

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт
вычислительной математики им. Г.И. Марчука Российской академии наук

На правах рукописи

Петров Сергей Сергеевич

**Новая модель динамики-термодинамики морского льда на
кусочно-гладкой поверхности и ее параллельная численная
реализация на неструктурированных треугольных сетках**

Специальность 1.2.2 —

«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Яковлев Николай Геннадьевич

Москва — 2023

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Численное решение уравнения переноса скаляров в рамках задачи моделирования динамики морского льда	20
1.1. Основные требования к численному решению уравнения адвекции скаляров	21
1.2. Конечно-элементная пространственная аппроксимация	23
1.3. Локально-элементный декартов базис	25
1.4. Численное решение уравнения переноса на сетке типа А	29
1.4.1. Дискретизация по времени	30
1.4.2. Дискретизация по пространству	31
1.4.3. Технология коррекции потоков	38
1.5. Численное решение уравнения переноса на сетке типа CD	40
1.5.1. Дискретизация по времени	41
1.5.2. Дискретизация по пространству	42
1.6. Численные эксперименты	46
1.6.1. Начальные состояния и форсинги	46
1.6.2. Результаты тестовых расчетов	50
1.6.3. Профилировка и масштабируемость кода	56
1.7. Основные результаты главы	58
Глава 2. Численное решение системы уравнений динамики морского льда	60
2.1. Модельные уравнения	62
2.2. Реологии морского льда	64
2.3. Вязко-пластичная реология Хиблера	66
2.4. Дискретизация по времени уравнения баланса импульса	67
2.4.1. EVP метод	69
2.4.2. mEVP метод	70
2.5. Пространственная аппроксимация на сетке типа А	71
2.5.1. Вычисление компонент тензора скоростей деформации	73
2.5.2. Вычисление компонент вектора силы	73

2.6.	Пространственная аппроксимация на сетке типа CD	74
2.6.1.	Стабилизация решения	75
2.6.2.	Сборка стабилизационного слагаемого	77
2.7.	Численные эксперименты	80
2.7.1.	Модельный расчет в квадрате	81
2.7.2.	Модельный расчет на поверхности сферы	82
2.7.3.	Модельная задача воспроизведения ЛКО	84
2.7.4.	Краткосрочный прогноз в Арктическом регионе	86
2.7.5.	Профилировка и масштабируемость кода	95
2.8.	Основные результаты главы	98
Глава 3. Численное решение локально-одномерного уравнения		
термодинамики морского льда со снегом		
3.1.	Исходные уравнения	102
3.1.1.	Закон сохранения энтальпии	102
3.1.2.	Граничные условия	104
3.1.3.	Параметризация энтальпии, теплоемкости и теплопроводности	105
3.2.	Численные методы	108
3.2.1.	Дискретизация с сохранением энтальпии	109
3.2.2.	Аппроксимация граничного условия	111
3.2.3.	Совместный расчет профилей температуры льда и снега	111
3.2.4.	Четыре режима работы модели	113
3.2.5.	Краткое описание нульмерной модели	114
3.3.	Численные эксперименты	114
3.3.1.	Модельная задача с искусственным форсингом	115
3.3.2.	Проверка модели на данных полевого эксперимента SHEBA	118
3.4.	Основные результаты главы	122
Заключение		125
 Список литературы		 127
 Приложение А. Листинги псевдокода		 137

Введение

Актуальность темы. Морской лед покрывает в среднем 10% площади Мирового океана. Он замерзает, тает и дрейфует под влиянием солнечных, атмосферных, океанических и приливных воздействий. Большая часть морского льда лежит в Северном Ледовитом и Южном океанах выше 60-ой широты. В больших бассейнах морской лед статически неустойчив и распадается на множество льдин, которые формируют дрейф. Поля этих дрейфующих льдин переносятся и накладываются друг на друга, что в совокупности создает ландшафт морского льда.

Задача двумерного дрейфа морского льда формулируется в терминах неизвестных, имеющих скалярную, векторную и тензорную структуру: переменные состояния (набор репрезентативных скалярных характеристик льда, таких как сплоченность, масса, толщина), скорость льда, силы взаимодействия отдельных льдин. Система уравнений динамики замыкается уравнениями сохранения массы льда и уравнением на реологию, которое определяет вид внутренних напряжений. Лед, приводимый в движение ветром и океаническим течением, отвечает на воздействие своей инерцией и внутренним трением. Динамика морского льда неразрывно связана с его термодинамикой, так как замерзание увеличивает его толщину, а таяние уменьшает, что меняет прочность льда и режимы его дрейфа. В свою очередь, динамика влияет на термодинамику за счет переноса полей массы. На рисунке 1 представлена схема физических процессов морского льда, снега, талых луж, а также прилегающих пограничных слоев океана и атмосферы, которые учитываются в современных моделях. Среди динамических процессов можно выделить следующие.

1. Сила поверхностного трения ветра на поверхности льда;
2. Сила поверхностного трения океана на нижней кромке льда;
3. Сила Кориолиса, играющая заметную роль при моделировании на больших пространственных масштабах;
4. Силы взаимодействия льдин между собой, описываемые заданной реологией;
5. Горизонтальная сила, возникающая за счет неоднородности уровня океана;
6. Механическое перераспределение льда по градиентам [2];
7. Адвекция (перенос) скалярных характеристик.

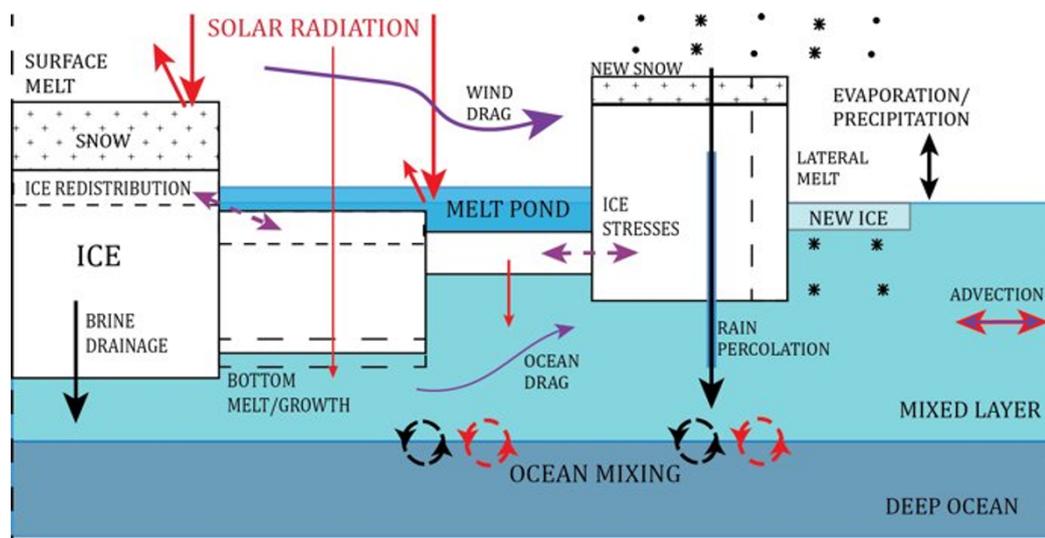


Рисунок 1 — Схема основных физических процессов морского льда. Красными линиями изображены потоки тепла, черными - потоки пресной и соленой воды (потоки массы), фиолетовыми - потоки импульса. Изображение взято с сайта [1].

Помимо потоков импульса, в современных моделях учитываются следующие термодинамические процессы.

1. Проникновение солнечной радиации в толщу льда и ее отражение от поверхности снега;
2. Влияние длинноволнового излучения атмосферы и собственного излучения льда или снега на поверхностную температуру;
3. Диффузия тепла в толщу льда и снега;
4. Таяние и намерзание льда на нижней кромке. Таяние льда и снега на верхней границе. Боковое таяние и намерзание льда;
5. Горизонтальный перенос энтальпии льда и снега.

В отдельный блок можно выделить процессы явного потока массы жидкости.

1. Дренаж рассола под действием силы тяжести;
2. Проникновение жидких осадков через лед в океан;
3. Выпадение и испарение жидких осадков и снега;
4. Формирование нового льда на поверхности океана за счет переохлаждения жидкости;
5. Сублимация влажного воздуха, а также обратный процесс возгонки;
6. Переход снега в состояние льда за счет процесса слёживания;

Помимо сформулированных физических процессов, присутствуют и биохимические, которые играют ключевую роль в зимней экологии вод, покрытых

льдом [3]. В зимние месяцы морские ледяные водоросли необходимы для зимовки зоопланктона, являясь единственным доступным источником пищи [4]. Самые высокие концентрации клеток водорослей и хлорофилла в водной среде были обнаружены именно в морском льду [5]. Помимо качественной и количественной значимости морских ледяных водорослей, в недавних работах подчеркивается важность морского льда, например, для производства диметилсульфида [6], источников/поглотителей CO₂ [7], биоаккумуляции железа [8] и усиленного осаждения CaCO₃ [6]. Косвенно, наличие морского льда также влияет на динамику фитопланктона: его цветение является массовым по сравнению с соседними участками открытой воды [9].

Хотя проблема дрейфа льда предоставляет широкие возможности для фундаментальных исследований, основная научная мотивация возникла из-за морского льда, который является особой границей раздела между атмосферой и океаном. В высоких широтах обмен импульсом, теплом и массой между атмосферой и океаном происходит в полях дрейфующих льдов. Эта граница постоянно переносится, а также подвергается открытию и закрытию - образуется полынья, которая может закрыться за счет смерзания либо наложения друг на друга отдельных льдин. Правильный учет этой изменчивой границы крайне важен как для регионального прогноза погоды, так и для моделирования климата в целом. Наличие льда, на которое существенно влияет дрейф, играет ключевую роль в эффекте альбедо криосферы. Кроме того и лежащий на нем снег переносит скрытое тепло и пресную воду. Таяние льда отражается в значительном переносе тепла и пресной воды в пограничный слой океана. В экологии полярных морей положение кромки льда и процессы его таяния задают важные граничные условия для летней продуктивности.

Модели динамики-термодинамики морского льда имеют три основных приложения на практике. Во-первых, они применяются для формирования краткосрочных прогнозов состояния льда для навигации ледоколов и транспортных судов. Вероятное потепление климата может значительно увеличить использование Северного морского пути из Дальнего Востока в Европу, однако, в ноябре 2021 года была аномальная ситуация с образованием толстого льда, что говорит о том, что задача моделирования дрейфа льда не утрачивает актуальности [10]. Во-вторых, важным вопросом стал перенос загрязняющих веществ дрейфующим морским льдом [11]. В частности, для оценки риска разливов нефти и ее ликвидации, требуются соответствующие модели переноса и распространения нефти

для покрытых льдом морей [12]. В-третьих, модели динамики-термодинамики морского льда являются неотъемлемой частью современных климатических и прогностических моделей Земной системы. В основном это связано с необходимостью предсказания изменения ледяного покрова, которое существенно влияет на планетарное альbedo и циркуляцию океана [13].

Большинство современных моделей морского льда описывают гранулированный морской лед как непрерывную среду. Этот принцип был предложен группой совместного эксперимента по динамике Арктического льда (AIDJEX) в 1970-х годах [14]. Первоначально предназначенные исключительно для климатических исследований, теперь компоненты морского льда используются в широком диапазоне пространственных разрешений, включая очень высокие, более чем в 100 раз превышающие те, для которых они были изначально разработаны, что ставит под вопрос предположение непрерывности среды. Это связано с тем, что на данный момент пока не разработан альтернативный подход для трактовки льда. За последнее десятилетие был достигнут значительный прогресс в области высокопроизводительных вычислений и есть основания полагать, что в ближайшем будущем эта тенденция сохранится. Таким образом, наиболее актуально ставится вопрос масштабирования непрерывных моделей для использования в эксафлопсных вычислениях.

Стоит отметить, что непрерывные модели остаются главным инструментом для моделирования. Морской лед, как система, состоит из движущихся, растущих или тающих, часто сцепленных друг с другом льдин неправильной формы, размер которых может варьироваться от нескольких метров до десятков километров [15]. Практически во всех крупных непрерывных моделях представление морского льда разделено на одномерные термодинамические процессы, такие как рост и таяние, и двумерную горизонтальную динамику льда, включающую дрейф, деформацию и перенос льда. Чтобы описать эволюцию морского льда на пространственном масштабе ~ 100 км в течение дней или месяцев, группа AIDJEX предложила структуру, основанную на подходе изотропного пластического вещества [16], достоверность которого основывается на статистических средних значениях, взятых за большой период времени. В предположении, что морской лед ведет себя как пластичный материал на масштабах ~ 100 км и более, была сформулирована вязко-пластическая реология Хиблера (VP) [17], которая затем была расширена до упруго-вязко-пластичной (EVP) [18], удобной для вычислений. Непрерывный подход, а также структура (E)VP были приняты практически

во всех крупных моделях климата [19], в том числе в климатической модели ИВМ РАН INMCM [20]. Мировое научное сообщество специалистов по моделированию морского льда уже несколько десятилетий исследует эти непрерывные модели, предлагая новые реализации схем по времени и пространству, для получения точного, эффективного и масштабируемого численного решения.

Степень разработанности темы исследования. На данный момент в мире разработано порядка 10 различных моделей динамики-термодинамики морского льда, преимущественно на языке программирования Fortran. Далее приводится обзор некоторых наиболее широко распространенных передовых моделей динамики и термодинамики морского льда, и используемых в них численных методов решения уравнений переноса, баланса импульса морского льда, одномерной диффузии тепла.

Модели динамики морского льда. На данный момент в мире наиболее распространены прямоугольные и треугольные сетки для моделирования динамики морского льда с вязко-пластичной реологией. В зависимости от способа расположения локальных степеней свободы на элементах сетки (разнесения переменных) выделяются четыре типа прямоугольных и три типа треугольных сеток, представленные на рисунке 2.

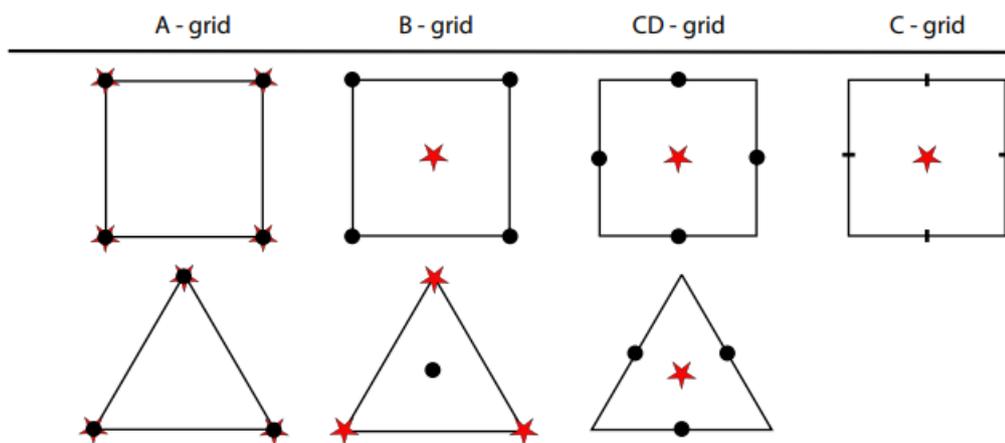


Рисунок 2 — Разнесение скалярных и векторных степеней свободы на треугольных и прямоугольных сетках. Здесь "звездой" выделены скалярные, а "кругом" обе векторные степени свободы, "чертой" - выделены разнесенные векторные степени свободы. Изображение взято из статьи [21].

Отметим, что на прямоугольной сетке типа C u -компонента скорости $\mathbf{u} = (u, v)^T$ определена на вертикальных ребрах, а v -компонента - на горизонтальных.

Можно выделить следующие наиболее широко распространенные модели, включающие в себя блок морского льда.

Разработка модели CICE началась в 1994 году Элизабет Хунке в Лос-Аламосской национальной лаборатории (Лос-Аламос, штат Нью-Мексико, США). В результате работы группы ученых был сформулирован упруго-вязко-пластический подход к численному решению уравнения баланса импульса [18]. В период с 1998 по 2005 год в модель был добавлен термодинамический блок решения уравнения теплопроводности с сохранением энтальпии, а также сделана многокатегорийная версия модели с механическим перераспределением толщины льда. В 2002 году Национальным Центром Атмосферных Исследований (Боулдер, штат Колорадо, США) модель была впервые добавлена в глобальную климатическую модель CESM [22]. В качестве пространственной аппроксимации в модели CICE используется метод конечных элементов, построенный на основе билинейных базисных функции на прямоугольной сетке типа В [23]. В качестве метода решения уравнения баланса импульса используется метод итераций Пикара [24], а в качестве решателя уравнения переноса используется специальная процедура перераспределения скаляра [25].

Блок модели морского льда также присутствует в другой крупной американской модели океана и атмосферы MITgcm [26], которая разрабатывается в Массачусеттском технологическом институте (Кембридж, штат Массачусеттс, США). В качестве пространственной дискретизации ледового блока модели MITgcm используется смешанный метод конечных разностей-конечных объемов на криволинейной прямоугольной сетке типа С. Для аппроксимации дивергенции тензора напряжений используется метод конечных объемов, при этом компоненты тензора скорости деформации аппроксимируются центральными разностями. Для дискретизации по времени уравнения баланса импульса используется неявный метод Эйлера и получающаяся система нелинейных уравнений решается методом Крылова-Ньютона с приближением Якобиана [27]. Используется метод Ньютона, в котором линейная система решается с точностью, зависящей от нелинейной скорости сходимости. Уравнения переноса решаются с помощью конечно-объемной схемы второго порядка с использованием управляющей монотонизирующей функции.

В океаническом блоке европейской модели NEMO используется ледовая модель LIM [28], которая имеет несколько версий на прямоугольных сетках типа "В" и "С". В качестве метода пространственной аппроксимации используется стан-

дартный метод конечных разностей. Реализован эволюционный mEVP-подход [29], а в качестве решателя адвекции используется схема Кранка-Николсон с искусственной вязкостью, стабилизирующей решение.

Перейдем к описанию моделей, построенных на треугольных сетках. Немецкая модель льда FESIM [30] является частью океанической модели FESOM [31] и разрабатывается в Институте полярных и морских исследований имени Альфреда Вегенера (Бременхафен, Германия). Данная модель формулируется на неструктурированной треугольной сетке с всевозможными разнесениями переменных (A, B, CD) и использует конечно-элементные и конечно-объемные пространственные аппроксимации. В качестве дискретизации по времени реализованы эволюционные методы типа EVP [32] и mEVP [29]. Несмотря на то, что для сходимости EVP к решению, соответствующему стандартной вязко-пластичной реологии, необходимо большое количество итераций [33], на практике используется лишь ограниченное их число [34] для повышения вычислительной эффективности модели. Данное допущение связано с тем, что несмотря на формальное отсутствие сходимости, получаемое распределение линейных кинематических особенностей слабо зависит от точности, что подтверждается сравнением со спутниковыми данными. В качестве конечно-элементного решателя уравнения переноса используется, дискретизованная по пространству соответствующим разнесению переменных методом Галеркина, схема типа Тейлора-Галеркина с коррекцией потоков Залесака [35], адаптированная для конечных элементов. В случае конечно-объемной пространственной аппроксимации применяется стандартная схема против потоков первого порядка по пространству. Модель FESOM используется в качестве океанического блока модели климата AWI-CM [36].

Модель ICON используется немецкой национальной метеорологической службой для прогноза погоды и моделирования климата. Она разрабатывается в Институте метеорологии общества имени Макса Планка (Гамбург, Германия), а также в немецкой метеорологической службе (DWD). Модель ICON включает в себя блок негидростатической атмосферы [37], океанический блок [38], а также блок морского льда [39] на регулярных треугольных сетках. Отличительной особенностью ICON является свойство бесшовного каплинга моделей-компонентов, поэтому океаническая, атмосферная и ледовая сетка по сути совпадают на границах раздела. Пространственная дискретизация модели FESIM на треугольной сетке типа CD повторяет реализацию в ледовом блоке модели ICON. Единственное

отличие заключается в том, что модель FESIM использует сферическую метрику в дифференциальных и интегральных операторах, а в модели ICON реализован локально-декартов подход, который отличается от аналогичного, предложенного в данной диссертационной работе. В основной версии модели применяется эволюционный mEVP подход для дискретизации по времени уравнения баланса импульса в связке с конечно-элементной аппроксимацией элементами Круэье-Равиар для скоростей. В качестве схемы адвекции реализована простейшая схема против потока в конечно-объемной парадигме.

В таблице 1 собраны основные характеристики зарубежных моделей.

Таблица 1 — Основные характеристики блоков динамики морского льда передовых зарубежных моделей.

Модель	Сетка	Разнесение	Аппроксимация	Импульс	Адвекция
CICE	□	B	FE	Picard	Remapping
MITgcm	□	C	FD, FV	Newton	FV + limiter
LIM3	□	B, C	FD	mEVP	CN + diffusion
FESIM	△	A	FE, FV	mEVP	TG2+FCT
FESIM	△	B	FV	mEVP	TG2+FCT
FESIM	△	CD	FE	mEVP	Upwind
ICON	△	CD	FE	mEVP	Upwind

Также стоит отметить, что недавно были приняты попытки предложить альтернативную реологию, заменяющую общепринятые эволюционные подходы типа EVP, mEVP, а также построить принципиально новую модель динамики на основе этих реологий. Наиболее удачным примером является Максвелловская упруго-хрупкая реология (МЕВ) [40]. Реология МЕВ представляет собой модель распространения повреждений, имитирующую разрушение путем отслеживания разломов, вызванных деформациями, что дает высокую степень локализации напряжений. Чтобы сохранить локализованные поля, создаваемые МЕВ-реологией, в модели peXtSIM [41] используется полностью лагранжева формулировка, в которой сетка движется вместе со льдом. Модель peXtSIM воспроизводит возникающие свойства: ледяные перемычки, торосы, припаи, а также общую статистику дрейфа льда и пространственно-временные деформации, однако пока сложно делать конкретные выводы о применимости моделей, основанных на нестандартной реологии для моделирования климата. Это связано

с тем, что большинство доступных на данный момент моделей океана и атмосферы основаны полностью на эйлеровом или полулагранжевом подходе, поэтому эффективный каплинг с полностью лагранжевой моделью льда является трудной задачей. Стоит отметить, что в отличие от всех представленных ранее моделей, код peXtSIM написан на языке программирования C/C++.

Среди известных отечественных моделей можно выделить две, которые разрабатываются в институте вычислительной математики имени Г.И.Марчука Российской Академии наук (ИВМ РАН). Совместная конечно-элементная модель океана и морского льда FEMAO [42] разработана Николаем Геннадьевичем Яковлевым. Она реализована на структурированной треугольной сетке (сетка состоит из прямоугольников, разделенных диагональю на треугольники) типа A и использует стандартные конечно-элементные приближения линейными базисными функциями Куранта. В качестве схемы по времени для уравнения импульса используется устаревший EVP подход. Также ледовый блок присутствует в океанической компоненте климатической модели ИВМ РАН INMCM [20]. Реализован простейший конечно-разностный однокатегорийный подход на прямоугольной сетке типа C в связке с EVP-решателем уравнения баланса импульса.

Модели термодинамики морского льда. Широко распространены два пакета, включающие в себя численные решатели уравнения термодинамики морского льда.

Пакет Iserack [43], который разрабатывается в группе Элизабет Хунке в Лос-Аламосской национальной лаборатории (Лос-Аламос, штат Нью-Мексико, США) и является частью американской модели CICE, представляет из себя набор модулей, которые реализуют численное решение одномерного уравнения диффузии тепла с подвижной границей, а также учитывают следующие процессы в морском льду: образование торосов, дренаж солености, биогеохимию и связанные с ними изменения занимаемой площади и толщины льда. Программный пакет Iserack состоит из трех независимых частей: кода, обсчитывающего термодинамические процессы в колонке льда, драйвера, поддерживающего автономное тестирование этого кода, и скриптов, создающих и тестирующих модель Iserack. Пользователи могут настроить Iserack в соответствии со своими потребностями: его можно использовать для разработки и тестирования параметризаций морского льда, а также непосредственно в исследовательских или оперативных моделях динамики.

Пакет SI3 [44] входит в европейскую океаническую модель NEMO [45], которая разрабатывается одновременно в пяти европейских исследовательских центрах и институтах. Аналогично IcePack, SI3 включает в себя, сохраняющий энтальпию, одномерный решатель уравнения диффузии с подвижной границей с учетом солености. Также пакет отвечает за перераспределение льда по градациям и сборку суммарной одномерной сеточной энтальпии в ледовом блоке модели NEMO. В отличие от IcePack, SI3 не является полностью независимым от модели NEMO модулем и его использование для других ледовых или океанических моделей затруднительно.

Таким образом, в мире существует несколько подходов к численному решению уравнений динамики и термодинамики морского льда, на основе которых построено множество моделей, использующихся для оперативного прогноза и моделирования климата. Однако спектр отечественных ледяных моделей не так широк. Одной из актуальных задач на данный момент является разработка универсальных, независимых и хорошо масштабируемых ледяных моделей, способных работать как в режиме сверхвысокого разрешения (шаг сетки порядка километра) для целей оперативного прогноза, так и на сетке грубого разрешения (порядка десятка/сотни километров) для проведения долгосрочных климатических расчетов. Для реализации программного комплекса моделей предлагается по возможности использовать перспективные отечественные программные пакеты.

Целью диссертационной работы является разработка и реализация численной модели динамики и термодинамики морского льда (и снега на нем) мирового уровня на основе современных вычислительных технологий.

Для достижения поставленной цели рассматривается вопрос построения широкого спектра схем двумерной адвекции на треугольной сетке с различным видом разнесения переменных, вопрос разработки современных параллельных решателей двумерного уравнения баланса импульса морского льда с вязко-пластичной реологией, а также вопрос создания эффективного одномерного решателя уравнения теплопроводности с подвижными границами, который учитывает широкий спектр физических процессов. Предполагается, что предложенные численные методы и их реализации будут использованы в новой перспективной модели климата, которая разрабатывается в ИВМ РАН.

Для достижения поставленной цели решаются следующие **задачи**:

1. Реализовать и оптимизировать широкий спектр точных, экономичных и масштабируемых схем двумерной адвекции на треугольной сетке с раз-

личным разнесением переменных, способных работать на произвольной кусочно-гладкой двумерной поверхности.

2. Реализовать и оптимизировать масштабируемый алгоритм численного решения уравнения баланса импульса морского льда с вязко-пластичной реологией, построенный на треугольной сетке с различным разнесением переменных, также способный работать на произвольной кусочно-гладкой двумерной поверхности.
3. Разработать и реализовать универсальный неявный численный метод решения нелинейного одномерного уравнения диффузии энтальпии морского льда с возможностью учета различных физических процессов как независимый программный пакет.

В работе используются следующие методы и подходы: теория и методы вычислительной математики для решения дифференциальных уравнений в частных производных; конечно-элементные, конечно-разностные и конечно-объемные методы пространственной аппроксимации дифференциальных уравнений в частных производных; численные эксперименты в рамках модельных задач, а также эксперименты с реалистичным внешним воздействием; современные инструменты для построения вычислительных сеток (Ani-2D/Ani-3D), разработки и распараллеливания программ (INMOST).

Научная новизна заключается в том, что впервые:

1. Существенно расширен спектр применяемых схем двумерной адвекции для переноса скалярных характеристик в задаче динамики морского льда на треугольных сетках типа "A" и "CD".
2. Предложена двухшаговая оптимизация схемы по времени Тейлора-Галеркина для задачи адвекции на треугольной сетке типа "A", которая в 2 раза сокращает время переноса при незначительной потере в точности.
3. Предложен алгоритм построения триангуляции Арктического региона со сгущением в области с потенциально высокой сплоченностью морского льда, узких проливов и бухт, построенный на основе данных береговой линии и реализованный с помощью современных отечественных программных пакетов.
4. Предложен локально-декартов подход для численного решения системы уравнений динамики морского льда, который позволяет избавиться от использования сферической метрики с особенностью на полюсе.

5. Предложен итерационный численный метод решения нелинейного одномерного уравнения теплопроводности морского/пресного льда со снегом с подвижной границей, одновременно обновляющий одномерный профиль и значения поверхностных температур, согласованных с нелинейными граничными условиями, который в случае сходимости соответствует неявной временной схеме.

Теоретическая значимость. В работе показана применимость схем высокого порядка по времени типа Тейлора-Галеркина на треугольной сетке типа "А" для задачи адвекции морского льда, в связке с конечно-элементной пространственной аппроксимацией линейными на треугольнике базисными функциями Куранта. Впервые предложено использовать схему MUST для конечно-объемной адвекции на треугольной сетке типа "CD" в динамическом ядре модели морского льда. Предложена реализация описанных схем адвекции с использованием парадигмы локально-декартового базиса, которая подразумевает перевод компонент скорости в базис соседнего элемента треугольной сетки при сборке локального вектора правой части на треугольнике. Проведено численное исследование точности, сходимости, монотонности и консервативности предложенных реализаций. Локально-декартова парадигма адаптирована для реализации численного решения уравнения баланса импульса, которая также подразумевает перевод компонент скорости и тензора деформации в базис соседнего элемента. На результатах численных экспериментов показана универсальность данного подхода для расчетов на двумерной поверхности произвольной геометрии. Предложен итерационный метод релаксации с одновременным пересчетом граничных температур для задачи одномерной диффузии тепла с подвижной границей, который соответствует неявной схеме. Показана сходимость метода в конфигурации с искусственным и реалистичным внешним воздействием.

Практическая значимость. Разработан программный комплекс, реализующий предложенные схемы по времени и пространству. Продемонстрирована возможность краткосрочного прогноза состояния морского льда - скорость дрейфа, сплоченность и толщина - в Северном Ледовитом океане с реалистичным атмосферным и океаническим внешним воздействием.

Проведена подробная профилировка написанного кода и проверена масштабируемость отдельных блоков решателя уравнения адвекции и баланса импульса, на основе которых можно подобрать оптимальную конфигурацию модели для реальных расчетов.

На основе разработанного численного метода для решения уравнения диффузии тепла реализованы универсальные одномерная и нульмерная модели термодинамики пресного/морского льда со снегом. Проведена валидация кода на данных полевого эксперимента, которая показала хороший результат прогноза профиля температур и толщины одномерной модели в результате моделирования на длительный промежуток времени. Проведено качественное и количественное сравнение результатов предсказаний разработанной одномерной и нульмерной модели термодинамики на основе которого был сделан вывод, что нульмерная модель хорошо предсказывает поверхностную температуру, однако дает существенную ошибку в толщине льда по сравнению с одномерной.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Метод повышения порядка схемы по времени для уравнения двумерной адвекции за счет применения многошаговых схем Тейлора-Галеркина на треугольной сетке типа "А" и метод повышения порядка аппроксимации по пространству за счет реализации схемы MUST на сетке типа "CD" в рамках модели динамики морского льда;
2. Метод оптимизация вычислительной сложности шага двумерной адвекции за счет применения двухшаговой схемы Тейлора-Галеркина на треугольной сетке типа "А".
3. Алгоритм построения треугольной сетки Арктического бассейна, включающий в себя процессы сгрубления данных береговой линии и сгущения сетки в область с потенциально высокой сплоченностью морского льда, реализованный с помощью передовых отечественных программных пакетов построения триангуляций.
4. Метод адаптации локально-декартового подхода для получения численного решения уравнения баланса импульса морского льда с вязко-пластичной реологией на треугольных сетках типа "А" и "CD".
5. Итерационный численный метод решения нелинейного одномерного уравнения диффузии тепла с подвижной границей, одновременно обновляющий профиль и граничные значения температур, которые согласованы с нелинейным граничным условием произвольного типа.

Достоверность результатов, полученных в диссертации, обоснована всесторонним аналитическим и численным исследованием предложенных методов и подходов на тестовых задачах, включающих в себя численные эксперименты с искусственным и реалистичным внешним воздействием, как для уравнений дву-

мерной динамики, так и для задачи одномерной термодинамики морского льда, сравнением результатов работы с ведущими мировыми моделями. Материал, изложенный в диссертации, опирается на широкий список научной литературы, посвященный рассматриваемым методам и их аналогам.

Апробация работы. Автор лично докладывал основные результаты работы на следующих международных и российских конференциях, рабочих семинарах: 61-я, 62-я, 63-я и 65-я научные конференции МФТИ, Москва, Россия, 2018-2023; "Конференция международных математических центров мирового уровня", Сочи, Россия, 2021; "Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии", Нижний Новгород, Россия, 2020 (онлайн) - по результатам конференции была получена премия за лучший доклад; "CITES-2021", 2021, "CITES-2023", 2023, Москва, Россия; "ENVIROMIS-2022", 2022, Томск, Россия; Summer school "Mathematics for Climate and the Environment", Каржез, Корсика, Франция, 2019; Семинар "Математическое моделирование геофизических процессов: прямые и обратные задачи" Москва, Россия, 2021; Рабочий семинар "Новые математические методы и технологии в актуальных задачах геофизики" (апрель, 2021; апрель, 2022; май, 2022), Москва, Россия; "Молодежная конференция Отделения Московского центра фундаментальной и прикладной математики в ИВМ РАН", Москва, Россия (декабрь, 2020; декабрь, 2021; декабрь 2022); "Аспирантский семинар в ИВМ РАН", Москва, Россия (2021, дважды в 2022 и 2023 годах).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 11 печатных работах [46—56], 4 из которых [46; 49—51], входят в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание учёной степени кандидата наук, в том числе 3 работы [49—51] входят в систему цитирования Web of Science и Scopus. Также по результатам исследований зарегистрированы 2 программы для ЭВМ [57; 58].

Личный вклад. Основные научные результаты диссертации были опубликованы в работах [46; 49—51]. В работе [46] автором описан алгоритм построения триангуляции Арктического региона со сгущением и представлена система параллельной интерполяции геоданных на модельную сетку. В работе [49] вклад автора относится к реализации широкого класса параллельных схем переноса на треугольных сетке типа "А", их тестирование на консервативность, монотонность, а также сравнение ошибок схем разного порядка по времени. В работе [51]

вклад автора заключается в реализации идеи построения численного решателя уравнения переноса и баланса импульса морского льда в локально-декартовом базисе, описании набора используемых схем переноса на сетке типа "CD", проведении тестовых расчетов деформации льда в конфигурации с искусственным внешним воздействием, а также описании построения системы прогноза дрейфа морского льда в Арктическом бассейне с использованием "А"-версии разработанной модели. В работе [50] вклад автора заключается в предложении и реализации итерационного процесса одновременного расчета профиля и значений поверхностных температур в задаче диффузии тепла с подвижной границей, а также валидации разработанного кода в численном эксперименте с искусственным и реалистичным внешним воздействием.

Объем и структура диссертационной работы. Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и приложения. Полный объем диссертации составляет 142 страницы, включая 51 рисунок и 6 таблиц. Список литературы содержит 110 наименований.

Содержание работы. **Первая** глава диссертации посвящена введению парадигмы решения уравнений в локально-декартовом базисе, а также описанию схем переноса на треугольных сетках типа "А" и "CD". В первом случае рассматривается семейство одношаговых и двухшаговых схем по времени типа Тейлора-Галеркина 2,3 и 4 порядка аппроксимации по времени, во втором случае предлагается повысить порядок пространственной аппроксимации до второго, за счет использования конечно-объемных схем типа MUST и MUSCL. Приводятся результаты тестов переноса пассивной примеси на сфере дивергентным и бездивергентным реверсивным аналитическим полем скорости, строятся графики ошибок и делаются выводы о порядке сходимости и точности предложенных схем на полном интервале чисел Куранта. Также производится профилировка и проверяется масштабируемость параллельной реализации описанных схем. **Вторая** глава диссертации посвящена описанию решателя уравнения баланса импульса морского льда с вязко-пластичной реологией на двух типах треугольных сеток с разным разнесением переменных. Подробно описывается процесс сборки дискретного вектора внутренней силы, массовой матрицы, оценки дискретных компонент тензора скоростей деформации, сборки стабилизационного слагаемого на треугольной сетке типа "CD". Приводятся результаты численных экспериментов в задачах с искусственным модельным внешним воздействием, а также описывается процесс построения простейшей прогностической системы дрейфа

Арктического льда, построенной на основе "А"-версии разработанной модели. Приводятся результаты профилировки и параллельной масштабируемости отдельных блоков решателя. В **третьей** главе диссертации приводится описание численного решения одномерного и нульмерного уравнения диффузии тепла, на основе которого разработан код моделей. Два решения сравниваются в численном эксперименте с искусственным воздействием, а также проводится валидация на данных полевого эксперимента. По результатам сравнения предсказаний моделей делается вывод о критерии применимости нульмерной модели. В **заключении** перечислены основные результаты работы.

Благодарности. Автор выражает благодарность научному руководителю Н.Г. Яковлеву, соавтору работы В.К.Зюзину, а также коллегам из института вычислительной математики имени Г.И.Марчука РАН за ценные советы и поддержку в ходе выполнения работы. Также автор признателен М.А.Толстыху за рецензию диссертационной работы.

Работа поддержана грантом РФФИ (21-71-30023) и Московским центром фундаментальной и прикладной математики (Соглашение с Минобрнауки России № 075-15-2022-286).

Глава 1. Численное решение уравнения переноса скаляров в рамках задачи моделирования динамики морского льда

В главе обсуждается вопрос о численном решении уравнения переноса скаляров на треугольной сетке двух типов. Первый вид треугольной сетки является сеткой типа А в классификации Аракавы. Переносимая скалярная величина, а также компоненты вектора скорости ассоциированы с узлами треугольной сетки. При этом метод конечных элементов, сформулированный с помощью линейных на треугольнике базисных функций Куранта, является непрерывным. В качестве аппроксимации по времени предлагается использовать семейство схем типа Тейлора-Галеркина 2, 3 и 4 порядка.

Второй вид треугольных сеток является сеткой типа CD. На этой сетке скаляр ассоциирован с треугольником, а компоненты вектора скорости - с ребром. Применение стандартного метода Галеркина с постоянными на треугольнике базисными функциями для аппроксимации скаляров и с линейными на треугольнике базисными функциями Крузье-Равиар для аппроксимации скоростей приводит к стандартной конечно-объемной формулировке дискретного уравнения адвекции. В качестве схемы по времени предлагается использовать семейство явных многошаговых схем Рунге-Кутты, а для пространственной аппроксимации формулируется схема первого порядка против потока, а также схемы типа MUST [59] и MUSCL [60], повышающие порядок пространственной аппроксимации до второго.

В мировой практике моделирования динамики льда не распространены схемы Тейлора-Галеркина высокого порядка по времени, а также схемы типа MUST и MUSCL, поэтому внедрение таких схем в динамический блок разрабатываемой модели является нововведением. Еще одной существенной особенностью является использование локально-элементного декартового базиса. Этот подход более распространен в задаче моделирования динамики атмосферы, однако в контексте моделирования динамики льда, насколько известно автору, применяется впервые.

Основные результаты данной главы были опубликованы в работах [49], [51]. Глава состоит из 7 разделов. В разделе 1.1 формулируются основные требования к решателю адвекции в контексте моделирования льда. В разделе 1.2 вводятся основные базисные функции, которые используются для конечно-элементной пространственной аппроксимации. Раздел 1.3 посвящен описанию метода ре-

шения уравнений в локально-декартовом базисе. В разделе 1.4 формулируется временная и конечно-элементная пространственная аппроксимация уравнения переноса на сетке типа A. Раздел 1.5 посвящен аппроксимации по времени и пространству уравнения переноса на сетке типа CD. В разделе 1.6 представлены основные результаты численных экспериментов переноса пассивной примеси на поверхности сферы. Раздел 1.7 посвящен обзору основных результатов данной главы.

1.1. Основные требования к численному решению уравнения адвекции скаляров

Рассмотрим скалярное уравнение переноса на некоторой двумерной поверхности, которое выражает локальный закон сохранения этой скалярной величины. В данной главе без ограничения общности будем рассматривать закон сохранения массы m . Считаем, что заданная вектор-функция скорости $\mathbf{u} = (u, v)^T$ обладает достаточной гладкостью. Однородное уравнение переноса в дивергентной форме записывается в виде

$$\partial_t m + \nabla \cdot (m\mathbf{u}) = 0, \quad (1.1)$$

где $\partial_t = \partial/\partial t$ производная по времени, $\nabla = (\partial_x, \partial_y)^T$ двумерный оператор набла, записанный в декартовой системе координат. Существенной особенностью задачи моделирования динамики морского льда является свойство сжимаемости среды. Это отражается в дивергентности скорости \mathbf{u} в общем случае, т.е. $\nabla \cdot \mathbf{u} \neq 0$, что не позволяет вынести ее из под действия оператора дивергенции в уравнении (1.1). Сформулируем основные требования к численному решению уравнения переноса (1.1).

Положительность. Переносимый скаляр по определению обладает свойством положительности. Отметим, что появление отрицательной массы, сплоченности или толщины морского льда сразу приводит к неустойчивости динамической модели, а точнее блока, который отвечает за численное решение уравнения баланса импульса. Таким образом, необходимо, чтобы схема переноса на дискретном уровне обеспечивала положительность переносимого скаляра;

Высокий порядок аппроксимации. Вопрос об эффективности использования схем высокого порядка (второго или больше) по времени и пространству в задаче моделирования динамики морского льда не изучен окончательно. В работе [21] отмечается слабое влияние используемых схем переноса на разрешающую способность линейных кинематических особенностей при моделировании на небольших временных масштабах порядка месяца, однако делается предположение о том, что схемы переноса играют большую роль на климатических временных масштабах. Таким образом, автор работы принял решение о необходимости реализации широкого ансамбля схем переноса, которые включают в себя схемы высокого порядка по времени и пространству;

Квазимонотонность. Согласно теореме Годунова, схемы адвекции с порядком аппроксимации по пространству больше 1 не обладают свойством монотонности. На практике это выражается в появлении осцилляций численного решения, возникающих из-за эффекта Гиббса, которые, в частности, могут привести к отрицательным значениям скаляра. Для того, чтобы бороться с возникающим численным шумом, автор выходит за рамки линейных схем и применяет ограничители и монотонизаторы. Монотонность заменяется на менее жесткие условия убывания локального экстремума или полной вариации. На сетке типа "A" применяется FCT-схема (Flux Corrected Transport - перенос с коррекцией потоков), которая входит в класс LED-схем (Local Extremum Diminishing - убывание локального экстремума), а на "CD"-сетке реализованы TVD-схемы (Total Variation Diminishing - убывание полной вариации);

Глобальная консервативность. Одной из основных прогностических переменных является масса льда, которая глобально сохраняется при условии отсутствия источников. Основными источниками массы льда являются: поверхностное таяние, намерзание льда на границе "лед-океан", намерзание льда на открытой воде. Схема переноса должна обеспечивать условие сохранения массы вещества на дискретном уровне при отсутствии внешних источников;

Явные схемы по времени. Количество переносимых скаляров при многокатегорийном моделировании морского льда может достигать сотен (например, [42]). В силу этого, необходимо обеспечить вычислительную эффективность алгоритма переноса. Несмотря на освобождение шага по времени от ограничения типа Куранта на устойчивость, использование неявных схем по времени значительно увеличивает вычислительную сложность одного шага переноса трассеров, что делает время работы модели неоправданно большим. Грубые оценки числа

Куранта для морского льда в реальных расчетах показывают, что оно ограничивается значением ~ 0.7 , что делает возможным использование экономичных явных схем интегрирования по времени.

Эффективная параллельная реализация. Как уже отмечалось ранее, для расчета динамики многокатегорийного морского льда и снега необходимо иметь высокую эффективность решателя адвекции. Таким образом, одним из главных приоритетов в выборе метода решения уравнения переноса является возможность его эффективной реализации на компьютере с параллельной архитектурой. Под эффективностью параллельной реализации понимается выбор шаблона ограничителя/монотонизатора, минимизирующий количество обменов между MPI-процессами, а также по возможности оптимизирующий число арифметических операций.

