

На правах рукописи



Легкий Алексей Андреевич

**Вычислительная биомеханика сердца:
сократительная активность миокарда и
диастолическое состояние аортального клапана**

Специальность 1.2.2 —
«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2025

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте вычислительной математики им. Г.И. Марчука Российской академии наук

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук
Данилов Александр Анатольевич

Научный консультант: кандидат физико-математических наук
Саламатова Виктория Юрьевна

Официальные оппоненты: **Вершинин Анатолий Викторович**,
доктор физико-математических наук, доцент,
профессор кафедры вычислительной механики
Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова

Кучумов Алексей Геннадьевич,
доктор физико-математических наук, доцент,
профессор кафедры вычислительной математики,
механики и биомеханики ФГАОУ ВО
«Пермский национальный исследовательский
политехнический университет»

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки Институт иммунологии и физиологии
Уральского отделения
Российской академии наук

Защита состоится 8 сентября 2025 г. в 15:00 на заседании диссертационного совета 24.1.455.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте вычислительной математики им. Г.И. Марчука Российской академии наук по адресу: 119333, г. Москва, ул. Губкина, д. 8, ауд. 727.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИВМ РАН и на сайте <https://www.inm.ras.ru>.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 119333, г. Москва, ул. Губкина, д. 8, ИВМ РАН, ученому секретарю диссертационного совета 24.1.455.01.

Автореферат разослан __ июля 2025 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
24.1.455.01,
д.ф.-м.н.

Бочаров Геннадий Алексеевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Сердечно-сосудистые заболевания (ССЗ) остаются одной из ведущих причин смертности в мире, а их распространённость продолжает неуклонно расти, что подтверждается данными глобальных эпидемиологических исследований¹. Это делает исследования в области физиологии и патофизиологии сердца критически важными для разработки новых методов диагностики и лечения. Особенность сердечных патологий заключается в их многоуровневом проявлении: нарушения затрагивают клеточные структуры, внеклеточный матрикс, тканевую архитектуру и анатомию всего органа. Такие изменения часто возникают как компенсаторный механизм для поддержания кровоснабжения, но со временем могут усугублять заболевание, создавая порочный круг. Понимание взаимосвязи между структурными перестройками и функциональными нарушениями сердца становится ключевым для создания эффективных терапевтических стратегий.

Современные подходы к борьбе с ССЗ включают инновационные направления, такие как тканевая инженерия, разработка медицинских устройств, таргетных препаратов и персонализированных методов лечения. В этих областях вычислительные модели биомеханики сердца играют ведущую роль, позволяя тестировать новые методы лечения *in silico*, минимизируя риски и сокращая число экспериментов на животных. Кроме того, применение численных моделей упрощает принятие клинических решений — от предоперационного планирования до коррекции терапии в реальном времени.

Сердце выполняет ключевую механическую функцию, обеспечивая циркуляцию крови по организму за счёт ритмичного сокращения и расслабления тканей миокарда. Однако эти сокращения не являются пассивным процессом — они инициируются электрической активностью кардиомиоцитов, что делает невозможным полное воспроизведение насосной функции сердца с помощью чисто механических моделей при нарушениях ритма или координации, вызванных патологиями. Для таких случаев требуется использование электромеханических моделей, объединяющих электрические и механические аспекты работы сердца. Подобные сопряжённые модели позволяют исследовать заболевания, одновременно затрагивающие обе функции, такие как желудочковая тахикардия и фибрилляция или блокада левой ножки пучка Гиса, а также разрабатывать методы их коррекции. Также перспективным направлением является создание персонализированных цифровых двойников сердца, которые помогают анализировать последствия сердечной недостаточности, ишемической и гипертрофической кардиомиопатии. Однако внедрение таких моделей в клиническую

¹ Mensah, G. Global Burden of Cardiovascular Diseases and Risks, 1990-2022 / G. Mensah [et al.] // JACC. 2023. Dec. Vol. 82, no. 25. P. 2350—2473.

практику остаётся ограниченным из-за необходимости высоких вычислительных затрат и большой длительности расчётов.

Отдельной проблемой остаётся патология аортального клапана (АК), на которую приходится больше половины случаев смерти от приобретённого порока сердца. Возрастная кальцификация створок АК часто приводит к потере их функциональности, что требует хирургического вмешательства. Одним из эффективных методов лечения является процедура Озаки, предполагающая замену патологических створок на аутоотрансплантаты, вырезанные из перикарда пациента. Основная проблема методики состоит в необходимости выбора анатомически оптимального дизайна новых створок. Неверный размер может вызвать регургитацию или блокировку коронарных артерий, а у каждого восьмого пациента после операции приводит к развитию тромбоза. Численный расчёт диастолического состояния (конфигурации, закрытой в процессе диастолы) клапана, размещённого на геометрии корня аорты пациента, позволяет прогнозировать функциональность реконструкции клапана, снижая риски осложнений.

