

На правах рукописи



Засько Григорий Владимирович

# Численный анализ немодовой устойчивости турбулентных течений

Специальность 1.2.2 —  
«Математическое моделирование, численные методы и  
комплексы программ»

Автореферат  
диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Москва — 2024

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте вычислительной математики им. Г.И. Марчука Российской академии наук

Научный доктор физико-математических наук, доцент  
руководитель: **Нечепуренко Юрий Михайлович**  
Официальные **Капорин Игорь Евгеньевич,**  
оппоненты: доктор физико-математических наук,  
Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр «Информатика и Управление» Российской академии наук», главный научный сотрудник

**Троицкая Юлия Игоревна,**  
доктор физико-математических наук,  
Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова Российской академии наук», заведующий отделом нелинейных геофизических процессов

Ведущая Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича Сибирского отделения Российской академии наук  
организация:

Защита состоится «20» июня 2024 г. в 15:00 на заседании диссертационного совета 24.1.455.01 на базе федерального государственного бюджетного учреждения науки Института вычислительной математики им. Г.И. Марчука Российской академии наук по адресу: 119333, г. Москва, ул. Губкина, д. 8, ауд. 727.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИВМ РАН.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 119333, г. Москва, ул. Губкина, д. 8, ИВМ РАН, ученому секретарю диссертационного совета 24.1.455.01.

Автореферат разослан «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2024 года

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
24.1.455.01, д. ф.-м. н.



Бочаров Геннадий Алексеевич

## Общая характеристика работы

Актуальность темы. В рамках традиционного анализа устойчивости гидродинамических течений исследуется появление, развитие и последствия развития наиболее нарастающих собственных мод. Помимо наиболее нарастающих собственных мод представляют интерес возмущения, испытывающие наибольший рост на конечных временных (или пространственных) интервалах, которые называют оптимальными возмущениями. Поиск оптимальных возмущений для заданного стационарного решения динамической системы, а также исследование развития и последствий развития таких возмущений, называют анализом немодовой устойчивости. Оптимальные возмущения широко применяются для описания начального этапа обходного сценария ламинарно-турбулентного перехода.

Методы анализа немодовой устойчивости применялись также и для исследования организованных структур, наблюдаемых в сдвиговых турбулентных течениях при нейтральной стратификации. Анализ проводился на основе линейных моделей, в которых взаимодействие с мелкомасштабной турбулентностью параметризовано с помощью оператора вихревой вязкости. Найденные оптимальные возмущения оказались близки по размерам и пространственной конфигурации к наблюдаемым организованным структурам.

Организованные структуры были обнаружены в сдвиговых турбулентных течениях и при устойчивой стратификации, близких по свойствам к течению в атмосферном пограничном слое. Как показывают результаты прямого численного моделирования таких течений, в мгновенных полях температуры наблюдаются тонкие наклонные слои жидкости с сильной стратификацией («фронты»). Физические механизмы, отвечающие за появление таких структур, не были объяснены. Исследование этих механизмов является актуальным, так как наличие организованных структур в турбулентном течении приводит к расхождению между результатами прямого численного моделирования и одномерных моделей турбулентности, используемых в климатических моделях.

Актуальной задачей является поиск подхода к исследованию организованных структур в турбулентных течениях, который при этом позволит объяснить физические механизмы и условия формирования этих структур и

оценить их пространственные размеры и конфигурацию, а кроме того является менее затратным чем прямое численное моделирование.

Вычисление оптимальных возмущений сводится к вычислению максимума нормы матричной экспоненты, при этом само значение максимума определяет величину подскока энергии оптимального возмущения. Для ускорения параметрических расчетов представляют интерес верхние оценки этой величины. Еще одной задачей, возникающей при анализе немодовой устойчивости, является разработка алгоритмов для анализа чувствительности заданного стационарного решения динамической системы к стохастическому форсингу и поиска оптимального стохастического форсинга. Указанные задачи матричного анализа представляют и самостоятельный интерес.

**Целью** диссертации является разработка универсальной технологии численного анализа немодовой устойчивости осредненных турбулентных течений и применение этой технологии для объяснения физических механизмов, ответственных за появление и развитие организованных структур в турбулентных течениях, близких по свойствам к течению в пограничном слое атмосферы.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Разработать универсальную технологию численного анализа немодовой устойчивости осредненных турбулентных течений.
2. Рассмотреть возникающие в рамках этой технологии матричные задачи: получение верхних оценок максимума нормы матричной экспоненты и вычисление оптимального стохастического форсинга.
3. Применить разработанную технологию к исследованию организованных структур, наблюдаемых в турбулентных течениях, близких по свойствам к течению в атмосферном пограничном слое.
4. Исследовать физические механизмы, отвечающие за появление и развитие организованных структур в турбулентных течениях, а также свойства оптимальных возмущений.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Получены новые верхние оценки максимума нормы матричной экспоненты. Показаны преимущества полученных оценок по сравнению с известными ранее.

2. Впервые поставлена задача о поиске оптимального стохастического форсинга для линейных динамических систем. Предложены и обоснованы алгоритмы вычисления оптимального стохастического форсинга в  $p$ -нормах Шэттена при  $p = 1, 2$  и  $\infty$ .
3. Разработана универсальная технология анализа немодовой устойчивости осредненных турбулентных течений, включающая в себя построение линейной модели развития организованных структур и эффективные численные алгоритмы.
4. Выполнен анализ немодовой устойчивости стратифицированного турбулентного течения Куэтта в широком диапазоне параметров. Показано, что для этого течения существует несколько типов оптимальных возмущений. Продемонстрировано хорошее согласование пространственной конфигурации и размеров найденных оптимальных возмущений с наблюдаемыми в результатах прямого численного моделирования организованными структурами.
5. Показано, что тип оптимальных возмущений определяется безразмерным параметром, равным отношению вертикального размера канала к масштабу длины Обухова. Оценен вклад отдельных физических механизмов в развитие оптимальных возмущений. Показано, что диссипация энергии мала на всем этапе развития оптимальных возмущений при устойчивой стратификации.

**Практическая значимость** заключается в объяснении физических механизмов, отвечающих за появление и развитие организованных структур, наблюдаемых в сдвиговых турбулентных течениях при устойчивой стратификации. **Научная значимость** заключается в том, что разработана универсальная технология численного анализа немодовой устойчивости осредненных турбулентных течений, а также в новых верхних оценках максимума нормы матричной экспоненты и алгоритмах вычисления оптимального стохастического форсинга для линейных динамических систем.