1.2. Конечно-элементная пространственная аппроксимация

В качестве пространственной аппроксимации в разрабатываемой модели динамики морского льда используется метод конечных элементов на неструктурированных треугольных сетках. Аппроксимация неизвестных скалярных функций, компонент вектор-функции скорости льда, а также заданных извне компонент вектор-функций поверхностного течения океана и скорости ветра, производится с помощью финитных базисных функций. Ограниченный носитель этих функций обеспечивает локальность вычислений, что отражается в разреженной структуре получающихся матриц, а это в свою очередь обеспечивает эффективность работы решателей систем линейных алгебраических уравнений. Три основных типа базисных функций, которые используются в модели, представлены на рисунке 1.1. Базисные функции Куранта φ_i (рисунок 1.1 слева) ассоциированы с узлами треугольной сетки и используются для приближения скалярных и векторных функций на сетке типа А в классификации Аракавы. Функция φ_i , связанная с узлом V_i , линейна на каждом треугольнике и определяется условием $\varphi_i(\mathbf{x}_{V_j}) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера ($\delta_{ij} = 1$, только в случае $i = j$), \mathbf{x}_{V_j} — вектор координат узла V_j . Главным достоинством аппроксимаций, построенных с помощью базисных функций Куранта, является непрерывность на каждом ребре. Это означает, что метод Галеркина, использующий функции Куранта для приближения

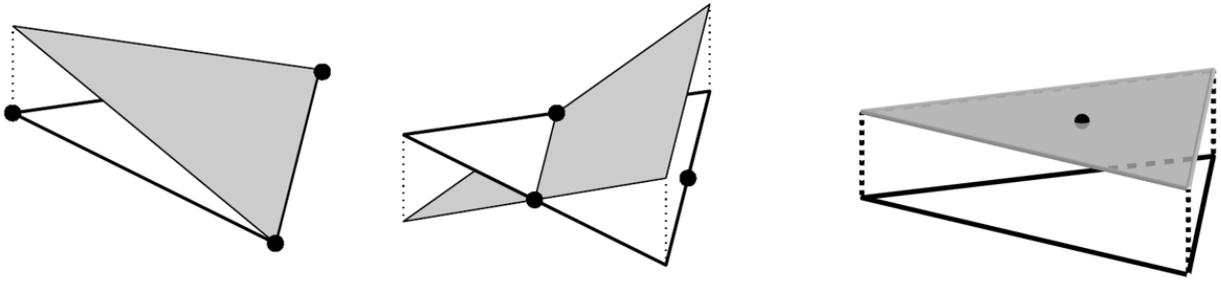


Рисунок 1.1 — Базисные функции на треугольнике: базисная функция Куранта φ_i (слева), базисная функция Круэзе-Равиар ψ_i (в центре), постоянная на треугольнике базисная функция κ_i (справа).

пробных и тестовых функций, является непрерывным. Непрерывность аппроксимации приводит к менее жестким ограничениям на устойчивость численного метода. Существенный недостаток функций Куранта состоит в отсутствии свойства ортогональности $\int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j ds \neq 0$ при $i \neq j$, что приводит к недиагональной разреженной массовой матрице. Данная аппроксимация обладает тремя степенями свободы на каждом треугольнике, которые ассоциированы с вершинами.

Базисные функции Круэзе-Равиар ψ_i (рисунок 1.1 по центру) ассоциированы с серединами ребер треугольной сетки и используются для аппроксимации компонент вектор-функций скорости на сетке типа CD. Функция ψ_i , связанная с ребром E_i , линейна на каждом треугольнике и определяется условием $\varphi_i(\mathbf{x}_{E_j}) = \delta_{ij}$, где \mathbf{x}_{E_j} — вектор координат середины ребра E_j . Базисные функции Круэзе-Равиар обладают свойством ортогональности $\int_{\Omega} \psi_i \psi_j ds = \delta_{ij}$, которое приводит к диагональной массовой матрице, что является главным ее достоинством. Однако аппроксимация уже не является непрерывной на ребре (непрерывность сохраняется только в середине ребра при условии использования глобальных коэффициентов в разложении ряда Фурье). Это означает, что метод Галеркина в данном случае является разрывным, что накладывает более жесткие условия на устойчивость численного метода. Линейная аппроксимация скоростей связывается с постоянной на треугольнике аппроксимацией скаляров с помощью функций κ_i (рисунок 1.1 справа). Данный выбор пары базисных функций обеспечивает простой, но в то же время вычислительно эффективный вид дискретизаций.

Отдельного обсуждения заслуживает вопрос применимости конечных элементов высокого порядка, количество степеней свободы которых на треугольнике больше 3. В данный момент эти элементы не встречаются в передовых мировых

моделях динамики морского льда. Это связано с тем, что получаемое численное решение по существу разрывное, что будет наглядно продемонстрировано во второй главе работы. Присутствует кромка льда, а также трещины разного рода. При этом пространственный масштаб возникающих линейных кинематических особенностей сравним по размеру с шагом сетки. Таким образом, реализация элементов высокого порядка рискует потерять свойство устойчивости при ”попадании двух особенностей в один конечный элемент”.

1.3. Локально-элементный декартов базис

В разработанной модели реализован локально-элементный подход [61]. Выделим основные достоинства данного подхода:

1. Полностью решена проблема особой точки на полюсе, что позволяет без проблем считать “задачу аквапланеты”. На рисунке 1.2 приведено значение переносимого скаляра при моделировании переноса пассивной примеси на сфере в одном из численных экспериментов данной главы. Видно, что в случае использования сферической метрики на полюсе возникают паразитные осцилляции, которые обусловлены особенностью в знаменателе метрических слагаемых. При этом в случае локально-элементного подхода численный шум пропадает;
2. Универсальность кода модели для любой геометрии расчетной области: плоскость, сфера, геоид. С точки зрения модели, геометрия задается исключительно определением географического базиса;
3. Хорошая согласованность с методом конечных элементов. Локальные степени свободы для векторных и тензорных величин неразрывно связаны с базисом, в котором хранятся их компоненты. Как правило, используемые схемы обладают небольшим шаблоном, обеспечивающим локальность вычислений и вычислительную эффективность алгоритмов. При этом необходимые степени свободы хранятся в базисах соседних элементов сетки.

Однако данный подход не лишен своих недостатков, среди которых можно выделить два основных:

1. Дополнительные вычисления для перевода компонент векторов и тензоров в другой базис. При реализации численного шаблона конечно-элементной схемы в локально элементном базисе необходимо переводить компоненты векторов и тензоров в этот базис из соседних элементов, что повышает количество арифметических операций;
2. Локальный элементный базис не всегда компланарен географическому, что вносит дополнительную погрешность при переводе компонент векторов. Минимизация вносимой ошибки достигается выбором элементного базиса.

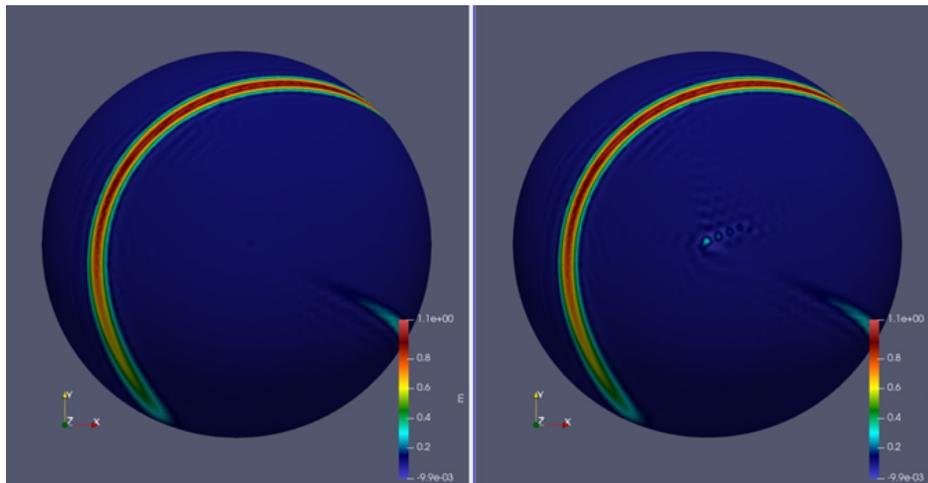


Рисунок 1.2 — Значения переносимого скаляра в одном из численных экспериментов данной главы. Слева - реализация в локально-элементном базисе, справа - реализация с использованием сферической метрики.

Рассмотрим триангуляцию произвольной двумерной поверхности. Для оптимизации численных методов, которые будут обсуждаться далее, вводится условие одинаковой ориентации треугольников. Оно означает, что при обходе вершин произвольного треугольника от первой до третьей в локальной нумерации, вершины перечисляются против часовой стрелки, если смотреть на треугольник от направления внешней нормали к поверхности. Определим локальный декартов базис, ассоциированный с каждым элементом триангуляции (вершина, ребро, треугольник), который собирается на этапе препроцессинга. Сначала собирается локальный ортонормированный базис для каждого треугольника $(\mathbf{e}_x^t, \mathbf{e}_y^t, \mathbf{e}_z^t)$, как показано на рисунке 1.3 (зеленый цвет). Начало координат находится в барицентре треугольника, \mathbf{e}_x^t направлен в первую вершину локальной нумерации треугольника, \mathbf{e}_z^t является единичным вектором нормали к плоскости треуголь-

ника, \mathbf{e}_y^t выбирается согласно условию $\mathbf{e}_x^t \times \mathbf{e}_y^t = \mathbf{e}_z^t$. Далее происходит сборка вершинного базиса $(\mathbf{e}_x^n, \mathbf{e}_y^n, \mathbf{e}_z^n)$ (рисунок 1.3 - синий цвет). Орт \mathbf{e}_z^n выбирается как средневзвешенное по площади значение \mathbf{e}_z^t соседних треугольников, затем $\mathbf{e}_x^n, \mathbf{e}_y^n$ выбираются произвольно, согласованно с условием ортогональности. Данный выбор вершинного z-орта позволяет ему в среднем не сильно отличаться от z-ортов смежных треугольников. Последним шагом, собирается реберный базис $(\mathbf{e}_x^e, \mathbf{e}_y^e, \mathbf{e}_z^e)$ (рисунок 1.3 - красный цвет), начало координат которого располагается в середине ребра. Орт \mathbf{e}_y^e направлен от первого узла ко второму в локальной реберной нумерации, \mathbf{e}_z^e - средневзвешенное по площади значение соседних \mathbf{e}_z^t , а $\mathbf{e}_x^e = \mathbf{e}_y^e \times \mathbf{e}_z^e$. Рассмотрим локальный географический базис на сфере $(\mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_r)$.

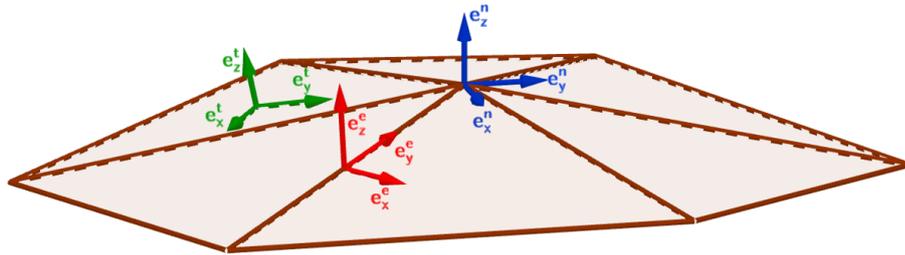


Рисунок 1.3 — Ортонормированные элементные базисы. Синий цвет — вершинный базис, красный цвет — реберный базис, зеленый цвет — треугольный базис.

В случае абсолютно равномерной триангуляции сферы элементный базис $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ компланарен географическому $(\mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\theta)$. Чем более не регулярна локальная триангуляция, тем больший угол образуется между \mathbf{e}_z и \mathbf{e}_r . Автор пренебрегает разницей между \mathbf{e}_r и \mathbf{e}_z , поскольку уравнения динамики морского льда являются двумерными, в результате переход между элементным и географическим базисом является двумерным поворотом. Данное пренебрежение вводит дополнительную вычислительную погрешность, однако ошибка перехода в среднем уменьшается за счет выбора элементного z-орта \mathbf{e}_z , который рассчитывается как среднее значение по соседним элементам.

Как уже было отмечено ранее, реализация модели в локально-декартовом базисе требует перевода компонент векторных и тензорных величин в соседние элементные базисы. Рассмотрим переход между двумя базисами $(\mathbf{e}_x^{\text{old}}, \mathbf{e}_y^{\text{old}}) \rightarrow$

$(\mathbf{e}_x^{\text{new}}, \mathbf{e}_y^{\text{new}})$. Матрицы прямого и обратного перехода записываются в виде

$$\text{old}P_{\text{new}} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x^{\text{new}} \cdot \mathbf{e}_x^{\text{old}} & \mathbf{e}_x^{\text{new}} \cdot \mathbf{e}_y^{\text{old}} \\ \mathbf{e}_y^{\text{new}} \cdot \mathbf{e}_x^{\text{old}} & \mathbf{e}_y^{\text{new}} \cdot \mathbf{e}_y^{\text{old}} \end{bmatrix}, \text{new}P_{\text{old}} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x^{\text{old}} \cdot \mathbf{e}_x^{\text{new}} & \mathbf{e}_x^{\text{old}} \cdot \mathbf{e}_y^{\text{new}} \\ \mathbf{e}_y^{\text{old}} \cdot \mathbf{e}_x^{\text{new}} & \mathbf{e}_y^{\text{old}} \cdot \mathbf{e}_y^{\text{new}} \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

Равенство $\text{old}P_{\text{new}} = \text{new}P_{\text{old}}^{-1}$ выполняется только в случае плоского 2D-поворота. Для вычисления компонент двумерного вектора \mathbf{u} или тензора $\boldsymbol{\sigma}$ в новом базисе используется следующее матричное правило

$$\begin{pmatrix} u^{\text{new}} \\ v^{\text{new}} \end{pmatrix} = \text{old}P_{\text{new}} \begin{pmatrix} u^{\text{old}} \\ v^{\text{old}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{11}^{\text{new}}, \sigma_{12}^{\text{new}} \\ \sigma_{21}^{\text{new}}, \sigma_{22}^{\text{new}} \end{pmatrix} = \text{old}P_{\text{new}} \begin{pmatrix} \sigma_{11}^{\text{old}}, \sigma_{12}^{\text{old}} \\ \sigma_{21}^{\text{old}}, \sigma_{22}^{\text{old}} \end{pmatrix} \text{old}P_{\text{new}}^T. \quad (1.3)$$

Рассмотрим более детально процесс сборки матриц перехода для разных типов элементов. Поскольку все треугольники, примыкающие к вершине, невозможно поместить на одну плоскость с сохранением конформности, используется только пара $(\mathbf{e}_x^n, \mathbf{e}_y^n)$ и $(\mathbf{e}_x^t, \mathbf{e}_y^t)$ для вычисления прямой матрицы перехода ”вершина \rightarrow треугольник”, согласно уравнению (1.2). Для обратного перехода ”треугольник \rightarrow вершина” задается равенство ${}_tP_n = {}_nP_t^{-1}$, что вносит дополнительную погрешность, поскольку это не является 2D-вращением. Аналогичная процедура реализована для перехода ”вершина \leftrightarrow ребро”. Поскольку можно разместить два соседних по ребру треугольника на плоскости конформным образом, процедура перехода ”треугольник \leftrightarrow ребро” устроена несколько иначе. Реализован двухшаговый подход, который схематично показан на рисунке 1.4. Первая ите-

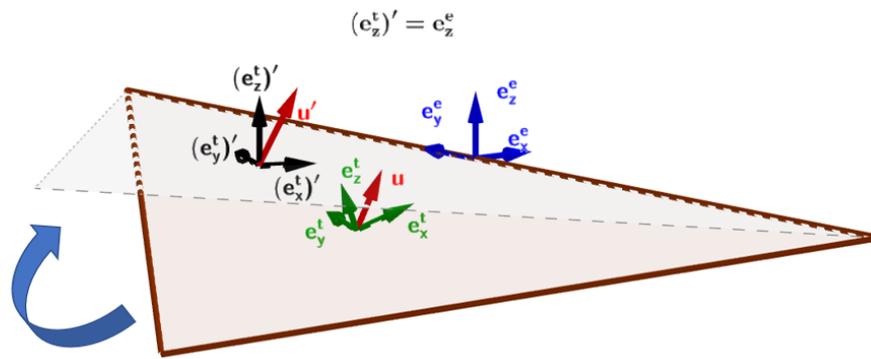


Рисунок 1.4 — Процедура ”спрямления треугольника” для вычисления переходной матрицы ”треугольник \rightarrow ребро”.

рация соответствует трехмерному повороту плоскости треугольника вокруг оси \mathbf{e}_y^e на угол между векторами \mathbf{e}_z^t и \mathbf{e}_z^e . После этого поворота выполнено равенство

$(\mathbf{e}_z^t)' = \mathbf{e}_z^e$, поэтому вторая итерация $((\mathbf{e}_x^t)', (\mathbf{e}_y^t)') \rightarrow (\mathbf{e}_x^e, \mathbf{e}_y^e)$ соответствует 2D-вращению, не вносящему дополнительной ошибки. Обратный переход "ребро \rightarrow треугольник" также состоит из двух описанных итераций.

В случае плоской расчетной области не возникает ошибки, связанной с некомпланарностью базисов. Все матрицы переходов между элементными базами собираются заранее, что позволяет эффективно переводить векторные и тензорные компоненты в соседние базисы в процессе исполнения кода. Использование матриц перехода увеличивает вычислительную сложность алгоритма, однако позволяет избежать использования сферических метрик с особенностями на полюсах, и код модели получается универсальным для любой геометрии расчетной области.

1.4. Численное решение уравнения переноса на сетке типа A

Существует множество явных схем интегрирования по времени для решения уравнения переноса (1.1) в рамках конечно-элементной пространственной аппроксимации с использованием базисных функций Куранта. Среди основных можно выделить явную схему Эйлера первого порядка по времени, схему Кранка-Николсон второго порядка, а также семейство схем типа Тейлора-Галеркина. У всех из них есть свои достоинства и недостатки. Главным достоинством схемы Эйлера является скорость работы, однако она наименее точна из-за низкого порядка аппроксимации. Схема Кранка-Николсон обладает устойчивой дискретизацией по времени для больших временных шагов, но из-за отсутствия сильной A-устойчивости может порождать сильный численный шум при явной реализации [62]. Для того, чтобы бороться с этим недостатком на практике, либо добавляют искусственную вязкость в правую часть, которая стабилизирует решение, либо применяют SUPG-метод (Streamline-upwind Petrov-Galerkin method), идея которого заключается в добавлении диффузионного члена в направлении линий тока [63]. Схемы типа Тейлора-Галеркина [64] по построению обладают диффузионным слагаемым, которое не снижает порядок временной аппроксимации, и не требуют дополнительной стабилизации для устойчивости, а также позволяют достичь 2, 3 и 4 порядка аппроксимации по времени в рамках использования базисных функций Куранта. После анализа всех достоинств и недостатков описан-

ных временных дискретизаций было принято решение остановиться на выборе схем типа Тейлора-Галеркина для решения уравнения переноса на сетке типа А. Поскольку реализованный метод обладает вторым порядком аппроксимации по пространству, он теряет свойство монотонности согласно теореме Годунова. Таким образом, для достижения квазимонотонности, подавляющей нефизичные осцилляции, метод дополняется технологией коррекции потоков, которая впервые была предложена в работе [35].

1.4.1. Дискретизация по времени

Идея метода Тейлора-Галеркина заключается в разложении скалярной функции в ряд Тейлора по времени. Рассмотрим разложение функции массы со вторым порядком, заменив производные по времени согласно уравнению (1.1)

$$m^{n+1} = m^n - \Delta t \nabla \cdot (m^n \mathbf{u}) + \frac{\Delta t^2}{2} \nabla \cdot (\mathbf{u} \nabla \cdot (m^n \mathbf{u})). \quad (1.4)$$

В результате получаем метод Тейлора-Галеркина 2 порядка аппроксимации по времени (TG2). Последнее слагаемое в уравнении (1.4) можно трактовать как диффузию, которая обеспечивает устойчивость численного решения. Рассмотрим также двухшаговую вариацию метода второго порядка (TTG2)

$$\begin{aligned} m^{n+\frac{1}{2}} &= m^n - \frac{\Delta t}{2} \nabla \cdot (m^n \mathbf{u}), \\ m^{n+1} &= m^n - \Delta t \nabla \cdot (m^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{u}). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Двухшаговая дискретизация по времени эквивалентна одношаговой после подстановки $m^{n+\frac{1}{2}}$ во второе уравнение. Причина, по которой использование двухшаговой вариации (1.5) вместо одношаговой (1.4) оправдано, кроется в вычислительной эффективности. Как будет показано далее в главе, время, которое тратится на сборку последних двух слагаемых в правой части (1.4), превосходит время сборки двух более простых правых частей уравнений (1.5). После проведения пространственной дискретизации описанных методов получается система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с разреженной массовой матрицей. Далее будет показано, что время сборки правых частей уравнений значительно превышает время решения СЛАУ, поэтому двукратное решение систем

в двухшаговом методе незначительно влияет на суммарное время одного шага по времени. Рассмотрим также метод третьего порядка по времени [65], который также записывается в двухшаговой вариации (ТТG3)

$$\begin{aligned} m^{n+\frac{1}{2}} &= m^n - \frac{1}{3}\Delta t \nabla \cdot (m^n \mathbf{u}) + \alpha \Delta t^2 \nabla \cdot [\mathbf{u} \nabla \cdot (m^n \mathbf{u})], \\ m^{n+1} &= m^n - \Delta t \nabla \cdot (m^n \mathbf{u}) + \frac{\Delta t^2}{2} \nabla \cdot [\mathbf{u} \nabla \cdot (m^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{u})]. \end{aligned} \quad (1.6)$$

При подстановке $m^{n+\frac{1}{2}}$ во второе уравнение (1.6) и замены слагаемых с ∇ на производные по времени согласно (1.1) восстанавливается ряд Тейлора для массы, записанный до слагаемого Δt^3 для любого значения параметра α . В монографии [65] производится анализ амплитудной ошибки схемы при различных значениях параметра и показывается, что выбор $\alpha = 1/9$ минимизирует ее. Сформулируем также двухшаговый метод четвертого порядка

$$\begin{aligned} m^{n+\frac{1}{2}} &= m^n + \alpha \Delta t \nabla \cdot (m^n \mathbf{u}) + \beta \Delta t^2 \nabla \cdot [\mathbf{u} \nabla \cdot (m^n \mathbf{u})], \\ m^{n+1} &= m^n + \Delta t \nabla \cdot (m^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{u}) + \gamma \Delta t^2 \nabla \cdot [\mathbf{u} \nabla \cdot (m^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{u})]. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Аппроксимация достигается при выборе следующих значений параметров: $\alpha = 0.1409714$, $\beta = 0.1160538$, $\gamma = 0.3590284$. Отметим, что 4 порядок по времени является максимальным, который возможно получить в рамках линейных пробных и тестовых функций. Использование схем ТТG2, ТТG3 и ТТG4 не распространено в передовых мировых моделях динамики морского льда и является существенной особенностью разработанной автором модели.

1.4.2. Дискретизация по пространству

Рассмотрим пространственную дискретизацию на примере схемы Тейлора-Галеркина 2 порядка аппроксимации по времени (ТG2) (1.4). Заметим, что правые части других схем семейства Тейлора-Галеркина (1.5), (1.6), (1.7) имеют аналогичные слагаемые порядка Δt и Δt^2 , поэтому не нуждаются в отдельном пояснении. Слабая формулировка ТG2 записывается в виде

$$(m^{n+1}, \bar{m}) = (m^n, \bar{m}) - \Delta t (\nabla \cdot (m^n \mathbf{u}), \bar{m}) - \frac{\Delta t^2}{2} (\nabla \cdot (m^n \mathbf{u}), \mathbf{u} \cdot \nabla \bar{m}), \quad \forall \bar{m} \quad (1.8)$$

где \bar{m} - тестовая функция, а $(f_1, f_2) = \int_{\Omega} f_1 f_2 dS$. В последнем равенстве используется формула Гаусса для дивергенции векторной функции в предположении, что скорость на границе равна нулю $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0$ (граничное условие прилипания). Не будем вдаваться в детали определения функциональных пространств, а лишь скажем, что для того, чтобы перейти к дискретной формулировке, бесконечномерное пространство Соболева приближается конечномерным, натянутым на базисные функции Куранта φ_i . Подставляя разложение неизвестных скаляров и заданного вектора скорости по базисным функциям Куранта $m_h^k = \sum_{V_i} m_i \varphi_i$, $\mathbf{u}_h = \sum_{V_i} (u_i, v_i)^T \varphi_i$, а также заменяя \bar{m}_h последовательно на все φ_i приходим к дискретной СЛАУ

$$\mathbf{Mm}^{n+1} = \mathbf{Mm}^n - \Delta t \cdot \mathbf{Fm}^n - \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \mathbf{Sm}^n, \quad (1.9)$$

где \mathbf{m}^k - вектор вершинных коэффициентов в разложении скалярной функции, \mathbf{M} - разреженная массовая матрица, которая определяется как

$$M_{ij} = \begin{cases} (\varphi_i, \varphi_j), & \text{если } V_i \text{ смежна с } V_j; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (1.10)$$

а матрицы первых и вторых производных \mathbf{F} и \mathbf{S} задаются как

$$F_{ij} = \begin{cases} (\varphi_i, \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_j), & \text{если } V_i \text{ смежна с } V_j; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$S_{ij} = \begin{cases} (\nabla \cdot (\varphi_i \mathbf{u}), \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_j), & \text{если } V_i \text{ смежна с } V_j; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

На практике удобным оказывается подход локальной сборки массовой матрицы и вектора правой части на каждом треугольнике, который имеет место быть благодаря свойству аддитивности интеграла по разбиению на подобласти. Данный подход позволяет собрать массовую матрицу, а также вектор правой части в уравнении (1.9) одним циклом по треугольникам. Компоненты скорости хранятся в локально декартовом вершинном базисе, поэтому для сборки локального вектора правой части необходимо перевести компоненты вершинной скорости в треугольный базис, используя (1.3) перед выполнением вычислений на треугольнике. C/C++-подобный псевдокод для сборки локальной массовой матрицы

и вектора правой части приведен в листинге А.1, который представлен в приложении данной работы.

Обсудим вопрос об оптимизации метода сборки слагаемых порядка Δt и Δt^2 уравнения (1.8). Рассмотрим треугольник T с координатами вершин в треугольном базисе: $B_0(x_1, y_1)$, $B_1(x_2, y_2)$, $B_2(x_3, y_3)$. Для вычисления компонент локального вектора правой части необходимо оценить следующие интегралы

$$\begin{aligned} F_{ij} &= I_1 = \int_T \varphi_j \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_i dS, \\ S_{ij} &= I_2 = \int_T \nabla \cdot (\varphi_j \mathbf{u}) \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_i dS, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где φ_i - локальная на треугольнике базисная функция Куранта, ассоциированная с i -м узлом треугольника, а компоненты заданной вектор-функции скорости $\mathbf{u} = (u, v)^T$ раскладывается по этим же базисным функциям как $(u, v)^T = (u_k, v_k)^T \varphi_k$ (здесь и далее в этом разделе будем использовать правило Эйнштейна для свертки по повторяющемуся индексу). Проблема сборки состоит в том, что интегралы (1.11) необходимо оценивать на каждом треугольнике, причем значения компонент скорости меняются на очередном шаге по времени. Первым шагом представим интегралы в виде свертки компонент скорости с тензором третьего и четвертого ранга. Для этого подставим разложение вектора скорости по базисным функциям

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_T \varphi_j u \partial_x \varphi_i dS + \int_T \varphi_j v \partial_y \varphi_i dS = \\ &= \int_T \varphi_j u_k \varphi_k \partial_x \varphi_i dS + \int_T \varphi_j v_k \varphi_k \partial_y \varphi_i dS = \\ &= u_k \int_T \varphi_j \varphi_k \partial_x \varphi_i dS + v_k \int_T \varphi_j \varphi_k \partial_y \varphi_i dS. \end{aligned}$$

Для того, чтобы вычислить значение интеграла I_1 на треугольнике достаточно один раз вычислить компоненты тензоров первой производной 3-го ранга \mathbf{DX} и \mathbf{DY} , которые задаются следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbf{DX}_{ijk} &= \int_T \varphi_j \varphi_k \partial_x \varphi_i dS, \\ \mathbf{DY}_{ijk} &= \int_T \varphi_j \varphi_k \partial_y \varphi_i dS, \end{aligned} \quad (1.12)$$

а затем провести свертку с компонентами скорости

$$F_{ij} = DX_{ijk}u_k + DY_{ijk}v_k.$$

Аналогичным образом получается сверточное представление для интеграла I_2

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_T \nabla \cdot (\varphi_j \mathbf{u}) \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_i dS = \\ &= \int_T [\partial_x(\varphi_j u) + \partial_y(\varphi_j v)] [u \partial_x \varphi_i + v \partial_y \varphi_i] dS = \\ &= \int_T \partial_x(\varphi_j u) u \partial_x \varphi_i dS + \int_T \partial_x(\varphi_j u) v \partial_y \varphi_i dS + \\ &+ \int_T \partial_y(\varphi_j v) u \partial_x \varphi_i dS + \int_T \partial_y(\varphi_j v) v \partial_y \varphi_i dS = \\ &= u_k u_l \int_T \partial_x(\varphi_j \varphi_k) \varphi_l \partial_x \varphi_i dS + u_k v_l \int_T \partial_x(\varphi_j \varphi_k) \varphi_l \partial_y \varphi_i dS + \\ &+ v_k u_l \int_T \partial_y(\varphi_j \varphi_k) \varphi_l \partial_x \varphi_i dS + v_k v_l \int_T \partial_y(\varphi_j \varphi_k) \varphi_l \partial_y \varphi_i dS. \end{aligned}$$

Вводя тензоры вторых производных четвертого ранга

$$\begin{aligned} DXX_{ijkl} &= \int_T \partial_x(\varphi_j \varphi_k) \varphi_l \partial_x \varphi_i dS, \\ DXY_{ijkl} &= \int_T \partial_x(\varphi_j \varphi_k) \varphi_l \partial_y \varphi_i dS \\ DYX_{ijkl} &= \int_T \partial_y(\varphi_j \varphi_k) \varphi_l \partial_x \varphi_i dS \\ DYY_{ijkl} &= \int_T \partial_y(\varphi_j \varphi_k) \varphi_l \partial_y \varphi_i dS, \end{aligned} \tag{1.13}$$

получается необходимое сверточное представление

$$G_{ij} = DXX_{ijkl}u_k u_l + DXY_{ijkl}u_k v_l + DYX_{ijkl}v_k u_l + DYY_{ijkl}v_k v_l.$$

Таким образом, вычисление локальных матриц на треугольнике сведено к вычислению свертки с компонентами скорости. Для того, чтобы хранить тензоры (1.12), необходимо на каждом треугольнике на этапе препроцессинга вычислить значения $27 \cdot 2 = 54$ интегралов, а для хранения тензоров (1.13) необходимо вычислить

и сохранить значения $81 \cdot 4 = 324$ интегралов. Хранение оцененного количества значений компонент тензоров на каждом треугольнике является слишком затратным по памяти. Для того, чтобы избавиться от этого недостатка, воспользуемся изопараметрическим преобразованием треугольника в стандартный.

Идея изопараметрического преобразования состоит в отображении треугольника T с произвольными координатами в стандартный треугольник \bar{T} с координатами $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$. Схематически данное отображение представлено на рисунке 1.5. Чтобы вычислить компоненты тензоров (1.12) и (1.13) на

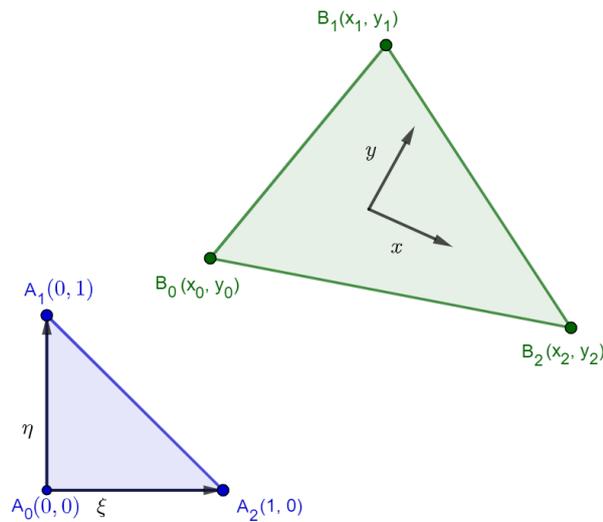


Рисунок 1.5 — Отображение произвольного треугольника в стандартный.

стандартном треугольнике необходимо понять, как меняются компоненты градиента $\nabla = (\partial_x, \partial_y)^T$ при замене базиса $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$. Воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix},$$

где

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix}$$

- матрица Якоби, а

$$\det(\mathbf{J}) = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \quad (1.14)$$

- Якобиан преобразования. Для обратного преобразования координат выполняется

$$\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix},$$

где

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

- обратная матрица Якоби. Прямая и обратная матрицы Якоби связаны соотношением

$$J^{-1} = \frac{1}{\det(J)} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{pmatrix}.$$

Воспользовавшись правилом производной сложной функции получаем

$$\begin{aligned} \partial_x &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \partial_\xi + \frac{\partial \eta}{\partial x} \partial_\eta, \\ \partial_y &= \frac{\partial \xi}{\partial y} \partial_\xi + \frac{\partial \eta}{\partial y} \partial_\eta, \end{aligned}$$

что задает связь градиентов в старом и новом базисах

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} = (J^{-1})^T \begin{pmatrix} \partial_\xi \\ \partial_\eta \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

Теперь вычислим матрицу Якоби для преобразования, представленного на рисунке 1.5. Очевидно, что в координатах (ξ, η) линейные базисные функции Куранта на стандартном треугольнике задаются равенствами

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_0(\xi, \eta) &= -\xi - \eta + 1, \\ \bar{\varphi}_1(\xi, \eta) &= \eta, \\ \bar{\varphi}_2(\xi, \eta) &= \xi. \end{aligned}$$

Запишем разложение координат x и y по базисным функциям стандартного треугольника

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= x_0 \bar{\varphi}_0(\xi, \eta) + x_1 \bar{\varphi}_1(\xi, \eta) + x_2 \bar{\varphi}_2(\xi, \eta), \\ y(\xi, \eta) &= y_0 \bar{\varphi}_0(\xi, \eta) + y_1 \bar{\varphi}_1(\xi, \eta) + y_2 \bar{\varphi}_2(\xi, \eta). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Производя дифференцирование равенств (1.17) получаем значение производных

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \xi} &= x_2 - x_0, & \frac{\partial x}{\partial \eta} &= x_1 - x_0, \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= y_2 - y_0, & \frac{\partial y}{\partial \eta} &= y_1 - y_0.\end{aligned}$$

Таким образом матрица Якоби данного преобразования задается как

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} (x_2 - x_0) & (x_1 - x_0) \\ (y_2 - y_0) & (y_1 - y_0) \end{pmatrix}.$$

Для интегрирования скалярной функции на стандартном треугольнике \bar{T} необходимо учесть, что $dS = |\det J| d\bar{S}$. С учетом изопараметрического преобразования производных (1.16) можно переписать сборку матриц в виде

$$\mathbf{F}_{ij} = |\det J| (J_{00}^{-1}u_k + J_{01}^{-1}v_k) \mathbf{D}\xi_{ijk} + |\det J| (J_{10}^{-1}u_k + J_{11}^{-1}v_k) \mathbf{D}\eta_{ijk}, \quad (1.18)$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{D}\xi_{ijk} &= \int_{\bar{T}} \bar{\varphi}_j \bar{\varphi}_k \partial_\xi \bar{\varphi}_i d\bar{S}, \\ \mathbf{D}\eta_{ijk} &= \int_{\bar{T}} \bar{\varphi}_j \bar{\varphi}_k \partial_\eta \bar{\varphi}_i d\bar{S}.\end{aligned} \quad (1.19)$$

Компоненты матрицы \mathbf{S} вычисляются с помощью следующей свертки

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{ij} &= \\ &|\det J| [J_{00}^{-1}J_{00}^{-1}u_k u_l + J_{00}^{-1}J_{01}^{-1}u_k v_l + J_{01}^{-1}J_{00}^{-1}v_k u_l + J_{01}^{-1}J_{01}^{-1}v_k v_l] \mathbf{D}\xi\xi_{ijkl} + \\ &|\det J| [J_{00}^{-1}J_{10}^{-1}u_k u_l + J_{00}^{-1}J_{11}^{-1}u_k v_l + J_{01}^{-1}J_{10}^{-1}v_k u_l + J_{01}^{-1}J_{11}^{-1}v_k v_l] \mathbf{D}\xi\eta_{ijkl} + \\ &|\det J| [J_{10}^{-1}J_{00}^{-1}u_k u_l + J_{10}^{-1}J_{01}^{-1}u_k v_l + J_{11}^{-1}J_{00}^{-1}v_k u_l + J_{11}^{-1}J_{01}^{-1}v_k v_l] \mathbf{D}\eta\xi_{ijkl} + \\ &|\det J| [J_{10}^{-1}J_{10}^{-1}u_k u_l + J_{10}^{-1}J_{11}^{-1}u_k v_l + J_{11}^{-1}J_{10}^{-1}v_k u_l + J_{11}^{-1}J_{11}^{-1}v_k v_l] \mathbf{D}\eta\eta_{ijkl}.\end{aligned} \quad (1.20)$$

Тензоры вторых производных задаются естественным образом как

$$\begin{aligned}
 D\xi_{ijkl} &= \int_{\bar{T}} \partial_\xi(\bar{\varphi}_j \bar{\varphi}_k) \bar{\varphi}_l \partial_\xi \bar{\varphi}_i d\bar{S}, \\
 D\xi_{ijkl} &= \int_{\bar{T}} \partial_\xi(\bar{\varphi}_j \bar{\varphi}_k) \bar{\varphi}_l \partial_\eta \bar{\varphi}_i d\bar{S}, \\
 D\eta_{ijkl} &= \int_{\bar{T}} \partial_\eta(\bar{\varphi}_j \bar{\varphi}_k) \bar{\varphi}_l \partial_\xi \bar{\varphi}_i d\bar{S}, \\
 D\eta_{ijkl} &= \int_{\bar{T}} \partial_\eta(\bar{\varphi}_j \bar{\varphi}_k) \bar{\varphi}_l \partial_\eta \bar{\varphi}_i d\bar{S}.
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

Применяя метод свертки с вычислением интеграла на стандартном треугольнике процесс вычисления локальных матриц на треугольнике можно описать следующим образом. На этапе препроцессинга необходимо один раз вычислить компоненты тензоров (1.19) и (1.21) на стандартном треугольнике, что требует вычислений $27 \cdot 2 + 81 \cdot 4 = 378$ интегралов на треугольнике. Можно вычислить значения интегралов аналитически либо воспользоваться кубатурными формулами численного интегрирования двумерной функции. Также на этапе препроцессинга необходимо вычислить и сохранить обратную матрицу Якоби (1.15) и Якобиан преобразования (1.14) для каждого треугольника. Таким образом каждый треугольник хранит дополнительно всего 5 чисел. Далее на очередном шаге по времени для вычисления локальных элементных матриц необходимо провести свертки (1.18) и (1.20), что требует соответственно 108 и 648 операций умножения. Организовав вычисления описанным способом, удастся достичь высокой эффективности кода при оптимальном объеме используемой памяти.

1.4.3. Технология коррекции потоков

Для того, чтобы бороться с эффектом Гиббса, применяется технология коррекции потоков [35]. Заметим, что все описанные в прошлой разделе схемы после пространственной дискретизации принимают вид

$$M_C \Delta \mathbf{m}^H = \mathbf{r}, \tag{1.22}$$

с массовой матрицей M_C (1.10) и вектором правой части \mathbf{r} , где $\Delta \mathbf{m}^H = \mathbf{m}^{n+1} - \mathbf{m}^n$ - вектор разности вершинных значений скаляра на новом и старом шаге по времени (верхний индекс H отвечает за схему высокого порядка). Решение уравнения (1.22) удовлетворяет

$$M_L \Delta \mathbf{m}^H = \mathbf{r} + (M_L - M_C) \Delta \mathbf{u}^H, \quad (1.23)$$

где M_L - лампированная массовая матрица, соответствующий диагональный элемент которой равен сумме значений в той же строке обычной массовой матрицы M_C . Второе слагаемое в правой части уравнения (1.23) соответствует антидиффузии, которая обеспечивает высокий порядок по пространству. Рассмотрим схему Лернера [66] низкого порядка

$$M_L \Delta \mathbf{m}^L = \mathbf{r} + c_d (M_C - M_L) \mathbf{m}^n. \quad (1.24)$$

Здесь верхний индекс L соответствует схеме низкого порядка. Второе слагаемое в правой части (1.24) задает антидиффузионное слагаемое. Выбор значения параметра c_d отвечает за количество добавляемой антидиффузии. При подстановке $c_d = 0$ получается абсолютно монотонная схема низкого порядка, а при $c_d = 1$ схема с максимальной антидиффузией, которая лучше воспроизводит профиль, однако подвержена осцилляциям. В модели используется промежуточный вариант $c_d = 0.5$. Рассмотрим разность уравнений (1.23) и (1.24) ограниченных на один треугольник и получим выражение для антидиффузионного потока в вершины для каждого треугольника

$$F_T = M_L^{-1} |_e (\overline{M}_L - \overline{M}_C) (c_d \overline{\mathbf{m}}^n + \Delta \overline{\mathbf{u}}^H).$$

Здесь черта над матрицей/вектором означает, что берутся локальные треугольные значения. Окончательное решение строится корректировкой решения низкого порядка антидиффузионными потоками из соседних треугольников

$$m_i^{n+1} = m_i^L + \sum_{T_j \text{ adj to } V_i} \alpha_j F_{T_j, V_i}, \quad \forall V_i.$$

Осталось определить лимитирующий алгоритм для выбора коэффициентов $0 \leq \alpha_j \leq 1$. Он происходит в несколько этапов:

1. В каждой вершине определяется максимальное/минимальное значение m^L, m^n :

$$m_i^{*, \max/\min} = \max/\min \{m_i^L, m_i^n\};$$

2. На каждом треугольнике собирается максимальное/минимальное значение m_i^*

$$m_T^{**, \max/\min} = \max/\min\{m_i^{*, \max/\min}\}, \quad V_i \text{ прим к } T;$$

3. В каждой вершине берется максимальное/минимальное значение m_T^{**} из соседних треугольников

$$m_i^{\max/\min} = \max/\min\{m_T^{**, \max/\min}\}, \quad T \text{ прим к } V_i;$$

4. В каждой вершине считается сумма положительных/отрицательных антидиффузионных потоков из соседних треугольников

$$P_i^\pm = \sum_{T_j \text{ прим к } V_i} \max/\min\{0, F_{T_j, V_i}\};$$

5. В каждой вершине оценивается максимальное/минимальное допустимое приращение скаляра

$$Q_i^\pm = m_i^{\max/\min} - m_i^L;$$

6. В каждой вершине собирается наименьшая верхняя граница поправочных коэффициентов, гарантирующая отсутствие выбросов

$$R_i^\pm = \begin{cases} \min\{1, Q_i^\pm/P_i^\pm\}, & \text{если } P_i^\pm \neq 0, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases};$$

7. И наконец значения поправочных коэффициентов антидиффузионных потоков берутся так, чтобы обеспечить отсутствие нефизических локальных экстремумов

$$\alpha_T = \min_{V_i \text{ прим к } T} \begin{cases} R_i^+, & \text{если } F_{T, V_i} \geq 0, \\ R_i^-, & \text{если } F_{T, V_i} < 0. \end{cases}$$

Описанный выбор поправочных коэффициентов α_T обеспечивает выполнение условия $m_i^{\min} \leq m_i^{n+1} \leq m_i^{\max}$, что подавляет численный шум сохраняя свойство консервативности схемы.

1.5. Численное решение уравнения переноса на сетке типа CD

Как будет показано далее, конечно-элементная пространственная аппроксимация уравнения переноса (1.1) с помощью пары ψ_i, κ_i (см. рисунок 1.3) для

скоростей и скаляров приводит к стандартной конечно-объемной формулировке на CD-сетке. Это делает возможным выбор широкого класса схем по времени и пространству. Для аппроксимации по времени в разрабатываемой модели используются стандартные многошаговые схемы семейства Рунге-Кутты, которые позволяют получить любой порядок по времени, однако автор ограничивается четвертым, аналогично случаю на A-сетке. Для аппроксимации по пространству реализован набор схем трех типов: схема первого порядка против потока (First Order Upwind - FOU), а также схемы типа MUST (Monotone Upwind Scheme for Triangles) [59] и MUSCL (Monotone Upwind Scheme for Conservation Laws) [60].

