходило строго по линейному закону, то во все моменты времени

$$P_{k_x k_z}^{\text{opt}}(t) = \Gamma_{\text{max}} P_{k_x k_z}^0(t - t_{\text{opt}}). \quad (3.8)$$

Слагаемое в правой части (3.8) — это прогноз развития крупномасштабных турбулентных флуктуаций на основе линейной модели.

Проверим, насколько сильно динамика амплитуд крупномасштабных гармоник в модели (3.6) с шумом (3.7) отличается от (3.8). Для этого обратимся к Рисунку 3.17, где изображена зависимость $P_{k_x k_z}^{\text{opt}}(t)$ и $\Gamma_{\text{max}} P_{k_x k_z}^0(t - t_{\text{opt}})$ от времени t для Фурье-гармоник с номерами $(k_x, k_z) = (0,1), (1,1)$. Видно, что прогноз на основе линейной модели неплохо описывает динамику проекции на развитое оптимальное возмущение как по моментам времени, в которые наблюдаются пики в энергии, так и по величине этих пиков.

Сделаем по временному ряду статистическую оценку характерных параметров энергетических пиков \hat{t}_{opt} — времени развития и $\hat{\Gamma}_{\text{max}}$ — величины подскока. Для оценки \hat{t}_{opt} найдем максимум кросскорреляционной функции

$$C_{k_x k_z}(\tau) = \frac{\text{cov}(P_{k_x k_z}^0(t), P_{k_x k_z}^{\text{opt}}(t + \tau))}{\sqrt{D(P_{k_x k_z}^0(t)) \cdot D(P_{k_x k_z}^{\text{opt}}(t))}} \quad (3.9)$$

между проекциями амплитуд Фурье-гармоники на начальное и развитое оптимальные возмущения. Кросскорреляционная функция (3.9) для крупномасштабных гармоник с номерами $(k_x, k_z) = (0,1), (1,1)$ изображена на Рисунке 3.18, где для сравнения отмечено значение t_{opt} из линейной модели (2.11). Видно, что \hat{t}_{opt} , при котором достигается максимум кросскорреляционной функции, для обоих случаев близок к t_{opt} .

Для гармоники с нулевым продольным номером $k_x = 0$ наблюдается периодичность кросскорреляционной функции $C_{k_x k_z}(\tau)$. Это может быть связано с

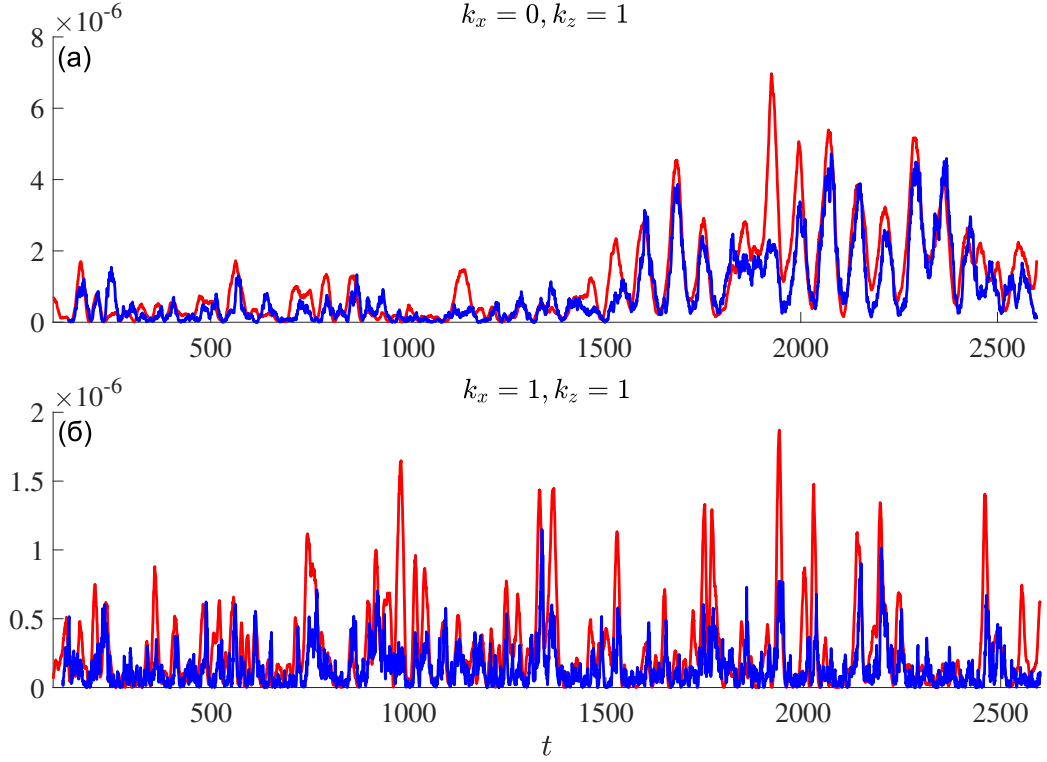


Рисунок 3.17 — Временной ряд квадрата нормы проекции на развитое оптимальное возмущение $P_{k_x k_z}^{\text{opt}}(t)$ (красным) и прогноза на основе линейной теории $\Gamma_{\max} P_{k_x k_z}^0(t - t_{\text{opt}})$ (синим) для крупномасштабных Фурье-гармоник с номерами $(k_x, k_z) = (0, 1)$ (а) и $(1, 1)$ (б).

нелинейным механизмом регенерации крупномасштабных продольных стриков: появление начального оптимального возмущения (продольных роликов) приводит к развитому оптимальному возмущению (продольным стрикам), которые затем обрушаются из-за вторичной неустойчивости и за счет нелинейных взаимодействий подпитывают энергией первоначальные продольные ролики. Этот механизм исследован для пристеночных крупномасштабных структур в сдвиговых турбулентных течениях [82; 83]. Для гармоники с номерами $(k_x, k_z) = (1, 1)$, соответствующей наклонным структурам, периодичности не наблюдается, энергетические пики возникают случайным образом.