Цель исследования. Объединяя современные методы вычислительной механики и знания о физиологии сердца, разработать эффективную программную платформу для проведения численных экспериментов с сопряжённой моделью электромеханики сердца, а также предложить и реализовать персонализированную численную модель закрытия реконструированного аортального клапана, позволяющую оценить его пригодность на предоперационном этапе.

Задачи исследования. Для достижения поставленных целей были решены следующие задачи:

1. Выявить общую структуру моделей сопряжённой электромеханики тканей сердца, выделить типичные связи между их отдельными физическими подмоделями и на основе этого сформировать программную архитектуру для разработки соответствующей вычислительной платформы.
2. Предложить, реализовать и численно исследовать полностью разделённую численную схему для эффективной дискретизации сопряжённых моделей электромеханики миокарда.
3. Реализовать гибкую программную библиотеку для построения конечно-элементных дискретизаций уравнений в частных производных общего вида на тетраэдральных сетках.
4. Реализовать программный модуль, предназначенный для численного решения трёхмерных уравнений движения миокарда в рамках вычислительной платформы для моделирования сопряжённой электромеханики тканей сердца.
5. Реализовать программу-симулятор для расчёта движения оболочек и мембран с учётом их контактных взаимодействий.

6. Предложить и реализовать численную модель для оценки закрытого состояния реконструированного аортального клапана (АК), причём учесть в модели персонализированную геометрию корня аорты и особенности процедуры хирургического размещения створок.
7. Математически формализовать медицинские понятия, используемые для оценки состоятельности АК.
8. Провести расчёты закрытия клапанов Озаки на ряде геометрий корня аорты свиней для сравнения с результатами натурального эксперимента.

Научная новизна. В представленном исследовании получены следующие новые научные результаты.

1. Предложена и реализована новая численная схема расщепления по процессам для расчёта сопряжённой модели электромеханики сердца, где распространение электрической активации и деформация сплошной среды описываются на несогласованных тетраэдральных сетках и связаны друг с другом посредством систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для клеточных уравнений, решаемых независимо в точках интегрирования.
2. Подготовлен и впервые осуществлён трёхмерный расчёт сопряжённой модели электромеханики сердца, использующей уравнения сопряжения, предложенные Ф.А. Сёминым, А.К. Цатуряном и А.Ш. Осепян.
3. Реализована новая численная схема для расчёта деформирования тонкостенных конструкций с учётом контактных взаимодействий, применимая для рассмотрения не только динамических, но и квазистатических задач, и позволяющая использовать неявные схемы с большими шагами по (квази-)времени.
4. Предложена автоматическая технология виртуального размещения плоских створок реконструированного аортального клапана внутри полости аорты пациента вдоль заданных линий крепления с учётом особенностей процедуры хирургического размещения створок.
5. Разработана новая модель отыскания диастолического состояния реконструированного аортального клапана, учитывающая особенности проведения операции Озаки (крепления створок), и предложена формализация параметров коаптации для оценки функциональности АК по результатам моделирования.

Методология и методы исследования. Исследование выполнено на основе интеграции методов вычислительной механики, клинической кардиологии и математического моделирования. Теоретическая база включает классические уравнения механики деформируемого твёрдого тела и электрофизиологии, адаптированные для описания сопряжённых процессов

в сердце. Корректность численных алгоритмов подтверждена верификацией на эталонных задачах и сравнением с опубликованными данными. Адекватность персонализированной модели закрытия аортального клапана подтверждена путём проведения вычислительных экспериментов и оценки отклонения рассчитанных значений и значений, измеренных в натурном эксперименте.

Практическая значимость. Сопряжённые модели служат мостом между теорией и практикой: не только улучшают диагностику, лечение и разработку терапии, но и обеспечивают данные для нейросетевых алгоритмов, создают основу для цифровых двойников и редуцированных моделей, делая кардиологию более прогностической, персонализированной и технологичной. Реализация специализированной платформы **CarNum** позволяет упростить и ускорить процесс разработки и внедрения таких моделей. Предложенная численная схема для дискретизации сопряжённых моделей позволяет достигнуть оптимального баланса между точностью расчётов и вычислительной эффективностью.

Реализованная автором конечно-элементная библиотека **AniFem++** расширяет множество типов дискретизаций, поддерживаемых вычислительным фреймворком **INMOST**, и может быть использована для решения разнообразных инженерных и исследовательских задач. Встроенная поддержка тензоров до 4-го ранга и автоматического дифференцирования позволяет также применять данный пакет для нелинейных задач и, в частности, для задач нелинейной механики сплошных сред.

Численное моделирование закрытия реконструированного аортального клапана позволяет прогнозировать его функциональность, снижая риски осложнений после хирургических операций. Автоматизация технологии расчётов с учётом данных о геометрии аорты конкретного пациента — первый шаг к построению системы поддержки принятия врачебных решений (СППВР), предлагающей оптимальный дизайн аутотрансплантата в операции Озаки.