1.5.1. Дискретизация по времени

Рассмотрим слабую формулировку уравнения (1.1)

$$\int_{\Omega} \frac{\partial m}{\partial t} \bar{m} \, ds + \int_{\Omega} \nabla \cdot (m \mathbf{u}) \bar{m} \, ds = 0.$$

После приближения бесконечномерного пространства Соболева с помощью линейной оболочки постоянных на треугольнике функций κ_i подставим вместо тестовой функции \bar{m} функцию κ_i , тогда получим на каждом треугольнике

$$\int_{T_i} \frac{\partial m}{\partial t} \kappa_i \, ds + \int_{T_i} \nabla \cdot (m \mathbf{u}) \kappa_i \, ds = 0.$$

Можно опустить κ_i поскольку она тождественно равна единице на треугольнике и воспользоваться формулой Гаусса для дивергенции скалярной функции

$$|T_i| \frac{\partial m}{\partial t} = - \sum_{E_j \text{ adj to } T_i} \int_{T_i} (m_i \mathbf{u})|_{E_j} \cdot \mathbf{n}_j \, dl.$$

Таким образом, получена стандартная формулировка метода конечных объемов для задачи переноса

$$|T_i| \frac{\partial m}{\partial t} = -R_i, \quad R_i = \sum_{E_j \text{ adj to } T_i} F_j, \quad F_j = U_j m_j, \quad (1.25)$$

где F_j — поток скаляра в треугольник T_i из ребра E_j , U_j — интеграл по ребру E_j нормальной компоненты скорости, m_j — значение скаляра в середине ребра

E_j . Поскольку реберные скорости хранятся в виде нормальной и тангенциальной компоненты (см. рисунок 1.3), $U_j = (u_x)|_{E_j} \cdot d(E_j) \cdot |E_j|$, где

$$d(E_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } (\mathbf{e}_x^e)|_{E_j} \text{ является внешней нормалью } T_i \\ -1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Разделение интеграла от скорости по ребрам получилось благодаря тому, что базисная функция Круэзе-Равиар, по которой раскладываются компоненты скорости, нечетна на ребре, которому она не соответствует (см. рисунок 1.1) и, соответственно, интеграл по этому ребру обнуляется. Рассмотрим дискретизацию по времени уравнения (1.25) на примере двухшаговой схемы Рунге-Кутты второго порядка (TRK2), которая записывается в виде

$$\begin{aligned} m_i^{n+1/2} &= m_i^n - \frac{\Delta t}{2|T_i|} R_i(m_i^n), \\ m_i^{n+1} &= m_i^n - \frac{\Delta t}{|T_i|} R_i(m_i^{n+1/2}). \end{aligned}$$

Общий вид явного многошагового метода Рунге-Кутты порядка k записывается как

$$m_i^{(0)} = m_i^n, \tag{1.26}$$

$$m_i^{(1)} = m_i^{(0)} - \alpha_1 \frac{\Delta t}{|T_i|} R_i(m_i^{(0)}), \tag{1.27}$$

$$\dots \tag{1.28}$$

$$m_i^{(k)} = m_i^{(0)} - \alpha_k \frac{\Delta t}{|T_i|} R_i(m_i^{(k-1)}), \tag{1.29}$$

$$m_i^{(n+1)} = m_i^{(k)}, \tag{1.30}$$

где коэффициенты α_j задаются с помощью

$$\alpha_j = \frac{1}{k - j + 1}, \quad j = \overline{1, k}.$$

Как уже отмечалось ранее, в модели реализованы многошаговые схемы Рунге-Кутты вплоть до 4 порядка по времени, однако в данной главе диссертации используется лишь схема второго порядка TRK2 для проведения численных экспериментов.

1.5.2. Дискретизация по пространству

Порядок аппроксимации по пространству определяется способом приближения значения массы в центре ребра. Простейший метод первого порядка против потока FOU соответствует следующему определению потока

$$F_j = 0.5 \cdot \left(U_j m_L + U_j m_R - |U_j| (m_R - m_L) \right), \quad (1.31)$$

где m_L - значение массы в барицентре текущего треугольника, а m_R - в центре соседнего через ребро E_j . Из уравнения (1.31) видно, что метод FOU соответствует выбору значения массы в середине ребра, равного массе в барицентре треугольника, взятого против направления нормальной компоненты скорости. Этот метод имеет первый порядок пространственной аппроксимации, что обеспечивает монотонность решения, однако решение получается слишком диффузионным. Чтобы увеличить порядок пространственной аппроксимации до второго, необходим более точный способ определения значения массы в середине ребра. Подобные схемы, которые будут обсуждаться далее, не применяются в других крупных мировых моделях морского льда, насколько известно автору.

Методы типа MUST и MUSCL построены на основе FOU метода, однако вместо использования значений m_L и m_R (уравнение (1.31)) в барицентре треугольников, вычисляются их приближения в середине ребра, связывающего два треугольника. На рисунке 1.6 изображены два соседних треугольника с центрами в точках А и В. Сформулируем в обозначениях этого изображения MUST-схему. Функция массы раскладывается в ряд Тейлора с первым порядком точности по пространству как

$$m(x, y) = m(x_c, y_c) + \nabla m_c \cdot \Delta \mathbf{r} + O(\Delta \mathbf{r}^2), \quad (1.32)$$

где (x_c, y_c) координаты барицентра треугольника, а $\Delta \mathbf{r}$ вектор направленный из барицентра треугольника в середину ребра. Идея метода MUST заключается в приближении скалярного произведения градиента на радиус вектор $\nabla m_c \cdot \Delta \mathbf{r}$ методом конечных разностей, использующем значения скаляра в барицентре и вершине, противоположной рассматриваемому ребру. Например, для треугольника с центром в точке А

$$\nabla m_A \cdot \Delta \mathbf{r}_{Af} \approx \left(\frac{m_A - m_3}{x_A - x_3} \right) (x_f - x_A) + \left(\frac{m_A - m_3}{y_A - y_3} \right) (y_f - y_A).$$

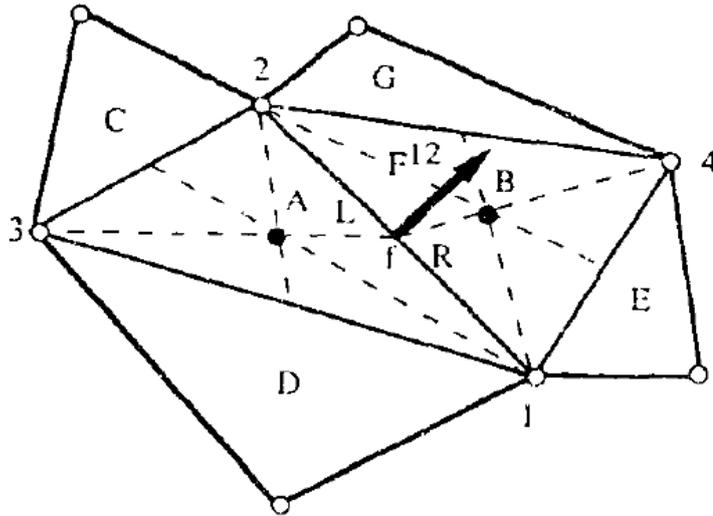


Рисунок 1.6 — Шаблон схемы MUST. Изображение взято из работы [59].

При этом значения массы интерполируются в вершины сетки по значениям в треугольниках методом обратных расстояний. Заметим, что приближение, полученное таким образом является приближением против потока, поскольку использует значение скаляров, находящихся в одной полуплоскости относительно ребра. Таким образом, можно приблизить массу в центре ребра слева и справа как

$$m_L = m_A + \varphi(r_L) \left(\frac{\Delta m_{A3}}{\Delta x_{A3}} \Delta x_{fA} + \frac{\Delta m_{A3}}{\Delta y_{A3}} \Delta y_{fA} \right), \quad (1.33)$$

$$m_R = m_B + \varphi(r_R) \left(\frac{\Delta m_{B4}}{\Delta x_{B4}} \Delta x_{fB} + \frac{\Delta m_{B4}}{\Delta y_{B4}} \Delta y_{fB} \right). \quad (1.34)$$

В последнем уравнении перед членами высокого порядка добавлена управляющая функция $\varphi(r)$, которая зависит от параметра r , который определяется как

$$r_L = \frac{\Delta m_{AB}}{\delta m_L}, \quad r_R = \frac{\Delta m_{BA}}{\delta m_R}. \quad (1.35)$$

В последнем равенстве $\delta m_L = \nabla m_A \cdot \Delta \mathbf{r}_{Af}$, $\delta m_R = \nabla m_B \cdot \Delta \mathbf{r}_{Bf}$ равны слагаемым высокого порядка из (1.33). Параметр r показывает насколько велика добавка за счет слагаемых высокого порядка. Смысл управляющей функции-монотонизатора заключается в ограничении добавки высокого порядка для поддержки монотонности. В случае неубывающего профиля ($m_B \geq m_A$) условия

$$\begin{aligned} m_L &= m_A + \varphi(r_L) \delta m_L \leq m_B, \\ m_L &= m_A + \varphi(r_L) \delta m_L \geq m_A \end{aligned}$$

достигаются при выборе ограничителя $\varphi(r) = \max\{0, \min\{r, 1\}\}$, который в литературе имеет название `minmod` фильтра. Применение MUST схемы с фильтром `minmod` повышает порядок пространственной аппроксимацией и обеспечивает квазимонотонность, схема довольно проста в программировании и может быть эффективно реализована на компьютере с параллельной архитектурой. Среди недостатков данного подхода можно выделить особенность в знаменателе при определении параметра r (1.35), которую на практике приходится обходить искусственными путями, вводя нижний предел, что отражается в частичной потере точности схемы.

Альтернативный подход в литературе принято называть схемами типа MUSCL [60]. Идея схем подобного типа заключается в приближении градиента в уравнении (1.32) с помощью теоремы Гаусса

$$\int_T \nabla m ds = \int_{\partial T} m \mathbf{n} dl \Rightarrow \nabla m \approx \frac{1}{|T|} \int_{\partial T} m \mathbf{n} dl.$$

Интеграл по границе треугольника в правой части оценивается с помощью узловых значений массы, которые интерполируются в вершины методом обратных расстояний. Далее приближенное решение ищется аналогично (1.32) с использованием монотонизатора

$$m_f = m_c + \varphi(r) \nabla m_c \cdot \Delta \mathbf{r}_{cf},$$

где индекс c отвечает за центр треугольника, а f - за середину ребра. Изначально данный подход был сформулирован для одномерного уравнения переноса на равномерной сетке [67], в котором параметр r определяется по формуле

$$r_{i-1/2} = \frac{\Delta m_{i-3/2}}{\Delta m_{i-1/2}},$$

где $\Delta m_{i-1/2} = m_i - m_{i-1}$ для положительного направления скорости $u > 0$ (целый индекс i соответствует значению скаляра в ячейке с номером i). Далее одномерный подход был адаптирован на многомерный случай [68]. На рисунке 1.7 представлен шаблон схемы в двух случаях разного направления скорости на ребре. В обозначениях этого изображения параметр r_f , ассоциированный с ребром, определяется как

$$r_f = \frac{m_{L,c} - m_V}{m_{R,c} - m_{L,c}},$$

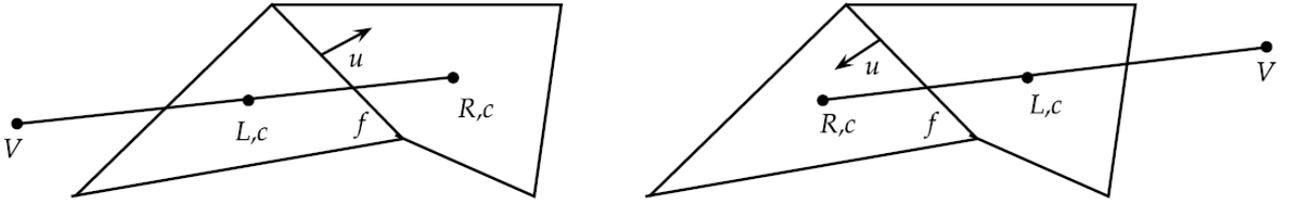


Рисунок 1.7 — Шаблон схемы MUSCL. Изображение взято из работы [69].

где V - точка, которая находится на луче $[R,c; L,c)$, так что L,c - середина отрезка $[R,c; V]$. Для того, чтобы найти значение скаляра в точке V используется приближение первого порядка

$$(m_{R,c} - m_V) \approx \nabla m_{L,c} \cdot \mathbf{r}_{V \rightarrow R,c} = 2\nabla m_{L,c} \cdot \mathbf{r}_{L,c \rightarrow R,c},$$

отсюда получается, что

$$r_f = \frac{(2\nabla m_{L,c} \cdot \mathbf{r}_{L,c \rightarrow R,c})}{m_{R,c} - m_{L,c}} - 1.$$

В качестве монотонизатора могут быть использованы следующие функции [69]

Minmod: $\varphi(r) = \max(0, \min(1, r))$,

van Leer: $\varphi(r) = \frac{r + |r|}{1 + |r|}$,

Superbee: $\varphi(r) = \max(0, \min(1, 2r), \min(2, r))$,

Barth-Jespersen: $\varphi(r) = 0.5(r + 1) \min \left(\min \left(1, \frac{4r}{r + 1} \right), \min \left(1, \frac{4}{r + 1} \right) \right)$.

1.6. Численные эксперименты

Для тестирования описанных схем вместе с проверкой корректности работы модели в сферической геометрии используется набор аналитических полей скорости и начальных распределений скаляра, представленный в работе [70]. Используются два начальных распределения массы. Каждое состоит из двух фигур, симметричных относительно нулевого меридиана. Такое распределение задается для проверки симметричности работы схем в двух полушариях.

1.6.1. Начальные состояния и форсинги

Первое распределение представляет из себя сумму двух бесконечно гладких Гауссовых функций и задается в географических координатах с помощью уравнения $m(\lambda, \theta) = m_1(\lambda, \theta) + m_2(\lambda, \theta)$, где

$$m_i(\lambda, \theta) = \exp\left(-5 \left[(X - X_i)^2 + (Y - Y_i)^2 + (Z - Z_i)^2\right]\right),$$

$$(X, Y, Z) = (R \cos \theta \cos \lambda, R \cos \theta \sin \lambda, R \sin \theta).$$

В последнем равенстве R - радиус сферы (в тестах используется $R = 6400$ km), а (X_i, Y_i, Z_i) декартовы координаты центров Гауссовых поверхностей. Центр первой соответствует $(\varphi, \theta) = (-\pi/4, 0)$, а второй $(\varphi, \theta) = (\pi/4, 0)$. Это начальное распределение представлено на рисунке 1.8 слева, будем ссылаться на него как GH (Gaussian Hills). На этом и следующих рисунках главы будет использоваться проекция Меркатора для отображения сферы на плоскость. Бесконечно гладкое начальное распределение удобно для проверки сходимости решателя адвекции по шагу сетки. Второе начальное распределение массы, представленное на рисунке

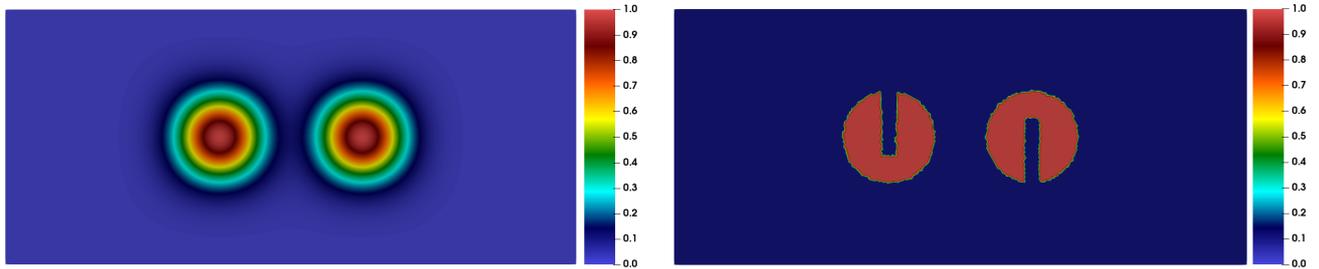


Рисунок 1.8 — Начальные распределения скаляра. Слева - Гауссовы поверхности (GH), справа - обрезанные цилиндры (SC).

1.8 справа, является разрывной функцией и представляет из себя два цилиндра с вырезанными отверстиями, которое задается с помощью

$$m(\lambda, \theta) = \begin{cases} 1, & \text{если } r_i \leq r \text{ и } |\lambda - \lambda_i| \geq r/6 \text{ для } i, j = 1, 2; \\ 1, & \text{если } r_1 \leq r \text{ и } |\lambda - \lambda_1| < r/6 \text{ и } \theta - \theta_1 < -\frac{5}{12}r; \\ 1, & \text{если } r_2 \leq r \text{ и } |\lambda - \lambda_2| < r/6 \text{ и } \theta - \theta_2 > \frac{5}{12}r; \\ 0.1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Здесь

$$r_i(\lambda, \theta) = \arccos[\sin(\theta_1) \sin(\theta) + \cos \theta_1 \cos \theta \cos(\lambda - \lambda_i)]$$

сферическое расстояние между точкой с координатами (λ, θ) и центрами цилиндров (λ_i, θ_i) , которые располагаются в $(\pm\pi/4, 0)$, аналогично Гауссовым поверхностям. Радиус цилиндров $r = 1/2$. Разрывное поле скаляра является хорошим начальным приближением для проверки квазимонотонности и консервативности схемы. Будем ссылаться на это начальное распределение как SC (Slotted Cylinders).

Помимо начального распределения скаляров используются три разных типа реверсивных аналитических полей скорости. Под реверсивностью скорости понимается условие $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{u}(T - t)$, где t - текущее время, а T - полное время счета. В случае бездивергентного поля скорости реверсивность гарантирует, что точное решение в конечный момент времени совпадает с начальным. Представим два бездивергентных и одно дивергентное поле.

Первое, на которое будем ссылаться как ND1 (non-divergent 1) представляет из себя пару вихрей, постепенно разворачивающихся с течением времени. Поле скорости в начальный момент времени представлено на рисунке 1.9 сверху слева и аналитически задается как

$$\begin{aligned} u(\lambda, \theta, t) &= k \sin^2(\lambda) \sin(2\theta) \cos(\pi t/T), \\ v(\lambda, \theta, t) &= k \sin(2\lambda) \cos(\theta) \cos(\pi t/T), \end{aligned}$$

где T полное время, счета, которое задается равным $T = 300$ ч для всех экспериментов, а k - параметр, который задает амплитуду скорости. Во всех экспериментах мы используем $k = 40$ м/с. Недостатком данного распределения скорости является тот факт, что оно полностью реверсивно и может самопроизвольно подавлять ошибку численной схемы.

Чтобы уменьшить эффект этого явления, в качестве второго распределения используется аналогичная скорость с зональным смещением (ND2 представлена на рисунке 1.9 сверху справа), которое аналитически задается с помощью

$$\begin{aligned} u(\lambda, \theta, t) &= k \sin^2(\lambda') \sin(2\theta) \cos(\pi t/T) + 2\pi \cos(\theta)/T; \\ v(\lambda, \theta, t) &= k \sin(2\lambda') \cos(\theta) \cos(\pi t/T), \end{aligned}$$

где λ' - смешенная долгота, которая определяется как $\lambda' = \lambda - \omega t$, где ω - угловая скорость зонального смещения. Чтобы за время интегрирования T точка на сфере сделала полный оборот, необходимо задать $\omega = 2\pi/T$. Использование описанного поля скорости решает проблему самоподавления ошибки за счет реверсивности, поскольку присутствует не реверсивное зональное смещение.

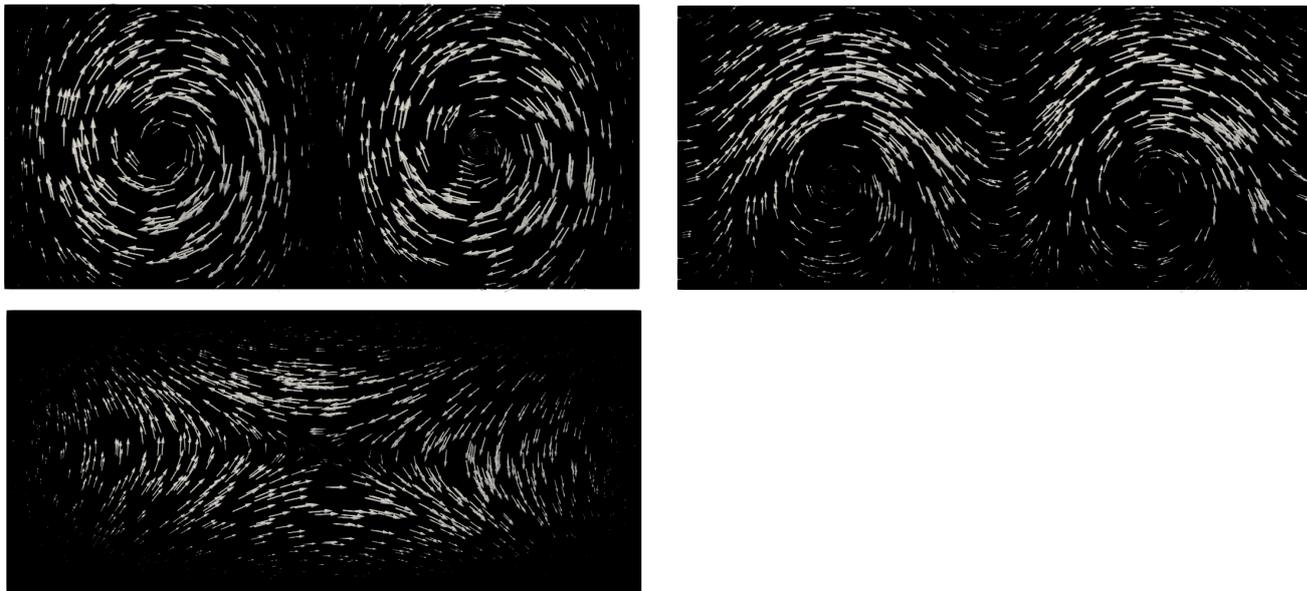


Рисунок 1.9 — Аналитическое поле скорости в начальный момент времени.

Сверху слева - ND1, сверху справа - ND2, снизу - D.

Скорость ND2 в связке с разрывным начальным состоянием SC является основным тестом для проверки монотонности схемы, а также оценки ошибки методов при разных числах Куранта.

Также в работе рассматривается дивергентное поле скорости D (рисунок 1.9 снизу). Стоит отметить, что в отличие от поля скорости несжимаемой жидкости, скорость морского льда существенно дивергентна, поэтому реализованная схема переноса обязана быть квазимонотонной и консервативной в случае дивергентной скорости. Дивергентное реверсивное поле задается как

$$u(\lambda, \theta, t) = -k \sin^2(\lambda/2) \sin(2\theta) \cos^2(\theta) \cos(\pi t/T);$$

$$v(\lambda, \theta, t) = (k/2) \sin(\lambda) \cos^3(\theta) \cos(\pi t/T).$$

Во всех экспериментах задается время интегрирования $T = 300$ ч. Если не оговорено отдельно, используется псевдо регулярная триангуляция сферы радиуса Земли с размером треугольника $\Delta x \approx 200$ км, построенная с помощью пакета Ani3D [71], что соответствует примерно следующему количеству степеней свободы для вершин, ребер и треугольников: $(N_V, N_T, N_E) = (10000, 20000, 30000)$. Шаг по времени Δt выбирается таким образом, чтобы удовлетворить максимальной, заданной наперед оценке для числа Куранта C : $\frac{|\mathbf{u}|\Delta t}{\Delta x} \leq C$. Для оценки ошибки численного решения в конечный момент времени используется относи-

тельная интегральная l_2 - норма ошибки, которая считается согласно

$$l_2(m) = \left[\frac{I[(m - m_i)^2]}{I[m_i^2]} \right]^{1/2},$$

где $I[.]$ - интеграл по всей сфере от скалярной функции, m_i - начальная (точная) функция массы.

1.6.2. Результаты тестовых расчетов

1.6.2.1. Сходимость схем по шагу сетки

Первый тест использует начальное распределение ГН с полем скорости ND1. Основной целью данного эксперимента является проверка порядка сходимости различных схем переноса по шагу сетки. На рисунке 1.10 представлены предсказанные распределения скаляра на А-сетке в срединный и конечный моменты времени для схемы Тейлора-Галеркина 2 порядка TG2 и четвертого порядка с коррекцией потоков TTG4+FCT. Качественно результаты не различимы, причем в обоих случаях решение остается монотонным. Отсюда можно сделать вывод, что реализованные схемы высокого порядка по пространству без фильтров/монотонизаторов обладают монотонностью при переносе бесконечно гладкого начального профиля. Проводя аналогичный тест при увеличении разрешения до 100 и 50 км, получается график сходимости схем на А-сетке, представленный на рисунке 1.11 слева и на CD-сетке - справа.

На практике получается сходимость порядка $h^{1.8}$ для схем типа Тейлора-Галеркина на А-сетке. Для схем на сетке типа CD сходимость схемы первого порядка по пространству FOU равна $h^{0.7}$, а схем второго порядка по пространству MUSCL и MUST соответственно $h^{1.34}$ и $h^{1.43}$. Отличие полученного практически порядка сходимости от теоретического порядка аппроксимации объясняется использованием фильтров/монотонизаторов, а также ошибкой округления компьютерной реализации. Как будет показано далее, в данном численном эксперименте точность определяется по большей части порядком аппроксимации по пространству, нежели порядком по времени. Поэтому графики сходимости строились при увеличении пространственного разрешения при фиксированном шаге по времени.

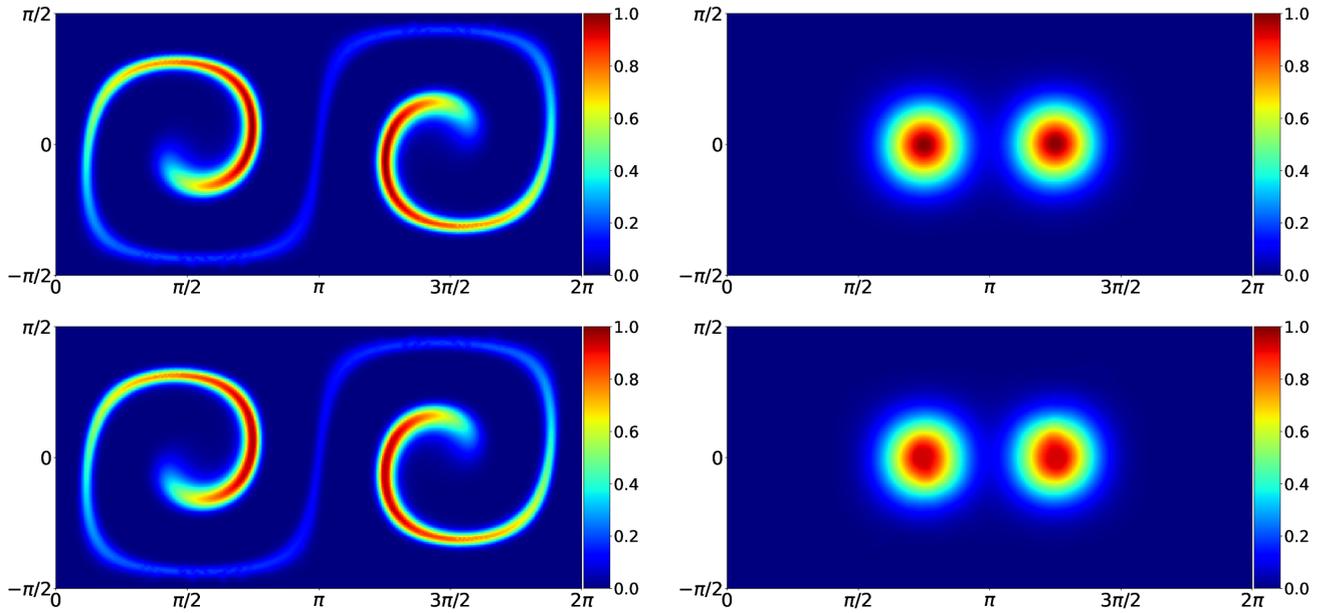


Рисунок 1.10 — Распределение скаляра на А-сетке, Тест 1: GH+ND1. Сверху слева - схема TG2 при $t = T/2$, сверху справа - схема TG2 при $t = T$, снизу слева - схема TTG4+FCT при $t = T/2$, снизу справа - схема TTG4+FCT при $t = T$.

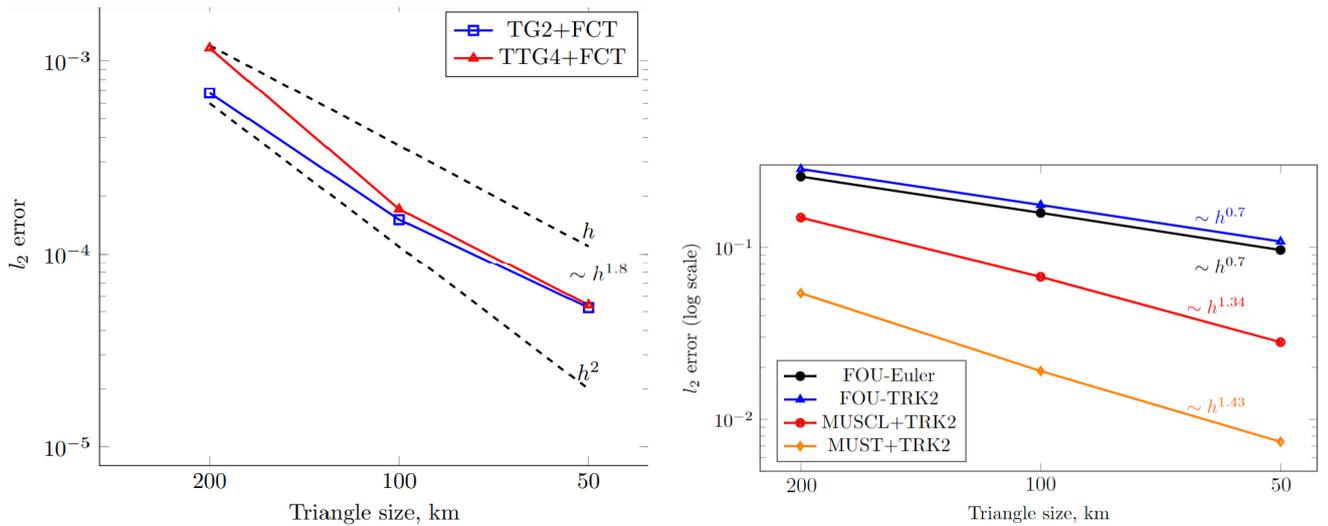


Рисунок 1.11 — Сходимость схем переноса при уменьшении размера треугольника: зависимость интегральной ошибки от шага сетки, представленная в логарифмическом масштабе. Слева - схемы на А-сетке, справа - схемы на CD-сетке.

1.6.2.2. Перенос разрывного поля скаляра бездивергентным потоком

Второй тест реализует разрывное начальное распределение SC, приводимое в движение бездивергентными реверсивными потоками ND1 и ND2.

Сравним получаемые скалярные поля в эксперименте SC+ND1 при использовании схем на A-сетке без коррекции потоков и с применением этой технологии. На рисунке 1.12 показаны массы, полученные по схемам TG2 и TTG4+FCT. Отчетливо видно, что схема без коррекции потоков TG2 теряет свойство монотонности на разрывном профиле, что отражается в наличии осцилляций и отрицательных значений скаляра. Применение коррекции потоков на примере схемы TTG4+FCT решает эту проблему. Сравним также работу схем в случае применения безди-

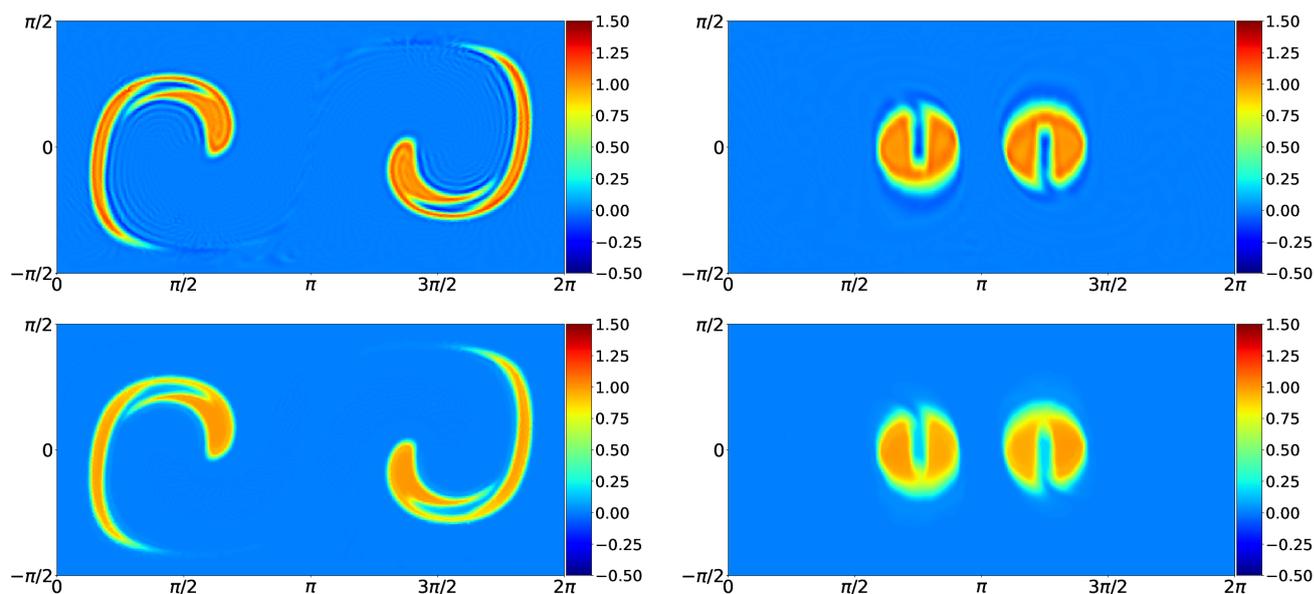


Рисунок 1.12 — Распределение скаляра на A-сетке, Тест 2: SC+ND1. Сверху слева - схема TG2 при $t = T/2$, сверху справа - схема TG2 при $t = T$, снизу слева - схема TTG4+FCT при $t = T/2$, снизу справа - схема TTG4+FCT при $t = T$.

вергентного поля скорости с зональным смещением SC+ND2. На рисунке 1.13 представлена работа схем на CD-сетке. По результатам видно, что схема MUST с монотонизатором `minmod` дает лучший результат, что согласуется с графиком сходимости 1.11, поскольку она дает наименьшую интегральную ошибку. На рисунке 1.14 показан результат данного теста на сетке типа A. Аналогично тесту SC+ND1 схема без коррекции потоков подвержена немонотонности.

Несмотря на то, что точность работы схемы определяется в первую очередь порядком аппроксимации по пространству, исследуем ошибку для различных схем интегрирования по времени на сетке типа A. График зависимости ошибки от числа Куранта для схем семейства Тейлора-Галеркина с коррекцией потоков приведен на рисунке 1.15 слева. Из него видно, что схемы TG2, TTG3 и TTG4 дают примерно одинаковую ошибку по всему диапазону устойчивости. При высоком числе Куранта (0.7 и больше) схема 4 порядка оказывается немного точнее

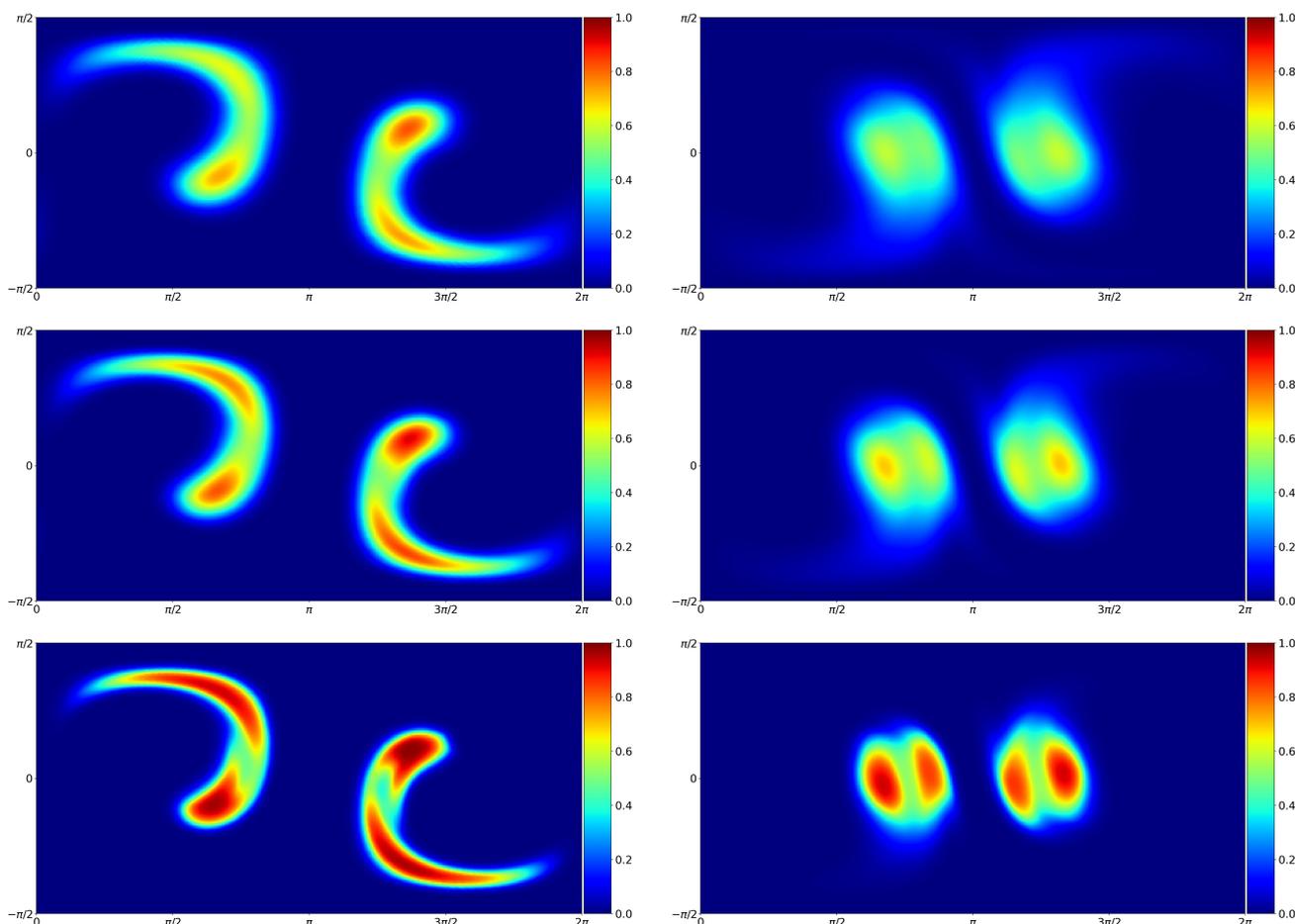


Рисунок 1.13 — Распределение скаляра на CD-сетке, Тест 2: SC+ND2. Первый столбец при $t = T/2$, второй при $t = T$. Первая строка - схема FOU. Вторая строка схема MUSCL+minmod. Третья строка схема MUST+minmod.

конкурентов. При этом TTG2 немного уступает остальным во все диапазоне. Из графика также видно, что схемы переноса на A сетке работают устойчиво при любых числах Куранта меньших 1, при этом двухшаговые схемы устойчивы даже при числе Куранта 1.1, что можно объяснить дополнительной диффузией, вносимой технологией коррекции потоков.

На графике 1.15 справа показана зависимость ошибки в диапазоне устойчивости для схем переноса на CD-сетке. Видна слабая чувствительность точности данных схем к числу Куранта на фоне значительной разницы в точности в зависимости от порядка пространственной аппроксимации. Также из графика видно, что все схемы переноса на CD сетке обладают устойчивостью вплоть до числа Куранта 0.5, что несколько меньше по сравнению со схемами на A-сетке. Данное поведение можно объяснить разрывной природой пространственной аппроксимации на сетке типа CD.

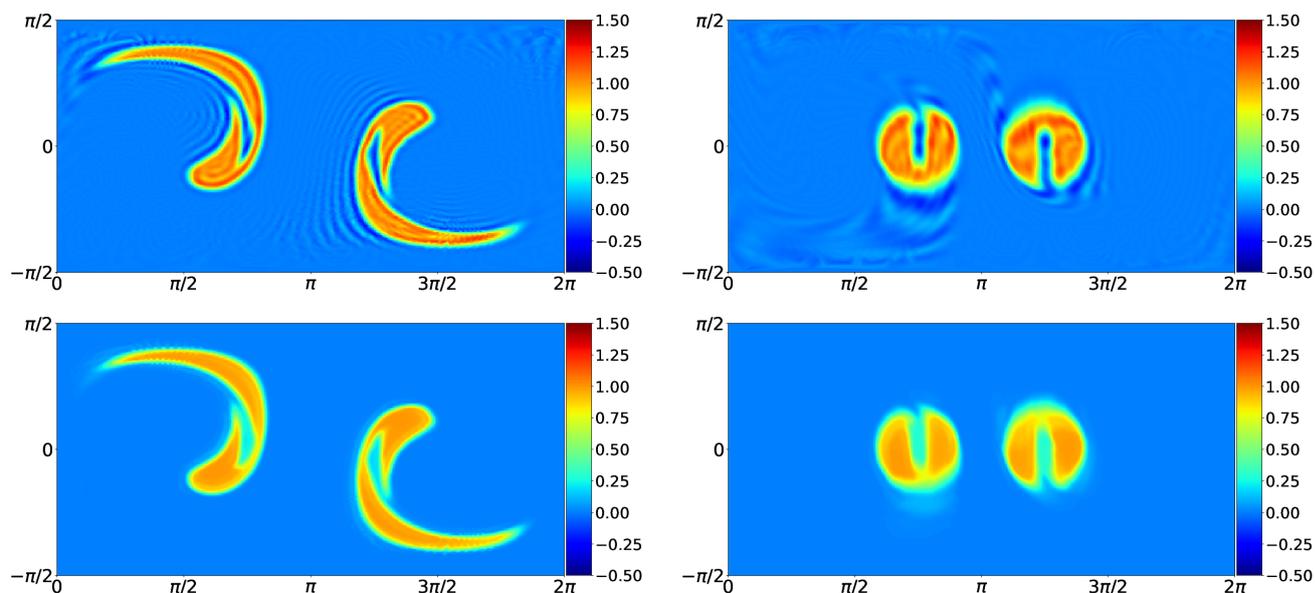


Рисунок 1.14 — Распределение скаляра на А-сетке, Тест 2: SC+ND2. Первый столбец при $t = T/2$, второй при $t = T$. Первая строка - схема TG2. Вторая строка - схема TTG4+FCT.

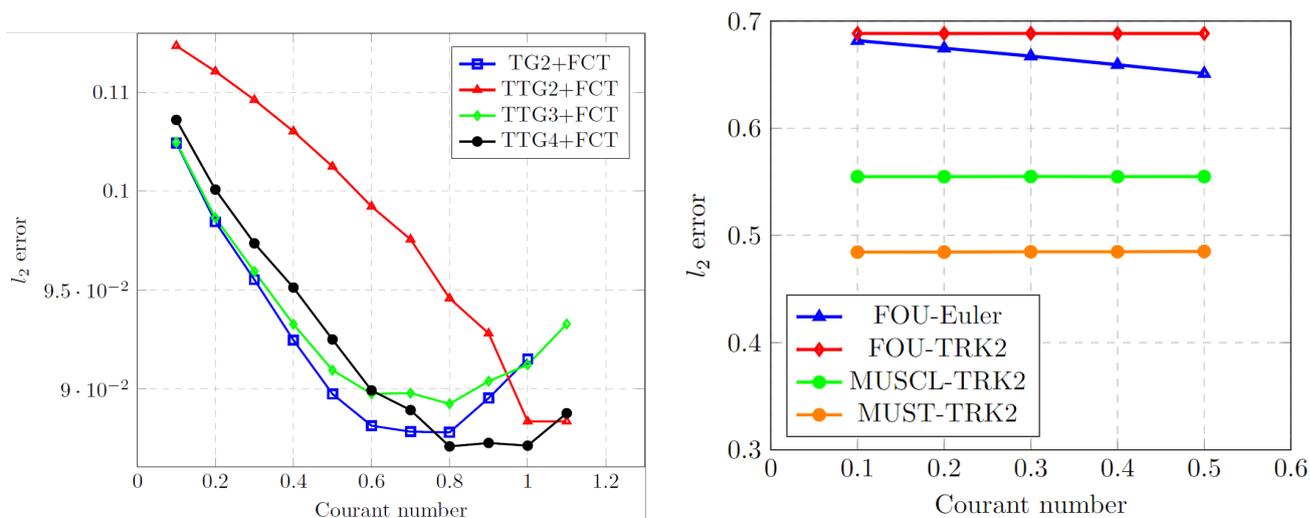


Рисунок 1.15 — Зависимость l_2 ошибки от числа Куранта для различных схем. Слева на сетке типа А. Справа на сетке типа CD.

1.6.2.3. Перенос разрывного поля скаляра дивергентным потоком

В последнем тесте SC+D, реализующем дивергентное поле скорости, исследуем схемы на монотонность и глобальную консервативность. На рисунке 1.16 представлено распределение скаляра для схем на А-сетке. Видно, что схема TG2 без коррекции потоков предсказывает отрицательные значения массы, что не де-

лает схема TTG4 с примененной коррекцией потоков. Также для всего семейства схем Тейлора-Галеркина была проверена глобальная консервативность, которая выполняется с точностью до машинного нуля (не показано). Глобальная консервативность обеспечивается на численном уровне построением решения методом коррекции потоков.