Величину характерного подскока в энергии $\hat{\Gamma}_{\max}$ оценим как оптимальный параметр линейной регрессии

$$P_{k_x k_z}^{\text{opt}}(t) = \hat{\Gamma}_{\max} P_{k_x k_z}^0(t - t_{\text{opt}}) + \varepsilon, \quad (3.10)$$

напрямую следующей из (3.8), где ε — это случайная ошибка. Поскольку задача регрессии ставится для энергетических параметров решения, а не для амплитуд,

то мы предполагаем, что случайная ошибка ε может иметь ненулевое среднее, вследствие чего дополнительным регрессионным параметром является смещение по оси ординат, которое в формуле опущено. Диаграммы рассеяния для крупномасштабных гармоник с номерами $(k_x, k_z) = (0,1)$, $(1,1)$ и оптимальная оценка $\hat{\Gamma}_{\max}$ через линейную регрессию изображены на Рисунке 3.19. Статистическая оценка $\hat{\Gamma}_{\max}$ очень близка к Γ_{\max} из линейной модели.

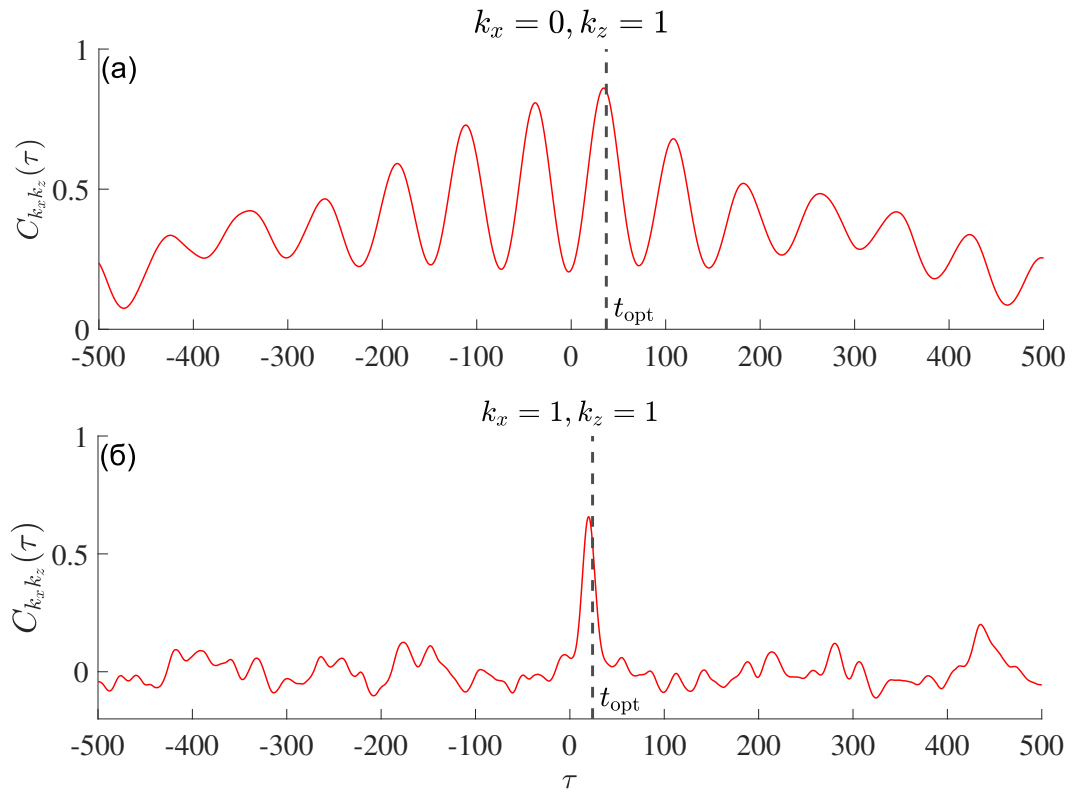


Рисунок 3.18 — Кросскорреляционная функция $C_{k_x, k_z}(\tau)$ (3.9) для крупномасштабных гармоник с номерами $(k_x, k_z) = (0,1)$ (а) и $(1,1)$ (б). Черной линией отмечены значения $t = t_{opt}$ из линейной модели.

3.6.3 Сравнение развитых оптимальных возмущений с 1-ой ЭОФ

Выделить наиболее значимые пространственные конфигурации из временного ряда можно на основе ЭОФ-анализа (см. [114;115]), т.е. разложения временного ряда по базису из эмпирических ортогональных функций (ЭОФ). Система ЭОФ представляет собой естественный ортогональный базис, определяемый по данным, и активно используется, например, при анализе метеорологических

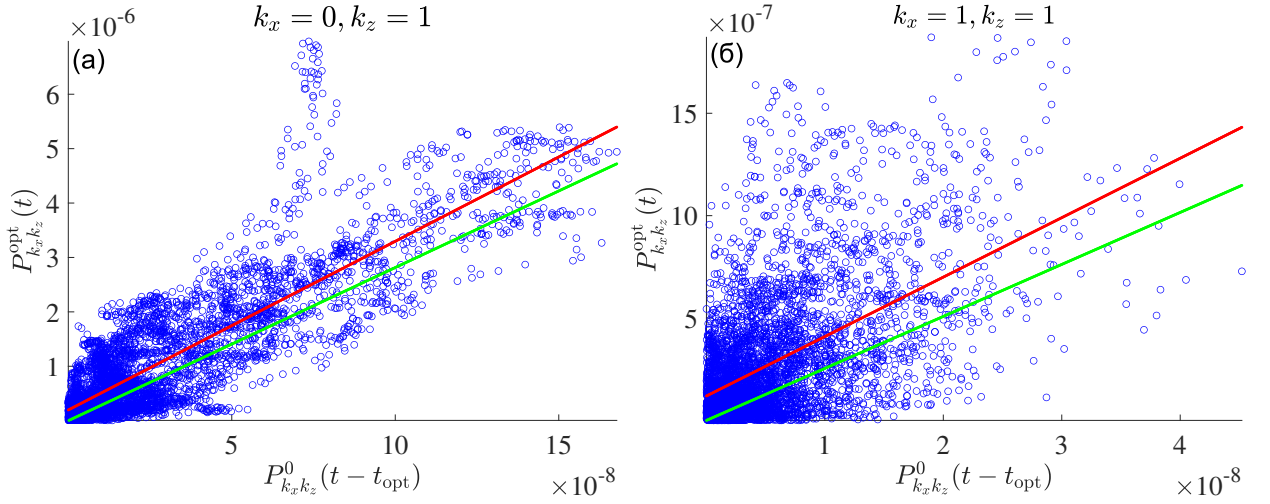


Рисунок 3.19 — Диаграммы рассеяния пар $(P_{k_x k_z}^0, P_{k_x k_z}^{\text{opt}})$ (синие "о") для крупномасштабных гармоник с номерами $(k_x, k_z) = (0, 1)$ (а) и $(1, 1)$ (б). Оценка $\hat{\Gamma}_{\text{max}}$ с помощью (3.10) (красным) и Γ_{max} из линейной модели (зеленым).