Разработанный программный пакет для моделирования деформаций тонкостенных оболочек является довольно общим и поддерживает моделирование произвольных гиперупругих материалов. Данный пакет может использоваться как для проведения биомеханических и медицинских исследований, например, связанных с клапанами, сосудами, роговицей, так и для различных прикладных и инженерных задач, рассматривающих полимеры и подобные материалы в рамках нелинейной теории упругости.

Основные положения, выносимые на защиту. Основным результатом работы является подготовка комплексов программ общего назначения для решения задач нелинейной теории упругости и их применение в формировании программной платформы для расчёта сопряжённых моделей миокарда, а также в разработке персонализированной технологии

для расчёта диастолического состояния аортального клапана. На защиту выносятся следующие положения.

1. Комплекс программ для расчёта трёхмерных деформаций объёмных тел и тонкостенных конструкций.
2. Эффективная численная схема для дискретизации сопряжённой модели электромеханики миокарда.
3. Комплекс программ для проведения численных экспериментов с сопряжённой моделью электромеханики миокарда.
4. Автоматический алгоритм виртуального размещения тонких створок клапана в просвете корня аорты пациента.
5. Персонализированная модель для оценки коаптации реконструированного аортального клапана в диастолическом состоянии.

Степень достоверности работы. Для независимой верификации блоков трёхмерной кардиомеханики и электрофизиологии из представленной платформы для моделирования сопряжённой электромеханики сердца было проведено сравнение с решениями ряда тестовых задач. Результаты тестирования совпадают с опубликованными данными других научных групп. Картины решений трёхмерной сопряжённой модели качественно схожи с ранее полученными в работе² на двумерных расчётах.

Предсказания модели закрытия аортального клапана показали частичную согласованность с результатами выполненных ранее в медицинских исследованиях³ натурных экспериментов по неокуспидизации АК (замене створок АК на новые) в 20 свиных корнях аорты.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на 18 конференциях и симпозиумах. Среди них 5 международных мероприятий: NUMGRID, ФИЦ ИУ РАН, Москва, 2018, 2024; «The Eleventh Workshop on Numerical Methods and Mathematical Modelling in Biology and Medicine», ДВФУ, Владивосток, 2019; «The International Conference Smart Computational Methods in Continuum Mechanics», МФТИ, Москва, 2021; «International Forum on Intelligent Computing in Rehabilitation Medicine», SIAT, Шэньчжэнь, Китай, 2024. И 13 всероссийских: «Математические модели и численные методы в биологии и медицине», ИВМ РАН, Москва, 2018, 2021-2024; конференция МФТИ, Москва, 2021, 2023; симпозиум по биомеханике, НИИ Механики МГУ, Москва, 2023, 2025; конференция молодых учёных-механиков, «Буревестник» МГУ, Сочи, 2021; школа-конференция молодых учёных: «Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии», ИТПМ, Новосибирск, 2022; онлайн семинар по биомеханике, Пермь, 2022; съезд по фундаментальным проблемам теоретической

²Syomin, F. Effect of strain-dependent conduction slowing on the re-entry formation and maintenance in cardiac muscle: 2D computer simulation / F. Syomin, V. Galushka, A. Tsaturyan // Int. J. Numer. Methods Biomed. Eng. 2023. Vol. 39, no. 11. e3676.

³Каравайкин, П. А. Математическое моделирование в прогнозировании замыкательной функции аортального клапана после неокуспидизации : Канд. дис. : 3.1.15 / Каравайкин П. А. ФГБНУ «РНЦХ им. акад. Б.В. Петровского», 2023.

и прикладной механики, СПбПУ, Санкт-Петербург, 2023.

Также результаты докладывались на семинаре ИВМ РАН «Вычислительная математика и её приложения», семинаре лаборатории биожидкостей ПНИПУ, семинаре МГУ по биомеханике и семинаре ИИФ УрО РАН.

По итогам конференций опубликованы тезисы докладов [12–14].

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 11 публикациях [1–11] в журналах, входящих в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук. Все эти публикации входят в систему цитирования Scopus и/или Web of Science.

Личный вклад. Вклад автора в работу [5] состоял в проработке программной архитектуры вычислительной платформы для моделирования сопряжённой электромеханики сердца. Также в рамках данной работы автором была реализована конечно-элементная библиотека AniFem++, в составе платформы проработан блок, отвечающий за моделирование трёхмерной кардиомеханики, и проведена верификация соответствующего блока на тестовых задачах с исследованием его параллельной эффективности.

В работе [6] автором предложена и реализована численная схема для расчёта сопряжённой модели электромеханики миокарда, а также проведено численное исследование величины возникающих при счёте погрешностей в зависимости от мелкости дискретизации, включающее ряд расчётов на вычислительном кластере.

В работах [1; 2; 7–11] вклад автора заключался в программной реализации описанных моделей упругости и модели закрытия аортального клапана (АК), запуске расчётов и сборе результатов счёта для дальнейшего анализа. Используемые постановки тестовых задач, геометрии пациентов и линии крепления подготавливались соавторами. В [8] автором также предложена формулировка идеализированной геометрии АК.