**Научная новизна:**

1. Получен ряд новых верхних оценок максимума нормы матричной экспоненты и продемонстрированы преимущества этих оценок по сравнению с известными ранее.

2. Впервые поставлена задача о поиске оптимального стохастического форсинга и разработаны и обоснованы алгоритмы ее решения в  $p$ -нормах Шэттена при  $p = 1, 2$  и  $\infty$ .
3. Разработана универсальная технология анализа немодовой устойчивости осредненных турбулентных течений, в которой для вычисления оптимальных возмущений используются эффективные численные алгоритмы, а для построения линейной модели используются результаты прямого численного моделирования.
4. Для стратифицированных турбулентных течений впервые вычислены оптимальные возмущения. Впервые показано, что найденные оптимальные возмущения хорошо согласуются по пространственным масштабам и конфигурации с наблюдаемыми в таких течениях организованными структурами.
5. Впервые исследованы физические механизмы, отвечающие за появление и развитие наклонных организованных структур, наблюдаемых в устойчиво-стратифицированных сдвиговых турбулентных течениях.
6. Впервые исследовано развитие оптимальных возмущений в нелинейной модели, описывающей появление и развитие организованных структур в турбулентных течениях. Показано, что характеристики оптимальных возмущений, найденные в рамках линейной модели, согласуются с развитием этих возмущений в нелинейной модели.

Достоверность результатов **первой главы** обоснована строгим доказательством математических утверждений и проиллюстрирована численными экспериментами. Достоверность результатов **второй и третьей глав** обоснована обширными численными экспериментами и сравнением их результатов с результатами прямого численного моделирования стратифицированных турбулентных течений.

Апробация работы. Соискатель **лично** докладывал основные результаты работы на научных семинарах (**4 доклада**): «Математическое моделирование геофизических процессов: прямые и обратные задачи» (2019, НИВЦ МГУ), «Новые подходы к измерению и моделированию геофизической турбулентности» (2019, ИВМ РАН-НИВЦ МГУ), «Матричные методы в математике и приложениях» (2020, ИВМ РАН), «Вычислительная математика и

приложения» (2024, ИВМ РАН); на международных конференциях (**3 доклада**): «Аналитические и численные методы решения задач гидродинамики, математической физики и биологии» (2019), «Марчуковские научные чтения» (2021), «EGU General Assembly 2021»; на всероссийских конференциях (**6 докладов**): «Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии» (2019-2022), 62-я и 64-я научная конференции МФТИ (2019,2021). Результаты работы также обсуждались в **6 докладах**, где соискатель участвовал **как соавтор**: Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (2019,2023); «EMS Annual Meeting 2019»; «EGU General Assembly 2020»; «Состав атмосферы. Атмосферное электричество. Климатические процессы» (2020); «Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии» (2023).

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано **23 работы**, из них **8 работ** [1–8] — в рецензируемых научных изданиях, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание учёной степени кандидата наук. Из этих 8 работ **7 работ** [1; 3–8] опубликованы в научных изданиях, индексируемых в международных базах данных Web of Science или Scopus.

**Личный вклад.** Соискатель участвовал в разработке всех элементов технологии численного анализа немодовой устойчивости турбулентных течений, а также в постановке математических задач и доказательстве теорем. В работах [1–4; 8] соискатель участвовал в разработке и реализации технологии численного анализа немодовой устойчивости турбулентных течений и выполнил все численные эксперименты с этой технологией для анализа организованных структур в стратифицированном турбулентном течении Куэтта. В работе [5] соискатель разработал и реализовал технологию анализа временных рядов в модели появления и развития организованных структур в стратифицированном течении Куэтта. В работе [6] соискатель получил 2 новые верхние оценки максимума нормы матричной экспоненты, а также участвовал в получении других новых оценок. В работе [7] соискатель поставил задачу о поиске оптимального стохастического форсинга для линейных динамических систем, а также участвовал в разработке и обосновании численных алгоритмов его вычисления.

**Соответствие паспорту специальности.** Диссертация соответствует паспорту специальности 1.2.2, поскольку содержит в себе п. 2 – «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий» и п. 8 – «Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента».

**Объем и структура диссертации.** Диссертация состоит из введения, 3 глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 122 страницы, включая 27 рисунков и 10 таблиц. Список литературы содержит 115 наименований.

## Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках диссертации, формулируются цели работы, поясняются научная новизна и практическая значимость работы, а также указывается личный вклад соискателя.

**Первая глава** посвящена постановке задач, возникающих при исследовании немодовой устойчивости стационарных решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, численным методам решения таких задач и их обоснованию. В **разделе 1.1** рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{dt} = Au, \quad (1)$$

где  $t > 0$  — время,  $u$  — вектор-функция (отклонения от исследуемого стационарного решения), а  $A$  — некоторая квадратная комплексная матрица не зависящая от времени. Для системы (1) ставится задача Коши с заданным начальным вектором  $u_0$  при  $t = 0$ . Решение задачи Коши представимо в виде  $u(t) = \exp(tA)u_0$ , где  $\exp(tA)$  — это матричная экспонента. Далее вводятся величины

$$\Gamma(t) := \max_{\|u_0\|_2=1} \|u(t)\|_2 = \|\exp(tA)\|_2, \quad \Gamma_{\max} = \max_{t \geq 0} \Gamma(t), \quad (2)$$

называемые максимальной амплификацией в момент времени  $t$  и глобальной максимальной амплификацией соответственно. Момент времени, при котором достигается  $\Gamma_{\max}$ , называется оптимальным моментом времени и обозначается через  $t_{\text{opt}}$ . Далее вводится понятие оптимального возмущения, как начального возмущения  $u_0$ , на котором достигается  $\Gamma_{\max}$ . Оптимальное возмущение — это нормированный правый сингулярный вектор, отвечающий максимальному сингулярному числу матрицы  $\exp(t_{\text{opt}}A)$ . Далее на примере матрицы  $2 \times 2$  демонстрируется случай  $1 < \Gamma_{\max} < \infty$ , а также вводится величина

$$\Gamma_{\max, \mathcal{U}} = \max_{t \geq 0} \max_{w \in \mathcal{U}, \|w\|_2=1} \|\exp(tA)w\|_2,$$

означающая максимальную амплификацию на подпространстве  $\mathcal{U}$  и описываются алгоритмы вычисления этой величины, когда  $\mathcal{U}$  — это инвариантное подпространство, отвечающее заданному подмножеству спектра матрицы  $A$ .