и океанологических данных [114]. Определим (см. [115]) базис ЭОФ на основе сингулярного разложения матрицы $\text{KS}_{k_x k_z}$: i -ой ЭОФ будем называть левый сингулярный вектор \mathbf{u}_i , отвечающий i -ому сингулярному числу σ_i . Вклад i -ой ЭОФ \mathbf{u}_i определим как σ_i/V , где $V = \sum_i \sigma_i$ — полная дисперсия.

Основная часть дисперсии амплитуд крупномасштабных гармоник сосредоточена вдоль направлений, определяемых первыми ЭОФ. Первая ЭОФ — это пространственная конфигурация, на которую приходится основная часть энергии Фурье-гармоники во всем временном ряде, т.е. пространственная конфигурация, проявляющаяся в виде организованных структур.

Далее нас будет интересовать квадрат нормы проекции амплитуды Фурье-гармоники на первую ЭОФ \mathbf{u}_1 :

$$P_{k_x k_z}^1(t) = |(\mathbf{f}_{k_x k_z}(t), \mathbf{u}_1)_{\mathcal{E}}|^2.$$

Зависимость $E_{k_x k_z}(t)$, $P_{k_x k_z}^{\text{opt}}(t)$ и $P_{k_x k_z}^1(t)$ от времени для Фурье-гармоник с номерами $(k_x, k_z) = (0, 1), (1, 1)$ изображена на Рисунке 3.20. Видно, что проекции на развитое оптимальное возмущение и 1-ую ЭОФ почти не отличаются друг от друга (красная линия почти совпадает с розовой на всем временном ряде, коэффициент корреляции больше 0.99). Временной ряд энергии крупномасштабных гармоник содержит моменты значительного роста энергии, проявляющихся в виде резких пиков. На всех пиках в энергии проекция на развитое оптимальное возмущение (и 1-ую ЭОФ) крайне велика.

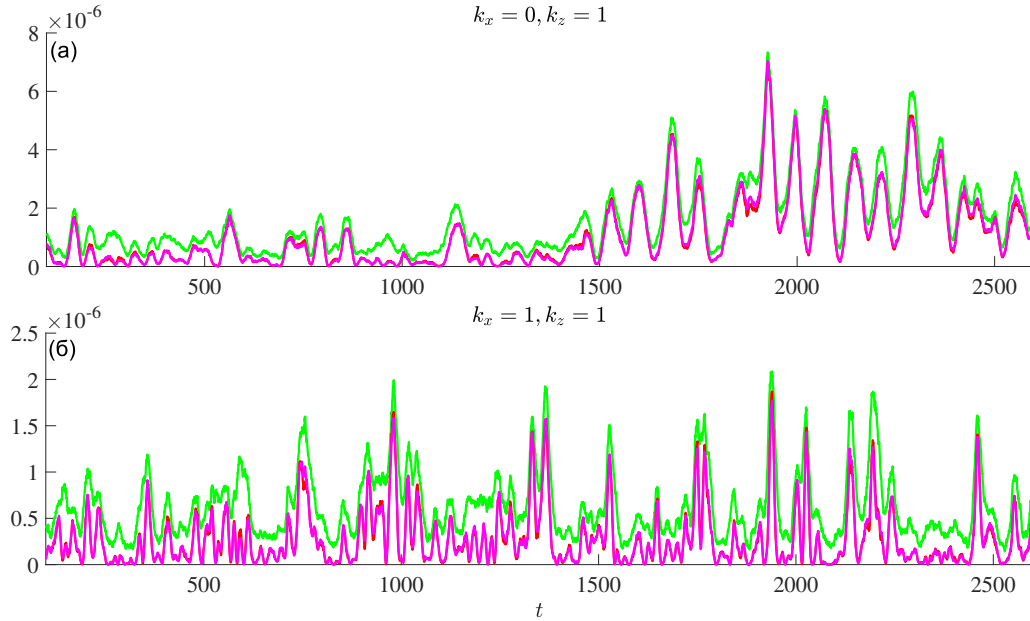


Рисунок 3.20 — Временной ряд $E_{k_x k_z}(t)$ (зеленым), $P_{k_x k_z}^{\text{opt}}(t)$ (красным) и $P_{k_x k_z}^1(t)$ (розовым) для крупномасштабных Фурье-гармоник с номерами $(k_x, k_z) = (0, 1)$ (а) и $(1, 1)$ (б).

Таким образом, можно утверждать, что именно развитые оптимальные возмущения проявляются в виде крупномасштабных организованных структур. Для различных гармоник доля полной дисперсии, приходящаяся на 1-ую ЭОФ, колеблется от 35 до 70 процентов, а доли полной дисперсии приходящиеся на 2, 3 и так далее ЭОФ — значительно меньше. Это означает, что развитые оптимальные возмущения все же преобладают во временном ряде для всех крупномасштабных гармоник, но часто сильно зашумлены. Наиболее ярко выделяется 1-ая ЭОФ (и развитое оптимальное возмущение соответственно) при $k_x = 0$, $k_z = 1$.

Количественные характеристики ЭОФ для 6 крупномасштабных гармоник с номерами $(k_x, k_z) = (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$ представлены в Таблице 3.6. Для каждой гармоники указано среднее значение ее энергии, доли полной дисперсии, приходящиеся на 1-ую, 2-ую, 3-ю ЭОФ и коэффициент корреляции в энергетическом скалярном произведении

$$r_{\mathcal{E}}^{\text{opt}, 1} = |(\mathbf{u}_{\text{opt}}, \mathbf{u}_1)_{\mathcal{E}}|^2$$

между 1-ой ЭОФ и развитым оптимальным возмущением.