Работы [3; 4], выполненные автором самостоятельно, обобщают накопленный опыт моделирования АК и посвящены таким вопросам как разработка автоматического алгоритма виртуального размещения створок внутри полости корня аорты по заданным линиям крепления, выбор метода учёта контактного взаимодействия, формулировка критерия останова для расчётов и выработка математически однозначных формулировок для величин коаптации.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка сокращений и условных обозначений, списка литературы и 3 приложений. Полный объем диссертации составляет 145 страниц, включая 34 рисунка и 5 таблиц. Список литературы содержит 185 наименований.

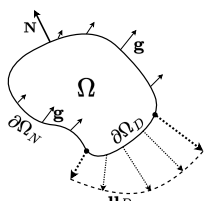
Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проведённых в рамках данной диссертационной работы, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

Первая глава посвящена рассмотрению уравнений движений сплошных сред в случае объёмных тел и тонких оболочек Кирхгофа-Лява, а также описанию схемы их численной дискретизации.

В разделе 1.1 вводятся базовые понятия и обозначения механики сплошных сред. Для описания кинематики среды используется ряд обозначений: положение точек тела в начальной $\mathbf{X}$ и актуальной $\mathbf{x}$ конфигурации и связывающая их функция деформации $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X}, t)$; поле перемещений $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$; градиент деформации $\mathbb{F} = \partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{X} = \mathbb{I} + \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u}$ и якобиан деформации $J = \det \mathbb{F}$; тензор деформации Коши-Грина $\mathbb{C} = \mathbb{F}^T \mathbb{F}$ и его изотропные $I_1 = \text{tr } \mathbb{C}$, $I_2 = [\text{tr}^2(\mathbb{C}) - \text{tr}(\mathbb{C}^2)]/2$, $I_3 = \det \mathbb{C}$ и анизотропные $I_{4fs} = \mathbf{f} \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbf{s}$, $I_{5fs} = \mathbf{f} \cdot \mathbb{C}^2 \cdot \mathbf{s}$ инварианты, где $\mathbf{f}$ и $\mathbf{s}$ — направления анизотропии. Реакция среды на деформацию характеризуется с помощью тензора напряжений Коши $\boldsymbol{\sigma}$ и выражающихся через него первого $\mathbb{P}$ и второго $\mathbb{S}$ тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа. Связь напряжений и деформации задаётся гиперупругим потенциалом $\psi(\mathbb{F})$ как $\mathbb{P} = \partial \psi / \partial \mathbb{F}$. Здесь также формулируется понятие несжимаемости $J = 1$ и описываются методы его введения в уравнения механики через множитель Лагранжа p и объёмный потенциал $\psi_{vol}(J)$, штрафующий изменение объёма.

В разделе 1.2 приводится общая система уравнений движения деформируемого тела со смешанными граничными условиями, записанная относительно начальной конфигурации:



$$\begin{aligned} \rho_0 \partial_{tt} \mathbf{u} - \text{Div } \mathbb{P}(\nabla \mathbf{u}) &= \rho_0 \mathbf{b}(t, \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}), & t \in \Theta, \mathbf{X} \in \Omega, \\ \mathbb{P}(\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{N} &= \mathbf{g}(t, \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}), & t \in \Theta, \mathbf{X} \in \partial \Omega_N, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_D(\mathbf{X}, t), & t \in \Theta, \mathbf{X} \in \partial \Omega_D, \\ \mathbf{u}|_{t=0} &= \mathbf{u}_0(\mathbf{X}), & \mathbf{X} \in \Omega, \\ \partial_t \mathbf{u}|_{t=0} &= \mathbf{v}_0(\mathbf{X}), & \mathbf{X} \in \Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

при $\det(\mathbb{I} + \nabla \mathbf{u}) > 0$, где Ω — расчётная область с границей $\partial \Omega = \partial \Omega_N \cup \partial \Omega_D$, $\Theta = (0, T]$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{g}$ — массовые и поверхностные силы, $\mathbb{P} = \mathbb{P}(\nabla \mathbf{u})$ — заданное определяющее соотношение, ρ_0 — плотность в начальной конфигурации, $\mathbf{N}$ — внешняя нормаль к границе Ω , $\mathbf{u}_0$ и $\mathbf{v}_0$ — начальные перемещения и скорости, $\mathbf{u}_D$ — фиксированные перемещения границы, ∂_t и ∂_{tt} — первая и вторая частные производные по t . Здесь и далее используется $(\text{Div } \mathbb{P})^i := \sum_{j=1}^3 \nabla_j \mathbb{P}^{ij}$. Излагаются сильные и слабые формулировки уравнений движения для случая сжимаемого и несжимаемого тела.