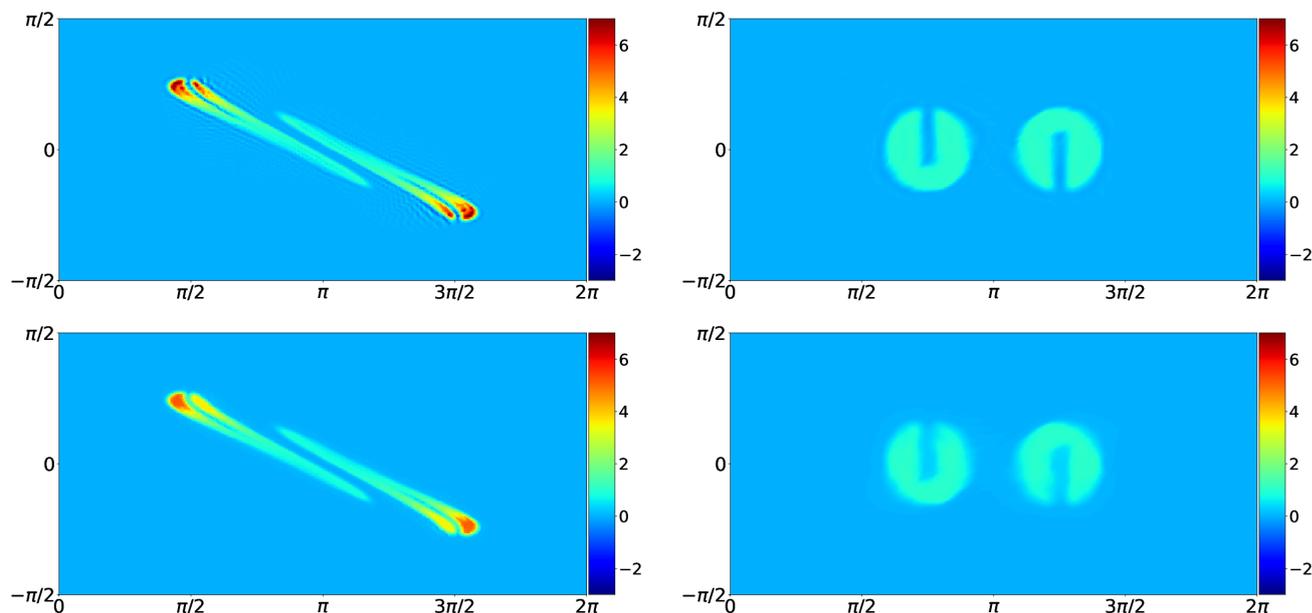


Рисунок 1.16 — Распределение скаляра на А-сетке, Тест 3: SC+D. Первый столбец при $t = T/2$, второй при $t = T$. Первая строка - схема TG2. Вторая строка - схема TTG4+FCT.

На изображении 1.17 представлено распределение скаляров для схем на CD-сетке. Поскольку все пространственные дискретизации основаны на конечно-объемном методе против потока, глобальная консервативность получается по построению схемы. Также с точностью до машинного нуля свойство глобальной консервативности выполнено на численном уровне (не показано). По форме профиля в конечный момент времени можно заключить, что схема второго порядка MUST предсказывает значительно менее размытое решение, по сравнению со схемой первого порядка FOU. Использование схемы MUST значительно повышает точность решателя адвекции и ее применение в динамическом блоке вполне оправдано.

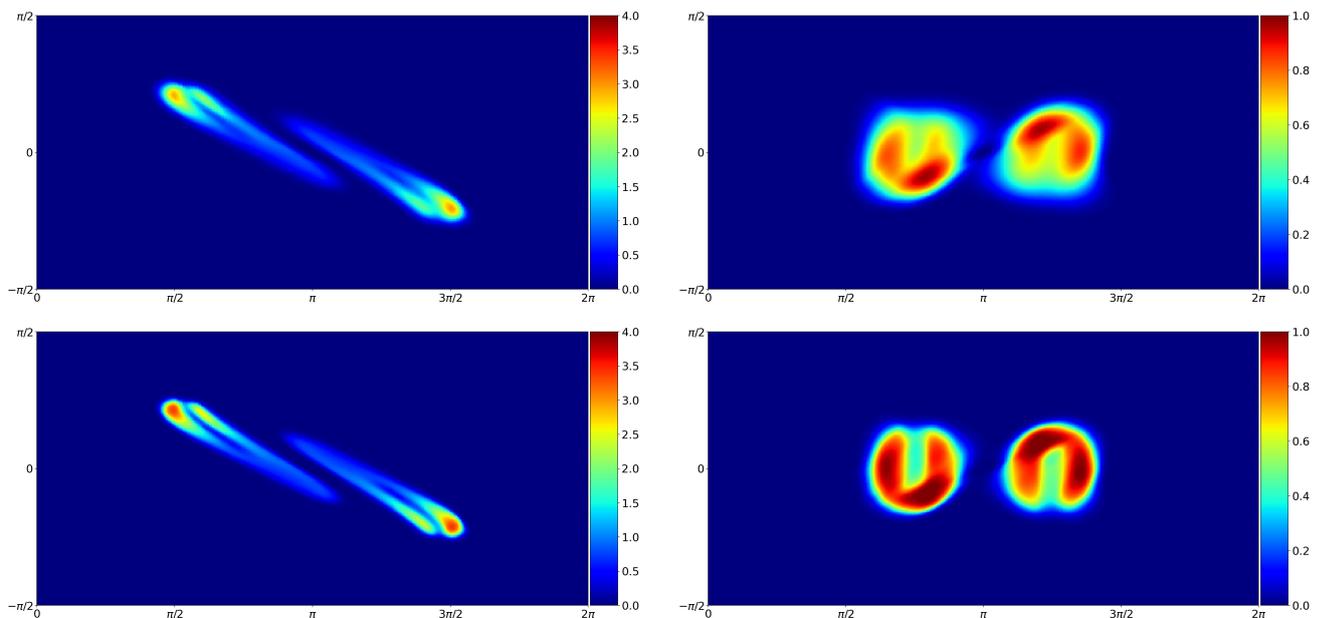


Рисунок 1.17 — Распределение скаляра на А-сетке, Тест 3: SC+D. Первый столбец при $t = T/2$, второй при $t = T$. Первая строка - схема FOU+Euler. Вторая строка - схема MUST+minmod+TRK2.

1.6.3. Профилировка и масштабируемость кода

В данном разделе сравнивается скорость последовательного исполнения программ, реализующих описанные ранее схемы переноса. Используется тестовый расчет SC+ND2 на сетке с размером треугольника 200 км, время берется средним для всех итераций. Обратим внимание, что абсолютное время исполнения программы может зависеть от версии компилятора, оптимизационных флагов процессора и загруженности счетной машины, поэтому имеет смысл интерпретировать приведенные данные только для сравнения времени различных схем между собой. В таблице 2 приведена профилировка одного временного шага схем на сетке типа А. Видно, что доминирующей по времени процедурой является сборка правой части, время решения возникающих СЛАУ (методом сопряженных градиентом с ILU предобуславливателем) пренебрежимо мало по сравнению с сборкой правой части и коррекцией потоков. Заметим, что схема TTG2+FCT работает значительно быстрее остальных за счет простоты сборки правой части, которое содержит только слагаемое первого порядка по времени (1.5), что хорошо согласуется с теоретической оценкой на число арифметических операций, приведенной в разделе 1.4.2. Несмотря на то, что схема TTG2+FCT обладает несколько

меньшей точностью по сравнению TG2+FCT (см. рисунок 1.15), ее использование может ускорить блок переноса скаляров примерно в 2 раза за счет меньшей вычислительной сложности алгоритма.

Таблица 2 — Время последовательной работы одного временного шага различных решателей уравнения переноса на A-сетке.

-	TG2+FCT	TTG2+FCT	TTG3+FCT	TTG4+FCT
сборка правой части (мс)	425	260	785	789
решение СЛАУ (мс)	6	11	11	11
коррекция потоков (мс)	95	93	94	93
суммарное время (мс)	526	364	890	893

В таблице 3 приведено время работы различных схем адвекции на CD-сетке. Доминирующей по времени процедурой является сборка суммы потоков на каждом треугольнике (1.25), а время пересчета скаляров на каждом треугольнике с помощью схем типа Рунге-Кутты (1.26) пренебрежимо мало. Как было показано ранее, использование схемы типа MUST вместо стандартной FOU дает значительный выигрыш в точности за счет повышения порядка пространственной аппроксимации, однако суммарное время одного шага становится больше примерно в 3 раза, поэтому использование MUST вместо FOU рекомендуется только в тех расчетах где высокая точность схемы адвекции действительно оправдана. Схемы типа MUSCL проигрывают MUST как в точности, так и во времени счета, поэтому рекомендуется использовать именно MUST.

Таблица 3 — Время последовательной работы одного временного шага различных решателей уравнения переноса на CD-сетке.

-	FOU+Euler	FOU+TRK2	MUSCL+TRK2	MUST+TRK2
сборка потоков (мс)	66	131	585	245
пересчет скаляров (мс)	4	8	8	8
суммарное время (мс)	70	135	593	253

В конце продемонстрируем масштабируемость параллельной реализации алгоритмов описанных схем переноса. На рисунке 1.18 показано ускорение времени работы программы по отношению к исполнению на одном ядре в диапазоне от 2 до 256 ядер. Для этого графика была использована самая подробная сетка с размером треугольника 50 км ($N_V, N_E, N_T = 130000, 260000, 390000$), чтобы минимизировать относительное число обменов. Можно заметить, что ускорение

близко к линейному для всех описанных схем в заданном диапазоне, что является следствием грамотной программной реализации кода.

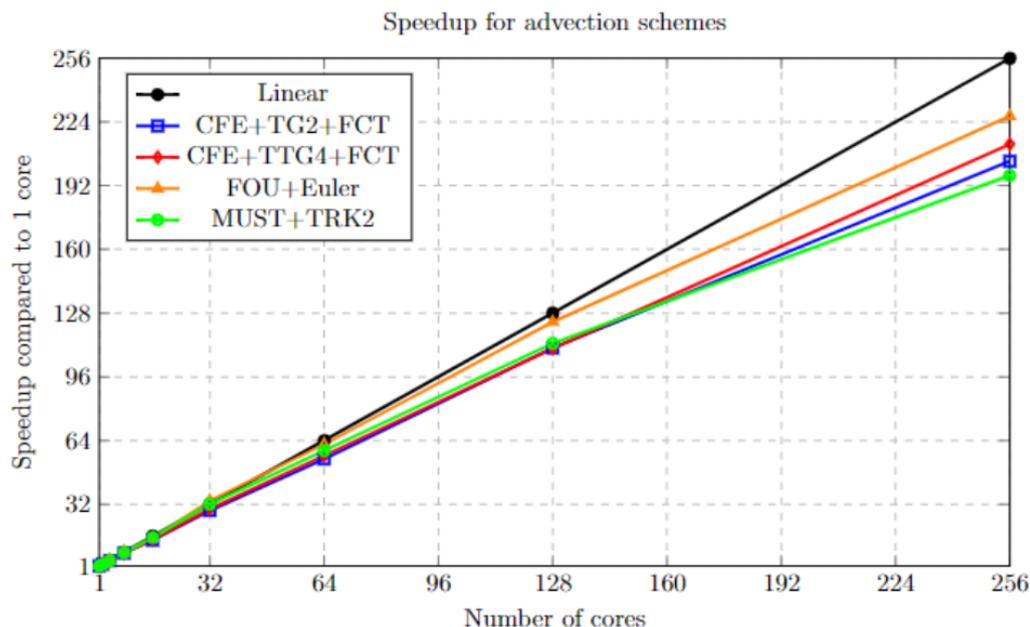


Рисунок 1.18 — Ускорение работы параллельного кода схем адвекции.

1.7. Основные результаты главы

В данной главе было приведено описание конечно-элементных схем переноса на треугольных сетках типа A и CD. Получена теоретическая оценка сложности сборки правой части схем типа Тейлора-Галеркина, которая была подтверждена на тестовом расчете. Впервые предложено использовать схемы Тейлора-Галеркина высокого порядка временной аппроксимации в задаче моделирования динамики морского льда. Проведен подробный анализ ошибки схем, который показал, что схемы высокого порядка по времени могут улучшить качество численного решения при числах Куранта, больших 0.7. Предложена двухшаговая вариация стандартной схемы Тейлора-Галеркина второго порядка, которая в 2 раза увеличивает скорость работы блока переноса. Схемы переноса на сетке типа A были проверены на выполнение условия квазимонотонности и консервативности, которые успешно выполняются при использовании технологии коррекции потоков. Также был предложен алгоритм реализации описанных

схем, при решении уравнения переноса в локально-декартовом базисе, который подразумевает перевод компонент вектора в треугольный базис при сборке локального вектора правой части на треугольнике.

Было показано, что метод Галеркина для конечно-элементной пространственной аппроксимации уравнения переноса на CD-сетке приводит к стандартной формулировке задачи методом конечных объемов. Для повышения порядка пространственной аппроксимации предложено использовать схемы типа MUST и MUSCL как альтернативу стандартному методу против потока первого порядка. Тестовые расчеты показали, что описанные схемы удовлетворяют условию квазимонотонности и консервативности при использовании монотонизирующей функции. Наименьшую ошибку на практике продемонстрировала схема MUST, которая может быть использована для повышения точности блока адвекции в моделях динамики морского льда на треугольных CD-сетках.

Глава 2. Численное решение системы уравнений динамики морского льда

В главе обсуждается вопрос о численном решении уравнения баланса импульса морского льда с вязко-пластичной реологией на неструктурированной треугольной сетке двух типов: A и CD, которые были введены в первой главе диссертации. Как и в случае разработки решателей уравнения переноса скаляров, код адаптирован для использования локально-декартового подхода вместо стандартной сферической метрики. Данный подход позволяет запускать модель на произвольной двумерной поверхности с незначительными изменениями в коде.

Морской лед и лежащий на нем снег является важной составляющей климатической системы полярных регионов, которая ответственна за радиационный баланс и за турбулентные потоки тепла и влаги между океаном и атмосферой. Дрейф морского льда также приводит к перераспределению соли и пресной воды в океане. За последние два десятилетия был достигнут существенный прогресс в моделировании морского льда, обеспечивающем прогнозы для широкого спектра временных и пространственных масштабов. В настоящее время сформировался "золотой стандарт" формулировки крупномасштабных динамико-термодинамических моделей морского льда для моделирования климата, отличающийся главным образом численными схемами и реализацией. Наиболее широко используемые в моделировании климата коды морского льда, такие как CICE [72], используют конечно-объемные прямоугольные сетки типа C. Конечно-элементные модели типа FESOM [30] также демонстрируют впечатляющую производительность. Если до недавнего времени основное внимание уделялось моделированию толщины и сплоченности морского льда, то в настоящее время важным стало моделирование открытой воды (отводы и полыньи) и торосов. Это связано с тем, что потоки тепла через открытую воду в среднем в 100 раз превышают потоки через толстый ледяной покров. Спутниковые наблюдения [73] показывают, что линейные разломы характеризуется очень длинными и узкими деформациями, называемыми линейными кинематическими особенностями (ЛКО). Реалистичное численное моделирование ЛКО представляет собой сложную задачу и основано как на правильной реологии морского льда, так и на точных численных методах. Вязко-пластическая реология Хиблера [17] и ее модификации продолжают оставаться актуальными в настоящее время для крупномасштабного моделирования с учетом качества измерений дрейфа

льда и возникающих в нем сил между отдельными льдинами. Являясь результатом нелинейного характера реологии, ЛКО появляются при численном решении в наиболее широко используемых моделях, таких как CICE [72] или MITgcm [74] на С-сетках с пространственным разрешением 10-15 км и выше. Недавние исследования показывают, что пространственная дискретизация скоростей дрейфа также играет важную роль в воспроизведении количества ЛКО — использование специальных методов конечных элементов на сетке типа CD приводит к удвоению ЛКО при одинаковом разрешении [21]. Такое сверхвысокое разрешение очень привлекательно, так как позволяет использовать довольно крупную сетку для достижения сравнимого качества воспроизведения особенностей. В более общей постановке задачи с многокатегорийным (многослойным) льдом и снегом с эволюцией солёности и биохимии, когда необходимо решать большое количество (до 100) уравнений переноса, такой подход может быть предпочтительнее.

Причина, по которой было принято решение разработать две версии модели кроется в двух пунктах. Во-первых, как будет показано далее, численное решение, полученное на сетке типа CD обладает значительно более высокой разрешающей способностью линейных кинематических особенностей (ЛКО) по сравнению с решением на А-сетке при запуске на одной и той же треугольной сетке. Это связано с большим количеством степеней свободы для скаляров и скоростей. В связи с этим, модель на CD-сетке вычислительно более затратна, однако, как показывает профилировка кода, А-версия модели, настроенная на такое же количество степеней свободы для скоростей еще более вычислительно затратна, поэтому использование CD-версии вполне оправданно. Вторая причина кроется в более широких возможностях для бесшовного каплинга модели льда с моделью океана, которая работает на аналогичном типе сеток.

Основные отличительные черты представленной модели – новая формулировка локально-элементного базиса, широкий выбор схем адвекции, а также новая численная реализация в последовательном и параллельном виде на языке программирования C++. Для хранения сеточных данных и организации MPI-обменов используется отечественный пакет INMOST [75]. Для построения неструктурированных триангуляций расчетных областей также применены отечественные пакеты Ani2D и Ani3D [71]. Код разработанной модели находится в открытом доступе и может быть получен по ссылке [76].

Основные результаты данной главы были опубликованы в работах [46], [52], [51]. Глава состоит из 8 разделов. В первом разделе вводятся основные

прогностические переменные и формулируется полная система уравнений динамики морского льда. Во втором и третьем разделе обсуждается вопрос выбора подходящей реологии льда, который на сегодняшний день делается в пользу вязко-пластичной реологии Хиблера. Четвертый раздел посвящен описанию дискретизаций по времени уравнения баланса импульса. В пятом и шестом разделе представлены пространственные дискретизации для A и CD сеток соответственно. В седьмом разделе приводятся результаты численных экспериментов, описывается простейшая прогностическая система дрейфа льда в Арктическом регионе, построенная на основе разработанной A-версии модели, а также демонстрируется профилировка и масштабируемость кода. Восьмой раздел посвящен основным результатам текущей главы.

2.1. Модельные уравнения

Основными прогностическими переменными в задаче непрерывного однослойного моделирования динамики морского льда являются: сплоченность морского льда a (-), средняя толщина h (м), а также двумерный вектор скорости \mathbf{u} ($\text{м} \cdot \text{с}^{-1}$). Сплоченность a определяется как отношение площади контрольного двумерного объема A , покрытого льдом к общей площади рассматриваемого объема:

$$a = \frac{1}{|A|} \int_A I(x, y) dS, \text{ где } I(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если точка } (x, y) \text{ покрыта льдом,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

При этом контрольный объем A должен быть достаточно большим, чтобы в нем содержалось несколько льдин (5-10 штук), что задает критерий применимости гипотезы непрерывности. Учитывая, что средний размер льдины в Арктике составляет 300 метров [77], предполагается, что размер расчетной ячейки не должен быть меньше 1 км. Для моделирования льда на более мелких масштабах используются уже дискретные модели для отдельных льдин. В оригинальной работе Хиблера [17] размер квадратной вычислительной ячейки составлял 100 км.

Средняя толщина морского льда задается как суммарный объем льда в ячейке A , деленный на всю площадь поверхности ячейки $|A|$. Введенная таким образом толщина задает связь средней по площади массы льда m ($\text{кг} \cdot \text{м}^{-2}$) с толщиной h с помощью $m = \rho_i \cdot h$, где $\rho_i = 900 \text{кг} \cdot \text{м}^{-3}$ - среднее значение плотности

морского льда. Учитывая, что морской лед обладает ненулевой соленостью, значение используемой плотности может быть скорректировано.

Запишем закон баланса импульса для произвольного контрольного объема, который выражается вторым законом Ньютона

$$\rho_i h D\mathbf{u}/Dt = \mathbf{F}_{\text{int}} + \mathbf{F}_{\text{ext}}, \quad (2.1)$$

где $D/Dt = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ - материальная производная по времени, а $\mathbf{F}_{\text{int}}/\mathbf{F}_{\text{ext}}$ - вектор внутренних/внешних сил. В задаче моделирования морского льда обычно пренебрегают адвективной частью материальной производной $\mathbf{u} \cdot \nabla$ в связи с малостью скорости льда. Вектор внутренних сил \mathbf{F}_{int} представляет из себя дивергенцию тензора внутренних напряжений $\boldsymbol{\sigma}$. Таким образом, уравнение баланса импульса переписывается в виде

$$\rho_i h \partial_t \mathbf{u} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F}_{\text{ext}}. \quad (2.2)$$

Вид слагаемого, отвечающего за вектор внутренних сил будет подробно обсуждаться в следующем разделе. Вектор внешних сил традиционно состоит из четырех частей: касательное трение океана, касательное трение погранслоя атмосферы, сила Кориолиса, а также горизонтальная сила, возникающая за счет неоднородности уровня океана

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \boldsymbol{\tau} - \rho_i h f \mathbf{k} \times \mathbf{u} - \rho_w h g \nabla H, \quad (2.3)$$

где $\boldsymbol{\tau}$ - вектор силы трения, f - параметр Кориолиса, \mathbf{k} - единичный вектор нормали к поверхности, ρ_w - плотность воды, g - ускорение свободного падения, H - уровень океана. В модели используется стандартная параметризация для сил трения с помощью "bulk"-формул

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_a + \boldsymbol{\tau}_w = a \rho_a C_a \|\mathbf{u}_a\| \mathbf{u}_a - a \rho_w C_w \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_w\| (\mathbf{u} - \mathbf{u}_w), \quad (2.4)$$

где $\rho_{a(w)}$ - плотность воздуха (воды), $C_{a(w)}$ - безразмерный коэффициент трения льда о воздух (воду), $\mathbf{u}_{a(w)}$ - двумерная горизонтальная скорость в погранслое атмосферы (океана), $\|\cdot\|$ - евклидова норма двумерного вектора. Для параметризации горизонтальной силы градиента уровня океана в случае отсутствия данных по уровню, распространенной практикой является использование геострофического приближения $g \nabla H \approx -f \mathbf{k} \times \mathbf{u}_w$, которое получается балансировкой силы градиента уровня и силы Кориолиса для объема жидкости.

Уравнение импульса дополняется двумя законами сохранения. Закон сохранения массы в случае отсутствия источников выражается уравнением переноса средней толщины

$$\partial_t h + \nabla \cdot (h\mathbf{u}) = 0. \quad (2.5)$$

Также в систему добавляется уравнение переноса сплоченности a с ограничением $a \leq 1.0$

$$\partial_t a + \nabla \cdot (a\mathbf{u}) = 0, \quad a \leq 1. \quad (2.6)$$

Непосредственно в коде модели после каждого шага по времени задается сплоченность равная 1 в тех элементах, где она превысила это значение, и дальнейший приток массы в этот элемент отражается только в повышении толщины. Вопрос численного решения уравнения переноса подробно обсуждался в первой главе диссертации.

2.2. Реологии морского льда

Как уже отмечалось ранее, внутренняя сила представляет из себя дивергенцию тензора напряжений морского льда (2.2). Связь между компонентами симметричного тензора напряжений

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

и компонентами симметричного тензора скоростей деформации $\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = 0.5(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)$ задается с помощью реологии морского льда. Общая модель вязкости представлена моделью жидкости Райнера-Ривлина [77]

$$\boldsymbol{\sigma} = \alpha\mathbf{I} + \beta\dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \gamma\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^2, \quad (2.8)$$

где коэффициенты α , β и γ могут зависеть от переменных состояния среды и инвариантов тензора скоростей деформации. Обычно в реологиях морского льда последнее слагаемое в (2.8) не учитывается.

Линейно-вязкие модели не очень репрезентативны для дрейфующего льда. Однако в истории динамики морского льда они были первым классом прикладных

реологий и использовались в 1960-х годах. Первой реологией дрейфующего льда была модель Ньютоновской жидкости Лайхтмана [78]

$$\sigma = 2\eta\dot{\epsilon}, \quad (2.9)$$

где η - сдвиговая вязкость. Ньютоновские жидкости линейны, обладают свойством вязкости и несжимаемости. Тем не менее, линейные вязкие модели могут давать вполне реалистичные приближения первого порядка для циркуляции льда, хотя они слишком грубы для количественного анализа скорости льда и моделирования.

В 1970-х годах начались исследования механики дрейфующего льда с использованием пластических реологий [16], [79], [14], которые и по сей день остаются наиболее предпочтительным выбором для моделирования. Формулировка пластичного течения льда была получена в ходе эксперимента AIDJEX [14] (Arctic Ice Dynamics Joint Experiment - совместный эксперимент по динамике арктического льда). В значительной степени результат был вдохновлен теорией и моделями механики грунта и гранулированных сред. В основном две характеристики механического поведения сплоченного ледяного покрова способствуют пластичности:

- Напряжения в дрейфующем льду слабо зависят от скорости деформации;
- Существует конечный предел деформации дрейфующего льда.

Считается, что пластические реологии лучше всего отражают физическое поведение сплоченного дрейфующего льда. Существование конечного предела текучести ясно из наблюдений, что подтверждается экспериментально в закрытых и полузакрытых бассейнах с морским льдом: сплоченный лед неподвижен до тех пор, пока воздействие не превысит определенный минимальный уровень - предел текучести. То, что напряжения не зависят от скорости деформации - менее очевидно. Но это свойство было проверено при моделировании процесса торошения льда под давлением. Для существования узких зон деформации необходима значительно сублинейная реология, что было обнаружено Хиблером в 1974 году [14] при исследовании сдвиговых деформаций в море Бофорта. Именно в 1970-х годах была построена физически обоснованная математическая теория для моделей пластичных дрейфующих льдов [17], что является значительным достижением программы AIDJEX.

Также стоит отметить, что в последнее десятилетие развивается моделирование с использованием альтернативной упруго-хрупкой реологии Максвелла

[40], на основе которой построена полностью Лагранжева конечно-элементная модель peXtSIM [41], однако подробное рассмотрение данной реологии остается за пределами диссертации. В разработанной модели используется вязко-пластичная реология Хиблера.

2.3. Вязко-пластичная реология Хиблера

Вязко-пластичная реология Хиблера [17] задает следующую связь между компонентами тензора напряжений и скоростей деформации

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta\dot{\boldsymbol{\epsilon}} + (\xi - \eta)\text{tr}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}})\mathbf{I} - 0.5P\mathbf{I}, \quad (2.10)$$

где ξ, η — объемная и сдвиговая вязкости, P — прочность льда, \mathbf{I} — двумерный единичный тензор. Согласно Хиблеру, прочность (давление) льда параметризуется как $P = p^*h \exp(-C(1 - a))$ с эмпирической константой p^* ($\text{Н} \cdot \text{м}^{-2}$) и коэффициентом C . Коэффициент C подобран таким образом, чтобы прочность льда P становилась пренебрежимо малой в случае разреженного льда ($a < 0.8$). При этом объемная и сдвиговая вязкости зависят от прочности льда P и полной деформации Δ следующим образом

$$\xi = \frac{P}{2\Delta}, \quad \eta = \frac{\xi}{e^2}, \quad \Delta = \left(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_d^2 + \frac{1}{e^2} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_s^2 \right)^{1/2}. \quad (2.11)$$

Здесь $e = 2$ - эксцентриситет эллиптической кривой текучести, $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_d = \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) = \dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22}$ - дивергентная часть тензора скоростей деформации, $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_s = ((\dot{\epsilon}_{11} - \dot{\epsilon}_{22})^2 + 4\dot{\epsilon}_{12}^2)^{1/2}$ - сдвиговая часть тензора скоростей деформации. Чтобы избежать сингулярности в знаменателе (2.11) $\xi, \eta \rightarrow \infty$ при $\Delta \rightarrow 0$, пластический режим ограничивается вязким. Это достигается введением нижнего предела полной деформации

$$\Delta = \left(\Delta_{\min}^2 + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_d^2 + \frac{1}{e^2} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_s^2 \right)^{1/2}, \quad \Delta_{\min} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ с}^{-1}. \quad (2.12)$$

В современных моделях наиболее распространена эллиптическая вязко-пластичная реология Хиблера, однако существуют аналогичные вязко-пластичные реологии с другим видом кривой текучести. На рисунке 2.1 изображены различные кривые текучести в главных осях $\sigma_1/P, \sigma_2/P$, где σ_1, σ_2

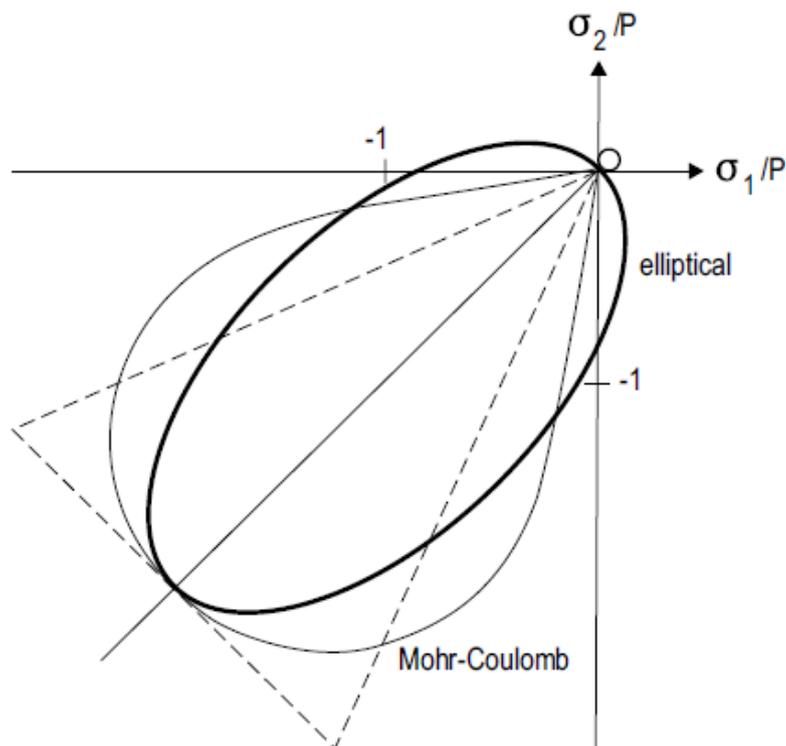


Рисунок 2.1 — Различные кривые текучести. Жирная линия - эллиптическая реология Хиблера [17], обычная линия - реология типа "слеза" Ротрока [80], пунктирная линия - реология типа "клин" Мора-Кулона [81]. Изображение взято из книги [77].

собственные значения симметричного тензора напряжений 2.7. Точки, находящиеся на границе кривой текучести соответствуют пластичному течению, а точки внутри соответствуют линейной вязкости с давлением. Все физические параметры и константы, используемые в модели, собраны в таблице 4.

2.4. Дискретизация по времени уравнения баланса импульса

В этом разделе рассматривается набор дискретизаций по времени уравнения (2.2). Как отмечается в работе [82], попытки явной дискретизации по времени системы (2.2) даже на грубой сетке размера 100 км сталкиваются с жесткими условиями на устойчивость. Допустимый шаг ограничен значением порядка секунды,

Таблица 4 — Физические параметры и константы, используемые в модели.

Символ	Имя переменной или константы	Значение	Размерность
C_a	коэффициент трения "лед-воздух"	$1.2 \cdot 10^{-3}$	
C_w	коэффициент трения "лед-вода"	$5.5 \cdot 10^{-3}$	
ρ_a	плотность воздуха	1.3	$\text{кг} \cdot \text{м}^{-3}$
ρ_w	плотность воды	1026.0	$\text{кг} \cdot \text{м}^{-3}$
ρ_i	плотность льда	900.0	$\text{кг} \cdot \text{м}^{-3}$
Δ_{\min}	нижний предел деформации	$2 \cdot 10^{-9}$	с^{-1}
e	эксцентриситет эллипса	2.0	
C	параметр концентрации в прочности	20.0	
p^*	параметр силы в прочности	$2.75 \cdot 10^4$	$\text{Н} \cdot \text{м}^{-2}$
g	ускорение свободного падения	9.81	$\text{м} \cdot \text{с}^{-1}$

что не представляет возможным использование явных схем для интегрирования модели на прогностических и климатических временных масштабах.

В настоящее время в мировой практике широко распространены три принципиально различных способа дискретизации по времени уравнения баланса импульса: метод Пикара, метод Ньютона с приближением матрицы Якоби и эволюционный подход.

Идея метода Пикара [24],[30] состоит в том, чтобы формально избавиться от тензора напряжений (2.10) подстановкой в уравнение импульса (2.2). При этом делается линеаризация нелинейных коэффициентов объемной и сдвиговой вязкости (2.11) с предыдущей итерации алгоритма. Пишется итерационный метод нахождения скоростей, который требует решения СЛАУ на каждой итерации с размером $2N$, где N - количество степеней свободы для скоростей.

Также в последние два десятилетия активно развивается метод Ньютона для решение системы динамики морского льда [27], [83], [84]. Система (2.2) приводится к виду $J(\mathbf{u}^{k-1})\mathbf{u}^k = -r(\mathbf{u}^{k-1})$ с матрицей Якоби J и вектором правой части r . В связи со сложным аналитическим видом матрицы Якоби, слагаемое вида $J\mathbf{u}$ приближается направленной разностью и применяется метод Крыловского типа для формулировки итерационного процесса.

Несмотря на высокую точность методов высокого порядка типа Пикара и Ньютона, на практике они сталкиваются со значительной сложностью в параллельной реализации. На данный момент наиболее распространенным способом дискретизации по времени остается эволюционный подход типа EVP, впервые

предложенный в работе [32]. Проанализировав доступную литературу, было принято решение сконцентрироваться в первую очередь на разработке эволюционных подходов для решения системы. Далее в этой главе формулируются EVP [32] (Elasto Viscous-Plastic) и mEVP [29] (Modified Elasto Viscous-Plastic) подходы.

2.4.1. EVP метод

Суть EVP подхода заключается в замене стандартной вязко-пластичной реологии Хиблера (2.10) на эволюционную упруго-вязко-пластичную. Введем смещенные компоненты тензора напряжений (2.7)

$$\sigma_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22}, \quad \sigma_2 = \sigma_{11} - \sigma_{22}, \quad (2.13)$$

и смещенные компоненты тензора скоростей деформации $\dot{\epsilon} = 0.5(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$

$$\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22}, \quad \dot{\epsilon}_2 = \dot{\epsilon}_{11} - \dot{\epsilon}_{22}. \quad (2.14)$$

Перепишем компоненты тензора напряжений (2.10) с помощью введенных обозначений

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{P}{\Delta} (\dot{\epsilon}_1 - \Delta), \\ \sigma_2 &= \frac{P}{e^2 \cdot \Delta} \dot{\epsilon}_2, \\ \sigma_{12} &= \frac{P}{e^2 \cdot \Delta} \dot{\epsilon}_{12}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Тогда в принятых обозначениях EVP подход записывается как

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} + \frac{\sigma_1}{2T} + \frac{P}{2T} &= \frac{P}{2T\Delta} \dot{\epsilon}_1, \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial t} + \frac{e^2 \sigma_2}{2T} &= \frac{P}{2T\Delta} \dot{\epsilon}_2, \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial t} + \frac{e^2 \sigma_{12}}{2T} &= \frac{2}{2T\Delta} \dot{\epsilon}_{12}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

В последнем равенстве параметр релаксации T определяет масштаб времени для перехода от упругой к вязко-пластичной реологии. Для глобального модельного шага по времени Δt в оригинальной статье [32] предлагается использовать

значение $T = \Delta t/3$. Из записи EVP-метода (2.16) видно, что в случае стационарного решения $\partial_t \sigma = 0$ достигается стандартная формулировка вязко-пластичной реологии (2.15). Для реализации EVP-метода выбирается псевдо шаг по времени Δt_{EVP} , который должен быть значительно меньше глобального шага по времени $\Delta t/\Delta t_{EVP} \approx 100$ и делается порядка 100 итераций пересчета компонент тензора напряжений согласно (2.16) совместно с пересчетом компонент скорости согласно уравнению баланса импульса (2.2). Одномерные оценки устойчивости линеаризованной задачи [18] приводят к следующему ограничению на шаг по времени $P/(\Delta + \Delta_{\min}) < T \Delta x^2 / (\Delta t_{EVP})^2$, где Δx - шаг по пространству. На практике, численные расчеты демонстрируют небольшое расхождение прогностических полей по сравнению с использованием стандартной вязко-пластичной реологии, а также наличие численного шума в областях с малым значением полной деформации Δ .

EVP-метод нуждается в тщательной настройке параметров T , Δt_{EVP} и количества итераций, которые нужно подбирать для каждого запуска модели в зависимости от пространственного разрешения и геометрии расчетной области. Также отсутствует полная сходимость к решению с вязко-пластичной реологией, поэтому в 2013 году была предложена модификация метода [29], освобождающая его от привязки к физическому времени.

2.4.2. mEVP метод

Новый подход, построенный на основе EVP-метода носит название mEVP [29]. Идея метода заключается в пересчете смещенных компонент тензора напряжений (2.13) одновременно с компонентами скорости без привязки к физическому времени. Запишем mEVP-метод в слабой постановке. Вводя двумерную тестовую функцию для скорости $\bar{\mathbf{u}}$, пересчет компонент скорости записывается в виде

$$\begin{aligned} & \left(\beta \frac{\rho_i h}{\Delta t} (\mathbf{u}^{p+1} - \mathbf{u}^p), \bar{\mathbf{u}} \right) + \left(\frac{\rho_i h}{\Delta t} (\mathbf{u}^p - \mathbf{u}^n), \bar{\mathbf{u}} \right) = - \left(\boldsymbol{\sigma}^{p+1}, \nabla \bar{\mathbf{u}} \right) + \\ & + \left(\boldsymbol{\tau}^{p+1} - \rho_i h f \mathbf{k} \times \mathbf{u}^p - \rho_i h g \nabla H, \bar{\mathbf{u}} \right); \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\boldsymbol{\tau}^{p+1} = a \rho_a C_a \|\mathbf{u}_a\| \mathbf{u}_a - a \rho_w C_w \|\mathbf{u}^p - \mathbf{u}_w\| (\mathbf{u}^{p+1} - \mathbf{u}_w).$$

Здесь $(f_1, f_2) = \int_{\Omega} f_1 f_2 dS$ скалярное произведение в L_2 . Пересчет компонент тензора напряжений записывается в виде

$$\begin{aligned}\alpha(\sigma_1^{p+1} - \sigma_1^p) &= \frac{P}{\Delta^p} (\dot{\epsilon}_1^p - \Delta^p) - \sigma_1^p; \\ \alpha(\sigma_2^{p+1} - \sigma_2^p) &= \frac{P}{e^2 \Delta^p} \dot{\epsilon}_2^p - \sigma_2^p; \\ \alpha(\sigma_{12}^{p+1} - \sigma_{12}^p) &= \frac{P}{e^2 \Delta^p} \dot{\epsilon}_{12}^p - \sigma_{12}^p.\end{aligned}\tag{2.18}$$

В (2.17), (2.18) α и β - априорно заданные константы порядка $10^2 - 10^3$, а произведение $\alpha \cdot \beta$ должно быть достаточно большим для устойчивости [33]. В случае сходимости итерационного процесса (2.17), (2.18): $\|\mathbf{u}^{p+1} - \mathbf{u}^p\| \rightarrow 0$, $\|\boldsymbol{\sigma}^{p+1} - \boldsymbol{\sigma}^p\| \rightarrow 0$ достигается стандартная формулировка уравнения баланса импульса (2.2) с вязко-пластичной реологией (2.15). Критерий устойчивости mEVP-метода схож с EVP и записывается в виде $\alpha\beta \gg \pi^2 P \Delta t / ((\Delta + \Delta_{min}) \Delta x^2)$ [33].

Описанный метод является основным способом дискретизации по времени в разработанной модели.

2.5. Пространственная аппроксимация на сетке типа А

Для аппроксимации скоростей на треугольной сетке типа А используются базисные функции Куранта φ_j , ассоциированные с узлами сетки. Чтобы получить пространственную аппроксимацию mEVP-метода (2.17), (2.18) подставим разложение пробной функции $\mathbf{u}_h = \sum_{V_i \notin \partial\Omega} (u_i, v_i)^T \varphi_i$. В разложении участвуют только внутренние узлы сетки, поскольку $\mathbf{u}_h|_{\partial\Omega} = 0$, что соответствует граничному условию прилипания. В качестве тестовой функции последовательно подставляется $\bar{\mathbf{u}}_h = (\varphi_j, 0)^T$ или $\bar{\mathbf{u}}_h = (0, \varphi_j)^T$ для каждого узла V_j . Дальнейшие рассуждения приводятся только для первого случая в силу аналогичности второго

$$\begin{aligned}\sum_{V_i \notin \partial\Omega} \left[\beta \frac{\rho_i h_i}{\Delta t} + a_i \rho_w C_w \|\mathbf{u}^p - \mathbf{u}_w\|_i \right] (u_i^{p+1} \varphi_i, \varphi_j) &= \sum_{V_i \notin \partial\Omega} \left[(\beta - 1) \frac{\rho_i h_i}{\Delta t} \right] (u_i^p \varphi_i, \varphi_j) + \\ \sum_{V_i \notin \partial\Omega} \left[\frac{\rho_i h_i}{\Delta t} \right] (u_i^n \varphi_i, \varphi_j) &- (\boldsymbol{\sigma}^{p+1}, \nabla \varphi_j) + (L_h, \varphi_j).\end{aligned}\tag{2.19}$$

В последнем равенстве член L_h содержит слагаемые, которые соответствуют внешним силам (2.3). Для уравнения (2.19), соответствующего узлу V_i , делается линеаризация коэффициентов следующим образом

$$\begin{aligned} a\rho_a C_a \|\mathbf{u}_a\| \mathbf{u}_a &\rightarrow a_i \rho_a C_a \|\mathbf{u}_a\|_i (\mathbf{u}_a)_h; \\ a\rho_w C_w \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_w\| (\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_w) &\rightarrow a_i \rho_w C_w \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_w\|_i (\mathbf{u}_h - (\mathbf{u}_w)_h). \end{aligned} \quad (2.20)$$

За исключением этого нюанса, аппроксимация дискретного вектора внешних сил L_h получается естественным образом. Аналогично (2.20) скалярные величины a, h в (2.19) приближаются как весовые коэффициенты в узлах, чтобы слагаемые оставались квадратичными функциями. Аналогичный подход применяется в модели FESIM [30]. Применение (2.19) для каждой тестовой функции внутреннего узла φ_j приводит к системе с недиагональной массовой матрицей (1.10). Для сходимости mEVP-метода требуется не менее 100 псевдоитераций, что делает поиск вершинных значений скорости чрезвычайно затратным с вычислительной точки зрения, поскольку приходится решать СЛАУ на каждой псевдоитерации. Чтобы уменьшить сложность алгоритма, аналогично [30] в модели используется лампированная массовая матрица

$$[\mathbf{M}_L]_{i,i} = \sum_{V_j \text{ adj to } V_i} (\varphi_i, \varphi_j) = \frac{1}{3} \sum_{T_j \text{ adj to } V_i} |T_j|, \quad (2.21)$$

что соответствует конечно-объемной схеме на двойственной сетке (сетке с вершинами в барицентрах треугольников). Вычислительная сложность одной итерации алгоритма становится линейной, поскольку лампированная массовая матрица является диагональной.

Схематически, одну итерацию по компонентам скорости и напряжениям можно представить следующим образом

1. Обновление дискретного тензора скоростей деформации $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_h = 0.5(\nabla \mathbf{u}_h + \nabla \mathbf{u}_h^T)$ и полной деформации Δ_h ;
2. Обновление компонент напряжений $\boldsymbol{\sigma}_h$, согласно (2.18);
3. Сборка дискретного вектора внутренней силы $(\boldsymbol{\sigma}_h, \nabla \varphi_j)$;
4. Пересчет узловых значений скорости \mathbf{u}_h согласно (2.19).

Отдельного внимания заслуживают процессы вычисления компонент тензора скоростей деформации, а также сборка вектора силы, которые будут рассматриваться далее.