В разделе 1.2 вводится величина

$$r_{\max} = \max\{\text{Real}\lambda : \lambda \in \lambda(A)\}, \quad (3)$$

означающая максимальную вещественную часть собственных значений матрицы  $A$ , а также величины

$$h_{\min} = \min\{\text{Real}\lambda : \lambda \in W(A)\}, \quad h_{\max} = \max\{\text{Real}\lambda : \lambda \in W(A)\}, \quad (4)$$

означающие левую и правую границы хаусдорфова множества

$$W(A) = \{(Ax, x) : x \in \mathbb{C}^n, \|x\|_2 = 1\}$$

матрицы  $A$  порядка  $n$ . Если выполнены неравенства  $h_{\max} > 0$  и  $r_{\max} < 0$ , то  $1 < \Gamma_{\max} < \infty$ : этот случай представляет наибольший интерес при анализе немодовой устойчивости. Далее описывается эффективный матричный алгоритм вычисления  $\Gamma_{\max}$ , позволяющий найти эту величину с заданной относительной точностью для комплексной матрицы общего вида средних размеров. Этот алгоритм используется в последующих разделах диссертации.

Раздел 1.3 посвящен получению новых верхних оценок величины  $\Gamma_{\max}$ . В начале раздела дается обзор работ, посвященных вычислению матричной экспоненты и получению верхних оценок ее нормы. В подразделе 1.3.1 при-

водятся известные экспоненциальные верхние оценки величины  $\Gamma(t)$ , в том числе оценки, в которых используется решение  $X_I$  уравнения Ляпунова

$$A^*X_I + X_I A = -I \quad (5)$$

с единичной матрицей  $I$  в правой части. Далее вводится семейство уравнений Ляпунова

$$A(r)^*X_I(r) + X_I(r)A(r) = -I \quad (6)$$

с матрицей  $A(r) = A - rI$  и доказывается следующий результат.

**Лемма 1.** Пусть  $A$  — квадратная матрица с  $h_{\max} > 0$  и  $r_{\max} < 0$ . Тогда уравнение

$$-2r\|X_I(r)\|_2 + 1 = 0 \quad (7)$$

имеет единственный корень при  $r > r_{\max}$ .

Корень уравнения (7) обозначается через  $r_*$ , а решение уравнения Ляпунова (6) при  $r = r_*$  — через  $X_*$ . Новые верхние оценки величины  $\Gamma_{\max}$  дает следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть  $A$  — квадратная матрица с  $h_{\max} > 0$  и  $r_{\max} < 0$ . Тогда

$$\Gamma_{\max} \leq \Gamma_G := \sqrt{\|X_*\|_2 \|X_*^{-1}\|_2}, \quad (8)$$

$$\Gamma_{\max} \leq \Gamma_N := \sqrt{c_{N*}} \leq \tilde{\Gamma}_N := \sqrt{\tilde{c}_{N*}}, \quad (9)$$

где

$$c_{N*} = \begin{cases} 1, & \text{если } b_* = -1, \\ \exp(1 - a_*), & \text{если } b_* = 0, \\ \left(\frac{1 + b_*}{1 + a_* b_*}\right)^{1+1/b_*}, & \text{иначе,} \end{cases}, \quad \tilde{c}_{N*} = \begin{cases} e, & \text{если } b_* \leq 0, \\ e(1 + b_*), & \text{если } b_* \geq 0, \end{cases},$$

где  $a_* = (2\|X_*\|_2|h_{\min} - r_*|)^{-1}$ ,  $b_* = 2\|X_*\|_2(h_{\max} - r_*)$ , а  $e$  — основание натурального логарифма.

Далее обсуждаются затраты на вычисление оценок  $\Gamma_G$ ,  $\Gamma_N$  и  $\tilde{\Gamma}_N$  и отмечается, что наибольших затрат требует вычисление  $r_*$ .

Новые верхние оценки величины  $\Gamma_{\max}$  дает также следующая теорема.

**Теорема 2.** Пусть  $A$  — квадратная матрица с  $h_{\max} > 0$  и  $r_{\max} < 0$ . Тогда

$$\Gamma_{\max} \leq \Gamma_Z := \sqrt{\frac{1 + 2h_{\max}\|X_I\|_2}{1 + 2h_{\max}\|X_I^{-1}\|_2^{-1}}} < \tilde{\Gamma}_Z := \sqrt{1 + 2h_{\max}\|X_I\|_2}. \quad (10)$$

Отмечается, что вычисление оценок (10) существенно менее затратно, чем вычисление оценок (8), (9).

В подразделе 1.3.2 на примере матриц порядка 2 показывается как точность оценок (8), (9) и (10) зависит от расположения хаусдорфова множества матрицы  $A$  и собственных значений в нем и рассматриваются ряд матриц большего порядка из известной коллекции NEP. Обсуждаются достоинства и недостатки предложенных оценок. В подразделе 1.3.3 даются рекомендации по использованию полученных оценок. Для матрицы  $A$  не слишком большого размера, вычисления с исходной матрицей предлагается заменить на вычисления с ее формой Шура. Если требуется хорошая верхняя оценка величины  $\Gamma_{\max}$  при низких вычислительных затратах, то следует использовать оценку  $\Gamma_Z$ . Если требуется наиболее точная оценка, то следует дополнительно вычислить оценку  $\Gamma_N$  и взять минимум из них. Для больших разреженных матриц следует использовать оценки  $\Gamma_N$ ,  $\tilde{\Gamma}_N$  и  $\tilde{\Gamma}_Z$ , включающие в себя только левую и правую границы хаусдорфова множества и норму решения уравнения Ляпунова. В подразделе 1.3.4 на примере анализа немодовой устойчивости классических ламинарных течений демонстрируется точность предложенных оценок и обсуждается как можно их использовать для ускорения параметрических расчетов.

Раздел 1.4 посвящен анализу чувствительности линейных динамических систем к стохастическому форсингу. В начале раздела вводится неоднородная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{dt} = Au + Vf, \quad (11)$$

где  $-\infty < t < +\infty$  — время,  $u$  — вектор-функция,  $A$  — некоторая квадратная комплексная матрица порядка  $n$  не зависящая от времени, а  $f$  —  $m$ -компонентный вектор-столбец ( $m \leq n$ ), вообще говоря зависящий от времени, который далее называется форсингом. Отклик системы (11) на фор-

синг определяется как линейная функция решения  $g = W^*u$ . Здесь  $V$  и  $W$  — фиксированные прямоугольные матрицы размера  $n \times m$  и  $n \times r$  ( $n \geq r$ ) соответственно. Варьируя матрицы  $V$  и  $W$ , можно рассматривать случаи, когда форсинг действует только на часть переменных системы, либо когда исследуется отклик только части компонент решения.