(k_x, k_z)	$\bar{\mathcal{E}}, 10^{-6}$	σ_1/V	σ_2/V	σ_3/V	$r_{\mathcal{E}}^{\text{opt},1}$
(0,1)	1.60	0.71	0.13	0.04	0.9902
(0,2)	1.00	0.50	0.23	0.09	0.9754
(1,1)	0.64	0.44	0.21	0.10	0.9908
(1,2)	0.65	0.39	0.22	0.12	0.9830
(2,1)	0.38	0.34	0.19	0.11	0.9827
(2,2)	0.46	0.35	0.20	0.12	0.9777

Таблица 3.6 — Средняя энергия $\bar{\mathcal{E}}$, коэффициент корреляции $r_{\mathcal{E}}^{\text{opt},1}$ между 1-ой ЭОФ и развитым оптимальным возмущением и доли полной дисперсии σ_i/V , приходящиеся на главные ЭОФ, для нескольких крупномасштабных гармоник с номерами (k_x, k_z) .

Заключение

Основные результаты работы состоят в следующем:

- Получены новые верхние оценки максимума нормы матричной экспоненты. Показаны преимущества полученных оценок по сравнению с известными ранее.
- Впервые предложена постановка задачи о поиске оптимального стохастического форсинга в p -нормах Шэттена при $p = 1, 2$ и ∞ для линейных динамических систем. Разработана и обоснована технология вычисления оптимального форсинга.
- Разработана технология численного анализа немодовой устойчивости осредненных турбулентных течений, включающая в себя построение линейной модели развития крупномасштабных организованных структур и алгоритмы вычисления оптимальных возмущений.
- Выполнен анализ немодовой устойчивости стратифицированного турбулентного течения Куэтта в широком диапазоне параметров. Показано, что для этого течения существует несколько типов оптимальных возмущений. Получено хорошее согласование пространственной конфигурации и размеров найденных оптимальных возмущений с организованными структурами, наблюдаемыми в результатах прямого численного моделирования.
- Показано, что тип оптимального возмущения определяется безразмерным параметром равным отношению вертикального размера канала к масштабу длины Обухова. Исследован энергетический цикл оптимальных возмущений и выявлен вклад физических механизмов в их развитие. Показано, что при устойчивой стратификации диссипация энергии мала на всем этапе развития оптимальных возмущений.

Список литературы

1. *Schlichting, H.* Boundary-Layer Theory (9th ed.) / H. Schlichting, K. Gersten. - Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag. - 2016. - 805 с.
2. *Schmid, P.J.* Stability and transition in shear flows / P.J. Schmid, D.S. Henningson. - New York: Springer New York. - 2000. - 558 с.
3. *Boiko, A. V.* Physics of transitional shear flows: instability and laminar-turbulent transition in incompressible near-wall shear layers / A.V. Boiko, A.V. Dovgal, G.R. Grek [и др.]. - Berlin: Springer-Verlag. - 2012. - 272 с.
4. *Boiko, A. V.* On computing the location of laminar-turbulent transition in compressible boundary layers / A.V. Boiko, K.V. Demyanko, Yu.M. Nechepurenko // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. - 2017. - Т. 32, № 1. - С. 1-12.
5. *Бойко, А.В.* Определение положения ламинарно-турбулентного перехода при численном моделировании обтекания пластины дозвуковыми и трансзвуковыми потоками / А.В. Бойко, К.В. Демьянко, А.А. Иноземцев [и др.] // Теплофизика и Аэромеханика. - 2019. - Т. 26, № 5. - С. 675-683.
6. *Boiko, A. V.* Modeling of transonic transitional three-dimensional flows for aerodynamic applications / A.V. Boiko, K.V. Demyanko, S.V. Kirilovskiy [и др.] // AIAA Journal. - 2021. - Т. 59, № 9. - С. 3598-3610.
7. *Schmid, P.J.* Nonmodal stability theory / P.J. Schmid // Annual Review of Fluid Mechanics. - 2007. - Т. 39. - С. 129-162.
8. *Schmid, P.J.* Optimal energy density growth in Hagen-Poiseuille flow / P.J. Schmid, D.S. Henningson // Journal of Fluid Mechanics. - 1994. - Т. 277. - С. 197-225.
9. *Butler, K.M.* Three-dimensional optimal perturbations in viscous shear flow / K.M. Butler, B.F. Farrell // Physics of Fluids. - 1992. - Т. 4, № 8. - С. 1637-1650.

10. *Andersson, P.* Optimal disturbances and bypass transition in boundary layers / P. Andersson, M. Berggren, D.S. Henningson // *Physics of Fluids*. - 1999. - Т. 11. - С. 134-150.
11. *Tumin, A.* Spatial theory of optimal disturbances in boundary layers / A. Tumin, E. Reshotko // *Physics of Fluids*. - 2001. - Т. 13, № 7. - С. 2097-2104.
12. *del Alamo, J.C.* Linear energy amplification in turbulent channels / J.C. del Alamo, J. Jimenez // *Journal of Fluid Mechanics*. - 2006. - Т. 559. - С. 205-213.
13. *Pujals, G.* A note on optimal transient growth in turbulent channel flows / G. Pujals, M. Garcia-Villalba, C. Cossu [и др.] // *Physics of Fluids*. - 2009. - Т. 21, № 1. - С. 015109.
14. *Cossu, C.* Optimal transient growth and very large-scale structures in turbulent boundary layers / C. Cossu, G. Pujals, S. Depardon // *Journal of Fluid Mechanics*. - 2009. - Т. 619. - С. 79-94.
15. *Глазунов, А.В.* Численное моделирование устойчиво-стратифицированных турбулентных течений над плоской и городской поверхностями / А.В. Глазунов // *Известия РАН. Физика Атмосферы и Океана*. - 2014. - Т. 50, № 3. - С. 271-281.
16. *Sullivan, P.P.* Turbulent winds and temperature fronts in large-eddy simulations of the stable atmospheric boundary layer / P.P. Sullivan, J.C. Weil, E.G. Patton [и др.] // *Journal of the Atmospheric Sciences*. - 2016. - Т. 73, № 4. - С. 1815-1840.
17. *Глазунов, А.В.* Слоистая структура устойчиво-стратифицированных турбулентных течений со сдвигом скорости / А.В. Глазунов, Е.В. Мортиков, К.В. Барсков // *Известия РАН. Физика Атмосферы и Океана*. - 2019. - Т. 55, № 3. - С. 13-26.
18. *Засько, Г.В.* Об оптимальных возмущениях устойчиво-стратифицированного турбулентного течения Куэтта / Г.В. Засько, А.В. Глазунов, Е.В. Мортиков [и др.] // *Международная конференция "Аналитические и численные методы решения задач гидродинамики, математической физики и биоло-*