2.5.1. Вычисление компонент тензора скоростей деформации

Для эффективного обновления значений тензора скоростей деформации $\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = 0.5 (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$ на каждой псевдоитерации алгоритма необходимо заранее вычислить локальные градиенты трех базисных функций в каждом треугольнике на этапе предпроцессинга. Для этого на каждом треугольнике решается три системы вида

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_x \varphi_i \\ \partial_y \varphi_i \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{i1} \\ \delta_{i2} \\ \delta_{i3} \end{bmatrix},$$

где (x_i, y_i) — координаты i -го узла в треугольном базисе. После этого используется локальное разложение вектора скорости на треугольнике $(\mathbf{u}_h)_{T_i} = \sum_{V_j \in T_i} (u_j, v_j)^T \varphi_j$, поэтому $\nabla(\mathbf{u}_h)_{T_i} = \sum_{V_j \in T_i} (u_j, v_j)^T \nabla^T \varphi_j$. Аналогичное разложением можно записать для транспонированного градиента скорости. После вычисления компонент тензора скоростей деформации обновляется значение полной деформации Δ согласно (2.12). В силу реализации модели в локально-декартовом базисе, перед описанными выше вычислениями $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_h$ на треугольнике, необходимо перевести компоненты векторов узловой скорости в треугольный базис используя собранные заранее матрицы перехода (1.3).

2.5.2. Вычисление компонент вектора силы

Сборка дискретного вершинного вектора внутренней силы производится за счет однократного итерирования по всем треугольникам и добавления вклада в смежные вершины отдельного треугольника

$$\mathbf{F}_{V_i} = \sum_{T_j \text{ adj to } V_i} \begin{bmatrix} (\sigma_{11})_j \partial_x \varphi_{k(j)} + (\sigma_{12})_j \partial_y \varphi_{k(j)} \\ (\sigma_{12})_j \partial_x \varphi_{k(j)} + (\sigma_{22})_j \partial_y \varphi_{k(j)} \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

где $k(j)$ — локальный индекс треугольника T_j , который соответствует узлу V_i . В силу того, что компоненты вектора силы хранятся в вершинном базисе, для вычисления добавки силы из треугольника в вершину согласно (2.22), необходимо

перевести вектор градиента базисной функции, а также компоненты тензора напряжений из треугольного в соответствующий вершинный базис, используя (1.3). Псевдокод сборки вектора силы представлен в листинге А.2 приложения данной работы.

2.6. Пространственная аппроксимация на сетке типа CD

Для аппроксимации скоростей на треугольной сетке типа CD используются базисные функции Крузье-Равиара ψ_j , ассоциированные с ребрами. Подставим в слабую постановку (2.17) разложение дискретного вектора пробной функции $\mathbf{u}_h = \sum_{E_i \notin \partial\Omega} (u_i, v_i)^T \psi_i$. В качестве тестовой функции используется $\bar{\mathbf{u}}_h = (\psi_j, 0)^T$, либо $\bar{\mathbf{u}}_h = (0, \psi_j)^T$ аналогично прошлому разделу. В результате получается дискретная система

$$\begin{aligned} \sum_{E_i \notin \partial\Omega} \left[\beta \frac{\rho_i h}{\Delta t} + a \rho_w C_w \|\mathbf{u}^p - \mathbf{u}_w\|_i \right] (u_i^{p+1} \psi_i, \psi_j) &= \sum_{E_i \notin \partial\Omega} \left[(\beta - 1) \frac{\rho_i h}{\Delta t} \right] (u_i^p \psi_i, \psi_j) + \\ \sum_{E_i \notin \partial\Omega} \left[\frac{\rho_i h}{\Delta t} \right] (u_i^n \psi_i, \psi_j) - (\boldsymbol{\sigma}^{p+1}, \nabla \psi_j) + (L_h, \psi_j). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Поскольку базисные функции Крузье-Равиар ортогональны, нет необходимости лампирования массовой матрицы при дискретизации на CD-сетке. Также отметим, что не нужно интерполировать скалярные величины h и a в центры ребер, так как скалярные функции приближаются на CD-сетке постоянными на треугольнике функциями κ_i . Массовая матрица со скаляром s собирается следующим образом

$$[\mathbf{M}]_{i,i} = (s \psi_i, \psi_i) = \frac{1}{3} \sum_{T_j \text{ adj to } E_i} s_j |T_j|.$$

Процесс вычисления компонент тензора скоростей деформации повторяет расчеты на A-сетке, за исключением того, что вместо узловых компонент скорости используются реберные. Аналогично устроена и сборка реберного вектора внутренней силы.

2.6.1. Стабилизация решения

Из литературы хорошо известно, что явная пространственная дискретизация скоростей с помощью конечного элемента Крузе-Равиар приводит к неустойчивости [85], [39]. Это связано со слишком большим количеством степеней свободы, порождающим нетривиальное ядро дискретного тензора скоростей деформации.

Введем пространство Соболева $H^1(\Omega)$, которое состоит из двумерных функций, определенных в двумерной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с производными, интегрируемыми с квадратом. Пространство $H_0^1(\Omega)$ состоит из функций из $H^1(\Omega)$ с нулевым следом на границе $\Gamma = \partial\Omega$. Сформулируем неравенства Корна [86].

Первое неравенство Корна гласит, что существует положительная константа c_k , такая что

$$\|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}\|^2 \geq c_k \|\nabla \mathbf{u}\|^2, \quad \forall \mathbf{u} \in H_0^1(\Omega). \quad (2.24)$$

Для того, чтобы сформулировать второе неравенство Корна, введем пространство

$$\mathbf{W} = \left\{ \mathbf{u} \in H^1(\Omega) \mid \int_{\Omega} \mathbf{u} dS = 0, \int_{\Omega} \text{rot}(\mathbf{u}) dS = 0 \right\}.$$

Второе неравенство Корна гласит, что существует положительная константа c_k такая, что выполнено

$$\|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}\|^2 \geq c_k \|\nabla \mathbf{u}\|^2, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{W}(\Omega). \quad (2.25)$$

Введем взвешенный градиент скорости на интервале по времени $[0, T]$ следующим образом

$$E(\mathbf{u}) = \int_0^T \xi_{min} \|\nabla \mathbf{u}\|^2 dt, \quad \xi_{min} = \min_{(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T]} \xi(\mathbf{x}, t). \quad (2.26)$$

По сути взвешенный градиент является интегральной по времени нормой градиента скорости с весом, равным минимальной оценке на коэффициент объемной вязкости. В работе [39] с использованием неравенств Корна ((2.24), (2.25)) доказывается следующая оценка на взвешенный градиент для вязко-пластичной **VP**

(2.10) и упруго-вязко-пластичной EVP (2.16) реологий

$$\mathbf{VP} : \frac{c_k}{4} E(\mathbf{u}) \leq \int_0^T \frac{c_p}{c_k \xi_{min}} \|\mathbf{R}\|^2 dt + \|\rho h \mathbf{u}(0)\|^2, \quad (2.27)$$

$$\mathbf{EVP} : \frac{c_k}{2T_{EVP}} E(\mathbf{u}) \leq \int_0^T c \|\partial_t \mathbf{R} + \mathbf{R}\|^2 dt + \quad (2.28)$$

$$+ \frac{\xi(0)}{4} \|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}\|^2 + a \|\partial_t \mathbf{u}(0)\|^2 + b \|\mathbf{u}(0)\|^2, \quad (2.29)$$

где $\mathbf{R} = \rho_a C_a \|\mathbf{u}_a\| \mathbf{u}_a + \rho_w C_w \mathbf{u}_w - \rho_i h f \mathbf{k} \times \mathbf{u}_w$ - вектор внешней силы, константы c_k и c_p зависят от вычислительной сетки, а константы a , b и c зависят от параметров EVP-решателя.

Таким образом, взвешенный градиент точного решения уравнений динамики морского льда (2.2) с вязко-пластичной (2.10) и упруго-вязко-пластичной (2.16) реологией ограничен начальными данными и задаваемым форсингом. Для построения аппроксимации необходимо, чтобы таким же условием обладало и численное решение.

Однако, как известно в литературе, аппроксимация скорости неконформным конечным элементом Круэье-Равиар не удовлетворяет неравенству Корна (2.24) [85], что отражается в неустойчивом численном решении.

В работе [87] была получена обобщенная версия неравенства Корна для дискретного решения

$$\|\nabla \mathbf{u}_h\|^2 \leq c \left(\|\nabla \mathbf{u}_h + \nabla \mathbf{u}_h^T\|^2 + \sum_e \int_e \frac{1}{|e|} [\mathbf{u}_h]_e [\mathbf{u}_h]_e dl \right), \quad (2.30)$$

где $[\mathbf{u}_h]_e = \mathbf{u}_h^+ - \mathbf{u}_h^-$, $\mathbf{u}_h^\pm = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \mathbf{u}_h^\pm(\mathbf{x} \pm \epsilon \mathbf{n})$ - скачок скорости через ребро e (\mathbf{n} - нормаль к ребру). Конечно-элементная аппроксимация с помощью элемента Круэье-Равиар удовлетворяет обобщенному неравенству Корна (2.30). Таким образом, добавлением в правую часть (2.23) слагаемого с суммой интегралов прыжков по ребрам, удастся удовлетворить неравенству типа (2.27), что отражается в устойчивой аппроксимации. Похожее стабилизирующее слагаемое было выбрано для численного решения задачи упругости в работе [88]. В статье [39] впервые было предложено использовать подобную стабилизацию для задачи моделирования динамики морского льда.

Стабилизационное слагаемое, которое добавляется в правую часть (2.23), записывается в виде

$$S_i = 2.0 \cdot \alpha_{st} \sum_{E_k \text{ adj to } E_i} \frac{\xi_k}{|E_k|} \int_{E_k} [u_h^p]_{E_k} [\psi_i]_{E_k} dl. \quad (2.31)$$

Параметр α_{st} позволяет контролировать количество добавляемой стабилизации. Если выбрать его слишком большим, решение получится чересчур диффузионным, а если слишком маленьким - стабилизации будет недостаточно и решение получится неустойчивым. Опытным путем было решено использовать значение $\alpha_{st} = 1$, хотя его настройка для отдельной геометрии области и форсинга может дать лучший результат. В формуле (2.31) также используется значение вязкости ξ_k , приближенной в ребре. В разработанной модели используется средневзвешенное по площади значение вязкости (2.11) из соседних треугольников. Отметим, что вид коэффициента перед интегралом можно выбрать разными способами. Конкретный множитель $\frac{\xi_k}{|E_k|}$ выбирается исключительно исходя из соображений размерности. Далее будет предложен альтернативный способ его выбора. Стабилизация работает как дискретный лапласиан, который штрафует скорость за разрыв вдоль ребра, что станет лучше видно после рассмотрения дискретной структуры оператора стабилизации в следующем разделе.

2.6.2. Сборка стабилизационного слагаемого

Опишем более подробно процесс сборки стабилизации (2.31). Рассмотрим пример стабилизационного слагаемого, ассоциированного с ребром e_0 , шаблон которого представлен на рисунке 2.2.

$$S_0 = 2\alpha_{st} \sum_{k=0}^4 \frac{\xi_k}{|e_k|} \int_{e_k} [u_h^p]_{e_k} [\psi_0]_{e_k} dl \quad (2.32)$$

В дальнейших рассуждениях в этом разделе для простоты изложения опустим множитель $2\alpha_{st}$ в (2.32). Зеленым цветом выделены треугольники T_1, T_2 , которые составляют носитель базисной функции ψ_0 , а синим цветом, треугольники T_3, T_4, T_5 и T_6 , значения скоростей на ребрах которых дают ненулевой вклад в стабилизационное слагаемое. Сразу отметим, что интеграл от произведения скачков

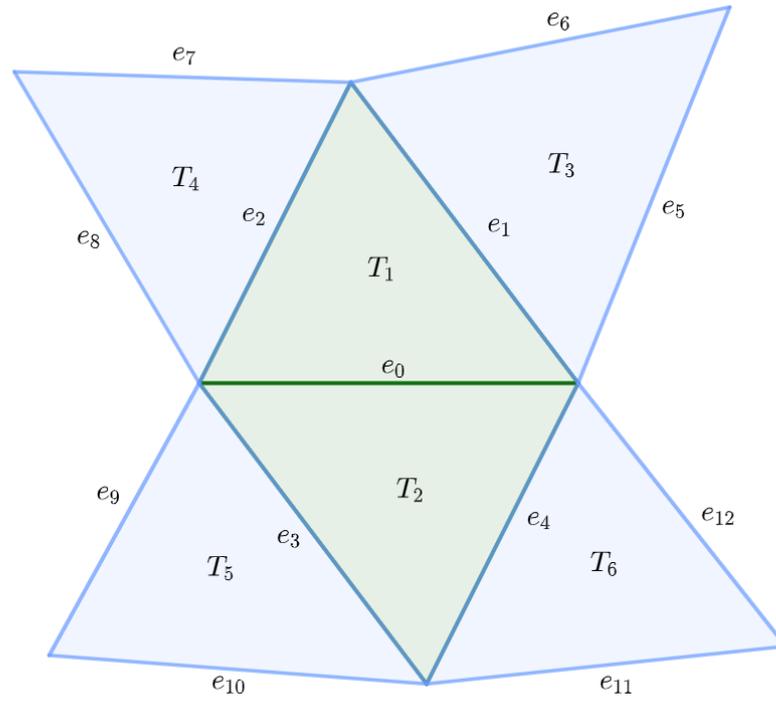


Рисунок 2.2 — Шаблон стабилизационного слагаемого.

функций вдоль ребра e_0 равен нулю, поскольку базисная функция ψ_0 непрерывна вдоль ребра e_0 : $[\psi_0]_{e_0} = 0$. Рассмотрим слагаемое, которое соответствует ребру e_1 , предварительно разложив функцию скорости по локальным базисным функциям

$$S'_1 = \frac{\xi_1}{|e_1|} \int_{e_1} [u_0\psi_0 + u_1\psi_1 + u_2\psi_2 + u_5\psi_5 + u_6\psi_6]_{e_1} [\psi_0]_{e_1} dl. \quad (2.33)$$

Заметим, что если базисные функции находятся по одну сторону от ребра, то интеграл по ребру от произведения их скачков равен

$$\int_{e_k} [\psi_i]_{e_k} [\psi_j]_{e_k} dl = \begin{cases} 0, & \text{если } \psi_i = \psi_k \text{ или } \psi_j = \psi_k, \\ \begin{cases} (1/3)|e_k|, & \text{если } \psi_i = \psi_j, \\ (-1/3)|e_k|, & \text{если } \psi_i \neq \psi_j. \end{cases} \end{cases}$$

Если же функции находятся с разных сторон от ребра, то результат равен

$$\int_{e_k} [\psi_i]_{e_k} [\psi_j]_{e_k} dl = \begin{cases} 0, & \text{если } \psi_i = \psi_k \text{ или } \psi_j = \psi_k, \\ \begin{cases} (-1/3)|e_k|, & \text{если } e_i \text{ и } e_j \text{ смежны,} \\ (1/3)|e_k|, & \text{иначе.} \end{cases} \end{cases}$$

Таким образом, видно, что результат не зависит от направления нормали ребра. Теперь упростим выражение (2.33)

$$S'_1 = \frac{\xi_1}{3}(\{u_0 - u_2\} + \{u_6 - u_5\}).$$

В случае $u_0 = u_2$ и $u_6 = u_5$ разрыв скорости вдоль ребра e_1 отсутствует и соответствующее стабилизационное слагаемое обнуляется. Аналогичным образом можно упростить слагаемые, соответствующие ребрам e_2, e_3 и e_4 . В результате получается следующий дискретный вид S_0 (2.32)

$$\begin{aligned} S_0 = & -\frac{\xi_1}{3}(\{u_2 - u_0\} + \{u_5 - u_6\}) + \frac{\xi_2}{3}(\{u_0 - u_1\} + \{u_7 - u_8\}) \\ & - \frac{\xi_3}{3}(\{u_4 - u_0\} + \{u_9 - u_{10}\}) + \frac{\xi_4}{3}(\{u_0 - u_3\} + \{u_{11} - u_{12}\}). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Отсюда понятно, что можно эффективно провести сборку стабилизационного слагаемого для всех внутренних ребер с помощью двух проходов по всем треугольникам:

1. При первом проходе в каждом треугольнике в каждое ребро добавляется разность значений реберных скоростей, идущих против часовой стрелки. Будем называть получившийся результат в каждом ребре стабилизационной суммой.
2. При втором проходе по треугольникам для текущего ребра стабилизация равная трети разности стабилизационной суммы, умноженной на значения реберной вязкости, между двумя следующими ребрами против часовой стрелки.

Заметим, что для оптимальной сборки стабилизации необходимо, чтобы все треугольники имели одинаковую ориентацию (при переборе вершин в треугольнике от первой до последней получалось движение против/по часовой стрелке, если смотреть на треугольник от направления внешней нормали).

Также необходимо учесть, что стабилизационное слагаемое имеет вид (2.34), если все скорости представлены в едином базисе. Естественно выбрать базис, ассоциированный с e_0 (см. 2.2) при сборке стабилизации (2.34). Псевдокод процесса сборки стабилизационной суммы А.3 и стабилизационного слагаемого А.4 представлен в листингах приложения.

Как уже отмечалось ранее, в выборе коэффициента стабилизации (2.31) присутствует неоднозначность. Численные эксперименты показали, что решение, получаемое на CD сетке, генерирует сильный численный шум на границе области,

если использовать множитель $\frac{\xi_k}{|E_k|}$. Это связано с разрывностью объемной вязкости (2.11), поскольку в знаменателе стоит полная деформация Δ , которая разрывна на границе области (используется граничное условие прилипания и на граничных элементах сетки всегда получается большой градиент). Аналогичная проблема отмечалась при разработке CD-версии немецкой модели FESIM [30]. После обсуждения этой проблемы с Сергеем Даниловым из института Альфреда Вегенера (Бременхафен, Германия) было предложено использование альтернативного, ”более гладкого” множителя для стабилизации, который имеет вид

$$\frac{\xi_k}{|E_k|} \rightarrow \frac{C_{st} \cdot P \cdot S_{E_k}}{\Delta t \cdot |E_k|}, \quad (2.35)$$

где P - прочность льда, Δt - шаг по времени, а $S_{E_k} = (1/3) \cdot (|T_1| + |T_2|)$ - площадь, ассоциированная с ребром (T_1, T_2 - смежные треугольники). При этом вводится размерная константа $C_{st} = 2.5 \text{ с}^2 \cdot \text{м}^{-2}$. Значение константы подобрано опытным путем и может быть настроено для отдельного расчета.

2.7. Численные эксперименты

В этом разделе представлен набор результатов численных расчетов для демонстрации работы двух версий разработанной модели. Первый тест является немного измененной версией модельного расчета в квадратной области [30], реализующий дрейф морского льда в режиме высокой деформации. Второй тест является аналогичным первому, однако расчет производится на поверхности сферы [89]. Данный тест приводится для демонстрации корректной работы модели в сферической геометрии. Третий тест является повторением расчета [21], на котором сравнивается разрешающая способность линейных кинематических особенностей (ЛКО) [73] передовых мировых ледовых моделей: MITgcm, CICE, FESIM, ICON. Данный тест демонстрирует, что разработанная модель не уступает другим в предсказании ЛКО. Последний четвертый тестовый расчет производится в реальной геометрии Арктического региона с реалистичным форсингом и показывает применимость разработанного кода для оперативного прогнозирования дрейфа морского льда.

2.7.1. Модельный расчет в квадрате

В данном тесте используется равномерная триангуляция с размером треугольника 16 км. Расчетная область представляет из себя квадрат с размерами $L_x = L_y = 1024$ км. Начальные условия для сплоченности, толщины и скорости льда задаются как

$$a(x, y, t = 0) = \frac{x}{L_x}, \quad h(x, y, t = 0) = 2.0 \text{ м}, \quad \mathbf{u}(x, y, t = 0) = 0 \text{ м с}^{-1}.$$

Скорость ветра $\mathbf{u}_a = (u_a, v_a)^T$ и воды \mathbf{u}_w в зависимости от времени (в $\text{м} \cdot \text{с}^{-1}$) задается с помощью

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_w(x, y, t) &= \left(0.1 \cdot \frac{2y - L_y}{L_y}, -0.1 \cdot \frac{2x - L_x}{L_x} \right)^T, \\ u_a(x, y, t) &= 5.0 + \left(\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) - 3.0 \right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi x}{L_x}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{L_y}\right), \\ v_a(x, y, t) &= 5.0 + \left(\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) - 3.0 \right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi y}{L_y}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right), \end{aligned}$$

где $T = 4$ дня. Уровень океана рассчитывается с использованием геострофического баланса. Шаг по времени установлен равным $\Delta t = 300$ с, а общее время расчета равно 1 неделе. В данном эксперименте адвекция отключена. Использовались следующие параметры mEVP-решателя: α и β (500, 500) для A-сетки и (800, 800) для CD-сетки с $N_{\text{mEVP}} = 1000$ итерациями в обоих случаях. Полученная x -компонента скорости представлена на рисунке 2.3. Видно качественное

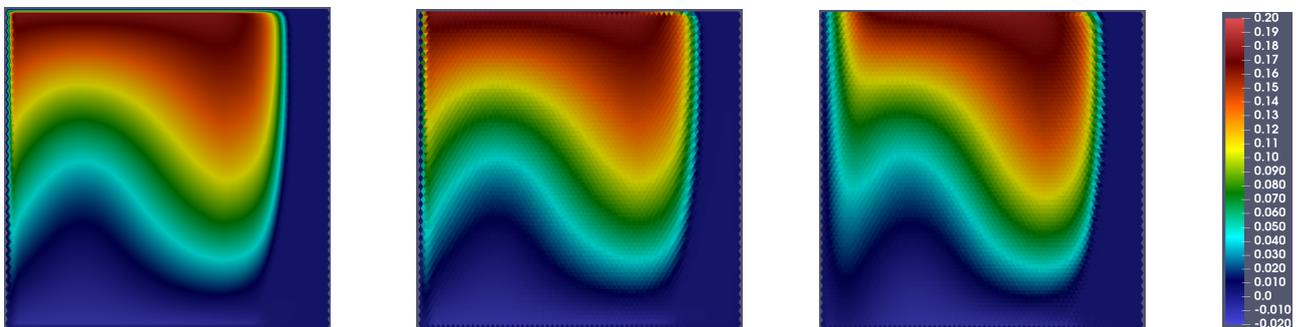


Рисунок 2.3 — Тест 1, x -компонента скорости льда. Слева - сетка типа А, по центру - сетка типа CD, справа - сетка типа CD без стабилизации

совпадение полученных скоростей на А- и CD-сетках, однако в поле скоростей на центральном рисунке заметны небольшие осцилляции. Также очевидно, что

смоделированная скорость на сетке CD без использования стабилизации значительно отличается от первых двух изображений. Предсказанные значения полной деформации Δ показаны на рисунке 2.4. Опять же, наблюдается хорошая согласо-

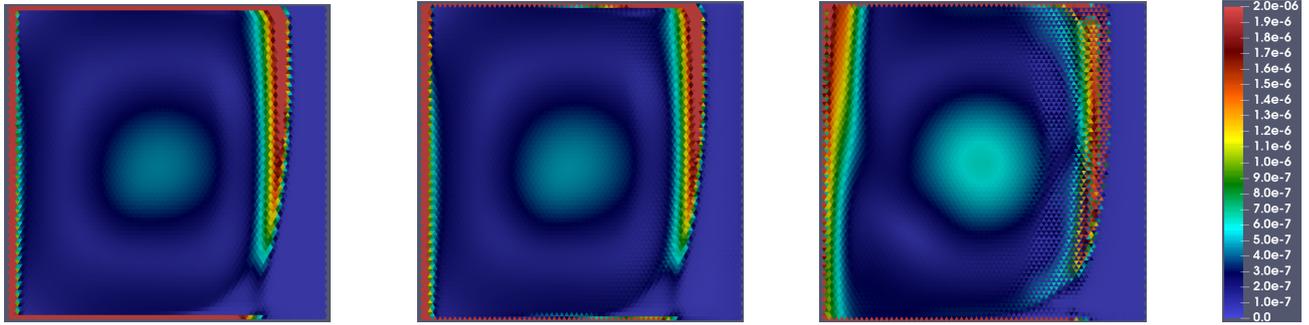


Рисунок 2.4 — Тест 1, полная деформация Δ . Слева - сетка типа A, по центру - сетка типа CD, справа - сетка типа CD без стабилизации

ванность предсказанных значений Δ на обоих типах сетки, но мелкомасштабный шум также виден в градиенте скорости для CD-решения (рис. 2.3 по центру). Однако, в случае отключения стабилизации, свойство устойчивости полностью теряется (см. рис. 2.4 справа), и нельзя полагаться на результат этого расчета.

2.7.2. Модельный расчет на поверхности сферы

В этом разделе воспроизводится первый эксперимент на поверхности сферы. Принципиальное отличие этого эксперимента заключается в том, как интерпретируются координаты x и y . Введем угловой размер области $\Lambda = 2048 \text{ км}/R_e$, где $R_e = 6400 \text{ км}$ — радиус Земли. Теперь расчетная область по долготе φ и широте θ задается как $0 \leq \varphi \leq \Lambda$, $-0.5\Lambda \leq \theta \leq 0.5\Lambda$. Поскольку удваивается физический размер расчетной области, размер треугольника также удваивается до 32 км. Используются следующие аналитические выражения для скоростей воды и воздуха

$$\mathbf{u}_w(\varphi, \theta, t) = \left(0.15 \cdot \frac{2y - L_y}{L_y} \cdot \cos(\theta), -0.15 \cdot \frac{2x - L_x}{L_x} \right)^T,$$

$$u_a(\varphi, \theta, t) = 7.5 + 1.5 \cdot \left(\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) - 3.0 \right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi x}{L_x}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) \cdot \cos(\theta),$$

$$v_a(\varphi, \theta, t) = 7.5 + 1.5 \cdot \left(\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) - 3.0 \right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi y}{L_y}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right),$$

где $x = R_e \cdot \varphi \cdot \cos(\theta)$, $y = R_e \cdot (\theta + 0,5\Lambda)$ - расстояние по долготе/широте до левого нижнего угла области, а $L_x = R_e \cdot \Lambda \cdot \cos(\theta)$, $L_y = R_e \cdot \Lambda$ — локальный размер области по долготе/широте; $T = 4$ дня, как и в предыдущем эксперименте, шаг по времени $\Delta t = 300$ с, время расчета 1 неделя. Во данном тесте также отключается адвекция. Параметры mEVP-метода α , β , N_{mEVP} такие же, как и в предыдущем эксперименте. Долготная компонента скорости для обеих сеток представлена на рисунке 2.5. Видно, что предсказанные скорости похожи, но, как и в первом тесте,

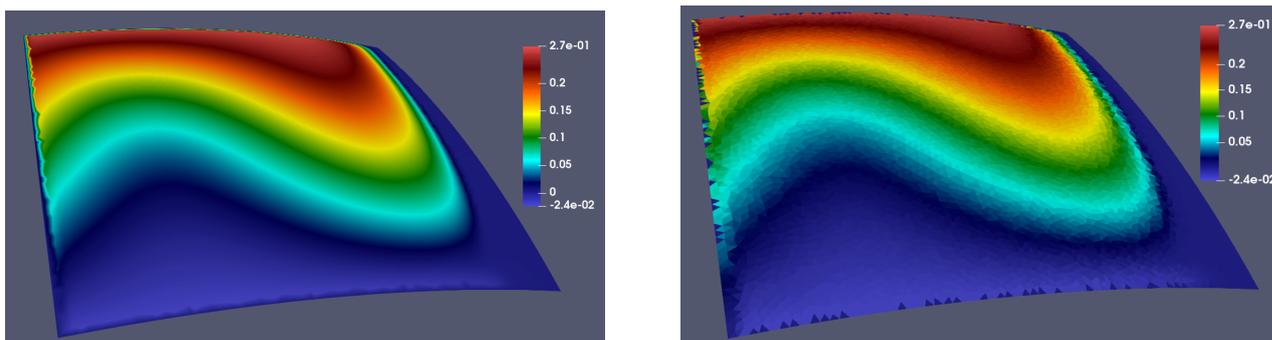


Рисунок 2.5 — Тест 2. φ -компонента скорости льда. Слева - A-сетка, справа - CD-сетка.

заметен мелкомасштабный шум из-за разрывности поля скоростей на CD-сетке. Вычисленные значения полной деформации Δ показаны на рисунке 2.6. Каче-

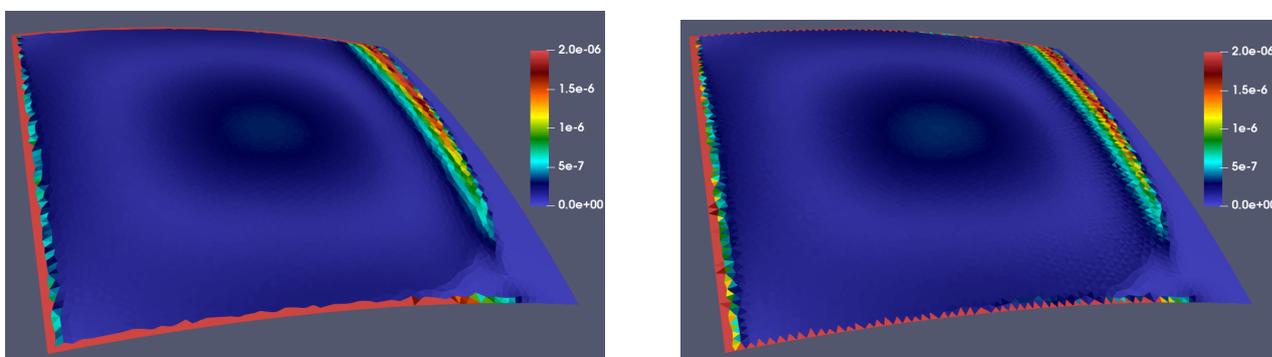


Рисунок 2.6 — Тест 2. Значения полной деформации Δ . Слева - A-сетка, справа - CD-сетка.

ственный анализ поля Δ повторяет плоский случай. В результате можно сделать вывод, что модель корректно работает и в сферической геометрии.

2.7.3. Модельная задача воспроизведения ЛКО

Вслед за [21] третий тест реализует квадратную расчетную область размером $L = 512$ км. Как и в предыдущих экспериментах, используется равномерная триангуляция квадрата. Для оценки результатов моделирования строятся триангуляции с разрешением 8 км, 4 км и 2 км. Стационарный океанический форсинг задается аналитически линейной в обоих направлениях функцией

$$\mathbf{u}_w(x, y) = u_w^{\max} \cdot ((2y - L)/L, -(2x - L)/L)^T,$$

с $u_w^{\max} = 10^{-2} \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$. Скорость ветра задается в виде антициклона, центр которого движется от центра области к правому верхнему краю. Угол между вектором скорости и радиус-вектором в центр антициклона составляет $\alpha = 72^\circ$. Центр антициклона движется по закону $\mathbf{m}(t) = (m_x(t), m_y(t))^T$. Максимальное абсолютное значение скорости ветра $u_a^{\max} = 15 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ умножается на коэффициент затухания s для уменьшения скорости при удалении от центра антициклона. Аналитическое выражение для скорости ветра имеет вид

$$\mathbf{u}_a(x, y, t) = -s(x, y, t) \cdot u_a^{\max} \begin{pmatrix} \cos(\alpha)(x - m_x(t)) + \sin(\alpha)(y - m_y(t)) \\ -\sin(\alpha)(x - m_x(t)) + \cos(\alpha)(y - m_y(t)) \end{pmatrix},$$

$$s(x, y, t) = 0.02 \cdot \exp \left[-0.01 \cdot \sqrt{(x - m_x(t))^2 + (y - m_y(t))^2} \right],$$

$$m_x(t) = m_y(t) = L/2 + L/2 \cdot (t \cdot \text{день}^{-1}).$$

На рисунке 2.7 представлены мгновенные значения скорости воды и ветра. Модель инициализируется нулевыми скоростями льда, единичной сплоченностью и толщиной 0.3 метра во всей области. Общее время расчета составляет 2 дня с шагом по времени $\Delta t = 120$ с. Используется двухшаговая схема Тейлора-Галеркина с коррекцией потоков (TTG2+FCT) для адвекции на А-сетке и схема MUST с minmod монотонизатором (MUST+minmod) для CD-сетки. Параметры α и β mEVP-решателя настраиваются для каждого разрешения сетки. Проведение Фурье-анализа линеаризованной вязкой системы динамики морского льда [90] показало, что для устойчивости α и β должны быть примерно в 3-7 раз больше для CD-сетки по сравнению с А-сеткой. Для размера треугольника 8 км используются значения (300, 300) для сетки А и (1200, 1200) для сетки CD. Для размера 4 км - (500, 500) для сетки А и (1500, 1500) для сетки CD. Для размера 2 км - (800,

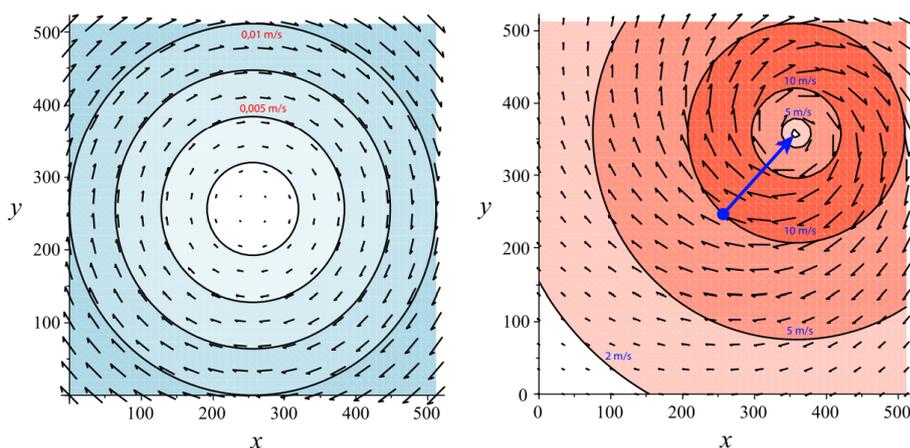


Рисунок 2.7 — Форсинг, тест 3. Слева - стационарная скорость воды. Справа - скорость ветра в конечный момент времени $t = 2$ дня. Изображение взято из статьи [21].

800) для сетки А и (2000, 2000) для сетки CD. Делается $N_{\text{mEVP}} = 1000$ итераций mEVP-метода для всех тестовых расчетов, чтобы обеспечить сходимость.

Значения деформации сдвига $\dot{\epsilon}_s$ в \log_{10} -масштабе и сплоченности a при различном разрешении сетки представлены на рисунке 2.8 для А-сетки и на рисунке 2.9 для CD-сетки. Видно, что распределение ЛКО в сплоченности льда похоже

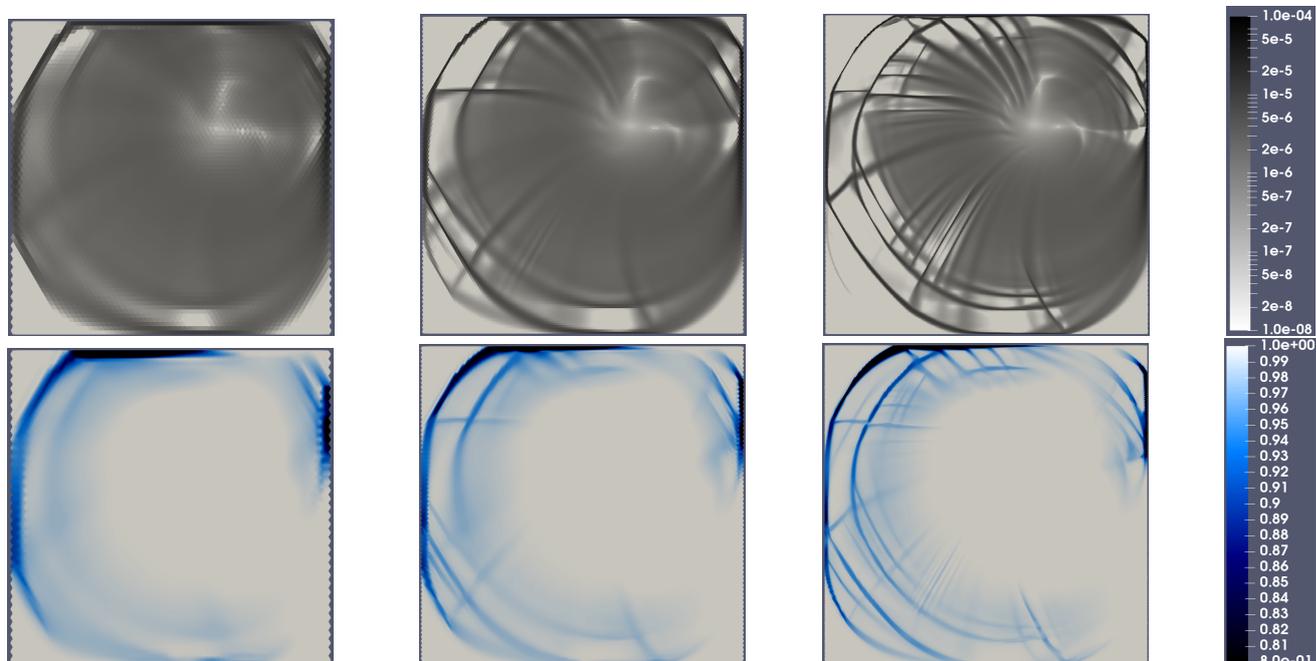


Рисунок 2.8 — Тест 3 для сетки типа А. Деформация сдвига $\dot{\epsilon}_s$ в логарифмическом масштабе - верхняя строка, сплоченность a - нижняя строка. Левый столбец - размер треугольника 8 км, центральный - 4 км, правый - 2 км.

на распределение в сдвиговой деформации. Для обоих типов сетки количество

предсказываемых ЛКО увеличивается с увеличением разрешения сетки. Сравнение картины особенностей на двух типах сетки для различных разрешений показывает, что скорости, размещенные на ребрах (CD-сетка), дают гораздо более детальное разрешение по сравнению со стандартными узловыми скоростями (A-сетка). Отметим, что полученный результат согласуется с другими моделями динамики льда: CICE, FESIM, ICON, MITgcm, представленными в работе [21]. На рисунке 2.10 представлены результаты моделирования деформации сдвига в

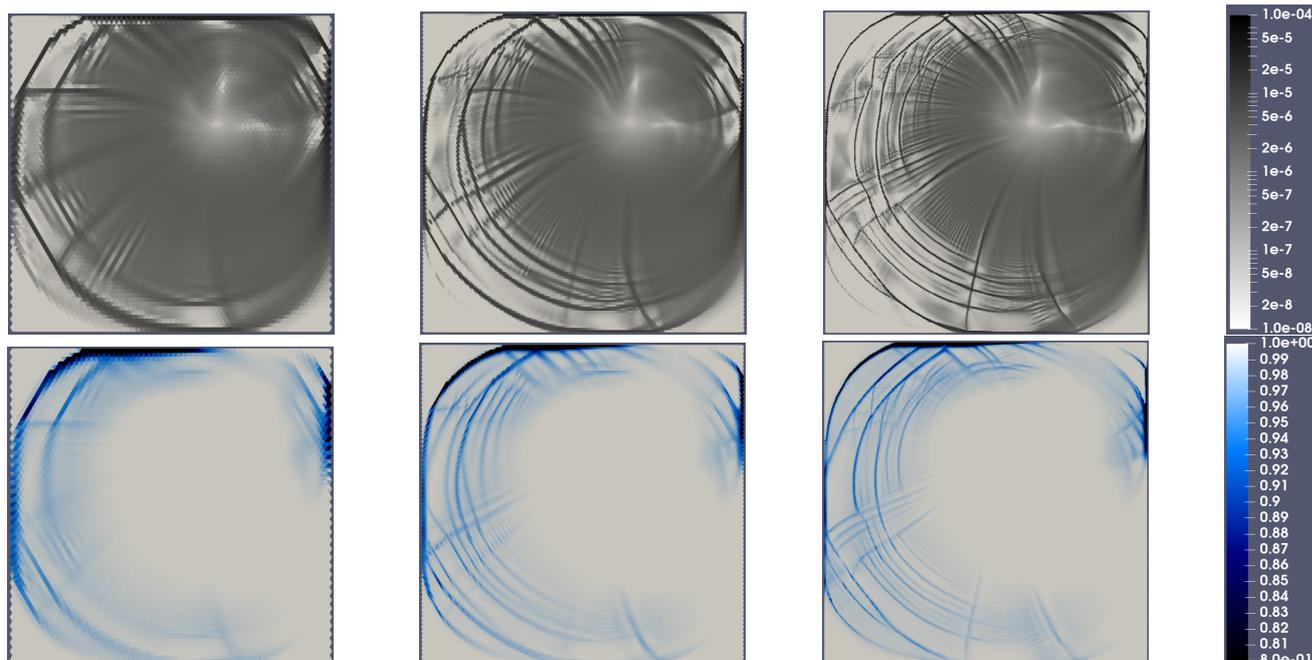


Рисунок 2.9 — Тест 3 для сетки типа CD. Деформация сдвига ϵ_s в логарифмическом масштабе - верхняя строка, сплоченность a - нижняя строка. Левый столбец - размер треугольника 8 км, центральный - 4 км, правый - 2 км.

моделях FESIM и ICON в аналогичном эксперименте.

2.7.4. Краткосрочный прогноз в Арктическом регионе

В этом разделе опишем процесс построения простейшей системы прогноза дрейфа морского льда в Арктическом регионе, использующий разработанный решатель системы уравнений динамики морского льда на сетке типа A. Отметим, что за время прохождения аспирантуры, автор диссертации не успел полностью настроить аналогичную систему на сетке типа CD. Это связано с тем, что используемое стабилизационное слагаемое (2.31) обладает неоднозначностью в выборе

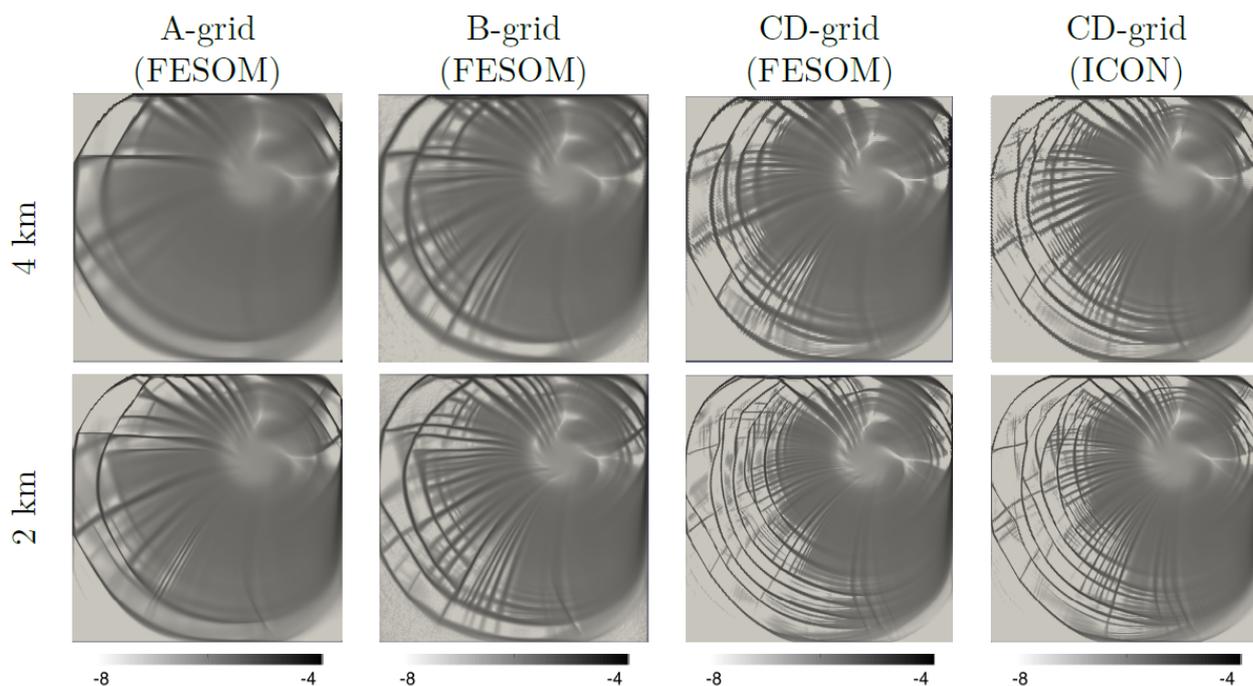


Рисунок 2.10 — Деформация сдвига в логарифмическом масштабе для моделей FESOM и ICON в эксперименте воспроизведения ЛКО. Изображение взято из работы [21].

стабилизирующего множителя, а также подборе параметров. На данный момент в литературе недостаточно широко представлены расчеты на CD-сетке в реальной геометрии с реалистичским форсингом. Можно предположить, что данный стабилизационный метод плохо подходит для использования в связке с эволюционными численными схемами типа EVP (2.16) и mEVP (2.17). Обсуждения данной проблемы с отечественными и иностранными коллегами привели к выводу, что стабилизационный подход может давать лучший результат в связке с решателями высокого порядка типа Пикара или Ньютона, однако на данный момент они недостаточно оптимизированны для параллельного расчета. Разработка системы прогноза в Северном Ледовитом океане с использованием решателя на сетке типа А была выполнена в три этапа:

1. Сначала была построена триангуляция Арктического региона со сгущением в области с потенциально высокой концентрацией льда и узкие проливы;
2. Далее была реализована параллельная система интерполяции океанических и атмосферных данных на модельную сетку;

3. Далее модель была инициализирована начальным состоянием и был запущен кратковременный тестовый расчет.