В подразделе 1.4.1 определяется вид стохастического форсинга, представляющий собой дельта-коррелированный по времени гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и спектральной плотностью  $C$ :

$$\langle f(t) \rangle = 0, \quad \langle f(t)f(t')^* \rangle = C\delta(t - t'), \quad C = C^* \geq 0, \quad (12)$$

где  $\delta(\tau)$  — это дельта-функция Дирака,  $\langle \cdot \rangle$  — осреднение по ансамблю, а символ " $\geq$ " для матрицы  $C$  означает, что для любого вектора  $x$  выполнено неравенство  $(Cx, x) \geq 0$ . Отклик  $g = W^*u$  также является гауссовским случайным процессом с  $\langle g(t) \rangle = 0$  и не зависящей от времени ковариационной матрицей

$$\langle g(t)g(t)^* \rangle = \mathcal{M}(C) := W^*XW, \quad (13)$$

где  $X = X(C)$  — это решение уравнения Ляпунова  $AX + XA^* = -VCV^*$ . Также вводится обозначение  $Y$  для решения уравнения Ляпунова

$$A^*Y + YA = -WW^*. \quad (14)$$

В подразделе 1.4.2 ставится задача о поиске оптимальной спектральной плотности стохастического форсинга:

$$C \neq 0 : \frac{|||\mathcal{M}(C)|||_p}{|||C|||_p} \rightarrow \max, \quad C = C^* \geq 0, \quad (15)$$

где  $\mathcal{M}$  означает отображение (13), а  $|||B|||_p$  для матрицы  $B$  означает ее  $p$ -норму Шэттена, то есть  $p$ -норму вектора, составленного из алгебраически полного набора ее сингулярных чисел. Основным результатом данного подраздела является

**Теорема 3.** Пусть  $A$  — квадратная матрица порядка  $n$  с  $r_{\max} < 0$  и заданы матрицы  $V$  (размера  $n \times m$ ,  $n \geq m$ ) и  $W$  (размера  $n \times r$ ,  $n \geq r$ ). Тогда решением задачи (15) в случае  $p = 1$  является матрица  $C = cc^*$ , где  $c$  — собственный вектор эрмитовой матрицы  $\tilde{Y} = V^*YV$  отвечающий ее

максимальному собственному значению, где  $Y$  — решение уравнения (14); в случае  $p = 2$  — правый сингулярный вектор отображения  $M$  (13), отвечающий его максимальному сингулярному числу; а в случае  $p = \infty$  — единичная матрица порядка  $m$ .

При доказательстве Теоремы 3 при  $p = 2$  доказываемое утверждение, которое представляет самостоятельный интерес.

**Теорема 4.** Пусть  $A$  — квадратная матрица порядка  $n$  с  $r_{\max} < 0$  и заданы матрицы  $V$  (размера  $n \times m$ ,  $n \geq m$ ) и  $W$  (размера  $n \times r$ ,  $n \geq r$ ). Тогда правый сингулярный вектор отображения (13), отвечающий любому из его сингулярных чисел, можно выбрать эрмитовой матрицей, а правый сингулярный вектор, отвечающий максимальному сингулярному числу, можно выбрать эрмитовой неотрицательно определенной матрицей.

В подразделе 1.4.3 предлагается эффективный алгоритм вычисления оптимальной спектральной плотности (15) для случая  $p = 2$ .

Вторая глава посвящена описанию технологии численного анализа немодовой устойчивости осредненных турбулентных течений. В разделе 2.1 представлен обзор литературы, посвященной наблюдаемым в сдвиговых турбулентных течениях организованным структурам и подходам к их исследованию. В разделе 2.2 описывается стратифицированное турбулентное течение Куэтта, рассматриваемое на протяжении всей диссертации. В декартовых координатах  $x$  (продольная),  $y$  (вертикальная),  $z$  (поперечная) рассматривается движение вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном трехмерном канале полувысоты  $h$ :  $-h < y < h$  в поле силы тяжести. Стенки канала противонаправлено движутся в продольном направлении со скоростью  $U_0/2$ ; на нижней стенке поддерживается постоянная температура  $T_1$ , на верхней —  $T_2 \geq T_1$ . После обезразмеривания движение жидкости определяется системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} - (0, RiT, 0)^T &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T - \frac{1}{PrRe} \Delta T &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)^T$ ,  $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ ,  $\mathbf{u} = (U, V, W)^T$ ,  $p$  и  $T$  — обезразмеренные компоненты вектора скорости (в направлениях  $x$ ,  $y$  и  $z$ ), удельное дав-

ление и температура соответственно;  $Re = U_0 h / \nu$ ,  $Ri = g(T_2 - T_1)h / (T_1 U_0^2)$  и  $Pr = \nu / \chi$  — числа Рейнольдса, Ричардсона и Прандтля соответственно;  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $\chi$  — так называемый коэффициент теплопроводности,  $g$  — ускорение свободного падения. Далее демонстрируются результаты прямого численного моделирования на основе уравнений (16). В подразделах 2.2.1-2.2.2 демонстрируются наблюдаемые в результатах прямого численного моделирования организованные структуры. При нейтральной стратификации в мгновенных полях флуктуаций скорости наблюдаются крупномасштабные продольные вихри («ролики»). При устойчивой стратификации в мгновенных полях флуктуаций температуры наблюдаются тонкие нерегулярные наклонные слои жидкости с сильной стратификацией («наклонные фронты»). Мгновенные поля, в которых наблюдаются организованные структуры, представляются в виде ряда Фурье по  $x$  и  $z$  и демонстрируется вид высокоэнергетичных Фурье-гармоник с номерами  $(k_x, k_z) = (1,1), (2,1), (2,2)$ .