- гии посвященная 100-летию К.И. Бабенко. - Тезисы докладов. - Пущино, 2019. - М.: ИПМ РАН. - С. 173-175.
19. *Zasko, G.V.* Emergence of optimal disturbances in stratified turbulent shear flow under the stochastic forcing / G.V. Zasko, P.A. Perezhogin, A.V. Glazunov [и др.] // International conference "Marchuk Scientific Readings 2021". - Abstracts. - Novosibirsk, 2021. - Novosibirsk: ICMMG SB RAS. - С. 118-119.
 20. *Zasko, G.V.* Optimal energy growth in stably stratified turbulent Couette flow / G.V. Zasko, A.V. Glazunov, E.V. Mortikov [и др.] // International conference "EGU General Assembly 2021". - Proceedings. - Online, 2021. - № EGU21-10311.
 21. *Засько, Г.В.* Развитие оптимальных возмущений на фоне мелкомасштабной турбулентности / Г.В. Засько, А.В. Глазунов, Е.В. Мортиков [и др.] // XIII Всероссийская конференция молодых ученых "Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии". - Тезисы докладов (под ред. В.В. Козлова). - Новосибирск-Шерегеш, 2019. - Новосибирск: Параллель. - С. 64-65.
 22. *Засько, Г.В.* О возникновении организованных структур в устойчиво-стратифицированном турбулентном течении Куэтта / Г.В. Засько, А.В. Глазунов, Е.В. Мортиков [и др.] // XIV Всероссийская конференция молодых ученых "Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии". - Тезисы докладов (под ред. А.Н. Шиплюка). - Новосибирск-Шерегеш, 2020. - Новосибирск: Параллель. - С. 74-75.
 23. *Засько, Г.В.* Анализ оптимальных возмущений стратифицированного турбулентного течения Куэтта / Г.В. Засько, А.В. Глазунов, Е.В. Мортиков [и др.] // XV Всероссийская конференция молодых ученых "Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии". - Тезисы докладов (под ред. А.Н. Шиплюка). - Новосибирск-Шерегеш, 2021. - Новосибирск: Автограф. - С. 83-84.
 24. *Засько, Г.В.* Анализ устойчивости стратифицированных турбулентных течений / Г.В. Засько // XVI Всероссийская конференция молодых ученых "Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии". - Тезисы

- докладов (под ред. А.Н. Шиплюка). - Новосибирск, 2022. - Новосибирск: Параллель. - С. 40-41.
25. *Засько, Г.В.* О крупномасштабных структурах в устойчиво-стратифицированном турбулентном течении Куэтта / Г.В. Засько // 62-ая Всероссийская научная конференция МФТИ, секция "Вычислительные технологии и моделирование". - Тезисы докладов. - Долгопрудный-Москва-Жуковский, 2019. - М.: МФТИ. - С. 174-175.
26. *Засько, Г.В.* О построении оптимального стохастического форсинга для линейных динамических систем / Г.В. Засько // 64-ая Всероссийская научная конференция МФТИ, секция "Вычислительные технологии и моделирование". - Тезисы докладов. - Долгопрудный-Москва-Жуковский, 2021. - М.: МФТИ. - С. 53-54.
27. *Нечепуренко, Ю.М.* Технология численного анализа гидродинамической устойчивости / Ю.М. Нечепуренко, А.В. Бойко, К.В. Демьянко [и др.] // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. - Сборник трудов. - Уфа, 2019. - Уфа: РИЦ БашГУ. - Т. 2. - С. 634-644.
28. *Нечепуренко, Ю.М.* Оптимальные возмущения ламинарных и турбулентных течений / Ю.М. Нечепуренко, А.В. Бойко, К.В. Демьянко [и др.] // XIII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. - Сборник трудов. - Санкт-Петербург, 2023. - СПб: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС. - Т. 2. - С. 637-639.
29. *Mortikov, E.* Direct numerical simulation of turbulent plane Couette flow: modification of large-scale structures by stable stratification / E. Mortikov, Yu. Nechipurenko, G. Zasko [и др.] // International conference "EMS Annual Meeting 2019". - Proceedings. - Copenhagen, Denmark, 2019. - № EMS2019-816.
30. *Glazunov, A.* Large organized structures in stably stratified turbulent shear flows / A. Glazunov, E. Mortikov, G. Zasko [и др.] // International conference "EGU General Assembly 2020". - Proceedings. - Online, 2020. - № EGU2020-9034.
31. *Глазунов, А.В.* Крупномасштабные структуры в устойчиво-стратифицированных турбулентных течениях / А.В. Глазунов, Е.В. Мортиков, Г.В. Засько