Опишем более детально эти шаги.

2.7.4.1. Построение триангуляции

Для построения триангуляции Арктического региона использовалась открытая база данных береговой линии GSHHG [91] (Global Self-consistent, Hierarchical, High-resolution Geography Database). Для работы с этой базой данных был задействован пакет GMT [92] (The Generic Mapping Tools), представляющий из себя набор терминальных команд. Данный пакет позволяет строить карту береговой линии и выгружать координаты отрезков, из которых состоит ломанная. Следующая команда строит береговую линию Арктического региона с минимальной возможной детализацией, находящегося выше 45 широты, которая представлена на рисунке 2.11

```
gmt coast -R-180/180/45/90 -Js0/90/71/1:60000000 -Bafg -Dc -W0.25p  
-Gchocolate -A3000/0/1 -pdf arctic_crude
```

Выгрузка данных GSHHG представляет из себя набор файлов, в которых записаны координаты вершин ломаных. В случае длинной береговой линии она может быть автоматически разбита на несколько непрерывных частей. Также отдельно представлены все острова. Для формирования полной замкнутой континентальной границы, а также границы островов, был реализован специальный скрипт, соединяющий ломаные, а также замыкающий континентальные границы вдоль 45-ой широты. На рисунке 2.12 представлен процесс формирования замкнутой береговой линии.

На верхнем левом рисунке представлена разбитая по частям континентальная береговая линия. На центральном сверху рисунке эта граница объединена в две ломанные, соответствующие Евразийской и Северо-Американской континентальной границе. На правом верхнем изображении континентальные границы замкнуты вдоль 45 широты. На нижнем левом изображении отдельно выделены острова. На нижнем правом рисунке представлен конечный вид береговой линии замкнутого Арктического региона с островами.

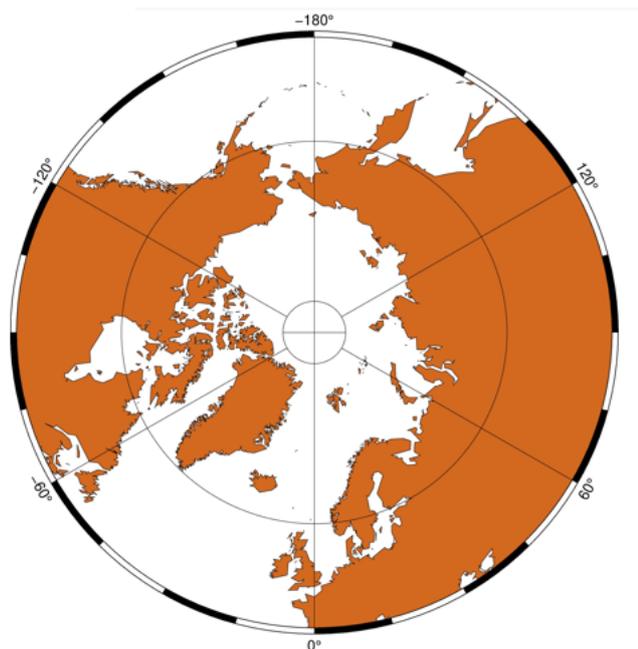


Рисунок 2.11 — Карта Арктического региона, построенная по базе данных GSHHG с помощью пакета GMT.

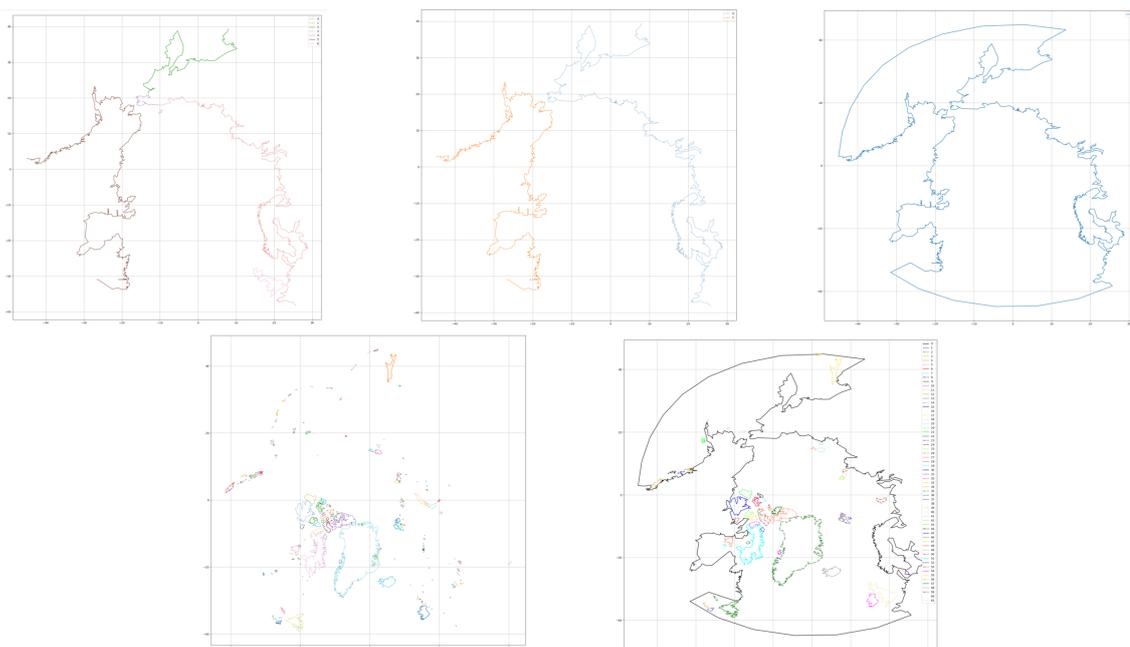


Рисунок 2.12 — Процесс формирования замкнутой береговой линии Арктического региона.

После получения границы Арктического региона, следующим этапом является построение триангуляции. Для этой цели был применен пакет Ani2D [71], который разрабатывается и поддерживается в Институте Вычислительной Математики имени Г. И. Марчука Российской Академии Наук (ИВМ РАН). Однако, непосредственная загрузка полученных данных вызывает некорректную работу

триангулятора, поскольку присутствуют узкие заливы, а также смежные отрезки, образующие слишком острые углы. Для того, чтобы избавиться от этой проблемы, был предложен следующий алгоритм сгрубления области, в основе которого лежит принцип: можно удалять вершины и выходящие из нее ребра, но нельзя их двигать. Это связано с тем, что в случае необходимости более детального разрешения конкретной береговой области, можно будет вручную избавиться от малых углов, используя данные GSHHG, не меняя остальную часть берега. Алгоритм устроен следующим образом

1. Если длина отрезка меньше заданной величины a_{min} , то его конечная точка удаляется;
2. Если два смежных отрезка образуют угол, меньший наперед заданной величины α_{min} , то вершина угла удаляется;
3. Зафиксируем вершину и натуральное число n . Если среди n следующих отрезков есть отрезок, приближенный к выбранной точке на расстояние, меньшее фиксированной величины d_{min} , то этот отрезок и все предыдущие точки (вплоть до фиксированной) удаляются. (Эта процедура позволяет избавиться от бухт с узкими проливами);
4. Каждый остров, состоящий из менее, чем 5 вершин, удаляется.

Варьированием параметров $a_{min}, n, \alpha_{min}, d_{min}$ удалось добиться подходящих входных данных триангулятора Ani2D для успешного построения триангуляции, при этом минимально сгрубив береговую линию. Равномерная триангуляция расчетной области с размером треугольника 50 километров представлена на рисунке 2.13.

Использование регулярной триангуляции для расчетов неоправданно, поскольку большая часть треугольников попадает в область открытой воды, в которой появление льда невозможно. По этой причине было принято решение сделать сгущение сетки в тех местах, где присутствие морского льда потенциально возможно и максимально увеличить размер треугольника там, где его с высокой долей вероятности не может быть. Пакет Ani2D предоставляет возможность пользователю задавать желаемый локальный размер треугольника в каждой точке расчетной области с помощью функции **ani::aft2dboundary**.

Для реализации функции, задающей желаемый размер треугольника в конкретной точке пространства используются общедоступные еженедельные спутниковые данные по физическим характеристикам льда за последние 10 лет - SEA ICE CONCENTRATION: NOAA/NSIDC CLIMATE DATA RECORD [93], которые

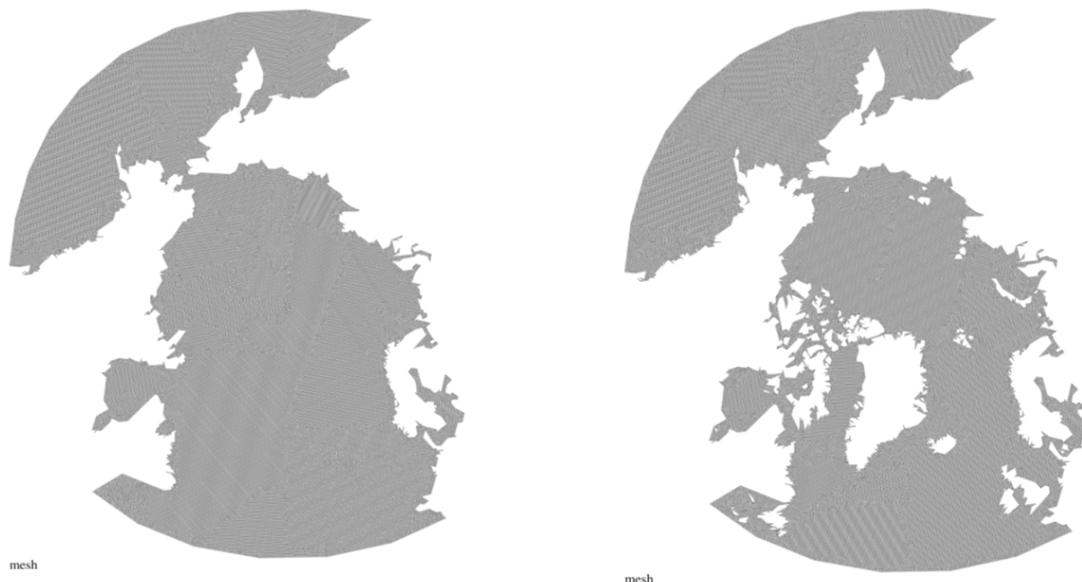


Рисунок 2.13 — Равномерная триангуляция Арктического региона с помощью пакета Ani2D. Слева - без островов, справа - с островами.

представлены на прямоугольной сетке 448×304 в полярной стереографической проекции с шагом 25 км (см. рисунок 2.14, слева). В выбранную точку пространства интерполируется максимальное за 10 лет значение сплоченности билинейным образом. Желаемый размер треугольника обратно пропорционален полученному максимальному значению сплоченности. В результате получается триангуляция со сгущением, представленная на рисунке 2.14 справа. Конечные характеристики построенной сетки: минимальный размер треугольника составляет ≈ 11 км, максимальный - ≈ 60 км, сетка состоит из 329'670 вершин, 642'387 треугольников и 17'049 граничных ребер.

2.7.4.2. Интерполяция форсинга

Для того, чтобы запустить тестовый расчет динамического блока на построенной сетке, необходимо собрать начальное состояние: распределение сплоченности, толщины морского льда, а также реализовать периодическое изменение внешнего форсинга: скорость поверхностного течения океана, уровень океана, скорость в пограничном слое атмосферы. Для подобного запуска модели в "оффлайн" режиме используются свободно распространяемые в сети интернет данные оперативной океанической Европейской прогностической системы

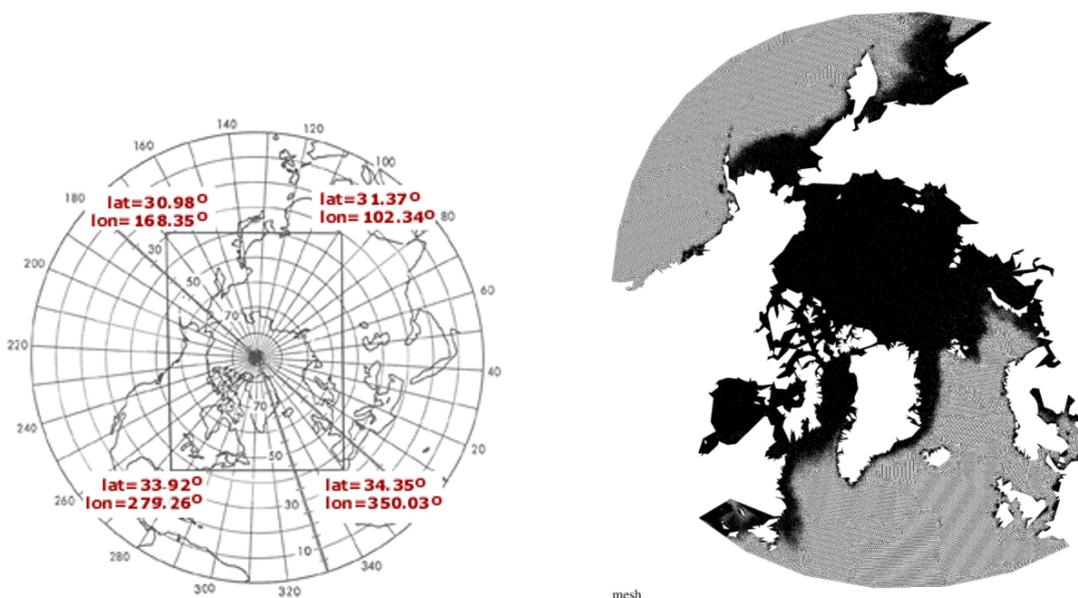


Рисунок 2.14 — Слева - область данных физических характеристик морского льда [93]. Справа - триангуляция Арктического региона со сгущением, построенная с помощью Ani2D.

ТОРАZ4 [94]. Для прогнозирования она использует конечно-разностную вязко-пластичную модель динамики морского льда на широтно-долготной сетке со смещенным полюсом, которая работает в связке с конечно-разностной моделью океана. Также в систему входит ансамблевая ассимиляция спутниковых данных. Данные прогноза представлены на прямоугольной сетке в полярной стереографической проекции с шагом примерно 50 км с частотой раз в час в формате netCDF [95]. Система ТОРАZ4 использует данные атмосферного реанализа CAMS [96], которые свободно распространяются в формате netCDF на обыкновенной широтно-долготной сетке с шагом примерно 100 км, с частотой раз в 3 часа.

Автором работы был реализован алгоритм параллельного считывания netCDF файлов с использованием стандартной C/C++ библиотеки netCDF [97]. Опишем кратко этот алгоритм. Для каждой подобласти, соответствующей отдельному MPI-процессу, на этапе препроцессинга находится диапазон x и y координат, которые соответствуют координатам файла. Далее собирается начальный индекс считывания и длина массива, а затем в параллельном формате каждый процесс считывает только необходимую часть netCDF файла. Затем, для каждой точки треугольной сетки находится прямоугольник, в который она попадает, и величина скаляра/вектора интерполируется по известным узловым значениям прямоугольника билинейным образом.

Для тестового запуска модели был выбран двухнедельный период, начиная с 1 марта 2020 года. Выбор такого короткого промежутка расчета связан с малым вкладом термодинамических процессов на коротком промежутке, которые не учитываются непосредственно в разработанном динамическом блоке. Также стоит отметить, что сложность корректного ”оффлайн” запуска заключается в отсутствии свободно распространяемых данных по фазовому переходу ”вода-лёд” за счет переохлаждения жидкости. В качестве альтернативы этому переходу можно использовать непосредственно спутниковые данные сплоченности морского льда и формировать массообмен океана и льда искусственным образом, однако это остается за рамками представляемой работы.

На рисунке 2.15 продемонстрированы, интерполированные на модельную сетку, мгновенные значения уровня и зональной компоненты скорости океана. На рисунке 2.16 представлены зональная компонента скорости ветра на высоте 10 метров и сплоченность льда, также сынтерполированные на модельную сетку.

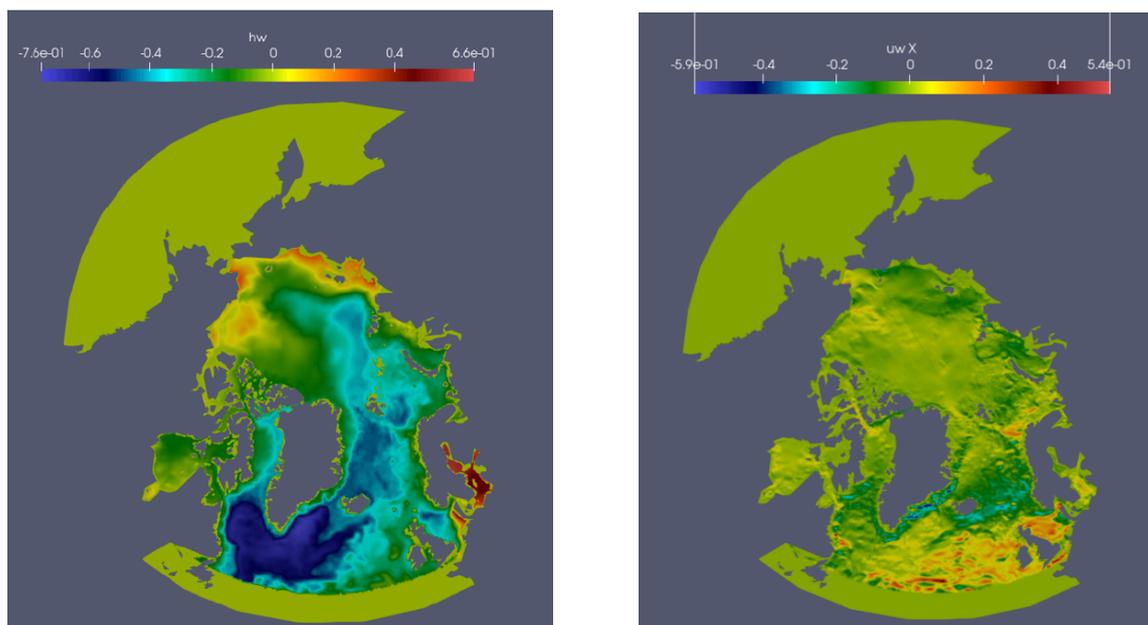


Рисунок 2.15 — Данные TOPAZ4 на 1 марта 2020 года, сынтерполированные на модельную сетку. Слева - уровень океана, справа - зональная компонента скорости океана.

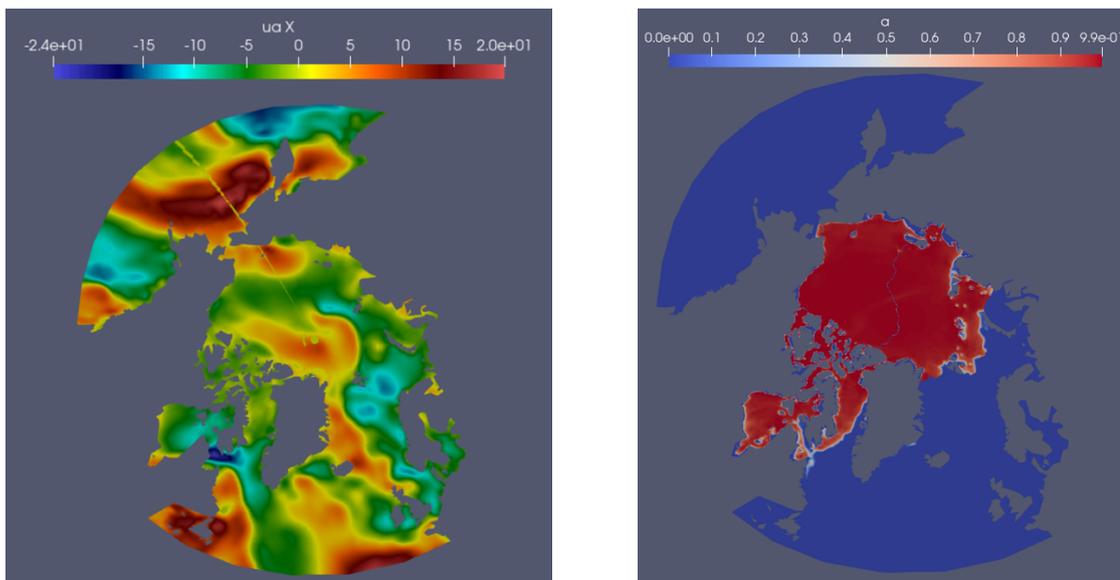


Рисунок 2.16 — Данные на 1 марта 2020 года, сынтеполированные на модельную сетку. Слева - зональная компонента скорости ветра реанализа CAMS. Справа - сплоченность льда ТОРАЗ4.

2.7.4.3. Результаты расчетов

А-версия модели запускается на сгущенной сетке (2.14). Начальное распределение сплоченности и толщины берется из системы Европейского прогноза ТОРАЗ4 (рисунок 2.16) на 1 марта 2020 года, начальная скорость льда нулевая. Скорость поверхностного слоя, а также уровень океана обновляется каждый час физического времени, а скорость ветра на высоте 10 метров - каждые 3 часа. Шаг по времени - 10 минут, параметры mEVP решателя $(\alpha, \beta, N_{mEVP}) = (500, 500, 500)$, общее время расчета 2 недели. На рисунке 2.17 представлены результаты расчетов сплоченности льда, а также полной деформации в конечный момент времени (00:00 14 марта 2020 года). На изображении отчетливо видна структура линейных кинематических особенностей, которые не наблюдаются в сплоченности данных ТОРАЗ4 (см. рисунок 2.18). Это связано с тем, что особенности решения проявляются только на высоком разрешении сетки - 10 км и меньше, а данные ТОРАЗ4 получаются при моделировании на сетке с шагом 50 км. Результаты расчетов демонстрируют применимость разработанного кода для моделирования характеристик дрейфа морского льда в Арктическом регионе с реалистичным форсингом.

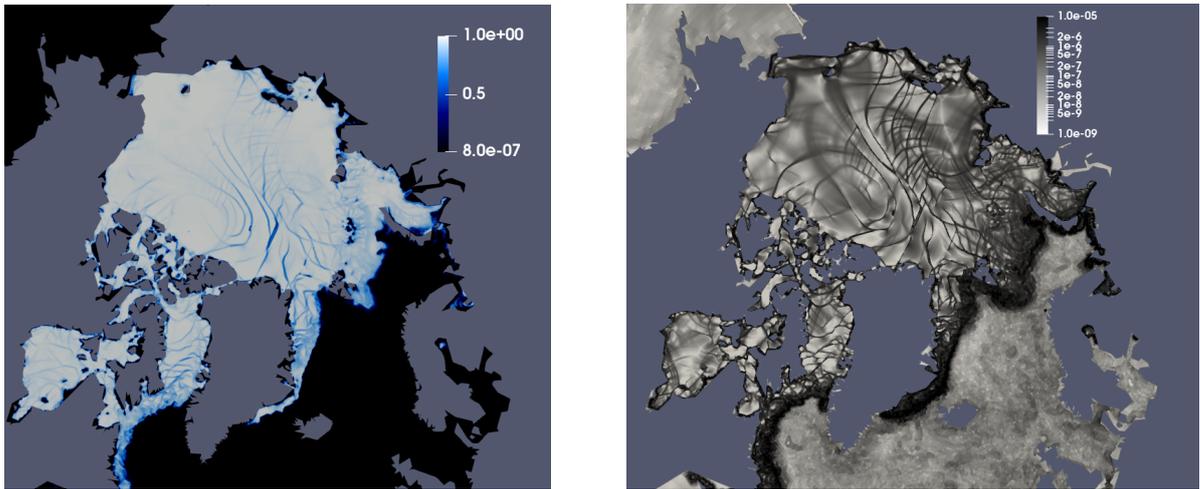


Рисунок 2.17 — Результаты расчетов характеристик дрейфа льда в Арктическом регионе на 00:00 15 марта 2020 года. Слева - сплоченность льда, справа - полная деформация Δ в логарифмическом масштабе.

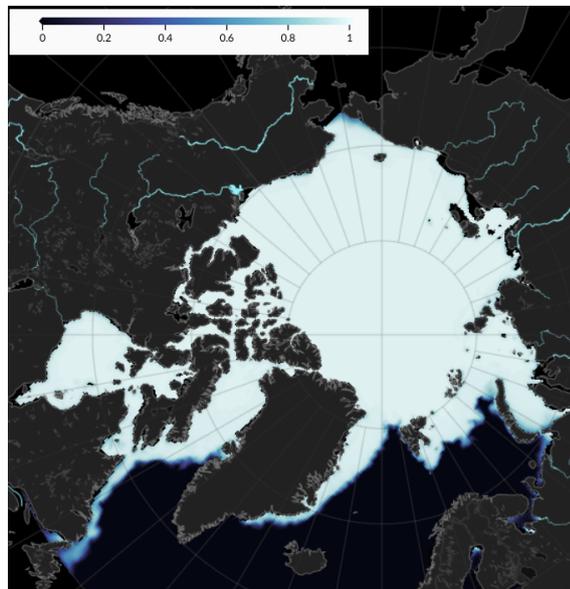


Рисунок 2.18 — Результаты прогноза сплоченности льда системой TORAZ4 на 00:00 15 марта 2020 года.

2.7.5. Профилировка и масштабирование кода

В данном разделе приводятся результаты профилировки последовательного кода, а также приведен график масштабирования (ускорения) работы параллельной программы.

Все расчеты проводились на кластере с 20-ядерными процессорами Intel Xeon Gold 6230 @ 2,10 ГГц, установленном в ИВМ РАН [98]. Профилировка последовательного кода основана на третьем тесте данной главы (2.7.3) с наиболее

плотной сеткой (размер треугольника 2 км), которая содержит $256 \cdot 296 \approx 76'000$ треугольников. Следовательно, имеется следующее количество узловых, реберных и треугольных степеней свободы $(N_V, N_T, N_E) \approx (38'000, 76'000, 114'000)$. Для сравнения берется mEVP метод со 100 псевдоитерациями и считается среднее время исполнения различных блоков решателя импульса: вычисление тензора скоростей деформации $\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = 0.5(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$ (**EPS**), сборка вектора внутренней силы (2.22) (**FORCE**), вычисление новых значений скоростей (2.17) и компонент тензора напряжений (2.18) (**VEL/SIG**), вычисление стабилизационного слагаемого (2.31) (**STAB**). В таблице 5 приведено среднее время расчета отдельных рутин. По результатам профилировки можно отметить несколько моментов. Про-

Таблица 5 — Время последовательной работы одного шага по времени различных блоков mEVP-решателя в мс.

-	EPS	FORCE	VEL/SIG	STAB
А-модель	2'892	6'108	558	-
CD-модель	2'725	6'231	1'980	9'809

цесс вычисления тензора скоростей деформации занимает одинаковое время на А и CD-сетках, поскольку в обоих случаях компоненты скоростей деформации вычисляются на каждом треугольнике. Единственным отличием является то, что на А-сетке скорости определены вершинах треугольника, а на CD-сетке в ребрах. Несмотря на большее количество реберных степеней свободы для вектора силы на CD-сетке, по сравнению с вершинными степенями свободы на А-сетке, процесс вычисления дискретного вектора силы на обеих сетках занимает приблизительно одинаковое время. Это связано с тем, что для каждого ребра есть не больше 2 смежных треугольников, откуда берутся компоненты тензора напряжений (2.22), в то время как на А-сетке есть в среднем 6 смежных треугольников (в случае регулярной сетки). В итоге суммарное количество треугольников, участвующих в вычислениях силы на CD-сетке приблизительно равно $N_E \cdot 2 \approx 3 \cdot N_V \cdot 2 = N_V \cdot 6$, что равняется количеству треугольников, участвующих в вычислении вектора силы на А-сетке. Поскольку количество степеней свободы для векторов приблизительно в 3 раза больше на CD-сетке, а для компонент тензора напряжений в 2 раза больше, в итоге процесс пересчета значений на CD-сетке занимает приблизительно в 4 раза больше времени. Также в CD-версии модели присутствует вычисление стабилизационного слагаемого, которое занимает значительную часть времени, сравнимую по величине с суммарным временем

всех остальных операций. Таким образом, суммарное последовательное время одной итерации численного решения уравнения импульса на А-сетке составляет примерно 9.5 секунд в рассматриваемой конфигурации, в то время как на CD-сетке время последовательного исполнения составляет примерно 21.5 секунду, что больше приблизительно в 2 раза. Заметим, что для достижения такого же количества степеней свободы для скоростей на А-сетке, как в CD-версии модели, необходимо увеличение размерности задачи в 3 раза, которое повлечет за собой трехкратное увеличение времени последовательного исполнения. Таким образом, использование CD-версии модели со стабилизацией вполне оправдано с вычислительной точки зрения.

Рассмотрим вопрос масштабируемости кода. На рисунке 2.19 представлен график ускорения работы параллельной программы для отдельных блоков импульса на А и CD-сетке вплоть до 256 вычислительных ядер. В целом наблюдается

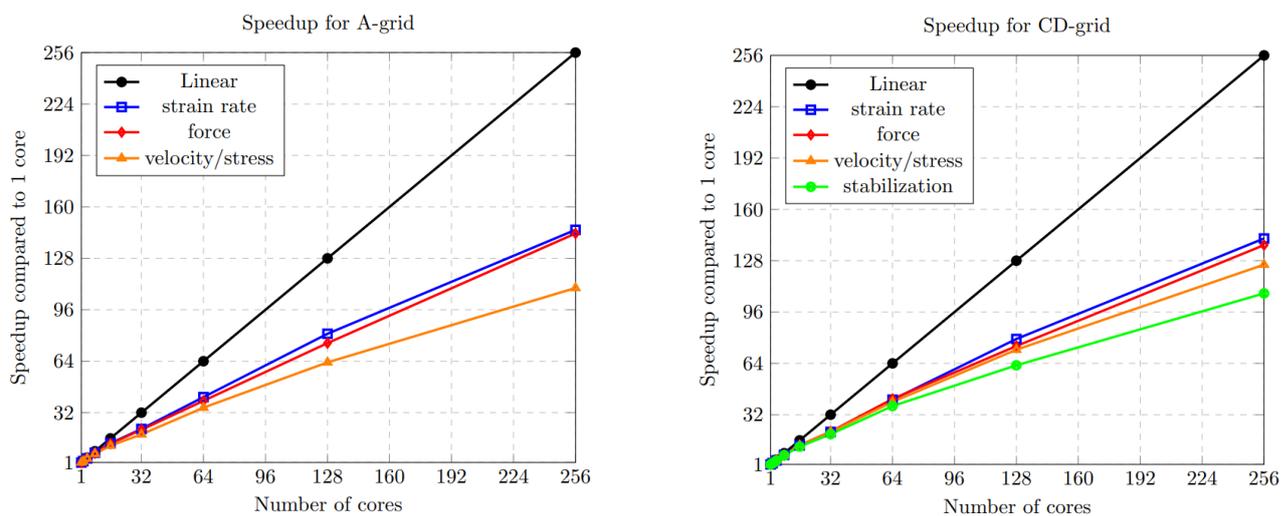


Рисунок 2.19 — Ускорение работы отдельных блоков численного решения уравнения импульса. Слева - сетка типа А. Справа - сетка типа CD.

небольшая сублинейная масштабируемость кода. Хуже всего происходит ускорение блока, соответствующего вычислению стабилизационного слагаемого, что объясняется большим количеством необходимых MPI-обменов из-за более широкого шаблона стабилизации по сравнению с другими операциями. Подобное сублинейное ускорение наблюдается и в другой отечественной модели FEMAO [99].

2.8. Основные результаты главы

В данной главе было приведено подробное описание реализации численного решения уравнений баланса импульса морского льда с вязко-пластичной реологией на неструктурированных треугольных сетках типа A и CD. Стандартная непрерывная конечно-элементная формулировка на сетке типа A в целом соответствует немецкой модели FESIM [30]. Существенной особенностью разработанного блока на A-сетке является его реализация с использованием локально-декартового похода вместо применения стандартной сферической метрики, который позволяет запускать модель на различных типах поверхности без существенного изменения кода. Также был реализован блок импульса на треугольной сетке типа CD, который был впервые применен в модели ICON несколько лет назад [39]. Для получения аппроксимации на этой сетке необходимо добавить стабилизирующее слагаемое в правую часть уравнения, которое "штрафует скорость за разрыв вдоль ребра". Данный подход также был адаптирован для использования локально-декартового базиса вместо сферической метрики.

Представлены результаты расчета модели в трех тестовых конфигурациях с искусственным аналитическим форсингом, которые продемонстрировали применимость модели для расчетов в плоской и сферической геометрии, а также продемонстрировали разрешающую способность линейных кинематических особенностей. В целом, можно заключить, что на одной и той же сетке, CD-версия модели дает значительно более детальное разрешение ЛКО, что объясняется большим количеством степеней свободы для скоростей и скаляров. Однако увеличение разрешения задачи не всегда приводит к лучшей разрешающей способности ЛКО, например, в работе [21] показано, что модель на треугольной сетке типа B, несмотря на удвоенное количество степеней свободы для скоростей, не дает заметно более детальной картины ЛКО. Проведена профилировка двух версий модели в случае последовательного исполнения. Выполнение одного шага решения уравнения баланса импульса на CD-сетке требует вдвое большего времени, по сравнению с сеткой типа A. Несмотря на более долгую работу, использование CD-версии оправдывается за счет увеличения степеней свободы для скоростей и скаляров, а также оставляет более широкие возможности для бесшовного каплинга разработанной ледовой модели с моделями океана на тетраэдральных или

треугольных призматических сетках. Анализ масштабируемости параллельного кода продемонстрировал небольшое сублинейное ускорение вплоть до 256 ядер, что является приемлемым результатом для моделей подобного типа. Код модели разработан на языке программирования C++ и использует библиотеку INMOST [75], которая отвечает за хранение сеточных данных и параллельные обмены.

В главе представлен процесс построения системы для краткосрочного прогноза дрейфа льда в Арктическом бассейне, построенный на основе А-версии модели. Предложен алгоритм построения триангуляции Арктического региона со сгущением в области с потенциально высокой сплоченность морского льда и места с неоднородным рельефом берега, который использует данные береговой линии GSHHG [91] и библиотеку Ani2D [71]. Также разработана параллельная система интерполяции геоданных на модельную сетку, которая использует функции стандартной библиотеки netCDF [95]. Результаты расчетов демонстрируют высокую разрешающую способность линейных кинематических особенностей, которая не наблюдается в системе Европейского прогноза TOPAZ4.

Сравнение результатов тестовых расчетов с передовыми мировыми моделями динамики морского льда FESIM, ICON, MITgcm, CICE показывает, что разработанная модель в целом не уступает им в качестве.

Глава 3. Численное решение локально-одномерного уравнения термодинамики морского льда со снегом

Морской ледовый покров формируется как динамическими, так и термодинамическими процессами, которые обычно разделяются в численных моделях на две независимые стадии схемы расщепления по времени. Таким образом, термодинамический блок разрабатывается отдельно от динамического, которому были посвящены первые две главы диссертации. Отделение термодинамических процессов также важно для модульного построения климатической модели Земли. Морской лед представляет собой сложную среду, состоящую из кристаллов пресного льда и соляных карманов, заполненных водой с растворенными органическими и неорганическими веществами, песком, водорослями и пузырьками воздуха. Из-за этой внутренней структуры термодинамические характеристики морского льда и однородного пресного льда существенно различаются. Наиболее явно отличия выражаются в виде эффективной теплоемкости и теплопроводности, которые считаются нелинейными функциями от солености и температуры льда ([100], [101]). Эта нелинейность требует использования специальных численных схем, как по времени, так и по пространству, которые должны гарантировать сохранение дискретной энергии на численном уровне. В принципе, эта проблема была решена в работе [102]. Морской лед рассматривается как одномерная среда, что отчасти объясняется тем, что горизонтальный масштаб льдины (300 м) значительно больше вертикального (3 м). Для торосов это не так, но их площадь значительно меньше площади ровного льда, поэтому при крупномасштабном моделировании (прогнозы климата или прогнозы погоды) одномерный подход считается приемлемым. Современные широко используемые термодинамические ледовые пакеты IcePack (часть CICE [72]) и SI3 (часть NEMO [44]) используют это принципиальное решение, но различаются некоторыми деталями параметризаций нелинейных коэффициентов теплоемкости и теплопроводности, а также организацией численных методов. Стоит отметить, что оба кода написаны на языке программирования Фортран.

Целью данной работы является разработка кода, основанного на аналогичных базовых физических и численных методах, но ориентированного на использование в перспективной отечественной модели климата Земли, разрабатываемой в ИВМ РАН и написанной на языке C++. В окончательных версиях

перспективной климатической модели планируется интенсивное использование GPU, поэтому библиотека термодинамики льда также должна подходить для ее реализации. По этой причине код написан на языке C++, что дает возможность его адаптации на CUDA, для исполнения на GPU.

Другой существенной особенностью разработанной модели является реализация полностью неявной схемы по времени для произвольных нелинейных коэффициентов, а также для общего вида внешнего атмосферного и океанического потока, который может зависеть от неизвестной заранее температуры поверхности и других физических характеристик. Данная схема не реализована в CICE и SI3. Экспериментальные данные [103] и модельные оценки с высоким пространственным разрешением показывают, что в холодное время года основная нелинейность вертикального профиля температуры возникает вблизи поверхности. Таким образом, другой целью работы является разработка кода с возможностью использования неравномерной пространственной сетки как для снега, так и для льда. Оптимизация сетки не является предметом данной работы, однако такое исследование может быть проведено в перспективе. Также в разработанном коде на границе "лед-снег" пространственная аппроксимация проводящего потока была реализована со вторым порядком точности, что делает градиенты численного решения более реалистичными на границе раздела. Новая модель была проверена на данных полевого эксперимента SHEVA [103]. Нульмерная версия кода, которая используется в климатической модели ИВМ РАН [20], также была реализована и сравнена с одномерной реализацией и данными наблюдений.

Основные результаты данной главы были опубликованы в работе [50]. Глава состоит из 4 разделов. В первом разделе приводится формулировка дифференциальных уравнений, на которых основана разработанная модель, а также описаны все физические параметризации для нелинейных коэффициентов и внешнего атмосферного потока. Во втором разделе формулируется численный метод решения уравнения адвекции-диффузии тепла в неподвижной сигма области, в качестве пространственной дискретизации используется метод конечных объемов на одномерной сетке типа C, а для дискретизации по времени используется метод релаксации нелинейных слагаемых с одновременным учетом нелинейного граничного условия, который соответствует полностью неявной схеме. Третий раздел посвящен численным экспериментам: запуск модели в задаче

с искусственным форсингом, и валидация на данных полевого эксперимента. В четвертом разделе приводятся основные результаты главы.

3.1. Исходные уравнения

Этот раздел посвящен всем физическим аспектам дифференциальных уравнений в частных производных, на которых основана разработанная модель термодинамики льда со снегом. Основными прогностическими переменными являются толщина льда и/или снега h_i/h_s и профиль энтальпии E_i/E_s или температуры T_i/T_s . Далее будем использовать обозначения h и E/T без указания среды в тех местах, где это не принципиально. Также, в новейших моделях термодинамики морского льда вводят соленость S , как прогностическую переменную и к стандартному уравнению диффузии тепла добавляют уравнение дренажа солености под действием силы тяжести [104]. Данный механизм пока не включен в разрабатываемую модель и вместо этого используется некоторый заданный авто-модельный профиль солености льда S . Если отсутствует явное указание среды, считается, что речь идет о льде.

3.1.1. Закон сохранения энтальпии

Закон сохранения энтальпии выражается нелинейным одномерным уравнением диффузии тепла с проникающей радиацией

$$\rho \left. \frac{\partial E}{\partial t} \right|_z = \rho c \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_z = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} + R \right), \quad (3.1)$$

где E - энтальпия, ρ - плотность, T - температура, c - теплоемкость, k - теплопроводность, R - количество коротковолновой радиации, проникающей в среду. Поскольку толщина льда не стационарна из-за процессов таяния и намерзания, уравнение (3.1) определяется в открытой подвижной области (z_b, z_{su}) , где z_b и z_{su} - координаты нижней кромки и поверхности ледяного столба. Отметим, что при описании модели ось z направлена вверх. Естественный подход к трактовке

подвижной области состоит в разделении процессов диффузии тепла и таяния/намерзания в численной реализации.

В термодинамическом блоке модели CICE [23] после каждого обновления толщины льда температурный профиль интерполируется на новую сетку с использованием процедуры, сохраняющей суммарную сеточную энергию. Данный способ реализован во многих других мировых моделях термодинамики, однако в работе [105] показано, что данный подход является более затратным в вычислительном плане по сравнению с методом расчета в неподвижной сигма-области, что сильнее всего проявляется в случае сверхвысокого пространственного разрешения. По этой причине было принято решение использовать сигма-координату вместо стандартной z - координаты.

Введем преобразование координат $\sigma = (z - z_b)/(z_{su} - z_b)$, чтобы объединить процесс диффузии тепла и изменения толщины. Используя правило дифференцирования сложной функции по времени в левой части уравнения (3.1) получим уравнение адвекции-диффузии, представляющее из себя закон сохранения энthalпии с перераспределением толщины в фиксированной сигма-области (0, 1)

$$\rho \left(\left. \frac{\partial E}{\partial t} \right|_{\sigma} + \dot{\sigma} \frac{\partial E}{\partial \sigma} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} + R \right). \quad (3.2)$$

Поскольку временной масштаб процессов плавления/намерзания намного больше, чем диффузия тепла, уравнение (3.2) определяет задачу адвекции-диффузии с доминирующей диффузией, которая не требует специальных численных стабилизаций. Аналогично [105], закон диффузии тепла дополняется уравнением сохранения массы

$$\frac{\partial(\partial z/\partial \sigma)}{\partial t} + \frac{\partial(\partial z/\partial \sigma \cdot \dot{\sigma})}{\partial \sigma} = 0, \quad (3.3)$$

которое представляет из себя одномерное уравнение переноса толщины льда виртуальной скоростью $\dot{\sigma}$. Вводя поток массы $\omega = \partial z/\partial \sigma \cdot \dot{\sigma}$ и отмечая, что $\partial z/\partial \sigma = z_{su} - z_b = h$ не зависит от σ , получаем, что ω является линейной функцией от σ . Следовательно, граничных значений ω достаточно, чтобы определить ω во всей области. Умножение уравнения (3.2) на $\partial z/\partial \sigma$ в сочетании с уравнением (3.3) дает следующую окончательную форму уравнения адвекции-диффузии, которая в дальнейшем будет использоваться для формулировки дискретной задачи

$$\frac{\partial(\rho E \partial z/\partial \sigma)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho E \omega)}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} + R \right). \quad (3.4)$$

3.1.2. Граничные условия

Граничные условия на нижней кромке льда и на поверхности льда или снега можно записать в универсальной форме как

$$\left[\rho L \frac{dz}{dt} = F - k \frac{\partial T}{\partial z} \right]_{z=z_b, z_{su}}, \quad (3.5)$$

где L - удельная теплота плавления/замерзания льда, F - суммарный внешний поток. Данное граничное условие означает, что количество энергии, необходимое для изменения толщины льда/снега в единицу времени равно разнице между внешним (атмосферным или океаническим) и внутренним проводящим потоком тепла. Заметим, что интегрирование уравнения (3.3) по всей σ -области дает $\frac{\partial h}{\partial t} = \omega_b - \omega_{su}$, поэтому лед намерзает у основания, в том случае, когда ω_b положителен, и тает на поверхности, когда ω_{su} положителен. Это означает, что знак ω противоположен dz/dt для оси z , направленной вверх. По этой причине можно переписать уравнение (3.5) в терминах потока массы ω

$$\left[\rho L \omega = k \frac{\partial T}{\partial z} - F \right]_{z=z_b, z_{su}}. \quad (3.6)$$

Если реализуется конфигурация льда со снегом, то на границе "лед-снег" ставится граничное условие непрерывности температуры и проводящего теплового потока

$$T_i|_{\text{ice surface}} = T_s|_{\text{snow base}}, \quad -k_i \frac{\partial T_i}{\partial z} \Big|_{\text{ice surface}} = -k_s \frac{\partial T_s}{\partial z} \Big|_{\text{snow base}}, \quad (3.7)$$

где индекс "i" отвечает за лед, а "s" - за снег. В модели реализован следующий общий вид нелинейного внешнего атмосферного потока на поверхности льда/снега $F|_{z=z_{su}} = F_{\text{atm}}$, где

$$F_{\text{atm}} = \varepsilon (F_{\text{lw}} - \sigma(T_{\text{surf}} + T_0)^4) + (1 - \alpha)(1 - i_0)F_{\text{sw}} + F_{\text{sh}} + F_{\text{lh}} + F_P. \quad (3.8)$$

Здесь ε - излучающая способность поверхности, σ - постоянная Стефана-Больцмана, α - альbedo, i_0 - поверхностный коэффициент пропускания, T_0 - ноль градусов Цельсия в Кельвинах, T_{surf} - температура поверхности в градусах Цельсия. Полный атмосферный поток состоит из длинноволнового излучения F_{lw} , излучения поверхности $\sigma(T_{\text{surf}} + T_0)^4$, коротковолнового излучения F_{sw} , потока явного тепла F_{sh} , потока скрытого тепла F_{lh} , а также потока тепла за счет

нагретых осадков F_p . Описанные потоки параметризуются следующим образом

$$F_{sh} = \rho_a c_{pa} C_{sh} |\mathbf{u}_a| (T_a - T_{surf}), \quad (3.9)$$

$$F_{lh} = \rho_a L_s C_{lh} |\mathbf{u}_a| (q_a - q_{surf}), \quad (3.10)$$

$$F_p = p \rho_w c_{pw} \max(T_a - T_{surf}, 0), \quad (3.11)$$

где \mathbf{u}_a двумерная поверхностная скорость ветра, $T_{a/surf}$ температура воздуха/поверхности, $q_{a/surf}$ удельная влажность воздуха/поверхности. Все используемые в модели константы собраны в таблице 6 [106]. Поглощенная коротковолновая энергия в единице объема R определяется как

$$R = \begin{cases} F_{ps} \kappa_s \exp^{-\kappa_s (z_{snow\ surface} - z)}, & z_{snow\ base} < z < z_{snow\ surface}; \\ F_{pi} \kappa_i \exp^{-\kappa_i (z_{ice\ base} - z)}, & z_{ice\ base} < z < z_{ice\ surface}; \end{cases}$$

где $F_{ps} = F_{sw}(1 - \alpha)i_0$ - коротковолновый тепловой поток на поверхности льда, а $F_{pi} = F_{ps} \exp^{-\kappa_s h_s}$ - остаток коротковолнового потока на границе раздела "снег-лед" (поверхность льда), κ_s и κ_i - коэффициенты поглощения для снега и льда соответственно. Поглощение энергии подчиняется закону Бугера-Ламберта-Бера.