В разделе 2.3 описываются этапы построения линейной модели эволюции организованных структур. Вводятся эффективные коэффициенты вязкости и диффузии

$$\bar{\nu}(y) = -\tau / \left( \frac{d\bar{U}}{dy} \right), \quad \bar{\mu}(y) = -F_T / \left( \frac{d\bar{T}}{dy} \right)$$

включающие в себя как молекулярную так и турбулентную составляющую, где  $\bar{U}(y)$  и  $\bar{T}(y)$  — средние профили продольной скорости и температуры, а  $\tau$  и  $F_T$  — полные потоки импульса и тепла (не зависят от  $y$ ). Эти величины получены по результатам прямого численного моделирования. Далее взаимодействие с мелкомасштабной турбулентностью предполагается изотропным по  $x$ ,  $y$  и  $z$  и параметризуется с помощью операторов

$$\Delta_\nu = \bar{\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\nu} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{\nu} \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \Delta_\mu = \bar{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\mu} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{\mu} \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Полученная система уравнений по построению имеет стационарное решение  $(\bar{U}(y), 0, 0, \bar{P}(y), \bar{T}(y))$ , причем профили удовлетворяют соотношениям

$$-\bar{\nu} \frac{d\bar{U}}{dy} = \tau, \quad -\bar{\mu} \frac{d\bar{T}}{dy} = F_T, \quad \frac{d\bar{P}}{dy} = Ri \bar{T}.$$

Далее выполняется линеаризация полученной системы уравнений относительно указанного стационарного решения и рассматриваются возмущения вида

$$(u_{\alpha\gamma}, v_{\alpha\gamma}, w_{\alpha\gamma}, p_{\alpha\gamma}, T_{\alpha\gamma})e^{i\alpha x + i\gamma z}, \quad (17)$$

где  $\alpha$  и  $\gamma$  — вещественные продольное и поперечное волновые числа соответственно, а  $u_{\alpha\gamma}, v_{\alpha\gamma}, w_{\alpha\gamma}, p_{\alpha\gamma}, T_{\alpha\gamma}$  — комплекснозначные амплитуды, зависящие только от  $y$  и  $t$ . Далее выводятся линеаризованные уравнения эволюции амплитуд возмущений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{\alpha\gamma}}{\partial t} + i\alpha\bar{U}u_{\alpha\gamma} + \frac{d\bar{U}}{dy}v_{\alpha\gamma} + i\alpha p_{\alpha\gamma} + \Delta_{\nu}^{\alpha\gamma}u_{\alpha\gamma} &= 0, \\ \frac{\partial v_{\alpha\gamma}}{\partial t} + i\alpha\bar{U}v_{\alpha\gamma} + \frac{\partial p_{\alpha\gamma}}{\partial y} + \Delta_{\nu}^{\alpha\gamma}v_{\alpha\gamma} - RiT_{\alpha\gamma} &= 0, \\ \frac{\partial w_{\alpha\gamma}}{\partial t} + i\alpha\bar{U}w_{\alpha\gamma} + i\gamma p_{\alpha\gamma} + \Delta_{\nu}^{\alpha\gamma}w_{\alpha\gamma} &= 0, \\ \frac{\partial T_{\alpha\gamma}}{\partial t} + i\alpha\bar{U}T_{\alpha\gamma} + \frac{d\bar{T}}{dy}v_{\alpha\gamma} + \Delta_{\mu}^{\alpha\gamma}T_{\alpha\gamma} &= 0, \\ i\alpha u_{\alpha\gamma} + \frac{\partial v_{\alpha\gamma}}{\partial y} + i\gamma w_{\alpha\gamma} &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

где для амплитуд компонент скорости предполагается условие прилипания на стенках канала. В качестве величины возмущений вида (17) вводится функционал плотности полной энергии

$$\mathcal{E}_t = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left( |u_{\alpha\gamma}|^2 + |v_{\alpha\gamma}|^2 + |w_{\alpha\gamma}|^2 + \frac{Ri}{d\bar{T}/dy} |T_{\alpha\gamma}|^2 \right) dy \quad (19)$$

и вводится понятие максимальной амплификации энергии при фиксированных  $\alpha, \gamma$  и  $t$ :

$$\Gamma^{\alpha\gamma}(t) = \max \frac{\mathcal{E}_t}{\mathcal{E}_0},$$

где максимум берется по всем начальным условиям, удовлетворяющим дискретному аналогу уравнения неразрывности. Далее вводятся обозначения

$$\Gamma_{\max}^{\alpha\gamma} = \max_{t \geq 0} \Gamma^{\alpha\gamma}(t), \quad \Gamma_{\max} = \max_{\alpha, \gamma} \Gamma_{\max}^{\alpha\gamma}, \quad (\alpha_{\text{opt}}, \gamma_{\text{opt}}, t_{\text{opt}}) = \arg \max_{\alpha, \gamma, t} \Gamma^{\alpha\gamma}(t).$$

Начальное возмущение, на котором достигается  $\Gamma_{\max}$ , называется оптимальным возмущением. В подразделе 2.3.1 ставится проблема собственных значений для уравнений (18) и доказывается утверждение о симметричности спектра относительно вещественной оси.

В разделе 2.4 описывается аппроксимация уравнений (18) по  $y$  методом Галеркина-коллокаций на сетке Гаусса-Лобатто, приводится матричный вид дифференциально-алгебраической системы, возникающей после аппроксимации, описывается алгоритм проектирования этой системы на подпространство бездивергентных сеточных функций, позволяющий свести эту систему к эквивалентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений меньшей размерности (для которой применимы численные алгоритмы из **первой главы**).

Третья глава посвящена применению технологии численного анализа немодовой устойчивости для исследования механизмов появления и развития организованных структур, наблюдаемых в стратифицированном турбулентном течении Куэтта. Раздел 3.1 посвящен результатам вычисления оптимальных возмущений. В подразделе 3.1.1 показывается, что существует 2 типа оптимальных возмущений: при нейтральной и близкой к нейтральной стратификации оптимальное возмущение — это крупномасштабные продольные вихри с  $\alpha_{\text{opt}} = 0$  развивающиеся в продольные стрики, а при устойчивой стратификации оптимальное возмущение — это наклонные структуры с  $\alpha_{\text{opt}} \neq 0$ , меняющие наклон в процессе своего развития (см. Рисунок 1). Приводится ряд рисунков, визуализирующих пространственную конфигурацию оптимальных возмущений. Подраздел 3.1.2 посвящен зависимости оптимальных возмущений и максимальной амплификации  $\Gamma_{\max}$  от  $Re$  и  $Ri$ . Представлена таблица с результатами параметрических расчетов. Демонстрируется, что на зависимости  $\Gamma_{\max}(Ri)$  есть три характерных участка: рост амплификации для продольных (с  $\alpha_{\text{opt}} = 0$ ) оптимальных возмущений, переход между типами оптимальных возмущений и рост амплификации для наклонных (с  $\alpha_{\text{opt}} \neq 0$ ) оптимальных возмущений. Показывается, что безразмерным параметром определяющим тип оптимального возмущения является  $\zeta = h/L$ , где  $h$  — полувысота канала, а  $L$  — масштаб длины Обухова. Переход происходит при  $\zeta \approx \zeta_{\text{cr}} = 2.32$ . Эти результаты проиллюстрированы на Рисунке 2. В подразделе 3.1.3 выполняется сравнение высокоэнерге-