- [и др.] // XXIII Всероссийская школа-конференция молодых ученых "Состав атмосферы. Атмосферное электричество. Климатические процессы". - Тезисы докладов. - Геофизическая обсерватория "Борок 2020. - Ярославль: Филигрань. - С. 37-37.
32. *Нечепуренко, Ю.М.* Оптимальные возмущения стационарных и периодических решений динамических систем / Ю.М. Нечепуренко, А.В. Бойко, К.В. Демьянко [и др.] // XVII Всероссийская конференция молодых ученых "Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии". - Тезисы докладов (под ред. Е.И. Крауса). - Новосибирск-Шерегеш, 2023. - Новосибирск: ИПЦ НГУ. - С. 143-145.
33. *Glazunov, A.V.* Optimal disturbances of stably stratified turbulent Couette flow / A.V. Glazunov, G.V. Zasko, E.V. Mortikov [и др.] // Doklady Physics. - 2019. - Т. 64, № 7. - С. 308-312.
34. *Засько, Г.В.* Крупномасштабные структуры стратифицированного турбулентного течения Куэтта и оптимальные возмущения / Г.В. Засько, А.В. Глазунов, Е.В. Мортиков [и др.] // Препринты ИПМ им. Келдыша. - 2019. - № 63. - С. 1-31.
35. *Zasko, G.V.* Large-scale structures in stratified turbulent Couette flow and optimal disturbances / G.V. Zasko, A.V. Glazunov, E.V. Mortikov [и др.] // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. - 2020. - Т. 35, № 1. - С. 37-53.
36. *Zasko, G.V.* Spectral analysis of the optimal disturbances of stratified turbulent Couette flow / G.V. Zasko, Yu.M. Nечepurenko // Computational Mathematics and Mathematical Physics. - 2021. - Т. 61, № 1. - С. 129-141.
37. *Zasko, G.V.* Emergence of optimal disturbances in a stratified turbulent shear flow under the stochastic forcing / G.V. Zasko, P.A. Perezhugin, A.V. Glazunov [и др.] // Journal of Physics: Conference Series. - 2021. - Т. 2099, № 1. - С. 012033.
38. *Nечepurenko, Yu.M.* Constant upper bounds on the matrix exponential norm / Yu.M. Nечepurenko, G.V. Zasko // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. - 2022. - Т. 37, № 1. - С. 15-23.

39. *Nechepurenko, Yu.M.* Optimal stochastic forcing for sensitivity analysis of linear dynamical systems / Yu.M. Nechepurenko, G.V. Zasko // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. - 2022. - Т. 37, № 2. - С. 111-118.
40. *Zasko, G.V.* Optimal energy growth in stably stratified turbulent Couette flow / G.V. Zasko, A.V. Glazunov, E.V. Mortikov [и др.] // Boundary-Layer Meteorology. - 2023. - Т. 187. С. 395-421.
41. *Годунов, С.К.* Современные аспекты линейной алгебры / С.К. Годунов. - Новосибирск: Научная книга. - 1997. - 390 с.
42. *Golub, G.H.* Matrix computations (4-th edition) / G.H. Golub, C.F. van Loan. - London: John Hopkins University Press. - 2013. - 784 с.
43. *Nechepurenko, Yu.M.* A low-rank approximation for computing the matrix exponential norm / Yu.M. Nechepurenko, M. Sadkane // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. - 2011. - Т. 32, № 2. - С. 349-363.
44. *Moler, C.B.* Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix. 25 years later / C.B. Moler, C.F. van Loan // SIAM Review. - 2003. - Т. 45. - С. 3-49.
45. *Higham, N.J.* The scaling and squaring method for the matrix exponential revisited / N.J. Higham // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. - 2005. - Т. 26, № 4. - С. 1179-1193.
46. *Al-Mohy, A.H.* A new scaling and squaring algorithm for the matrix exponential / A.H. Al-Mohy, N.J. Higham // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. - 2009. - Т. 31, № 3. - С. 970-989.
47. *Nechepurenko, Yu.M.* Computing humps of the matrix exponential / Yu.M. Nechepurenko, M. Sadkane // Journal of Computational and Applied Mathematics. - 2017. - Т. 319, № 1. - С. 87-96.
48. *Нечепуренко, Ю.М.* Оценка нормы матричной экспоненты через норму решения уравнения Ляпунова и границы хаусдорфова множества / Ю.М. Нечепуренко // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 2002. - Т. 42, № 2. - С. 131-141.

49. *Burnett, E.* Modal Decomposition of Spacecraft Relative Motion in Quasi-Periodic Orbits / E. Burnett, H. Schaub // AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference. - South Lake Tahoe, 2020. - № AAS 20-506. - С. 1-20.
50. *Veselić, K.* Bounds for exponentially stable semigroups / K. Veselić // Linear Algebra and its Applications. - 2003. - Т. 358. - С. 309-333.
51. *Сарыбеков, Р.А.* Экстремальные функции Ляпунова систем уравнений второго порядка / Р.А. Сарыбеков // Сибирский математический журнал. - 1977. - Т. 18, № 5. - С. 1159-1167.
52. *Veselić, K.* Exponential decay of semigroups in Hilbert space / K. Veselić // Semigroup Forum. - 1997. - Т. 55, № 3. - С. 325-331.
53. *Veselić, K.* Estimating the operator exponential / K. Veselić // Linear Algebra and its Applications. - 1998. - Т. 280. - С. 241-244.
54. *Trefethen, L.N.* Spectra and pseudospectra: The behavior of nonnormal matrices and operators / L.N. Trefethen, M. Embree. - Princeton: Princeton University Press. - 2005. - 606 с.
55. *Bai, Z.* Templates for the solution of algebraic eigenvalue problems: a practical guide / Z. Bai, J. Demmel, J. Dongarra [и др.]. - Philadelphia: SIAM. - 2000. - 403 с.
56. *Романов, В.А.* Устойчивость плоскопараллельного течения Куэтта / В.А. Романов // Функциональный анализ и его приложения. - 1973. - Т. 7, № 2. - С. 62-73.
57. *Farrell, B.F.* Stochastic forcing of the linearized Navier-Stokes equations / B.F. Farrell, P.J. Ioannou // Physics of Fluids. - 1993. - Т. 5, № 11. - С. 2600-2609.
58. *Farrell, B.F.* Generalized stability theory. Part I: autonomous operators / B.F. Farrell, P.J. Ioannou // Journal of the Atmospheric Sciences. - 1996. - Т. 53, № 14. - С. 2025-2040.
59. *Bamieh, B.* Energy amplification in channel flows with stochastic excitation / B. Bamieh, M. Dahleh // Physics of Fluids. - 2001. - Т. 13. - С. 3258-3269.