Раздел 1.3 посвящён описанию дискретизации уравнений (1) движения объёмных тел методом конечных элементов (МКЭ) на тетраэдральной сетке лагранжевыми элементами P_r с порядком $r \geq 1$. Для задачи с однородными условиями Дирихле в случае сжимаемого тела применение МКЭ и неявной схемы с аппроксимацией второй производной центральными разностями приводит к нелинейной системе

$$\mathcal{R}(U^{n+1}) := \mathcal{M}^p \cdot \frac{U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}}{(\Delta t)^2} + \mathcal{P}(U^{n+1}) + \mathcal{F}(U^{n+1}) = 0 \quad (2)$$

с матрицей Якоби $\mathcal{J} := \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial U} = \mathcal{M}^p/(\Delta t)^2 + \mathcal{A} + \mathcal{K} + \mathcal{N}$, где U^{n+1} — вектор неизвестных коэффициентов МКЭ на $n+1$ шаге времени, $\mathcal{M}^p$ — матрица масс, $\mathcal{P}$ — вклад механических напряжений, $\mathcal{F}$ — вклад внешних сил, $\mathcal{A}$ — матрица жёсткости, $\mathcal{K}$ — отражает зависимость внешних сил от $\mathbf{u}$, а $\mathcal{N}$ — отражает зависимость внешних сил от $\nabla \mathbf{u}$. Указываются свойства данных матриц и отмечается, что несимметричность и отсутствие знакоопределённости для $\mathcal{J}$ обычно возникает из-за вклада внешних сил и, в частности, содержится в $\mathcal{N}$. Строится аналогичная схема для случая несжимаемого тела.

В разделе 1.4 излагаются основы обобщённой теории Кирхгофа-Лява и выводится кинематическое соотношение, связывающее тензор деформации Коши $\mathbb{C}$ с фундаментальными формами поверхности несжимаемой оболочки — метрическим тензором $a_{\alpha\beta}$ и тензором кривизны $\kappa_{\alpha\beta}$:

$$\mathbb{C} = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 c_{\alpha\beta} \mathbf{G}^\alpha \otimes \mathbf{G}^\beta + c_{nn} \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} = \mathbb{C}^S + \mathbb{C}^N, \quad (3)$$

$$c_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + 2\lambda\theta^3 \chi_{\alpha\beta}, \quad c_{nn} = \lambda^2, \quad \lambda = 1/\sqrt{\det [a_\alpha^\beta]},$$

где $\chi = \kappa - \kappa^{(0)}$ и $\kappa^{(0)}$ — кривизна поверхности в ненагруженном состоянии, $\theta^3 \in [-H/2, H/2]$ — координата по толщине H , а $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$ и $\mathbf{N}$ — материальный базис и нормаль недеформированной срединной поверхности.

В разделе 1.5 представлен вывод слабой постановки уравнений движения тонкой несжимаемой оболочки. Для вывода используется принцип Гамильтона с внешними силами и преобразование выражений для работы внешних сил и внутренней энергии в соответствии с параметризацией формы тонкой оболочки Кирхгофа-Лява, явно выделяющей толщину и срединную поверхность. Отмечаются две постановки уравнений: мембранная — куда входят только первые производные положения поверхности $\mathbf{x}^m$ по параметрам в виде выражений $a_{\alpha\beta} := \mathbf{x}_{,\alpha}^m \cdot \mathbf{x}_{,\beta}^m$ и $\mathbf{n} = \mathbf{x}_{,1}^m \times \mathbf{x}_{,2}^m / |\mathbf{x}_{,1}^m \times \mathbf{x}_{,2}^m|$, и оболочечная — где ещё учитывается кривизна $\kappa_{\alpha\beta} := -\mathbf{x}_{,\alpha\beta}^m \cdot \mathbf{n}$, включающая вторые производные положения поверхности.

Раздел 1.6 посвящён построению численной схемы дискретизации уравнений для оболочек и мембран на треугольной сетке. Неизвестными

дискретной задачи выступают актуальные положения срединной поверхности в узлах сетки, ротационные степени свободы не вводятся. Для аппроксимации поля положений $\mathbf{x}^m$ и его первых производных $\mathbf{x}_{,\alpha}^m$ (и, следовательно, $a_{\alpha\beta}$ и $\mathbf{n}$) применяется МКЭ с элементами типа P_1 :

$$\mathbf{x}^m|_{T_Q} = \sum_{i=1}^3 \xi^i(\mathbf{X}) \mathbf{Q}_i, \quad \mathbf{x}_{,\alpha}^m|_{T_Q} = \sum_{i=1}^3 \xi_{,\alpha}^i(\mathbf{X}) \mathbf{Q}_i, \quad (4)$$

где T_Q — треугольник сетки, $\xi^i(\mathbf{X})$ — функция барицентрических координат, соответствующая i -ой вершине T_Q , $\mathbf{Q}_i$ — актуальное положение i -ой вершины T_Q . Аппроксимация κ строится на основе подхода⁴, где κ и $\mathbf{n}$ считаются кусочно-постоянными, что приводит на треугольнике κ

$$\kappa_{\alpha\beta} = \sum_{I=1}^3 \kappa_{\alpha\beta}^I, \quad \kappa_{\alpha\beta}^I := \mathbb{D}_{\alpha I}^* y_{\beta}^I + \mathbb{D}_{\beta I}^* y_{\alpha}^I, \quad y_{\alpha}^I := (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{,\alpha}^{m,I}), \quad (5)$$