тических Фурье-гармоник, выделенных из результатов прямого численного моделирования, с соответствующими им по волновым числам оптимальными возмущениями. Демонстрируется как качественное, так и количественное совпадение их пространственной конфигурации (см. Рисунок 3). Раздел 3.2 посвящен анализу спектрального (модового) состава оптимальных возмущений, проектированию системы на инвариантные подпространства и сравнению оптимальных возмущений с оптимальными возмущениями из этих подпространств. Для этого используются алгоритмы из раздела 1.1. Показывается, что оптимальные возмущения представляют собой пакет из большого числа собственных мод, причем это число растет с ростом числа Рейнольдса. В разделе 3.3 из уравнений (18) выводятся уравнения эволюции плотности кинетической и потенциальной энергии амплитуд возмущений (аналог уравнения Рейнольдса–Орра) и изучается вклад физических механизмов (влияние сил плавучести, эффект опрокидывания и механизм Орра) в развитие оптимальных возмущений (см. Рисунок 4). В подразделе 3.3.1 проводятся численные эксперименты, демонстрирующие, что без влияния сил плавучести оптимальными являются возмущения с  $\alpha = 0$ : то есть, появление наклонных оптимальных возмущений при устойчивой стратификации не может быть объяснено только формой профиля осредненного турбулентного течения. В подразделе 3.3.2 предлагается разделить вклад от эффекта опрокидывания и механизма Орра путем поворота системы координат и исследуется энергетический цикл оптимальных возмущений. Демонстрируется, что диссипация кинетической энергии для наклонных оптимальных возмущений мала на всем этапе их развития (см. Рисунок 4).

В разделе 3.4 показывается, что помимо глобального максимума амплификации энергии, отвечающего крупномасштабным оптимальным возмущениям, существует также локальный максимум при больших значениях поперечного волнового числа, отвечающий пристеночным продольным вихрям, развивающимся в пристеночные стрики за счет эффекта опрокидывания. Показывается, что в пристеночных единицах длины эти возмущения имеют универсальный поперечный масштаб. Представлена таблица с результатами параметрических расчетов и ряд рисунков, визуализирующих эти возмущения и их зависимость от параметров.

В разделе 3.5 исследуется отклик нулевого решения линейной модели (18) на стохастический форсинг, представляющий собой дельта-коррелированный по времени гауссовский случайный процесс. Спектральная плотность стохастического форсинга выбирается как решение оптимизационной задачи (15) при  $p = 1, 2$  и  $\infty$ . Демонстрируется значительное отличие характеристик ковариационной матрицы отклика при различных оптимальных форсингах.

Раздел 3.6 посвящен исследованию механизмов появления и развития оптимальных возмущений в рамках нелинейной модели. Для этого строится модель, в которой присутствует стохастический форсинг, описывающий присущую турбулентным течениям возможность перераспределения энергии от более мелких к более крупным масштабам. В подразделе 3.6.1 описываются этапы построения этой модели и отмечаются некоторые детали численной реализации. Далее описывается оригинальная технология анализа временных рядов, полученных на основе нелинейной модели, направленная на исследование организованных структур. В подразделе 3.6.2 исследуется механизм появления и развития оптимальных возмущений в нелинейной модели и показывается хорошее согласие результатов нелинейной модели с предсказанием на основе линейной модели (см. Рисунок 5). В подразделе 3.6.3 демонстрируется хорошее согласие развитых оптимальных возмущений с главными эмпирическими ортогональными функциями, вычисленными на основе полученных временных рядов.

В заключении диссертации приведены основные результаты работы.

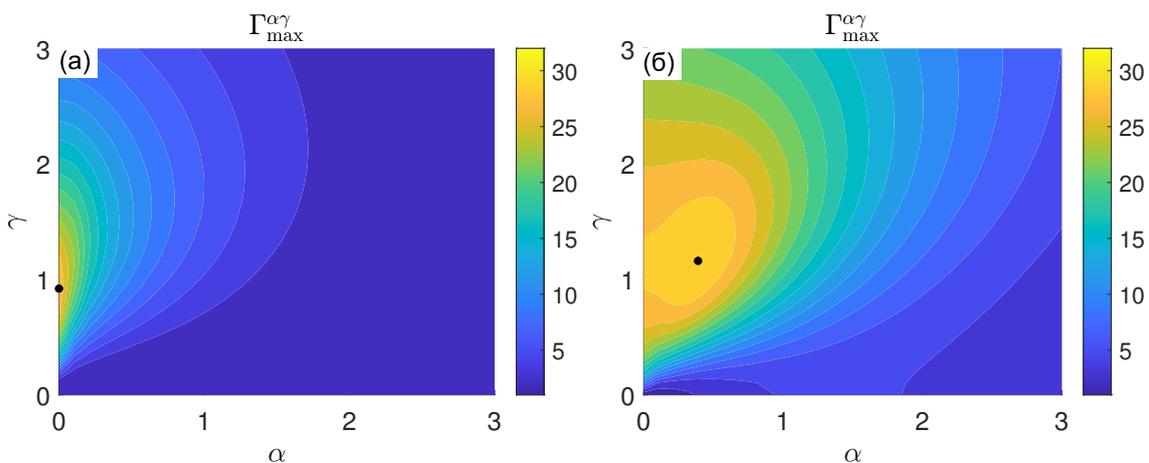


Рис. 1 — Линии уровня максимальной амплификации  $\Gamma_{\max}^{\alpha\gamma}$  при  $Re = 4 \times 10^4$ ,  $Ri = 0.01$  (а) и  $Re = 4 \cdot 10^4$ ,  $Ri = 0.03$  (б) в плоскости волновых чисел  $(\alpha, \gamma)$ . Точки глобального максимума выделены черным.