3.1.3. Параметризация энтальпии, теплоемкости и теплопроводности

Вырезанный цилиндр морского льда представляет из себя сплошную часть, состоящую из пресного льда с вырезами, заполненными рассолом, которые носят название соляных карманов. На фотографиях 3.1, сделанных автором во время прохождения стажировки в университете University Centre in Svalbard, Шпицберген, Лонгйир, Норвегия, представлены фотографии поперечного (слева) и продольного (справа) разреза цилиндра морского льда. На левой фотографии видно, что разрез представляет из себя зеркальную, отражающую свет, область, в которой присутствуют полости, которые были заполнены морской водой, что подтверждает сказанное ранее. В настоящее время в термодинамических моделях широко распространены несколько параметризаций теплоемкости и теплопроводности морского льда в зависимости от солености и температуры. Параметризация

Таблица 6 — Физические параметры и константы, используемые в модели термодинамики

Символ	Имя переменной или константы	Значение	Размерность
β	константа в (3.12)	0.1172	$\text{Вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{psu}^{-1}$
C_{sh}	коэффициент явной теплопередачи	1.0×10^{-3}	-
C_{lh}	коэффициент скрытой теплопередачи	1.0×10^{-3}	-
C_{pa}	теплоемкость воздуха	1.1×10^3	$\text{J} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
C_{p0}	теплоемкость пресной воды или снега	2.06×10^3	$\text{J} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
C_{po}	теплоемкость воды при солености 30 psu	3.99×10^3	$\text{J} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
C_{pw}	теплоемкость океанической воды	4.17×10^3	$\text{J} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
ε	коэффициент излучения льда, снега	0.99	-
γ	эмпирическая константа в (3.13)	1.8×10^4	$\text{Дж} \cdot ^\circ\text{C} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{psu}^{-1}$
k_s	теплопроводность снега	0.31	$\text{Вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
k_{i0}	теплопроводность пресного льда	2.03	$\text{Вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
κ_i	объемный коэффициент поглощения льда	1.5	м^{-1}
κ_s	объемный коэффициент поглощения снега	10	м^{-1}
L_{f0}	удельная теплота плавления пресного льда	3.34×10^5	$\text{Дж} \cdot \text{кг}^{-1}$
L_s	удельная теплота сублимации	2.83×10^6	$\text{Дж} \cdot \text{кг}^{-1}$
μ	эмпирическая константа в (3.17)	0.054	$^\circ\text{C} \cdot \text{psu}^{-1}$
ρ_a	плотность воздуха	1.28	$\text{кг} \cdot \text{м}^{-3}$
ρ_s	плотность пресного снега	330	$\text{кг} \cdot \text{м}^{-3}$
ρ_i	плотность пресного льда	917	$\text{кг} \cdot \text{м}^{-3}$
ρ_o	плотность воды соленостью 30 psu	1025	$\text{кг} \cdot \text{м}^{-3}$
ρ_w	плотность пресной воды	1000	$\text{кг} \cdot \text{м}^{-3}$
σ	постоянная Стефана-Больцмана	6.67×10^{-8}	$\text{Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$
i_0	количество коротковолн. рад. в снег или лед	0.08, 0.15	-

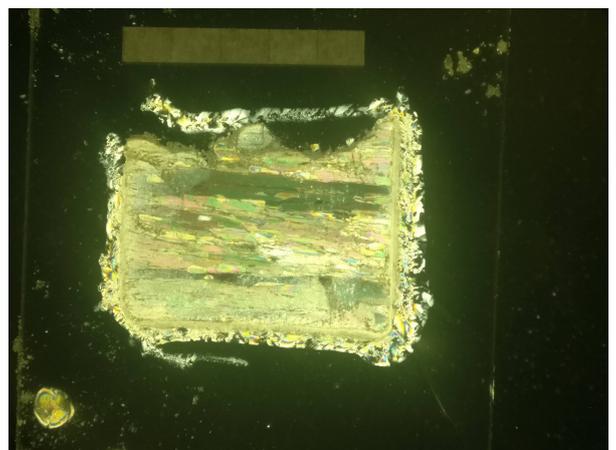
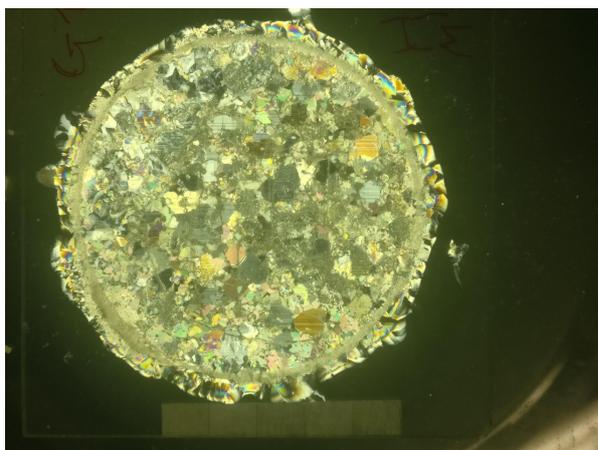


Рисунок 3.1 — Слева - фотография поперечного разреза цилиндра морского льда, справа - продольного разреза.

”brine pocket” (параметризация соляных карманов), основана как раз на предположении о том, что морской лед состоит из солевых карманов, окруженных свежим льдом. Теплоемкость и теплопроводность, впервые определенные в работе [100], могут быть записаны как функции температуры T и солёности S в виде

$$k(S, T) = k_{i0} + \frac{\beta S}{T}, \quad (3.12)$$

$$c(S, T) = c_{p0} + \frac{\gamma S}{T^2}, \quad (3.13)$$

где k_{i0} теплопроводность пресного льда, c_{p0} теплоемкость пресного льда или снега, β и γ эмпирические константы, приведенные в таблице 6. В работе [107] выводится, что внутренняя энергия (энтальпия) морского льда может быть записана как

$$E(S, T) = c_{p0} \left(1 - \frac{-\mu S}{T}\right) - L_{f0} \left(1 - \frac{-\mu S}{T}\right) + c_{po} \frac{-\mu S}{T} T, \quad (3.14)$$

где L_{f0} удельная теплота плавления пресного льда, c_{po} теплоемкость океанской воды при солёности 30 psu. Данное определение энтальпии согласуется с уравнением (3.13), поскольку $c(S, T) = \partial E / \partial T$. При использовании параметризации (3.12) на практике возникли проблемы с неопределенностью k при приближении температуры к точке плавления, поэтому вместо нее мы использовали параметризацию ”bubbly-brine” (параметризация пузырькового рассола) [101], основанную на том, что вместо соляных карманов рассол содержится в пресном льде в виде пузырей, заполненных жидкостью. Из этого предположения выводится следующий вид теплопроводности

$$k(S, T) = \frac{\rho_i}{\rho_0} (2.11 - 0.011T + 0.09S/T). \quad (3.15)$$

На рисунке 3.2 показана зависимость теплопроводности от температуры для параметризаций ”Untersteiner” (или ”brine pocket”) и ”bubbly-brine”. Видно, что при стремлении температуры к точке плавления, теплопроводность ”Untersteiner” становится отрицательной, тогда как кривая ”bubbly-brine” остается в положительной области. Отрицательные значения теплопроводности приводят к неустойчивости модели в некоторых случаях. Отметим, что вычитая два уравнения типа (3.14) можно записать изменение энтальпии в форме

$$E(S, T) - E(S, T') = \left(c_{p0} - L_{f0} \frac{T_f}{T T'} \right) (T' - T) = c(T, T') (T' - T), \quad (3.16)$$

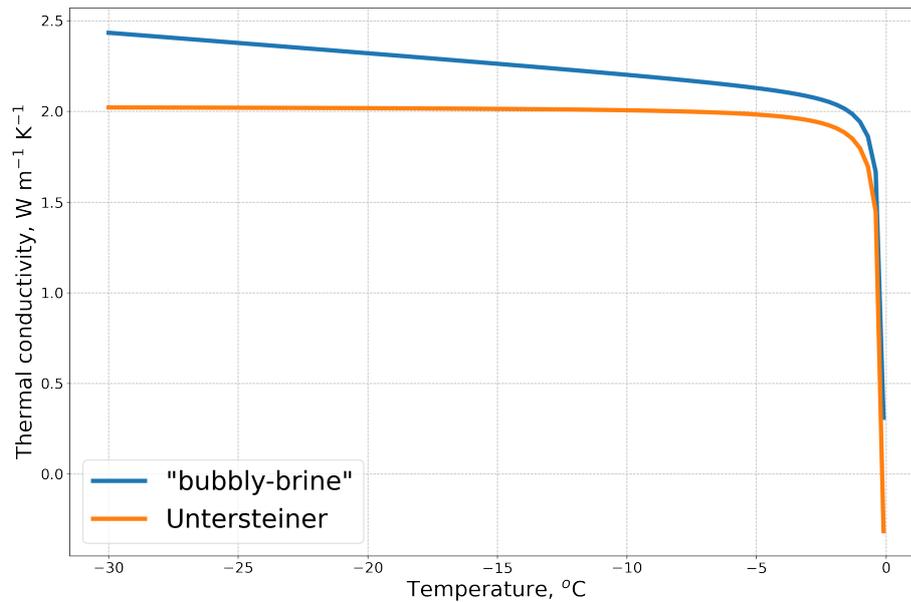


Рисунок 3.2 — График теплопроводности "Untersteiner" и "bubbly-brine" в зависимости от температуры при фиксированной солености 2 psu.

которая определяет "эффективную" теплоемкость $c(T, T')$ для количества энергии, необходимой для изменения температуры льда от T до T' . Введем обозначение для температуры плавления, которая равна

$$T_f = -\mu S. \quad (3.17)$$

Тогда удельная теплота плавления выражается аналогичным (3.16) образом [106]

$$L(S, T) = c_{p0}(T_f - T) + L_{f0}(1 - T_f/T). \quad (3.18)$$

3.2. Численные методы

В этом разделе обсуждаются все аспекты численных методов, используемых для решения уравнения адвекции-диффузии (3.4) в фиксированной сигма-области для совместной системы "лед-снег".

3.2.1. Дискретизация с сохранением энтальпии

Введем разбиение единичного отрезка на ячейки размерами $\Delta\sigma_i$. Размер соответствующей ячейки в z -области равен $\Delta z_i = \Delta\sigma_i \cdot h$. Будем использовать метод конечных объемов в качестве метода пространственной дискретизации, поэтому определим температуру T и энтальпию E постоянными на ячейке. Значения потока массы ω определяются в узлах. Для удобства обозначений первый узел, расположенный на границе "лед-океан", соответствует индексу 0. Далее номера узлов увеличиваются до N при движении вверх (ось z направлена вверх). Узел N соответствует границе "лед-снег". Узел с индексом $N + M$ соответствует поверхности снега. Номера ячеек обозначим полуцелыми индексами так, что ячейка с индексом $i + 1/2$ ограничена узлом i снизу и узлом $i + 1$ сверху. Данный выбор расположения степеней свобод соответствует одномерной сетке типа C.

Проинтегрируем уравнение (3.4) по сигма-ячейке с номером $i + 1/2$ для каждого i (от 0 до $N - 1$ для льда и от N до $N + M - 1$ для снега)

$$\frac{\partial(\rho E_{i+1/2} \Delta z_{i+1/2})}{\partial t} + \Delta(\rho E \omega) = \Delta \left(k \frac{\partial T}{\partial z} + R \right), \quad (3.19)$$

где символ Δ обозначает разность между верхним и нижним узловыми значениями функции в ячейке $i + 1/2$: $\Delta a = [\Delta a]_{i+1/2} = a_{i+1} - a_i$.

Вычитая $\Delta(\rho E^n \omega)$ из обеих частей уравнения (3.19), используя формулу для вариации энтальпии (3.16) и применяя схему Эйлера первого порядка по времени для дискретизации производной по времени, получаем дискретизацию BL99 ([102])

$$\begin{aligned} \rho c_{i+1/2}^p \frac{T_{i+1/2}^{p+1} - T_{i+1/2}^n}{\Delta t} \Delta z_{i+1/2}^{p+1} + \rho \Delta (c^p (T^{p+1} - T^n) \omega^p) = \\ - \rho E_{i+1/2}^n \frac{\Delta z_{i+1/2}^{p+1} - \Delta z_{i+1/2}^n}{\Delta t} + \Delta \left(k^p \left[\frac{\partial T}{\partial z} \right]^{p+1} - \rho E^n \omega^p + R \right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Здесь верхние индексы $n/(n + 1)$ соответствуют старым/новым значениям (с предыдущего и текущего глобального шага по времени), а верхние индексы $p/(p + 1)$ соответствуют предыдущему/текущему псевдошагу метода релаксации, который будет представлен далее.

Как уже отмечалось ранее, рассматриваемая задача обладает доминирующей диффузией, поэтому стандартные пространственные дискретизации адвективного и диффузионного слагаемого вполне допустимы, и дополнительная стабилизация не требуется. В модели реализована дискретизация против потока первого порядка для адвекции $\Delta(F\omega)$. Для любой функции F

$$\Delta(F\omega) = \Delta(F\omega)_{i+1/2} = [F\omega]_{i+1} - [F\omega]_i,$$

$$[F\omega]_j = \begin{cases} F_{j-1/2}\omega_j, & \text{для } \omega_j \geq 0, \\ F_{j+1/2}\omega_{j+1}, & \text{для } \omega_j < 0. \end{cases}$$

Для члена диффузии $\Delta(k \cdot \partial T / \partial z)$ используется центральная разность второго порядка (аналогично [72])

$$\Delta(k \cdot \partial T / \partial z) = \Delta(k \cdot \partial T / \partial z)_{i+1/2} = (k \cdot \partial T / \partial z)_{i+1} - (k \cdot \partial T / \partial z)_i,$$

$$(k \cdot \partial T / \partial z)_j = k_j^* \cdot (T_{j+1/2} - T_{j-1/2}),$$

$$k_j^* = \frac{2k_{j-1/2}k_{j+1/2}}{k_{j-1/2}\Delta z_{j+1/2} + k_{j+1/2}\Delta z_{j-1/2}}.$$

Заметим, что для первой и последней ячейки значения температуры одной из соседних ячеек не определены, поэтому вместо этого используется значение температуры границы раздела. Матрично-векторная форма для уравнения (3.20) соответствует трехдиагональной матрице, поскольку только температуры соседних ячеек ($T_{i-1/2}$, $T_{i+1/2}$ и $T_{i+3/2}$) включены в уравнение, соответствующее ячейке с номером $i + 1/2$. Для решения СЛАУ используется стандартный алгоритм трехдиагональной прогонки с линейным временем исполнения.

Значения ω также обновляются в итерационном процессе. Чтобы найти новые узловые значения ω , сначала пересчитываются граничные значения в соответствии с граничными условиями, а затем линейно интерполируются в узлы, поскольку ω является линейной функцией σ .

Чтобы вычислить новые значения Δz , на каждой ячейке интегрируется уравнение (3.3), а затем применяется явная схема Эйлера по времени

$$\frac{\partial(\Delta z_{i+1/2})}{\partial t} + \Delta(\omega) = 0 \Rightarrow \Delta z_{i+1/2}^{n+1} = \Delta z_{i+1/2}^n - \Delta t(\omega_{i+1}^n - \omega_i^n). \quad (3.21)$$

Описанный численный метод построен таким образом, что регулярное пространственное разрешение нигде не подразумевается, поэтому при необходимости можно использовать локальное измельчение сетки. Важно отметить, что построенная дискретизация по времени (3.20) сохраняет суммарную дискретную сеточную энтальпию, что показано в работе [105].

3.2.2. Аппроксимация граничного условия

Граничное условие (3.6) используется для нахождения либо значения ω , либо температуры T на границе раздела в зависимости от текущей конфигурации, что будет обсуждаться далее. Если значение ω известно, то решается нелинейная одномерная задача поиска корня одномерной функции для определения температуры границы раздела (внешний поток F (3.8), теплота плавления L (3.18) и теплопроводность k (3.15) являются нелинейными функциями от T) с помощью метода секущих. Стоит отметить, что может быть применен и любой другой численный метод поиска корня. Например, использование метода Рунддера может увеличить скорость сходимости. Для решения одномерного уравнения фиксируется априорная точность температуры T : $|T^{k+1} - T^k|$ на уровне 10^{-9} , далее запускается метод секущих до сходимости. В случае фиксированной температуры границы раздела, нахождение значения ω , согласованного с граничным условием (3.6), тривиально.

3.2.3. Совместный расчет профилей температуры льда и снега

Уравнение (3.20) для каждого i задает систему линейных уравнений, которую можно записать в глобальной матрично-векторной форме как для льда, так и для снега. Уравнение (3.7) задает равенство проводящих потоков, которое может быть записано в виде дискретного уравнения второго порядка точности по пространству с 5 неизвестными значениями температуры (температуры двух верхних ячеек льда, температура интерфейса "лед-снег" и температуры двух нижних ячеек снега). Схематически совместная матрично-векторная задача для льда и снега показана на рисунке 3.3 слева. Верхний левый квадратный блок соответствует льду, нижний правый — снегу, центральный ряд — дискретизированному уравнению (3.7). Заметим, что в этом случае глобальная матрица больше не является трехдиагональной. Чтобы свести систему к трехдиагональной, используется исключение Гаусса для обнуления значений a_0 и a_4 (рисунок 3.3 (справа)). После этого глобальная матрица становится трехдиагональной, которая обращается с помощью

стандартного метода прогонки, для совместного расчета профиля температуры льда и снега.

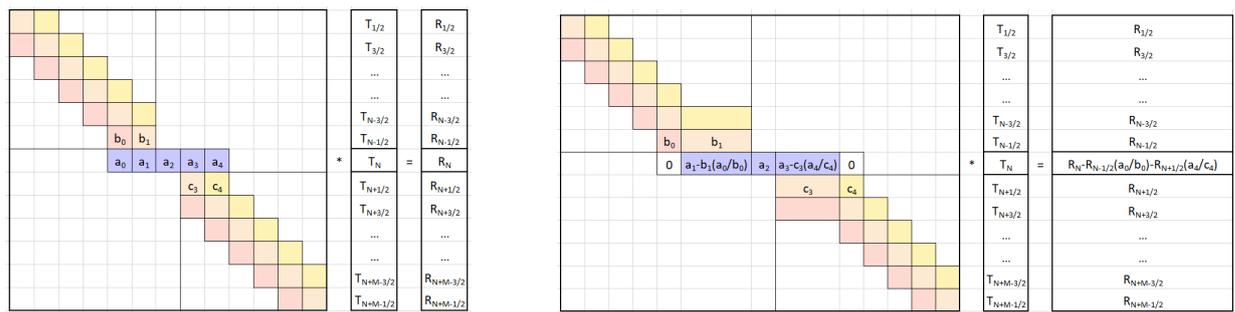


Рисунок 3.3 — Схема совместной СЛАУ для льда и снега до (слева) и после (справа) метода исключения Гаусса, который приводит глобальную матрицу к трехдиагональной форме.

Метод релаксации для нелинейных коэффициентов организован следующим образом

1. Решение совместной СЛАУ (3.20) для поиска профиля температуры льда и снега;
2. Решение нелинейного граничного условия (3.6) для поиска граничных температур или потоков массы ω ;
3. Обновление нелинейных коэффициентов теплоемкости (3.13), теплопроводности (3.15) и энтальпии (3.14);
4. Линейная интерполяция значений ω в узлы, и вычисление новых толщин ячеек в соответствии с уравнением (3.21);
5. Оценка приращения нормы вектора узловых скоростей $\|T^{p+1} - T^p\|$. Если приращение меньше заданного порога, то вычисления заканчиваются. Иначе цикл повторяется заново.

Организация итерационного процесса описанным способом гарантирует одновременный поиск всех неизвестных - профиля температур, граничных значений ω , толщин ячеек, температур интерфейсов. В случае сходимости, согласованные температуры границ находятся вместе с распределением профиля температуры по толщине. Такой подход соответствует полностью неявному методу и не накладывает дополнительных ограничений типа Куранта на шаг по времени.

3.2.4. Четыре режима работы модели

В зависимости от количества снега на поверхности льда, а также температуры на границе "лед/снег-атмосфера" есть четыре режима работы модели: намерзание льда без снега, намерзание льда со снегом, таяние льда и таяние снега. В каждом из этих четырех режимов, температура раздела на границе "лед-океан" привязана к точке замерзания океанической воды $T_{fo} = -\mu S_o$, где S_o соленость океана, так как присутствует непрерывность температуры в пограничном слое океана. Поэтому нижнее граничное условие (3.6) всегда используется для поиска граничного значения потока массы $\omega_{ice\ base}$. С другой стороны, температура поверхности льда или снега на верхней границе не может превышать температуру плавления льда или снега $T_{fi} = -\mu S_i$, где S_i - соленость верхнего слоя льда. Температура таяния снега $T_{fs} = 0^\circ C$, так как снег имеет нулевую соленость. Другой важной особенностью является отсутствие фазового перехода на границе "лед-снег" (ω на границе лед-снег всегда равен нулю). Это означает, что лед не может таять под снегом до тех пор, пока не растает весь снег. Четыре различных режима работы модели термодинамики определяются следующими характеристиками:

1. **Намерзание льда без снега.** Толщина снега меньше порогового значения (в модели используется значение 1 см). Температура на границе "лед-атмосфера" не превышает T_{fi} . Ищется только температурный профиль льда согласно (3.20). Граничное условие на границе раздела "лед-атмосфера" (3.6) используется для нахождения температуры поверхности льда при фиксированном потоке массы, равным нулю: $\omega_{ice\ surface} = 0$;
2. **Намерзание льда со снегом.** Толщина снега больше порогового значения. Температура на границе "снег-атмосфера" не превышает $T_{fs} = 0^\circ C$. Решается совместная система для льда и снега для поиска профиля температур (3.20). Граничное условие на границе "снег-атмосфера" используется для определения температуры поверхности снега при потоке массы, равным нулю $\omega_{snow\ surface}$;
3. **Таяние льда.** Толщина снега меньше порогового значения. Температура на границе "лед-атмосфера" равна T_{fi} . Граничное условие на границе "лед-атмосфера" используется для нахождения ω на верхнем интерфейсе льда. Обновляется только профиль температур льда согласно (3.20);

4. **Таяние снега.** Толщина снега превышает пороговое значение. Температура на границе "снег-атмосфера" зафиксирована на уровне $T_{fs} = 0^\circ C$. Граничное условие на границе "снег-атмосфера" используется для нахождения ω на поверхности снега. Решается совместная система для льда и снега для поиска профиля температур (3.20).

Считается, что по умолчанию реализуется режим "намерзания льда без/со снегом", поскольку априори не известно, превысит ли найденная температура поверхности среды точку плавления. При нарушении этого условия, происходит переход на соответствующий режим плавления. Псевдокод для основного цикла по времени представлен в листинге А.5 приложения.

3.2.5. Краткое описание нульмерной модели

Помимо описанного ранее численного метода, в рамках разработанной модели также реализован блок нульмерной термодинамики льда со снегом. Нульмерная модель строится в предположении нулевой теплоемкости льда и снега, а также постоянной теплопроводности и отсутствии проникающей радиации. Решение аналогичного уравнения диффузии (3.1) с этими ограничениями гарантирует линейный профиль температуры в рассматриваемой среде (лед или снег). Внутренняя логика 0D-модели полностью повторяет описанную выше одномерную реализацию. Единственное отличие состоит в том, что не требуется поиск профиля температур. Граничное условие на поверхности снега используется для нахождения температуры верхней границы (в случае отсутствия таяния), а температура на границе "лед-снег" выбирается из условия непрерывности проводящего потока (3.7). При этом аппроксимация градиента температуры естественным образом имеет первый порядок точности.

3.3. Численные эксперименты

В этом разделе представлены результаты двух численных экспериментов. Первый тест представляет из себя простой численный эксперимент с искусствен-

ным слабоинтенсивным форсингом. Он предназначен для того, чтобы проверить адекватность работы одномерной и нульмерной модели во всех четырех режимах, а также качественно сравнить предсказываемые толщины и профили температур льда и снега. Вторым экспериментом является валидация моделей на данных полевого эксперимента SHEBA (The Surface Heat Budget of the Arctic Ocean) [103], что позволяет оценить точность прогноза. Сразу отметим, что в обоих вычислительных экспериментах шаг по времени моделей фиксирован и равен $\Delta t = 1$ час.

Программный код одномерной и нульмерной моделей, который использовался для проведения валидации, написан на языке программирования Python. Помимо этого, разработана версия библиотеки на C++ для практических расчетов, а также реализованы основные интерфейсные функции для вызова из Fortran. Код находится в открытом доступе в сети интернет и может быть получен по ссылке [108].

3.3.1. Модельная задача с искусственным форсингом

Опишем аналитический форсинг, реализующий все 4 режима работы модели. Для плавного воспроизведения всех переходных процессов предлагается оставить только поток явного тепла F_{sh} в качестве полного потока из атмосферы (3.8), зависящий от температуры атмосферы, при фиксированном абсолютном значении скорости ветра $|\mathbf{u}| = 15 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$. Поскольку нульмерная модель не описывает проникающую радиацию, для корректности сравнения, она отключается и в одномерной модели. Поток тепла из океана также задается равным нулю, и только внутренни проводящий поток во льду отвечает за намерзание и таяние на нижней кромке льда.

В эксперименте температура океана зафиксирована на уровне $-162 \text{ }^\circ\text{C}$, что соответствует температуре замерзания воды с соленостью 30 psu. Эволюция тем-

температуры атмосферы в течение одного модельного ”года” задается как

$$T_a(t) = \begin{cases} -30\text{ }^\circ\text{C}, & t \in \text{”зимний” период,} \\ \text{линейный рост от } -30\text{ }^\circ\text{C} \text{ до } 10\text{ }^\circ\text{C}, & t \in \text{”весенний” период,} \\ 10\text{ }^\circ\text{C}, & t \in \text{”летний” период,} \\ \text{линейное падение от } 10\text{ }^\circ\text{C} \text{ до } -30\text{ }^\circ\text{C}, & t \in \text{”осенний” период.} \end{cases}$$

Значения временных интервалов подобраны таким образом, чтобы лед не растаял полностью в ”весенний” и ”летний” периоды. В эксперименте используются следующие значения: ”зимний” период [0 ч., 350 ч.], ”весенний” период [350 ч., 550 ч.], ”летний” период [550 ч., 700 ч.] и ”осенний” период [700 ч., 900 ч.]. Интенсивность осадков задается в противофазе к изменению температуры атмосферы следующим образом

$$p(t) = \begin{cases} 10^{-7}\text{ м/с}, & t \in \text{”зимний” период,} \\ \text{линейное падение от } 10^{-7}\text{ м/с} \text{ до } 0\text{ м/с}, & t \in \text{”весенний” период,} \\ 0\text{ м/с}, & t \in \text{”летний” период,} \\ \text{линейный рост от } 0\text{ м/с} \text{ до } 10^{-7}\text{ м/с}, & t \in \text{”осенний” период.} \end{cases}$$

Эволюция во времени температуры атмосферы и скорости выпадения осадков за три модельных ”года” представлена на рисунке 3.4.

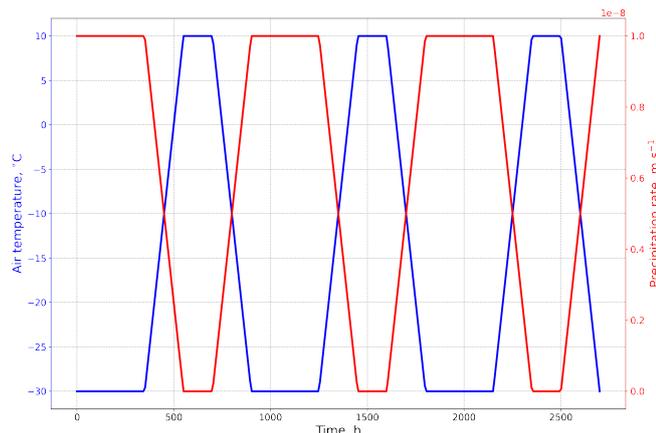


Рисунок 3.4 — Аналитическая температура атмосферы и скорость выпадения осадков для первого модельного эксперимента.

Начальная толщина льда и снега установлена равной 4 м и 0.1 м соответственно. Начальный профиль температуры во льду задается линейным от точки

замерзания воды на нижней границе до $-15\text{ }^{\circ}\text{C}$ на поверхности льда. Начальная температура в снегу также линейна от $-15\text{ }^{\circ}\text{C}$ на интерфейсе "лед-снег" до $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ на поверхности снега. В вычислениях используется линейный автомодельный профиль солености во льду от 4 psu на нижней границе до 1 psu на верхней для 1D модели и осредненное значение 2.5 psu для 0D модели. Соленость влияет на теплоту плавления, а также на теплоемкость и теплопроводность льда. Результаты расчетов приводятся для 10 равномерных ячеек во льду и 5 ячеек в снегу для 1D модели. Шаг по времени фиксирован и равен 1 ч для обеих моделей.

Полученные временные ряды показаны на рисунке 3.5. Автор обращает внимание, что на этом и следующих рисунках временных рядов по оси y представлена z -координата, по оси x время, цветом выделена температура льда и снега, пунктирной линией выделена поверхность воды, а одномерный профиль льда и снега в каждый момент времени представлен с учетом выталкивающей силы Архимеда.

На рисунке 3.6 слева представлена разность временных рядов 1D и 0D модели, а справа - график поверхностной температуры (температуры поверхности льда, если снега нет и температуры поверхности снега, если он есть) во времени.

Видно, что профили температуры 1D модели более гладкие и инертные (см. рис. 3.5) с меньшими амплитудами изменения температуры в период замерзания и таяния (см. рис. 3.6 слева). Разница температур влияет на точность аппроксимации градиента, что выражается в значительной разнице в прогнозируемой толщине льда. 0D модель предсказывает гораздо меньшую толщину льда и ее процесс таяния значительно интенсивнее в "летний" период (см. рис. 3.6 слева). При этом профили температуры снега отличаются несильно, поскольку снег обладает постоянной теплоемкостью и теплопроводностью вследствие отсутствия солености. Это приводит к практически одинаковой толщине снега (см. рис. 3.6 слева).

Температуры поверхности снега или льда (в случае растаявшего снега) также практически идентичны (см. рис. 3.6 справа), что демонстрирует тот факт, что 0D модели достаточно хороши для прогнозирования температуры поверхности с хорошей точностью, сравнимой с 1D моделями. Далее будет показано, что данный вывод распространяется и на случай реалистичного внешнего форсинга.

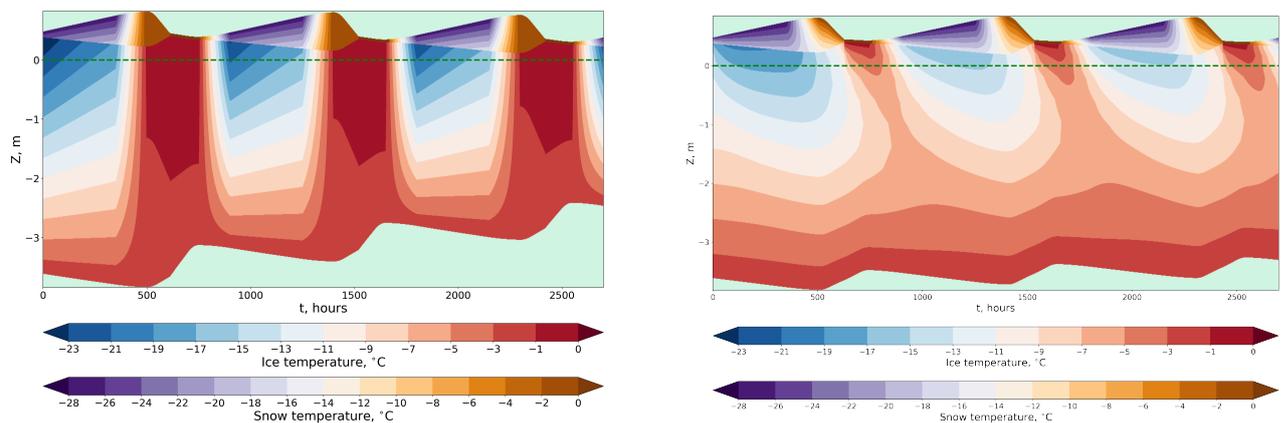


Рисунок 3.5 — Эволюция профиля температуры для первого модельного эксперимента. 0D модель слева, 1D модель справа.

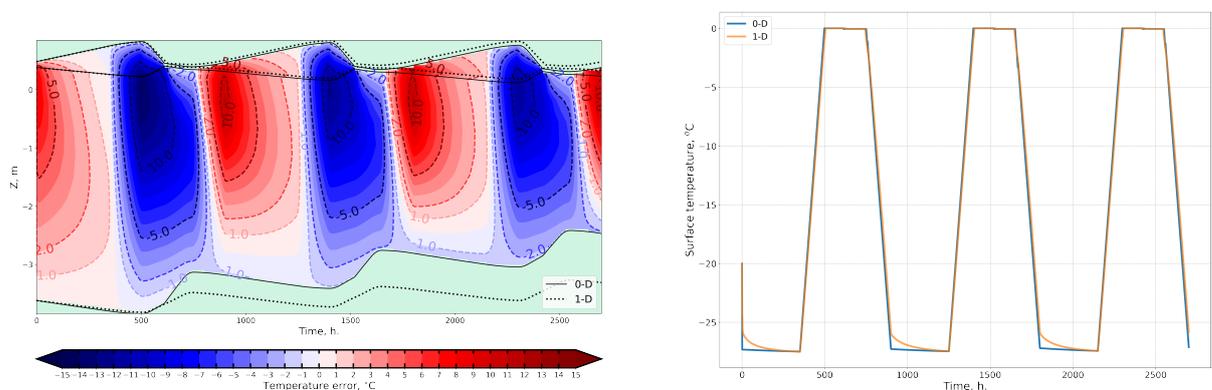


Рисунок 3.6 — Слева - разница между 1D и 0D временными рядами. Интерфейсы показаны пунктирными и сплошными линиями для 1D и 0D моделей соответственно. Справа - температура поверхности снега или льда (в случае растаявшего снега) для 1D и 0D моделей.

3.3.2. Проверка модели на данных полевого эксперимента SHEVA

Опишем процесс валидации описанных 0D и 1D моделей на данных полевого эксперимента SHEVA ([103]). Группа ученых измеряла различные физические характеристики льда и прилегающих к нему пограничных слоев океана и атмосферы каждый час в течение 10 месяцев вокруг ледокола, дрейфующего на запад в круговороте Бофорта. Как и в более ранних работах [106], [105], данные берутся с "Питтсбургской" измерительной площадки (одной из нескольких в этом полевом эксперименте), так как она располагалась на ровном многолетнем льду. В работе [109] был предложен градиентный метод для более точной оценки положения границ раздела льда и снега с использованием измерений температуры вдоль цепочки

термисторов. Эти поправки используются в представляемой работе. Измеренные профили температуры представлены на рисунке 3.7. Исходное состояние моде-

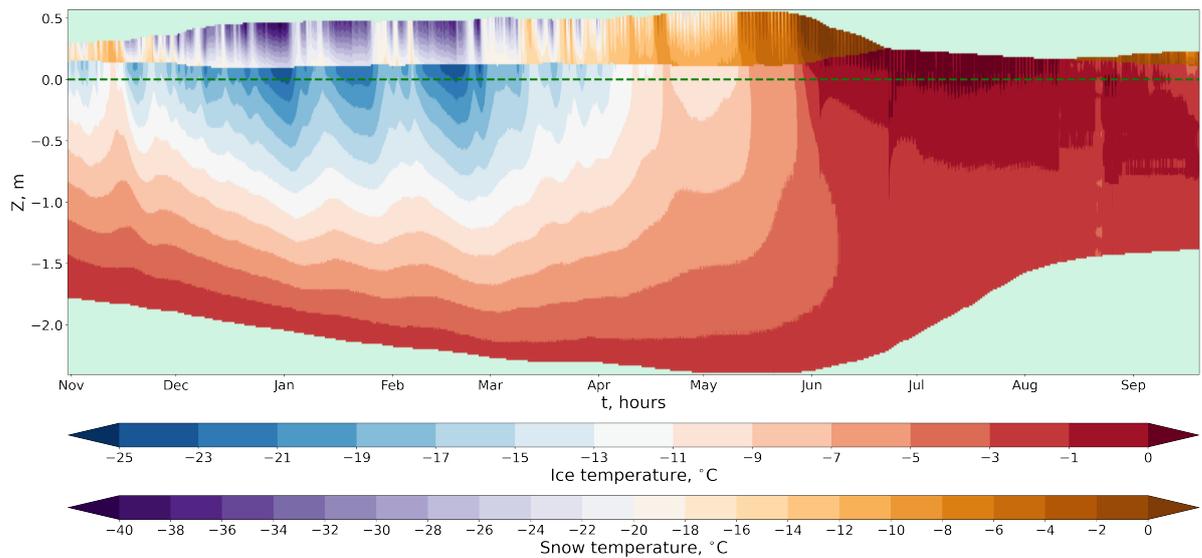


Рисунок 3.7 — Измеренные профили температуры снега и льда на ”Питтсбургской” площадке во время эксперимента SHEBA.

ли получается путем интерполяции измеренных температур на модельную сетку. Для всех экспериментов в этом разделе шаг по времени установлен равным 1 часу. Поток из океана в данных SHEBA был получен как разность между мощностью таяния/намерзания, которая оценивается по измерениям толщины льда, и проводящего потока тепла, который получается с использованием линейной аппроксимации градиента, по температуре на уровне 30 см [109] от нижней кромки льда. Для поддержания энергетического баланса на границе раздела ”океан-лед” мы использовали такое же приближение градиента в моделях. Реализован линейный автотомельный профиль солёности льда от 4 psu у основания до 1 psu у поверхности, а также сухой и пресный снег. Согласно [110], удельная теплота плавления льда на нижней границе соответствует льду с солёностью 4 psu ($292 \text{ кДж} \cdot \text{кг}^{-1}$), а удельная теплота намерзания соответствует рассолу с солёностью 10 psu ($225 \text{ кДж} \cdot \text{кг}^{-1}$), что также реализовано в численном эксперименте.

Заметим, что толщина снега не является монотонной в период отсутствия таяния с декабря по май (см. рисунок 3.7). Скорее всего, это связано с процессом горизонтального сдувания снега и недостаточно точными измерениями. Поскольку в одномерной модели невозможен учет процесса горизонтального сдувания, то, аналогично [106], используется ”эффективная” скорость осадков, искусственно обеспечивающая измеренную толщину снега в период отсутствия таяния

(“эффективная” скорость осадков может быть и отрицательной), для точного прогнозирования толщины снега. Также было реализовано специальное значение теплопроводности снега $0.5 \text{ Вт}\cdot\text{м}^{-1} \text{ К}^{-1}$, предложенное в [106].

Разница между смоделированными 1D моделью и наблюдаемыми профилями температуры показана на рисунке 3.8 с использованием 16 равномерных ячеек во льду и 10 ячеек в снеге. Видно хорошее соответствие между температурами, особенно в нижней трети. Однако видна общая тенденция переохлаждения снега. Заметим, что присутствует хорошее сходство толщины льда в период отсутствия таяния с декабря по май, но после периода таяния (с мая по сентябрь) погрешность в толщине льда становится около 15 см. Особенно заметна большая отрицательная температурная ошибка (около $4 \text{ }^\circ\text{C}$) в период таяния с мая по конец августа, которая не исчезает при увеличении разрешения модели (не показано). Также присутствует, не уменьшающаяся с повышением разрешения, ошибка в верхнем слое снега. Автор предполагает, что это может быть связано с тем, что термисторы не имели защиты от радиации, а сама проволока, на которой были закреплены термисторы, могла проводить тепло, что привело к более высоким температурам. Результаты моделирования аналогичного эксперимента для модели, разработанной Хендриком Хувальдом [106], представлены на рисунке 3.9 (на этом графике не реализовано плавание). В целом, наблюдается согласованность предсказаний с разработанной моделью.

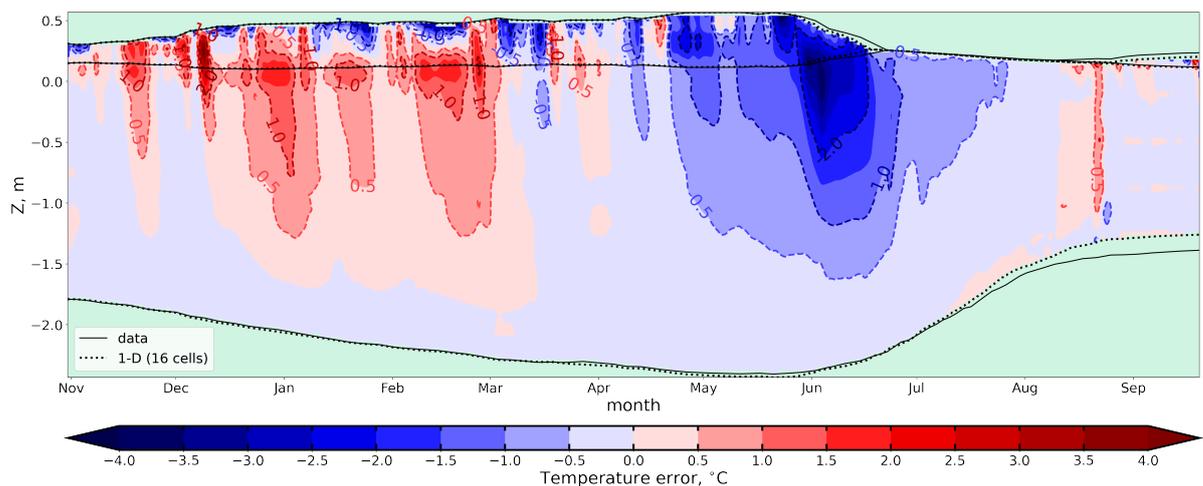


Рисунок 3.8 — Разница между смоделированной и наблюдаемой температурами для модели с 16 ячейками во льду. Интерфейсы показаны пунктирными и сплошными линиями для данных моделирования и измерений соответственно.