где матрица $\mathbb{D}_{\alpha I}^*$ зависит только от геометрии треугольника, а $\mathbf{x}_{,\alpha}^{m,I}$ — непрерывная аппроксимация величины $\mathbf{x}_{,\alpha}^m$ в центре I -го ребра треугольника. Для вычисления $\mathbf{x}_{,\alpha}^{m,I}$ рассматривается 4-х элементный патч Π (рис. 1), на котором вводится квадратичная интерполяция координат. В результате получается выражение для y_{α}^I , которое зависит только от дискретных неизвестных в узлах двух треугольников, разделяющих I -ое ребро. На основе граничных условий выводятся формулы для y_{α}^I на граничных рёбрах.

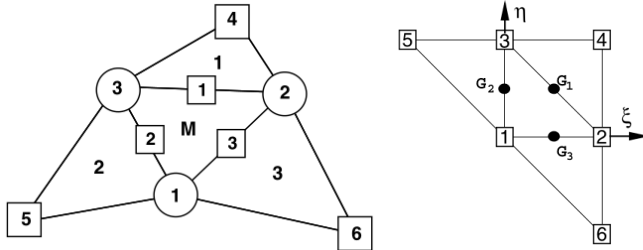


Рис. 1 — Слева: патч из центрального треугольника (M) и его соседей (1,2,3); справа: представление патча в изогеометрическом пространстве

Применение данной аппроксимации приводит к нелинейной системе ОДУ:

$$(\mathcal{M} \cdot \ddot{\mathbf{Q}})_v - \mathbf{F}_v^e(\mathbf{Q}) - \mathbf{F}_v^i(\mathbf{Q}) = 0, \quad v = 1, \dots, N, \quad (6)$$

где v — номер узла сетки, $\mathcal{M}$ — матрица масс, $\mathbf{Q}$ — вектор узловых неизвестных, $\mathbf{F}_v^e$ — результирующая узловая внешняя сила, $\mathbf{F}_v^i$ — полная узловая

⁴ Onate, E. Advances in the formulation of the rotation-free basic shell triangle / E. Onate, F. Flores // Comput. Method. Appl. M. 2005. Vol. 194, no. 21—24. P. 2406—2443.

внутренняя упругая сила (с учётом силы сопротивления изгибу). Предлагается решать данную систему схемой β -Ньюмарка с параметрами $\gamma = 0.5$, $\beta = 0.25$. Также рассматривается задача статического равновесия и для её решения предлагается использовать методы динамической релаксации.

В разделе 1.7 для случая оболочек формулируется упругая барьерная модель контактного взаимодействия и выводится её численная аппроксимация с использованием только узловых координат срединной поверхности. Описывается изложенный в работах Li et al.⁵ и Huang et al.⁶ подход, адаптированный для оболочки. Метод приводит к гладкой аппроксимации контактных сил и позволяет применять неявные схемы по времени. Для расчётов с данной моделью используется метод Ньютона с непрерывным между итерациями отслеживанием барьеров через оценку максимального допустимого шага по времени. Данный подход обеспечивает недопущение возникновения пересечений между примитивами сетки.

Во второй главе рассматривается общий класс сопряжённых моделей электромеханики миокарда и предлагается новая численная схема расщепления по процессам для их дискретизации.

В разделе 2.1 приводится краткий обзор анатомии стенки сердца, описывается структура и гистологические особенности миокарда, а также объясняется механизм его активного мышечного сокращения. Отмечается существенное влияние пространственной организации волокон и слоистой структуры ткани на электрические и механические свойства миокарда.

Раздел 2.2 посвящён изложению основных модельных предположений о механических свойствах миокарда (гиперупругость пассивных напряжений, существенная анизотропия, мало/несжимаемость, возможность пренебрежения механической инерцией материала), а также подходов к учёту активных напряжений в модели сплошной среды: метод активных напряжений, приводящий к аддитивному вкладу в общий тензор напряжений, и метод активных деформаций, приводящий к мультипликативному представлению полного градиента деформации. Отмечаются ограничения сформулированных предположений, а в качестве причин для их принятия указывается сложность получения данных для более точного описания свойств и стремление сократить число параметров модели.

В разделе 2.3 представлена декомпозиция комплексного механизма функционирования сердца на процессы уровня целого органа (механическое деформирование и распространение электрической активации) и процессы клеточного уровня (электрофизиология клетки и механизм кальциевого обмена и активного механического сокращения), на основе которой предлагается общая математическая формулировка сопряжённой модели электромеханики ткани миокарда и приводится обзор популярных в

⁵Li, M. Incremental potential contact: intersection-and inversion-free, large-deformation dynamics / M. Li [et al.] // ACM Trans. Graph. 2020. Vol. 39, no. 4. 49:1—49:20.