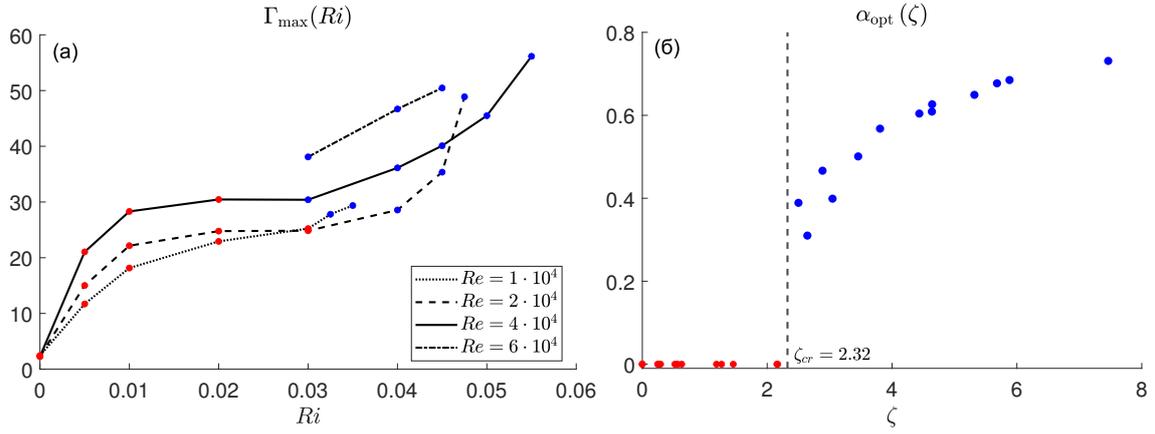


Рис. 2 — (а): Зависимость максимальной амплификации  $\Gamma_{\max}$  от  $Ri$  при фиксированном  $Re$ . (б): Зависимость оптимального продольного волнового числа  $\alpha_{\text{opt}}$  от безразмерного параметра  $\zeta$ . Значения, для которых  $\alpha_{\text{opt}} = 0$  и  $\alpha_{\text{opt}} \neq 0$ , отмечены красным и синим соответственно.

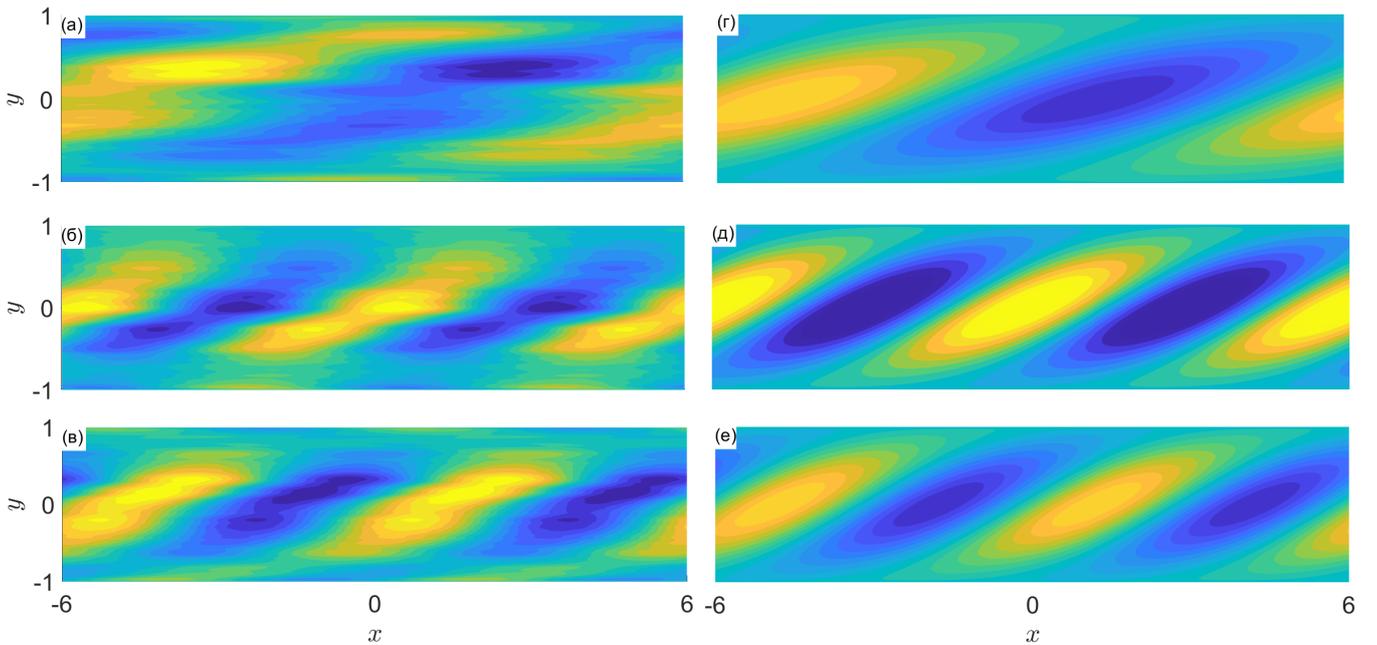


Рис. 3 — Линии уровня вещественных частей температуры Фурье-гармоник с номерами  $(k_x, k_z) = (1,1)$ ,  $(2,1)$  и  $(2,2)$  (а-в), выделенных из мгновенного поля при прямом численном моделировании, и соответствующих им по волновым числам оптимальных возмущений при  $t = t_{\text{opt}}$  (г-е).  $Re = 4 \times 10^4$ ,  $Ri = 0.03$ .

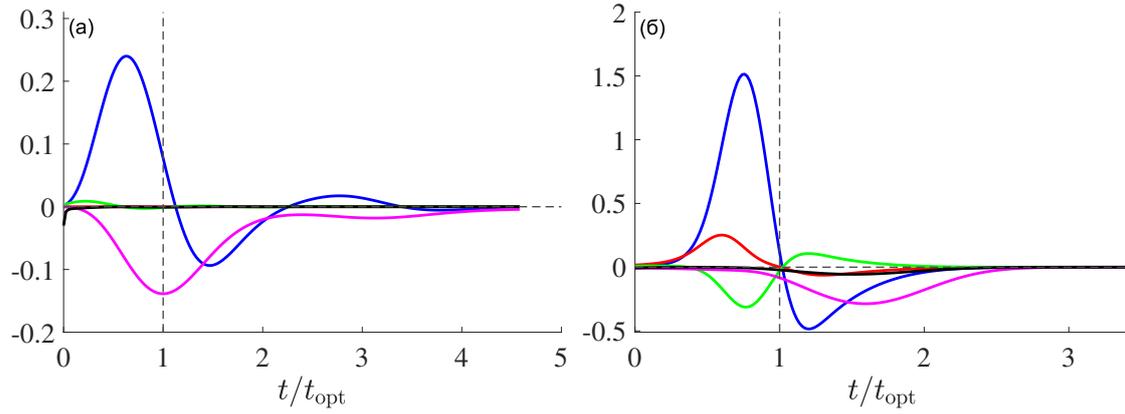


Рис. 4 — Вклад эффекта опрокидывания (синим) и механизма Орра (красным), действие сил плавучести (зеленым), диссипация кинетической (розовым) и потенциальной (черным) энергии при развитии оптимального возмущения. (а):  $Re = 4 \cdot 10^4$ ,  $Ri = 0.01$ ; (б):  $Re = 4 \cdot 10^4$ ,  $Ri = 0.055$ .