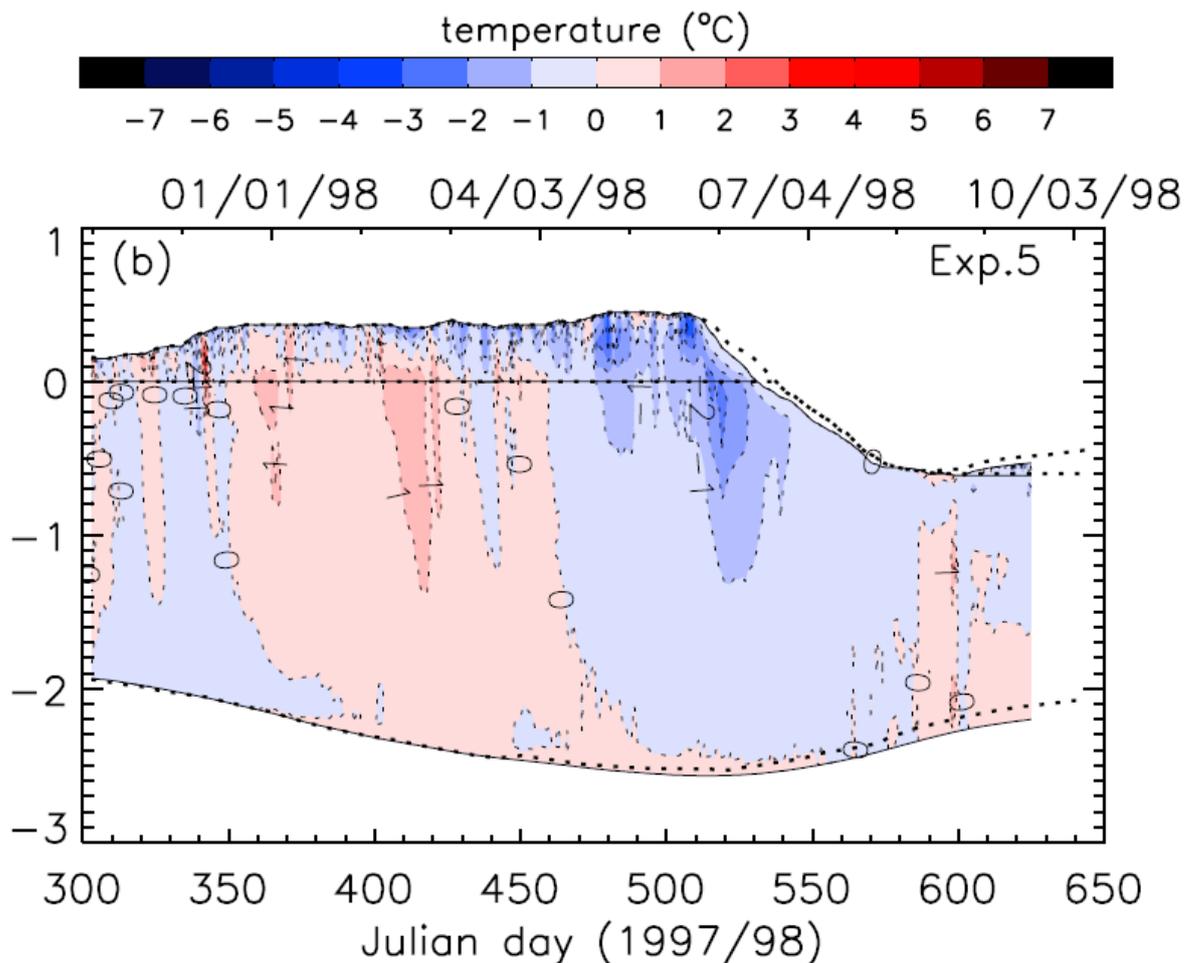


Рисунок 3.9 — Разница между смоделированной и наблюдаемой температурами для модели, представленной в работе [106].

Для демонстрации сходимости решения к данным полевых измерений, выбирается промежуток отсутствия таяния с декабря по май, где можно с большей точностью положиться на качество результатов измерений. На рисунке 3.10 показана ошибка модели с разным пространственным разрешением. В целом, видна тенденция уменьшения ошибки при увеличении разрешения сетки, что демонстрирует сходимость модели к точному решению. Удовлетворение свойства сходимости является необходимым условием применимости модели для получения корректных предсказаний.

Результаты тестового расчета с аналогичным внешним форсингом для 0D модели представлены на рисунке 3.11. Полученная температурная погрешность значительна и варьируется от $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$ до $10\text{ }^{\circ}\text{C}$. При этом погрешность толщины льда значительна и достигает полуметра в конце моделирования. В период

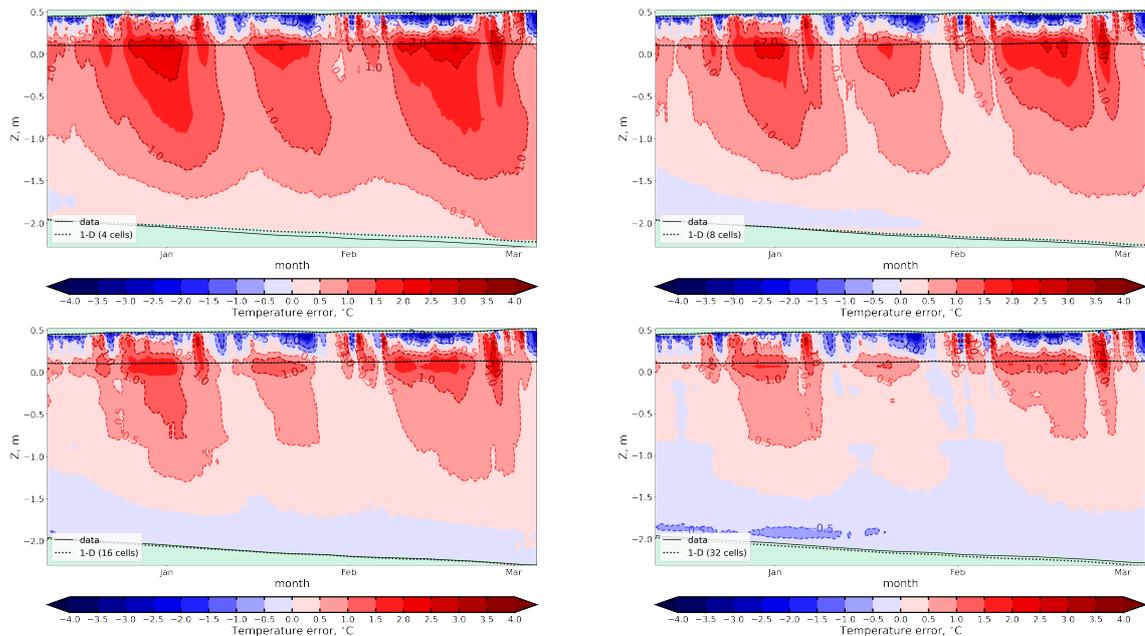


Рисунок 3.10 — Сходимость численных профилей температуры к измерениям с увеличением разрешения - разница между смоделированной и наблюдаемой температурами для одномерной модели с увеличением разрешения. Слева сверху - 4 ячейки льда, справа сверху - 8 ячеек льда, слева снизу - 16 ячеек льда, справа снизу - 32 ячейки льда. Интерфейсы показаны пунктирными и сплошными линиями для предсказаний и данных измерений соответственно.

отсутствия таяния прогнозируемая толщина льда также меньше наблюдаемого значения, в отличие от 1D модели.

В то же время, рисунок 3.12 демонстрирует, что ошибка поверхностной температуры не так велика для 0D модели. Амплитуда ошибки для 0D модели примерно в 1.5 раза больше, чем для 1D модели с 4 ячейками во льду. Также отметим, что можно наблюдать небольшую сходимость температуры поверхности для 1D модели, так как амплитуда ошибки для 4 ячеек льда немного больше, чем для 32 ячеек 1D модели, что особо явно проявляется в период отсутствия снега.

3.4. Основные результаты главы

В данной главе представлено подробное описание разработанной библиотеки термодинамики морского льда со снегом: внутренние физические параметризации, численный метод решения возникающей системы нелинейных

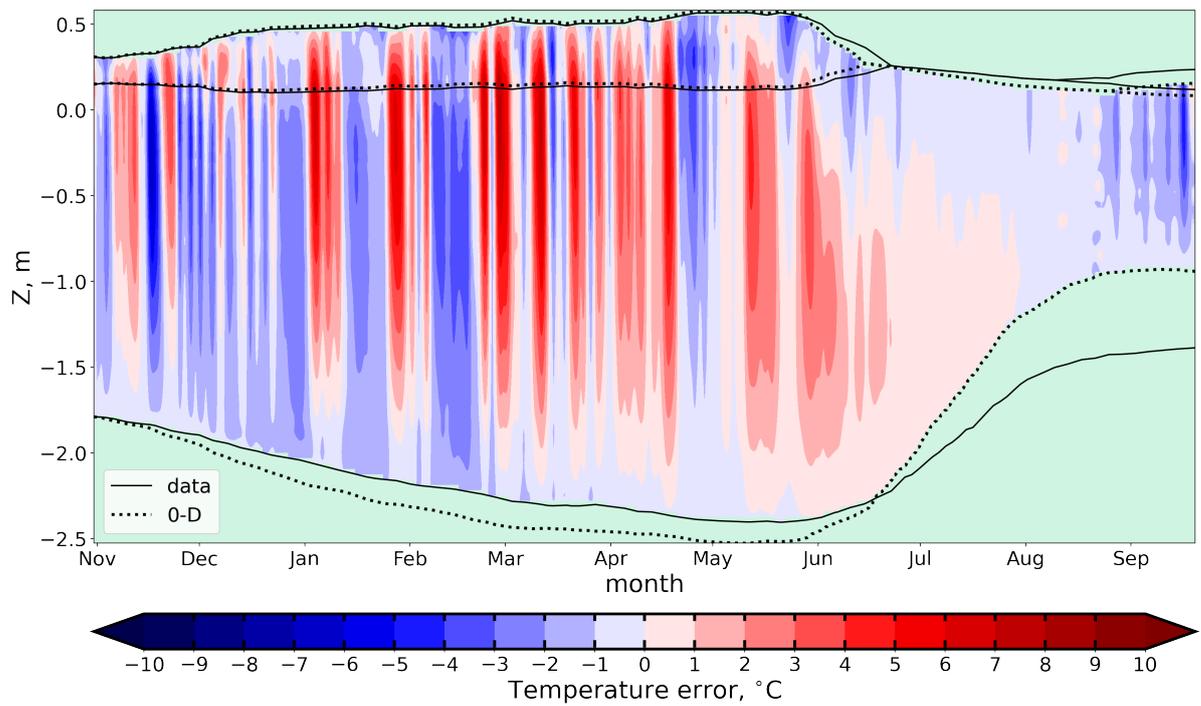


Рисунок 3.11 — Разница между смоделированной и наблюдаемой температурами для 0D модели. Интерфейсы показаны пунктирными и сплошными линиями для предсказания и данных измерений соответственно.

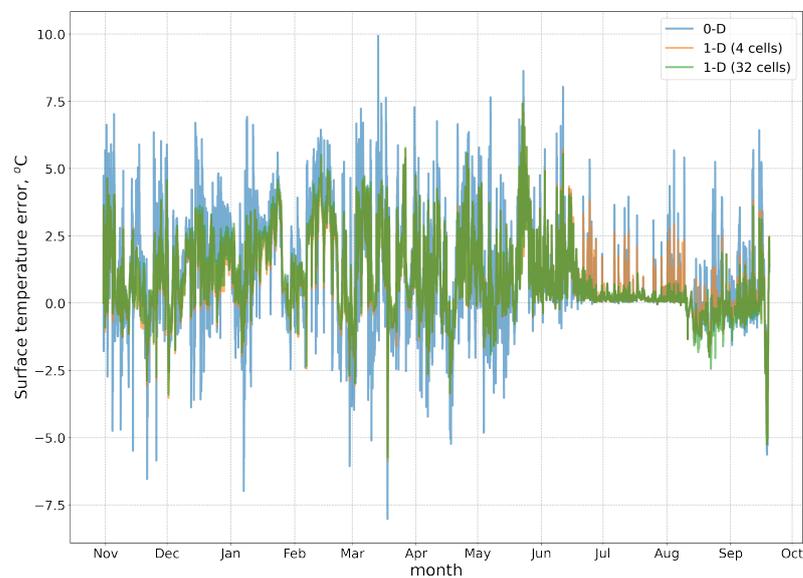


Рисунок 3.12 — Разница между измеренной и смоделированной температурой поверхности (температурой поверхности снега или температура поверхности льда, в случае отсутствия снега).

уравнений. Были представлены результаты тестовых запусков с искусственным

периодическим форсингом, а также проведена валидация кода на данных полевого эксперимента SHEBA.

Существенной особенностью предлагаемого подхода к решению уравнения диффузии с подвижными границами является метод релаксации нелинейных коэффициентов с одновременным учетом нелинейных граничных условий, что соответствует полностью неявному методу интегрирования по времени. Также предлагаемая реализация позволяет использовать произвольные, не обязательно регулярные, сигма-сетки. Предложена аппроксимация второго порядка условия непрерывности проводящего потока на границе "лед-снег", которая с помощью метода исключений Гаусса дает трехдиагональную матрицу и полученная система решается стандартным методом трехдиагональной прогонки за линейное время.

Сравнение 1D и 0D реализаций было проведено в эксперименте с заданным искусственным форсингом, которое демонстрирует, что 0D подход существенно занижает толщину льда, а также завышает амплитуду в температурном профиле по сравнению с 1D решением (см. рис. 3.5). При этом, температура поверхности очень близка в 1D и 0D реализациях (см. рис. 3.6).

Второй тест основан на полевом эксперименте SHEBA. Показано, что одномерная модель с небольшим числом узлов гораздо лучше предсказывает толщину льда: ошибка одномерной толщины составляет 15 см (см. рис. 3.8), а ошибка нульмерной модели составляет примерно 50 см (см. рис. 3.11) после 10 месяцев интегрирования модели. Распределение мгновенного профиля температуры, полученного с помощью 1D модели также значительно более точное по сравнению с 0D реализацией - амплитуда 1D ошибки составляет около 2°C , а для 0D - порядка 10°C . Однако оба эксперимента показали небольшую разницу в прогнозируемых температурах поверхности (см. рис. 3.6 и рис. 3.12). Также была продемонстрирована сходимость одномерного численного решения к данным измерений с увеличением пространственного разрешения, что является признаком грамотно выбранного численного метода и реализации его кода (см. рис. 1.11).

Из анализа результатов проведенных численных экспериментов можно сделать вывод, что 0D модели термодинамики морского льда являются хорошим инструментом для прогнозирования температуры поверхности, но дают большую погрешность в толщине и мгновенном распределении температуры. Чтобы точно предсказывать эти характеристики, гораздо лучше подходят одномерные модели.

Заключение

Основные результаты работы состоят в следующем.

1. Реализован широкий класс схем переноса на треугольной сетке с несением переменных типа "A" и "CD". На сетке типа "A" предложено расширить набор стандартных схем типа Тейлора-Галеркина двухшаговыми вариациями 2-го, 3-го и 4-го порядка по времени. Показано, что схемы высокого порядка дают большую точность при числах Куранта, превышающих значение 0.7. Второй порядок аппроксимации по пространству на треугольной сетке типа "CD" был получен за счет приближения реберного значения скаляра, согласно схемам MUST и MUSCL. Точность таких схем значительно выше стандартной схемы против потока, однако с вычислительной точки зрения они более затратны.
2. Показано, что использование двухшаговой вариации схемы Тейлора-Галеркина второго порядка по времени приблизительно в 2 раза ускоряет вычисления при незначительной потере в точности, что является существенной оптимизацией динамического блока морского льда, в силу большого количества переносимых скаляров.
3. Предложен алгоритм построения триангуляции Арктического бассейна, использующий сгруппированные данные береговой линии базы данных GSHHG и отечественный триангулятор Ani2D. Реализовано сгущение триангуляции в области с потенциально высокой сплоченностью морского льда с использованием исторических спутниковых данных.
4. Блоки адвекции и импульса построены на основе локально-декартового подхода. Стандартные алгоритмы дополняются переводом компонент векторов и тензоров, что увеличивает их вычислительную сложность, однако делает код универсальным для произвольной геометрии расчетной области.
5. Предложен новый итерационный метод для решения нелинейного одномерного уравнения термодинамики морского льда со снегом, который заключается в одновременном расчете профиля и поверхностных значений температур, согласованных с нелинейным граничным условием произвольного вида. На основе предложенного метода построены одномерная и нульмерная модель термодинамики морского льда со снегом.

Результаты предсказаний этих моделей проверены на данных полевого эксперимента SHEBA. По результатам сравнения делается вывод, что нульмерная модель достаточно точно предсказывает температуру на верхней поверхности снега или льда, однако дает существенную ошибку в профиле температур и толщине льда, по сравнению с одномерной реализацией.

Список литературы

1. <https://www.climate-lab-book.ac.uk/2015/the-sea-ice-orchestra/>.
2. *Haapala, J.* On the modelling of ice-thickness redistribution / J. Haapala // *Journal of Glaciology*. — 2000. — Июнь. — Т. 46. — С. 427—437.
3. *Tedesco, L.* Sea Ice Biogeochemistry: A Guide for Modellers / L. Tedesco, M. Vichi // *PloS one*. — 2014. — Февр. — Т. 9. — e89217.
4. *Bluhm, B. A.* Sea Ice Meio- and Macrofauna / B. A. Bluhm, R. R. Gradinger, S. B. Schnack-Schiel // *Sea Ice*. — John Wiley, Sons, Ltd, 2009. — Гл. 10. С. 357—393. — eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/9781444317145.ch10>.
5. *Arrigo, K. R.* Primary Producers and Sea Ice / K. R. Arrigo, T. Mock, M. P. Lizotte // *Sea Ice*. — John Wiley, Sons, Ltd, 2009. — Гл. 8. С. 283—325.
6. Environmental constraints on the production and removal of the climatically active gas dimethylsulphide (DMS) and implications for ecosystem modelling / J. Stefels [и др.] // *Phaeocystis, Major Link in the Biogeochemical Cycling of Climate-Relevant Elements*. — 2007. — Апр. — С. 245—275.
7. Temporal evolution of decaying summer first-year sea ice in the Western Weddell Sea, Antarctica / J.-L. Tison [и др.] // *Deep Sea Research Part II Topical Studies in Oceanography*. — 2008. — Апр. — Т. 55. — С. 975—987.
8. Distribution of dissolved iron in Antarctic sea ice: Spatial, seasonal, and inter-annual variability / D. Lannuzel [и др.] // *Journal of Geophysical Research: Biogeosciences*. — 2010. — Т. 115, G3.
9. Massive Phytoplankton Blooms Under Arctic Sea Ice / K. Arrigo [и др.] // *Science (New York, N.Y.)* — 2012. — Июнь. — Т. 336. — С. 1408.
10. Remote Sensing of Sea Ice in the Northern Sea Route: Studies and Applications / O. Johannessen [и др.]. — 01.2007.
11. The potential transport of pollutants by Arctic sea ice / S. Pfirman [и др.] // *Science of The Total Environment*. — 1995. — Т. 159, № 2.

12. *Fingas, M.* Oil Behavior in Ice-Infested Waters / M. Fingas, B. Hollebone // International Oil Spill Conference Proceedings. — 2013. — ЯНВ. — Т. 2014. — С. 110—135.
13. *Manabe, S.* Sensitivity of a global climate model to an increase of CO₂ concentration in the atmosphere / S. Manabe, R. J. Stouffer // Journal of Geophysical Research: Oceans. — 1980. — Т. 85, № C10. — С. 5529—5554.
14. Analysis of shear zone ice deformation in the Beaufort Sea using satellite imagery / под ред. J. Reed, J. Sater. — The Arctic Institute of North America, Arlington, VA, 1974.
15. *Hopkins, M.* Floe formation in Arctic sea ice / M. Hopkins, A. Thorndike // Journal of Geophysical Research. — 2006. — Нояб. — Т. 111.
16. *Coon, M. C.* Mechanical Behavior of Compacted Arctic Ice Floes / M. C. Coon // Journal of Petroleum Technology. — 1974. — Т. 26. — С. 466—470.
17. *Hibler W. D., I.* A Dynamic Thermodynamic Sea Ice Model / I. Hibler W. D. // Journal of Physical Oceanography. — 1979. — ИЮЛЬ. — Т. 9, № 4. — С. 815—846.
18. *Hunke, E. C.* An Elastic–Viscous–Plastic Model for Sea Ice Dynamics / E. C. Hunke, J. K. Dukowicz // Journal of Physical Oceanography. — 1997. — Т. 27, № 9. — С. 1849—1867.
19. IPCC, 2013: Climate Change 2013: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change / T. Stocker [и др.]. — Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, New York, NY, USA, 2013.
20. Simulation of the present-day climate with the climate model INMCM5 / E. Volodin [и др.] // Climate Dynamics. — 2017. — Дек. — Т. 49.
21. Simulating Linear Kinematic Features in Viscous-Plastic Sea Ice Models on Quadrilateral and Triangular Grids With Different Variable Staggering / C. Mehlmann [и др.] // Journal of Advances in Modeling Earth Systems. — 2021. — Т. 13, № 11.
22. The Community Earth System Model Version 2 (CESM2) / G. Danabasoglu [и др.] // Journal of Advances in Modeling Earth Systems. — 2020. — Т. 12, № 2. — e2019MS001916.

23. CICE: The Los Alamos Sea Ice Model documentation and software user's manual version 4.1. Т. 675 / E. C. Hunke [и др.]. — 05.2010.
24. *Hutchings, J.* A strength implicit correction scheme for the viscous-plastic sea ice model / J. Hutchings, H. Jasak, S. Laxon // *Ocean Modelling*. — 2004. — Дек. — Т. 7. — С. 111—133.
25. *Lipscomb, W. H.* Modeling Sea Ice Transport Using Incremental Remapping / W. H. Lipscomb, E. C. Hunke // *Monthly Weather Review*. — 2004. — Т. 132, № 6. — С. 1341—1354.
26. <https://mitgcm.readthedocs.io>.
27. A parallel Jacobian-free Newton-Krylov solver for a coupled sea ice-ocean model / M. Losch [и др.] // *Journal of Computational Physics*. — 2014. — Т. 257, А. — С. 901—911.
28. The Louvain-La-Neuve sea ice model LIM3.6: global and regional capabilities / C. Rousset [и др.] // *Geoscientific Model Development*. — 2015. — Т. 8, № 10. — С. 2991—3005.
29. The elastic–viscous–plastic method revisited / S. Bouillon [и др.] // *Ocean Modelling*. — 2013. — Т. 71. — С. 2—12. — Arctic Ocean.
30. Finite-Element Sea Ice Model (FESIM), version 2 / S. Danilov [и др.] // *Geoscientific Model Development*. — 2015. — ИЮНЬ. — Т. 8.
31. The Finite-volumE Sea ice–Ocean Model (FESOM2) / S. Danilov [и др.] // *Geoscientific Model Development*. — 2017. — Т. 10, № 2. — С. 765—789.
32. *Hunke, E.* An Elastic Viscous Plastic Model for Sea Ice Dynamics / E. Hunke, J. Dukowicz // *Journal of Physical Oceanography*. — 1997. — СЕНТ. — Т. 27. — С. 1849—1867.
33. *Kimmritz, M.* On the convergence of the modified elastic–viscous–plastic method for solving the sea ice momentum equation / M. Kimmritz, S. Danilov, M. Losch // *Journal of Computational Physics*. — 2015. — Т. 296. — С. 90—100.
34. Fast EVP Solutions in a High-Resolution Sea Ice Model / N. V. Koldunov [и др.] // *Journal of Advances in Modeling Earth Systems*. — 2019. — Т. 11, № 5. — С. 1269—1284.
35. *Kuzmin, D.* Flux Correction Tools for Finite Elements / D. Kuzmin, S. Turek // *Journal of Computational Physics*. — 2002. — Т. 175, № 2. — С. 525—558.

36. Towards multi-resolution global climate modeling with ECHAM6-FESOM. Part I: Model formulation and mean climate / D. Sidorenko [и др.] // *Climate Dynamics*. — 2014. — АВГ.
37. The ICON (ICOsahedral Non-hydrostatic) modelling framework of DWD and MPI-M: Description of the non-hydrostatic dynamical core / G. Zängl [и др.] // *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*. — 2015. — Т. 141, № 687. — С. 563—579.
38. *Korn, P.* Formulation of an unstructured grid model for global ocean dynamics / P. Korn // *Journal of Computational Physics*. — 2017. — Т. 339. — С. 525—552.
39. *Mehlmann, C.* Sea-ice dynamics on triangular grids / C. Mehlmann, P. Korn // *Journal of Computational Physics*. — 2020. — Дек. — Т. 428. — С. 110086.
40. A Maxwell elasto-brittle rheology for sea ice modelling / V. Dansereau [и др.] // *The Cryosphere*. — 2016. — Т. 10, № 3. — С. 1339—1359.
41. neXtSIM: a new Lagrangian sea ice model / P. Rampal [и др.] // *The Cryosphere*. — 2016. — Т. 10, № 3. — С. 1055—1073.
42. *Iakovlev, N.* On the calculation of large-scale ocean currents in the ‘velocity-pressure’ variables by the finite element method / N. Iakovlev // *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling - RUSS J NUMER ANAL MATH MODEL*. — 1996. — ЯНВ. — Т. 11. — С. 383—392.
43. <https://climatemodeling.science.energy.gov/technical-highlights/icepack-essential-physics-sea-ice-models>.
44. *Yevgeny Aksenov Ed Blockley, M. C. e. a.* Sea Ice modelling Integrated Initiative (SI³) – The NEMO sea ice engine / M. C. e. a. Yevgeny Aksenov Ed Blockley. — Zenodo, 2019. — (Scientific Notes of Climate Modelling Center ; 31).
45. SI3, the NEMO Sea Ice Engine / M. Vancoppenolle [и др.]. — Вер. 4.2release_doc1.0. — 01.2023.
46. *Петров, С.* Конечно-элементная модель динамики морского льда и ее параллельная реализация с использованием библиотеки INMOST / С. Петров // *Проблемы информатики*. — 2021. — Т. 1. — С. 36—48.

47. *Петров, С.* Методы суперкомпьютерного конечно-элементного моделирования динамики морского льда с вязко-пластичной реологией / С. Петров // Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии. Труды XX международной конференции. — 2020. — С. 299—304.
48. *Петров, С.* Сравнение схем Тейлора-Галеркина для решения уравнения переноса на сфере / С. Петров // Международная молодежная школа и конференция по вычислительно-информационным технологиям для наук об окружающей среде, CITES 2021. — 2021. — С. 176—178.
49. *Petrov, S. S.* The suite of Taylor–Galerkin class schemes for ice transport on sphere implemented by the INMOST package / S. S. Petrov, N. G. Iakovlev // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2021. — Т. 36, № 4. — С. 227—238.
50. *Petrov, S. S.* The new sea ice thermodynamics code for the INM RAS Earth System model: The design and comparison of one- and zero-dimensional approaches with the observational data / S. S. Petrov, V. K. Zyuzin, N. G. Iakovlev // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2023. — Т. 38, № 1. — С. 47—61.
51. *Petrov, S. S.* SIMUG - Finite Element Model of Sea Ice Dynamics on Triangular Grid in Local Cartesian Basis / S. S. Petrov, N. G. Iakovlev // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2023. — Т. 38, № 3. — С. 145—160.
52. *Petrov, S.* The Optimized Finite Element Dynamical Core of the Arctic Ocean Sea Ice Model / S. Petrov, N. Iakovlev // Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies. — Springer International Publishing, 2021. — С. 389—400.
53. *Петров, С.* Методы решения нелинейных уравнений динамики морского льда с использованием библиотеки Fenics / С. Петров, Н. Яковлев // Труды 61-й Всероссийской научной конференции МФТИ. Прикладная математика и информатика. — 2018. — С. 173—175.
54. *Петров, С.* Методы решения двумерных уравнений динамики морского льда с вязко-пластичной реологией / С. Петров // Труды 62-й Всероссийской научной конференции МФТИ. Прикладные математика и информатика. — 2018. — С. 164—166.

55. *Петров, С.* Новая конечно-элементная модель динамики морского льда на треугольных A и CD сетках в локально-декартовом базисе / С. Петров // Труды 65-й Всероссийской научной конференции МФТИ. Прикладная математика и информатика. — 2023.
56. *Петров, С.* Реализация схем переноса типа Тейлора – Галеркина для морского льда на сфере с помощью пакета INMOST / С. Петров // Конференция международных математических центров мирового уровня. — 2021. — С. 184—185.
57. *Заявка 2023660379, Российская Федерация, Федеральная служба по интеллектуальной собственности.* «Конечно-элементная модель динамики морского льда на неструктурированных треугольных сетках» / С. С. Петров (Российская Федерация) ; С. С. Петров ; Патент программы для ЭВМ. Поверен Стуловым В. И. — № 2023662057 ; заявл. 19.05.2023 ; опубл. 06.06.2023.
58. *Заявка 2023660394, Российская Федерация, Федеральная служба по интеллектуальной собственности.* «Одномерная конечно-объемная модель термодинамики морского льда со снегом» / С. С. Петров (Российская Федерация) ; С. С. Петров ; Патент программы для ЭВМ. Поверен Кащицкой В. Ю. — № 2023661045 ; заявл. 19.05.2023 ; опубл. 26.05.2023.
59. *Tamamidis, P.* A new upwind scheme on triangular meshes using the finite volume method / P. Tamamidis // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 1995. — Т. 124, № 1. — С. 15—31.
60. *van Leer, B.* Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method / B. van Leer // Journal of Computational Physics. — 1979. — Т. 32, № 1. — С. 101—136.
61. A finite element method for solving the shallow water equations on the sphere / R. Comblen [и др.] // Ocean Modelling. — 2009. — Дек. — Т. 28. — С. 12—23.
62. *Turek, S.* A comparative study of time-stepping techniques for the incompressible Navier-Stokes equations: from fully implicit non-linear schemes to semi-implicit projection methods / S. Turek // International Journal for Numerical Methods in Fluids. — 1996. — Т. 22, № 10. — С. 987—1011.

63. *Bochev, P. B.* Stability of the SUPG finite element method for transient advection–diffusion problems / P. B. Bochev, M. D. Gunzburger, J. N. Shadid // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. — 2004. — Т. 193, № 23. — С. 2301–2323.
64. *Zienkiewicz, O.* The Finite Element Method. T. I / O. Zienkiewicz, R. Taylor. — 11.2005.
65. *Quartapelle, L.* Numerical solution of the incompressible Navier–Stokes equations. T. 113 / L. Quartapelle. — Birkhäuser, 1993.
66. Finite element flux-corrected transport (FEM–FCT) for the euler and Navier–Stokes equations / R. Löhner [и др.] // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. — 1987. — Т. 7, № 10. — С. 1093–1109.
67. *LeVeque, R. J.* Finite volume methods for hyperbolic problems. T. 31 / R. J. LeVeque. — Cambridge university press, 2002.
68. TVD schemes for unstructured grids // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. — 2003. — Т. 46, № 4. — С. 599–611.
69. *Bidadi, S.* Quantification of numerical diffusivity due to TVD schemes in the advection equation / S. Bidadi, S. Rani // *Journal of Computational Physics*. — 2014. — Март. — Т. 261. — С. 65–82.
70. *Nair, R.* A class of deformational flow test cases for linear transport problems on the sphere / R. Nair, P. Lauritzen // *Journal of Computational Physics*. — 2010. — Ноябрь. — Т. 229. — С. 8868–8887.
71. *Danilov, A.* Unstructured tetrahedral mesh generation technology / A. Danilov // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. — 2010. — Февр. — Т. 50. — С. 139–156.
72. Development of the Global Sea Ice 6.0 CICE configuration for the Met Office Global Coupled model / J. G. L. Rae [и др.] // *Geoscientific Model Development*. — 2015. — Т. 8, № 7. — С. 2221–2230.
73. *Kwok, R.* Arctic Ocean Sea Ice Thickness and Kinematics: Satellite Retrievals and Modeling / R. Kwok, D. Sulsky // *Oceanography*. — 2010. — Дек.
74. Evaluation of Arctic Sea-ice Cover and Thickness Simulated by MITgcm / F. Zheng [и др.] // *Advances in Atmospheric Sciences*. — 2021. — Янв. — Т. 38. — С. 29–48.

75. Parallel software platform INMOST: a framework for numerical modeling / A. Danilov [и др.] // Supercomput. Front. Innov. — 2015. — Т. 2. — С. 55—66.
76. <https://github.com/chuck97/SIMUG>.
77. *Lepparanta, M.* The Drift of Sea Ice / M. Lepparanta. — Springer, 2011.
78. *Лайхтман, Д.* О ветровом дрейфе ледяных полей / Д. Лайхтман // Труды Ленинградского Гидро-Метерологического Института. — 1958.
79. *Pritchard, R.* An Elastic-Plastic Constitutive Law for Sea Ice / R. Pritchard // Journal of Applied Mechanics. — 1975. — Т. 42(2). — С. 379—384.
80. *Rothrock, D. A.* The energetics of the plastic deformation of pack ice by ridging / D. A. Rothrock // Journal of Geophysical Research. — 1975. — Ноябрь. — Т. 80, № 33. — С. 4514—4519.
81. *Coon, M.* Mechanical behaviour of compacted Arctic ice floes / M. Coon // Journal of Petroleum Technology. — 1974. — Т. 257. — С. 466—479.
82. *Ip, C. F.* On the effect of rheology on seasonal sea-ice simulations / C. F. Ip, W. D. Hibler, G. M. Flato // Annals of Glaciology. — 1991. — Т. 15. — С. 17—25.
83. A comparison of the Jacobian-free Newton-Krylov method and the EVP model for solving the sea ice momentum equation with a viscous-plastic formulation: a serial algorithm study / J.-F. Lemieux [и др.] // Journal of Computational Physics. — 2012. — Июль. — Т. 231, № 17. — С. 5926—5944.
84. *Seinen, C.* Improving the Jacobian free Newton–Krylov method for the viscous–plastic sea ice momentum equation / C. Seinen, B. Khouider // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2018. — Т. 376/377. — С. 78—93. — Special Issue: Nonlinear Partial Differential Equations in Mathematical Fluid Dynamics.
85. *Falk, R.* Nonconforming Finite Element Methods for the Equations of Linear Elasticity / R. Falk // Mathematics of Computation - Math. Comput. — 1991. — Окт. — Т. 57. — С. 529—529.
86. *Ciarlet, P.* On Korn's Inequality / P. Ciarlet // Chin. Ann. Math. B. — 2010. — Сент. — Т. 31. — С. 607—618.
87. *Brenner, S. C.* Korn's Inequalities for Piecewise H1 Vector Fields / S. C. Brenner // Mathematics of Computation. — 2004. — Т. 73, № 247.

88. *Hansbo, P.* Discontinuous Galerkin and the Crouzeix-Raviart element : application to elasticity / P. Hansbo, M. G. Larson // ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique. — 2003. — Т. 37, № 1. — С. 63—72.
89. *Mehlmann, C.* Discretization of Sea Ice Dynamics in the Tangent Plane to the Sphere by a CD-Grid-Type Finite Element / C. Mehlmann, O. Gutjahr // Journal of Advances in Modeling Earth Systems. — 2022. — Т. 14, № 12.
90. *Danilov, S.* On discretizing sea-ice dynamics on triangular meshes using vertex, cell or edge velocities / S. Danilov, C. Mehlmann, V. Fofonova // Ocean Modelling. — 2021. — Дек. — Т. 170. — С. 101937.
91. <https://www.soest.hawaii.edu/pwessel/gshhg>.
92. <https://www.generic-mapping-tools.org>.
93. <https://climatedataguide.ucar.edu/climate-data/sea-ice-concentration-noaansidc-climate-data-record>.
94. TOPAZ4: an ocean-sea ice data assimilation system for the North Atlantic and Arctic / P. Sakov [и др.] // Ocean Science. — 2012. — Т. 8, № 4. — С. 633—656.
95. <https://ru.wikipedia.org/wiki/NetCDF>.
96. The Copernicus Atmosphere Monitoring Service: From Research to Operations / V.-H. Peuch [и др.] // Bulletin of the American Meteorological Society. — 2022. — Т. 103, № 12. — E2650—E2668.
97. *Rew R.K. Davis G.P., E. S.* NetCDF User's Guide, An Interface for Data Access, Version 2.3 / E. S. Rew R.K. Davis G.P. — 1993.
98. <https://cluster2.inm.ras.ru/en/>.
99. *Perezhogin, P.* Advanced parallel implementation of the coupled ocean-ice model FEMAO (version 2.0) with load balancing / P. Perezhogin, I. Chernov, N. Iakovlev // Geoscientific Model Development. — 2021. — Февр. — Т. 14. — С. 843—857.
100. *Untersteiner, N.* On the mass and heat budget of Arctic sea ice / N. Untersteiner // Archiv für Meteorologie, Geophysik und Bioklimatologie Serie A. — 1961. — Янв. — Т. 12. — С. 151—182.
101. Thermal conductivity of landfast Antarctic and Arctic sea ice / D. Pringle [и др.] // Journal of Geophysical Research. — 2007. — Апр. — Т. 112.

102. *Bitz, C. M.* An energy-conserving thermodynamic model of sea ice / C. M. Bitz, W. H. Lipscomb // *Journal of Geophysical Research: Oceans.* — 1999. — Т. 104, № С7. — С. 15669—15677.
103. Measurements near the Atmospheric Surface Flux Group tower at SHEBA: Near-surface conditions and surface energy budget / O. Persson [и др.] // *Journal of Geophysical Research.* — 2002. — Окт. — Т. 107. — С. С10, 8045.
104. *Turner, A.* Two modes of sea-ice gravity drainage: A parameterization for large-scale modeling / A. Turner, E. Hunke, C. Bitz // *Journal of Geophysical Research: Oceans.* — 2013. — Май. — Т. 118.
105. Comparison of different numerical approaches to the 1D sea-ice thermodynamics problem / F. Dupont [и др.] // *Ocean Modelling.* — 2015. — Т. 87. — С. 20—29.
106. *Huwald, H.* A multilayer sigma-coordinate thermodynamic sea ice model: Validation against Surface Heat Budget of the Arctic Ocean (SHEBA)/Sea Ice Model Intercomparison Project Part 2 (SIMIP2) data / H. Huwald, B. Tremblay, H. Blatter // *J. Geophys. Res.* — 2005. — Май. — Т. 110.
107. Ice-ocean boundary conditions for coupled models / G. A. Schmidt [и др.] // *Ocean Model.* — 2004. — Т. 7. — С. 59—74.
108. https://github.com/chuck97/ice_thermodynamics.
109. *Huwald, H.* Reconciling different observational data sets from Surface Heat Budget of the Arctic Ocean (SHEBA) for model validation purposes / H. Huwald, B. Tremblay, H. Blatter // *J. Geophys. Res.* — 2005. — Май. — Т. 110.
110. *Cox, G. F. N.* Numerical simulations of the profile properties of undeformed first-year sea ice during the growth season / G. F. N. Cox, W. F. Weeks // *Journal of Geophysical Research: Oceans.* — 1988. — Т. 93, № С10. — С. 12449—12460.

Приложение А

Листинги псевдокода

Листинг А.1 Псевдокод перевода векторов скорости для сборки вектора правой части и сборки массовой матрицы для метода TG2 (1.9).

```

// nV, nT - number of nodes, triangles
double Rhs[nV], Mmatrix[nV][nV]; // rhs array and mass matrix
// iteration over triangles
for(int i = 0; i < nT; ++i)
5 {
    // get adj nodes of triangles
    auto AdjNodes = Triangles[i]->getNodes();
    double node_vel_tr[3][2]; // node vel in trian basis

    // iterate over trian nodes
    // and move vel components to trian basis
    for(int j = 0; j < 3; ++j)
    {
        node_vel_tr[j] = VecToTrianBasis(AdjNodes[j]->getVel(),
15         AdjNodes[j],
            Triangles[i]);
    }
    // compute local rhs and mass matrix
    double LocalRhs[3] = ComputeLocalRhs(node_vel_tr);
    double LocalMassMatrix[3][3] = ComputeLocalMassMatrix();

    // iteration over trian nodes
    // and assembling global rhs
    for(int j = 0; j < 3; ++j)
25 {
        GlobalRhs[GlobalIndexOfNode(AdjNodes[j])] += LocalRhs[j];
    }

    // iterate over trian nodes
    // and assembling global mass matrix
    for(int j = 0; j < 3; ++j)
    {
        for (int k = 0; k < 3; ++k)
        {
35         Mmatrix[GlobalIndexOfNode(AdjNodes[j])]
            [GlobalIndexOfNode(AdjNodes[k])] +=
            LocalMassMatrix[j][k];
        }
    }
40 }
}

```

Листинг А.2 Псевдокод сборки дискретного вершинного вектора внутренних
силы на сетке типа А.

```

// niV, nT - number of internal nodes, triangles
double Force[niV][2]; // initialize force vector
// iteration over triangles
for(int i = 0; i < nT; ++i)
5 {
    // get adj nodes of triangles
    auto AdjNodes = Triangles[i]->getNodes();
    double grad_basis[3][2]; // array for grad basis funcs
    double sigma[3][2][2]; // array sigma components

    // iterate over trian nodes
    // and move grad basis vec and
    // sigma components to node basis
    for(int j = 0; j < 3; ++j)
15 {
        grad_basis[j] = VecToTrianBasis(AdjNodes[j]->getGradBasis
    (,
        Triangles[i],
        AdjNodes[j]));

        sigma[j] =
20     TensToTrianBasis(AdjNodes[j]->getSigma(),
        Triangles[i],
        AdjNodes[j]);
    }

    // iterate over trian nodes
    // and compute local force entry
    for(int j = 0; j < 3; ++j)
25 {
        Force[GlobalIndexOfNode(AdjNodes[j])] +=
30     sigma[j]*grad_basis[j]; // here * is scalar product
    }
}

```

Листинг А.3 Псевдокод сборки стабилизационной суммы на сетке типа CD.

```

// nE, nT - number of edges, triangles
double StabSum[nE][2]; // initialize stab sum array
// iterate over triangles
// and compute stab sum
5 for(int i = 0; i < nT; ++i)
{
// get adj edges of triangles
auto AdjEdges = Triangles[i]->getEdges();
double edge_vel[3][2]; // array for edge velocities
10 // iterate over trian edges
// and move edge vel to trian basis
for(int j = 0; j < 3; ++j)
{
15 edge_vel[j] =
VecToTrianBasis(AdjEdges[j]->getVel(),
AdjEdges[j],
Triangles[i]);
}
// iterate over trian edges
20 // and compute stab sum
for(int j = 0; j < 3; ++j)
{
StabSum[GlobalIndexOfEdge(AdjEdges[j])] +=
25 VecToEdgeBasis(edge_vel[(j+1) mod 3],
Triangles[i],
AdjEdges[(j+1) mod 3]) -
VecToEdgeBasis(edge_vel[(j+2) mod 3],
Triangles[i],
AdjEdges[(j+2) mod 3])
30 }
}

```

Листинг А.4 Псевдокод сборки стабилизационного слагаемого на сетке типа CD.

```

// nE, nT - number of edges, triangles
double Stab[nE][2]; // initialize stab array
// iterate over triangles
// and compute stabilization
5 for(int i = 0; i < nT; ++i)
{
    // get adj edges of triangles
    auto AdjEdges = Triangles[i]->getEdges();
    // array for stab sum
    // in trian basis
10 double stab_sum_trian[3][2];
    // array for edge viscosities
    double visc_edge[3] =
    Triangles[i]->getEdgeVisc();
15 // iterate over trian edges
    // and move stab sum to trian basis
    for(int j = 0; j < 3; ++j)
    {
        stab_sum_trian[j] =
20 VecToTrianBasis(
        StabSum[GlobalIndexOfEdge(AdjEdges[j])],
        AdjEdges[j],
        Triangles[i]);
    }
25 // iterate over trian edges
    // and compute stabilization
    for(int j = 0; j < 3; ++j)
    {
        Stab[GlobalIndexOfEdge(AdjEdges[j])] +=
30 - VecToEdgeBasis(
        stab_sum_trian[(j+1) mod 3],
        Triangles[i],
        AdjEdges[(j+1) mod 3]
        )*visc_edge[(j+1) mod 3]
35 + VecToEdgeBasis(
        stab_sum_trian[(j+2) mod 3],
        Triangles[i],
        AdjEdges[(j+2) mod 3]
        )*visc_edge[(j+2) mod 3];
40 }
}

```

Листинг А.5 Псевдокод основного временного цикла модели термодинамики
льда со снегом.

```

// number of time steps
int n_steps = GetNumSteps();

for (int stepnum = 0; stepnum < n_steps; ++stepnum)
5 {
    // initialize the required arrays
    // from the previous step
    Initialization();

    // update external forcing
    // e.g. atm temp, ocean temp, prec rate
10 UpdateForcing();

    if (snow_thickness > snow_thick_min)
15 {
        IceFreezingWithSnow();
        if (temp_snow_surf > 0)
        {
            temp_snow_surf = 0;
            SnowMelting();
        }
    }
    else
25 {
        IceFreezingWithSnow();
        if (temp_ice_surf > ice_fusion_temp)
        {
            temp_ice_surf = ice_fusion_temp;
            IceMelting();
        }
    }
30 }
}

```