⁶Huang, Z. Orientation-aware Incremental Potential Contact / Z. Huang [et al.]. 2024.

литературе уравнений для описания каждого из выделенных процессов. Отмечается, что механика миокарда как сплошной среды моделируется посредством уравнений движения (см. также (1)):

$$\rho_0 \partial_{tt} \mathbf{u} - \text{Div } \mathbb{P}(\mathbb{F}, \mathbf{a}) = 0, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad (7)$$

где переменные $\mathbf{a}$ клеточной модели механической активации определяют величину активных напряжений. Распространение электрической активации на уровне тканей обычно описывается бидоменной, монодоменной или эйкональной моделью. Монодоменная модель имеет вид:

$$\chi_m C_m(\mathbf{a}) \partial_t v - \nabla \cdot (\sigma \nabla v) + \chi_m i_{ion}(\mathbf{w}, v, \mathbf{a}) = I_{stim}(t), \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad (8)$$

где v — искомый трансмембранный потенциал, χ_m — постоянная, выражающая отношение площади мембраны клетки к её объёму, C_m — электрическая ёмкость мембраны, I_{stim} — внешний ток стимуляции, i_{ion} — внутренние трансмембранные токи, определяемые конкретной моделью клеточной электрофизиологии, σ — это тензор проводимости, причём в бидоменную и эйкональную модель также входят аналогичные коэффициенты. Клеточные модели электрофизиологии ($\mathbf{w}$) и механической активации ($\mathbf{a}$) обычно имеют вид нелинейных систем ОДУ:

$$\partial_t \mathbf{w} = \mathbf{r}_w(v, \mathbb{F}, \mathbf{w}), \quad \partial_t \mathbf{a} = \mathbf{r}_a(\mathbb{F}, \partial_t \mathbb{F}, \mathbf{w}, \mathbf{a}), \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad (9)$$

и могут в значительной степени варьироваться с точки зрения сложности и учитываемых эффектов.

В разделе 2.4 формулируется **новая** численная схема расщепления по процессам для дискретизации сопряжённых моделей электромеханики сердца. Распространение электрической активации и деформация сплошной среды описываются на отдельных тетраэдральных сетках и связаны посредством переменных состояния клеточных ОДУ, решаемых независимо в точках интегрирования. Уравнения движения и перемещения $\mathbf{u}$ дискретизируются МКЭ с элементами $(P_2)^3$, а уравнения электрической активации и потенциал v — МКЭ с элементами P_1 . Для каждого из процессов используется собственный дробный шаг по времени (Рис. 2).

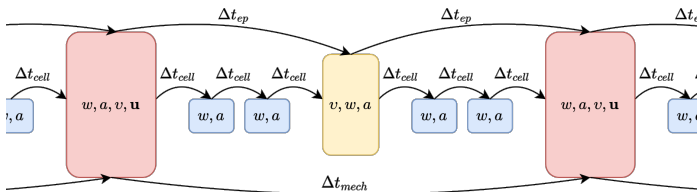


Рис. 2 — Использование дробного шага по времени

Новизна схемы состоит в использовании различных несогласованных тетраэдральных сеток для дискретизации механики и уравнений распространения электрической активации без обращения к сложным процедурам межсеточной интерполяции и применении лишь простой поточечной интерполяции непрерывных полей для $\mathbf{u}$ и v в точки интегрирования, где решаются клеточные уравнения. Отмечается перспективность схемы ввиду отсутствия сильных непосредственных связей между механическими и электрическим процессами на органном уровне.

Раздел 2.5 посвящён исследованию поведения погрешностей предложенной численной схемы в задаче об активации предрастянутого вдоль волокон неоднородного участка миокарда (Рис. 3) при варьировании шагов дискретизации. Формулируется сопряжённая модель: монодоменная модель электрической активации с анизотропным тензором проводимости σ ; ионная модель Алиева-Панфилова; пассивная упругость, описываемая изотропным потенциалом Гуччионе; клеточные напряжения вдоль волокон $\mathbf{f}$, включающие модель реакции титина и модель электромеханического сопряжения Сёмина-Осепян-Цатуряна, с которой трёхмерные расчёты проводятся **впервые**. Исследование основано на сравнении $\mathbf{u}$, v и $\lambda_f = |\mathbb{F} \cdot \mathbf{f}|$ в 5 точках $\mathbf{p}_i$ с референтом — численным решением, полученным на общей сетке с шагом $h_m = h_e \approx 0.8$ мм и шагами по времени $\tau_m = 0.1$ мс для механики и $\tau_e = \tau_o = 0.01$ мс для электрической активации и клеточных процессов.