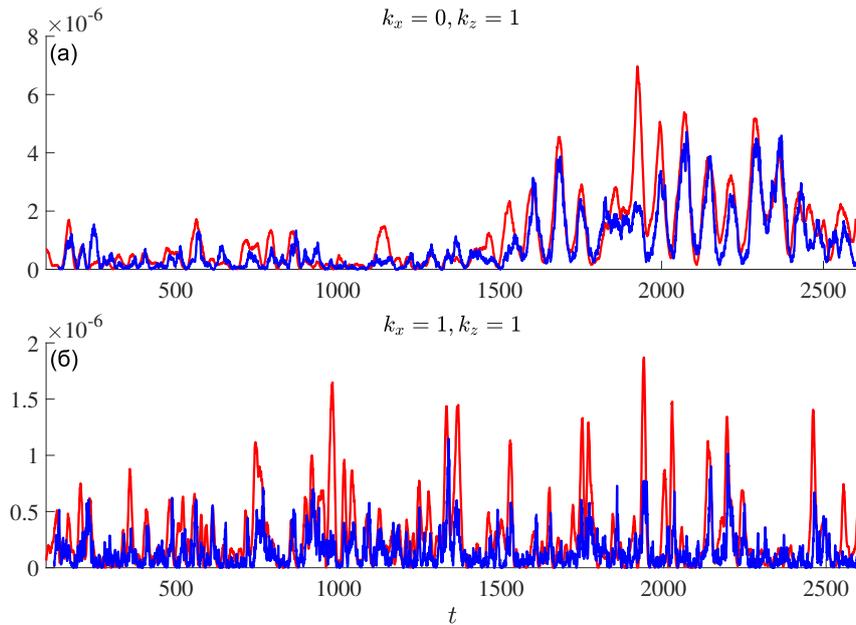


Рис. 5 — Временной ряд квадрата нормы проекции на развитое оптимальное возмущение в нелинейной модели (красным) и прогноза этой величины на основе линейной модели (синим) для Фурье-гармоник с номерами  $(k_x, k_z) = (0, 1)$  (а) и  $(1, 1)$  (б).

## Заключение

Основные результаты работы состоят в следующем:

- Получены новые верхние оценки максимума нормы матричной экспоненты. Показаны преимущества полученных оценок по сравнению с известными ранее.
- Впервые предложена постановка задачи о поиске оптимального стохастического форсинга в  $p$ -нормах Шэттена при  $p = 1, 2$  и  $\infty$  для линейных динамических систем. Разработана и обоснована технология вычисления оптимального форсинга.
- Разработана технология численного анализа немодовой устойчивости осредненных турбулентных течений, включающая в себя построение линейной модели развития крупномасштабных организованных структур и алгоритмы вычисления оптимальных возмущений.
- Выполнен анализ немодовой устойчивости стратифицированного турбулентного течения Куэтта в широком диапазоне параметров. Показано, что для этого течения существует несколько типов оптимальных возмущений. Получено хорошее согласование пространственной конфигурации и размеров найденных оптимальных возмущений с организованными структурами, наблюдаемыми в результатах прямого численного моделирования.
- Показано, что тип оптимального возмущения определяется безразмерным параметром равным отношению вертикального размера канала к масштабу длины Обухова. Исследован энергетический цикл оптимальных возмущений и выявлен вклад физических механизмов в их развитие. Показано, что при устойчивой стратификации диссипация энергии мала на всем этапе развития оптимальных возмущений.

## Основные публикации автора по теме диссертации

1. *Glazunov, A. V.* Optimal disturbances of stably stratified turbulent Couette flow / A.V. Glazunov, **G.V. Zasko**, E.V. Mortikov, Yu.M. Nechepurenko // Doklady Physics. - 2019. - Т. 64, № 7. - С. 308-312.

2. *Засько, Г.В.* Крупномасштабные структуры стратифицированного турбулентного течения Куэтта и оптимальные возмущения / **Г.В. Засько**, А.В. Глазунов, Е.В. Мортиков, Ю.М. Нечепуренко // Препринты ИПМ им. Келдыша. - 2019. - № 63. - С. 1-31.
3. *Zasko, G.V.* Large-scale structures in stratified turbulent Couette flow and optimal disturbances / **G.V. Zasko**, A.V. Glazunov, E.V. Mortikov, Yu.M. Nechepurenko // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling. - 2020. - Т. 35, № 1. - С. 37-53.
4. *Zasko, G.V.* Spectral analysis of the optimal disturbances of stratified turbulent Couette flow / **G.V. Zasko**, Yu.M. Nechepurenko // Computational Mathematics and Mathematical Physics. - 2021. - Т. 61, № 1. - С. 129-141.
5. *Zasko, G.V.* Emergence of optimal disturbances in a stratified turbulent shear flow under the stochastic forcing / **G.V. Zasko**, P.A. Perezhgin, A.V. Glazunov, E.V. Mortikov, Yu.M. Nechepurenko // Journal of Physics: Conference Series. - 2021. - Т. 2099, № 1. - С. 012033.
6. *Nechepurenko, Yu.M.* Constant upper bounds on the matrix exponential norm / Yu.M. Nechepurenko, **G.V. Zasko** // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling. - 2022. - Т. 37, № 1. - С. 15-23.
7. *Nechepurenko, Yu.M.* Optimal stochastic forcing for sensitivity analysis of linear dynamical systems / Yu.M. Nechepurenko, **G.V. Zasko** // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling. - 2022. - Т. 37, № 2. - С. 111-118.
8. *Zasko, G.V.* Optimal energy growth in stably stratified turbulent Couette flow / **G.V. Zasko**, A.V. Glazunov, E.V. Mortikov, Yu.M. Nechepurenko, P.A. Perezhgin // Boundary-Layer Meteorology. - 2023. - Т. 187. С. 395-421.