60. *Hwang, Y.* Amplification of coherent streaks in the turbulent Couette flow: an input-output analysis at low Reynolds number / Y. Hwang, C. Cossu // Journal of Fluid Mechanics. - 2010. - T. 643. - C. 333-348.
61. *Hwang, Y.* Linear non-normal energy amplification of harmonic and stochastic forcing in the turbulent channel flow / Y. Hwang, C. Cossu // Journal of Fluid Mechanics. - 2010. - T. 664. - C. 51-73.
62. *Cossu, C.* Self-sustaining processes at all scales in wall-bounded turbulent shear flows / C. Cossu, Y. Hwang // Philosophical Transactions of the Royal Society A. - 2017. - T. 375, № 2089. - C. 20160088.
63. *Zhou, K.* Robust and optimal control / K. Zhou, J.C. Doyle, K. Glover. - New Jersey: Prentice Hall. - 1996. - 596 c.
64. *Särkkä, S.* Applied stochastic differential equations / S. Särkkä, A. Solin. - Cambridge: Cambridge University Press. - 2019. - 316 c.
65. *Bartels, R.H.* Solution of the matrix equation $AX + XB = C$ / R.H. Bartels, G.W. Stewart // Communications of the ACM. - 1972. - T. 15, № 9. - C. 820-826.
66. *Hammarling, S.J.* Numerical solution of the stable, non-negative definite Lyapunov equation / S.J. Hammarling // IMA Journal of Numerical Analysis. - 1982. - T. 2, № 3. - C. 303-325.
67. *Bhatia, R.* Matrix Analysis / R. Bhatia. - New York: Springer-Verlag. - 1997. - 347 c.
68. *Byers, R.* On the singular "vectors" of the Lyapunov operator / R. Byers, S. Nash // SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods. - 1987. - T. 8, № 1. - C. 59-66.
69. *Kenney, C.* The sensitivity of the algebraic and differential Riccati equations / C. Kenney, G. Hwer // SIAM Journal on Control and Optimization. - 1990. - T. 28. - C. 50-69.
70. *Kenney, C.* Trace norm bounds for stable Lyapunov operators / C. Kenney, G. Hwer // Linear Algebra and its Applications. - 1995. - T. 221. - C. 1-18.

71. *Bhatia, R.* A note on the Lyapunov equation / R. Bhatia // Linear Algebra and its Applications. - 1997. - T. 259. - C. 71-76.
72. *Bhatia, R.* Positive Definite Matrices / R. Bhatia. - Princeton: Princeton University Press. - 2009. - 254 c.
73. *Ellingsen, T.* Stability of linear flow / T. Ellingsen, E. Palm // The Physics of Fluids. - 1975. - T. 18, № 4. - C. 487-488.
74. *Landahl, M.T.* A note on an algebraic instability of inviscid parallel shear flows / M.T. Landahl // Journal of Fluid Mechanics. - 1980. - T. 98. - C. 243-251.
75. *Brandt, L.* The lift-up effect: the linear mechanism behind transition and turbulence in shear flows / L. Brandt // European Journal of Mechanics, B/Fluids. - 2014. - T. 47. - C. 80-96.
76. *Kline, S.J.* The structure of turbulent boundary layers / S.J. Kline, W.C. Reynolds, F.A. Schraub [и др.] // Journal of Fluid Mechanics. - 1967. - T. 30, № 4. - C. 741-773.
77. *Smith, C.R.* The characteristics of low-speed streaks in the near-wall region of a turbulent boundary layer / C.R. Smith, S.P. Metzler // Journal of Fluid Mechanics. - 1983. - T. 129, № 1. - C. 27-54.
78. *Moin, P.* Numerical investigation of turbulent channel flow / P. Moin, J. Kim // Journal of Fluid Mechanics. - 1982. - T. 118. - C. 341-377.
79. *Lee, M.J.* The structure of turbulence in a simulated plane Couette flow / M.J. Lee. - 8th Symposium on Turbulent Shear Flows, 1991. - T. 5. - C. 5.3.1-5.3.6.
80. *Komminaho, J.* Very large structures in plane turbulent Couette flow / J. Komminaho, A. Lundblad, A.V. Johansson // Journal of Fluid Mechanics. - 1996. - T. 320. - C. 259-285.
81. *Kitoh, O.* Experimental study on mean velocity and turbulence characteristics of plane Couette flow: low-Reynolds-number effects and large longitudinal vortical structure / O. Kitoh, K. Nakabayashi, F. Nishimura // Journal of Fluid Mechanics. - 2005. - T. 539. - C. 199-227

82. *Hamilton, J.M.* Regeneration mechanisms of near-wall turbulence structures / J.M. Hamilton, J. Kim, F. Waleffe // *Journal of Fluid Mechanics*. - 1995. - Т. 287. - С. 317-348.
83. *Waleffe, F.* On a self-sustaining process in shear flows / F. Waleffe // *Physics of Fluids*. - 1997. - Т. 9, № 4. - С. 883-900.
84. *Rawat, S.* On the self-sustained nature of large-scale motions in turbulent Couette flow / S. Rawat, C. Cossu, Y. Hwang [и др.] // *Journal of Fluid Mechanics*. - 2015. - Т. 782. - С. 515-540.
85. *Adrian, R.J.* Hairpin vortex organization in wall turbulence / R.J. Adrian // *Physics of Fluids*. - 2007. - Т. 19, № 4. - С. 041301.
86. *Mortikov, E.V.* Numerical study of plane Couette flow: turbulence statistics and the structure of pressure-strain correlations / E.V. Mortikov, A.V. Glazunov, V.N. Lykosov // *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. - 2019. - Т. 34, № 2. - С. 119-132.
87. *Lee, M.* Extreme-scale motions in turbulent plane Couette flows / M. Lee, D. Moser // *Journal of Fluid Mechanics*. - 2018. - Т. 842. - С. 128-145.
88. *Drobinski, P.* Evidence of organized large eddies by ground-based doppler lidar, sonic anemometer and sodar / P. Drobinski, R. Brown, P. Flamant [и др.] // *Boundary-Layer Meteorology*. - 1988. - Т. 88, № 3. - С. 343-361.
89. *Lilly, D.K.* On the instability of Ekman boundary flow / D.K. Lilly // *Journal of the Atmospheric Sciences*. - 1966. - Т. 23, № 5. - С. 481-494.
90. *Brown, A.R.* A secondary flow model for the planetary boundary layer / A.R. Brown // *Journal of the Atmospheric Sciences*. - 1970. - Т. 27, № 5. - С. 742-757.
91. *Монин, А.С.* Основные закономерности турбулентного перемешивания в приземном слое атмосферы / А.С. Монин, А.М. Обухов // *Труды Геофизического института АН СССР*. - 1954. - Т. 151, № 24. - С. 163-187.
92. *Spalart, P.R.* Direct numerical simulation of the Ekman layer: a step in Reynolds number, and cautious support for a log law with a shifted origin / P.R. Spalart,

- G.N. Coleman, R. Johnstone // *Physics of Fluids*. - 2008. - Т. 20, № 10. - С. 101507.
93. *Глазунов, А.В.* О влиянии направления геострофического ветра на турбулентность и квазиупорядоченные крупномасштабные структуры в пограничном слое атмосферы / А.В. Глазунов // *Известия РАН. Физика Атмосферы и Океана*. - 2010. - Т. 46, № 6. - С. 786-807.
94. *Глазунов, А.В.* Пространственные спектры и характерные горизонтальные масштабы флуктуаций температуры и скорости в конвективном пограничном слое атмосферы / А.В. Глазунов, В.П. Дымников // *Известия РАН. Физика Атмосферы и Океана*. - 2013. - Т. 49, № 1. - С. 37-61.
95. *Deusebio, E.* A numerical study of the unstratified and stratified Ekman layer / E. Deusebio, G. Brethouwer, P. Schlatter [и др.] // *Journal of Fluid Mechanics*. - 2014. - Т. 775. - С. 672-704.
96. *Markus, W.V.R.* Outline of a theory of turbulent shear flow / W.V.R. Markus // *Journal of Fluid Mechanics*. - 1956. - Т. 1, № 5. - С. 521-539.
97. *Bakewell Jr, H.P.* Viscous sublayer and adjacent wall region in turbulent pipe flow / H.P. Bakewell Jr, J.L. Lumley // *The Physics of Fluids*. - 1967. - Т. 10, № 9. - С. 1880-1889.
98. *Foster, R.C.* Structure and energetics of optimal Ekman layer perturbations / R.C. Foster // *Journal of Fluid Mechanics*. - 1997. - Т. 333. - С. 97-123.
99. *Reddy, S.C.* Energy growth in viscous channel flows / S.C. Reddy, D.S. Henningson // *Journal of Fluid Mechanics*. - 1993. - Т. 252. - С. 209-238.
100. *Monkewitz, P.A.* Self-consistent high-Reynolds-number asymptotics for zero-pressure-gradient turbulent boundary layers / P.A. Monkewitz, K.A. Chauhan, H.M. Nagib // *Physics of Fluids*. - 2007. - Т. 19, № 11. - С. 115101.
101. *Petenko, I.* Stable surface-based turbulent layer during the polar winter at Dome C, Antarctica: sodar and in situ observations / I. Petenko, S. Argentini, G. Casasanta [и др.] // *Boundary-Layer Meteorology*. - 2019. - Т. 171, № 1. - С. 101-128.

102. *Kaminski, A.K.* Transient growth in strongly stratified shear layers / A.K. Kaminski, C.P. Caulfield, J.R. Taylor // Journal of Fluid Mechanics. - 2014. - Т. 758, № R4. - С. 1-12.
103. *Kaminski, A.K.* Nonlinear evolution of linear optimal perturbations of strongly stratified shear layers / A.K. Kaminski, C.P. Caulfield, J.R. Taylor // Journal of Fluid Mechanics. - 2017. - Т. 825. - С. 213-244.
104. *Reynolds, W.C.* The mechanisms of an organized wave in turbulent shear flow. Part 3. Theoretical models and comparisons with experiments / W.C. Reynolds, A. Hussain // Journal of Fluid Mechanics. - 1972. - Т. 54, № 2. - С. 263-288.
105. *Монин, А.С.* Статистическая Гидромеханика. Том 1: Механика Турбулентности. / А.С. Монин, А.М. Яглом. - М.: Наука. - 1965. - 641 с.
106. *Lorenz, E.N.* Available potential energy and the maintenance of the general circulation / E.N. Lorenz // Tellus. - 1955. - Т. 7, № 2. - 157-167.
107. *Boiko, A.V.* On stability of Poiseuille flow in grooved channels / A.V. Boiko, N.V. Klyushnev, Yu.M. Nechepurenko // Europhysics Letters. - 2015. - Т. 111, № 1. - С. 14001.
108. *Canuto, C.* Spectral Methods. Fundamentals in Single Domains / C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni [и др.]. - Berlin: Springer-Verlag. - 2006. - 563 с.
109. *Weideman, J.A.C.* A MATLAB differentiation matrix suite / J.A.C. Weideman, S.C. Reddy // ACM Transactions on Mathematical Software. - 2000. - Т. 26, № 4. - С. 465-519.
110. Nechepurenko, Yu.M. On the dimension reduction of linear differential-algebraic control systems / Yu.M. Nechepurenko // Doklady Mathematics. - 2012. - Т. 86. - С. 457-459.
111. *Hwang, Y.* Optimal amplification of large-scale structures in plane turbulent Couette flow / Y. Hwang, C. Cossu // Sixth International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena. - Seoul, South Korea, 2009. - С. 159-164.

112. *Businger, J.A.* Flux-profile relationships in the atmospheric surface layer / J.A. Businger, J.C. Wyngaard, Y. Izumi [и др.] // Journal of the Atmospheric Sciences. - 1971. - T. 28, № 2. - С. 181-189.
113. *Box, G.E.P* A Note on the Generation of Random Normal Deviates / G.E.P. Box, M.E. Muller // The Annals of Mathematical Statistics. - 1958. - T. 29, № 2. - С. 610-611.
114. *Preisendorfer, R.W.* Principal Component Analysis in Meteorology and Oceanography / R.W. Preisendorfer. - New York: Elsevier. - 1988. - 425 с.
115. *Bjornsson, H.* A manual for EOF and SVD analyses of climatic data / H. Bjornsson, S.A. Venegas // CCGCR Report. - 1997. - T. 97, № 1. - С. 112-134.