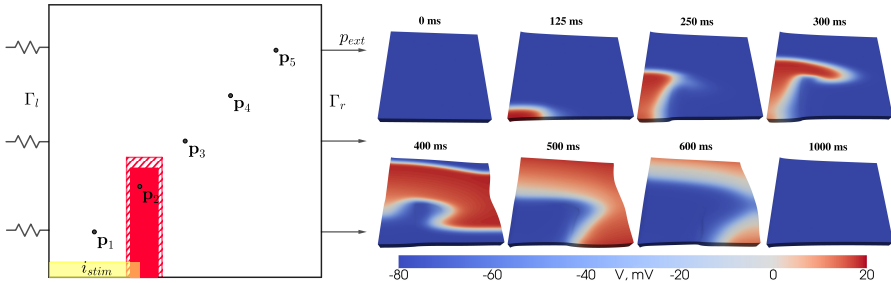


Рис. 3 — Активация неоднородного участка миокарда $90 \times 90 \times 10$ мм. Слева постановка: левая граница закреплена пружинами; правую границу предрастягивают в течение 100 мс; жёлтым отмечена стимулируемая область, а красным — плохо проводящая ткань. Справа: поля потенциала v

В результате исследования делается вывод, что при расчёте клеточных моделей с шагом $\tau_o = 0.01$ мс для получения удовлетворительного решения достаточно использования для модели механики шагов по пространству и времени $h_m \leq 2.5$ мм и $\tau_m \leq 1$ мс, а для модели электрической активации — шагов $h_m \leq 1$ мм и $\tau_e \leq 0.2$ мс. Отмечается, что изменение τ_m и τ_e приводит в основном к возникновению фазовых ошибок, причём

противоположных знаков, что можно использовать для их взаимной компенсации. Указывается, что при выборе мелкости дискретизации для более сложных моделей данные результаты можно рассматривать как априорные оценки сверху.

Третья глава посвящена разработке **новой** численной модели для отыскания закрытого диастолического состояния аортального клапана, реконструированного согласно процедуре Озаки, и рассмотрению проблем её персонализации: разработке алгоритмов виртуального размещения створок внутри корня аорты пациента и формализации клинических понятий мер коаптации для реальных конфигураций клапана.

В разделе 3.1 представлен протокол пришивания неостворок АК (створок реконструированного АК) к корню аорты (КА) в операции Озаки и проведён анализ его особенностей для учёта в модели. Отмечается следующее: а) функция искажения длины при отображении пришиваемой границы створки на линию шва на КА является нелинейной; б) после пришивания вблизи шва створка выстилается по поверхности КА в направлении к левому желудочку; в) поверхности контакта створок сильно изогнуты и далеки от «идеальной» плоской формы.

В разделе 3.2 приводится математическая формулировка модели АК: гемодинамика не учитывается; рассматривается динамическая система отделённых друг от друга контактирующих тел, а именно КА и створки АК; КА недеформируем, а створки — это тонкие оболочки Кирхгофа-Лява ($H \sim 0.2-0.5$ мм, $L \sim 15-30$ мм); пришиваемый край створок закреплён и поджат параллельно поверхности КА; на створки действует постоянное диастолическое давление $P \sim 80$ мм рт. ст.; материал створок имеет плотность $\rho_0 \approx 1$ мг/мм³ и описывается несжимаемым потенциалом Гента

$$\psi = -\frac{EJ_m}{6} \ln \left(1 - \frac{I_1 - 3}{J_m} \right), \quad J_m = 2.3, \quad (10)$$

с модулем упругости $E \sim 1000$ кПа; времени $T = 70$ мс достаточно для достижения диастолического состояния АК. Поясняется, что простая модель Гента выбрана из-за недостаточной изученности свойств обработанного перикарда и в будущем будет заменена на более сложную и анизотропную.

Раздел 3.3 посвящён рассмотрению геометрий внутренней поверхности корня аорты и плоских шаблонов лепестков и введению на них ряда обозначений.

В разделе 3.4 описывается постановка граничных условий закрепления для пришиваемых границ створок на основе заданной геометрии реальной поверхности КА и линий швов на ней. Указывается проблема усвоения линий швов на корне аорты в модели: линии швов должны представлять линии крепления срединных поверхностей створок и поэтому должны быть отделены друг от друга и от поверхности КА на расстояние не менее толщины створок H , однако линии швов, поступающие на

вход модели, устанавливаются врачом прямо на поверхности КА и даже могут пересекаться между собой. Для усвоения линий швов предлагается применение двух алгоритмов. Первый алгоритм корректирует линии швов непосредственно на поверхности корня аорты и состоит в последовательном раздвигании на расстояние порядка H пересекающихся и слишком близких участков линий швов соседних створок с сохранением их принадлежности поверхности корня (Рис. 4). Второй алгоритм отделяет линии шва от поверхности КА и состоит из двух этапов: 1) небольшой сдвиг линий шва вдоль нормалей к поверхности КА, направленных внутрь аорты; 2) отталкивание линий шва от поверхности КА за счёт решения контактной задачи равновесия, где линии шва рассматриваются как упругие нити с радиусом равным H , пружинно прикрепленные к своему начальному положению на КА. Для линий швов, полученных после применения алгоритмов, приводятся формулы, задающие граничные условия закрепления для створок с учётом отмеченных в разделе 3.1 особенностей а)-б) хирургического протокола пришивания неостворок.

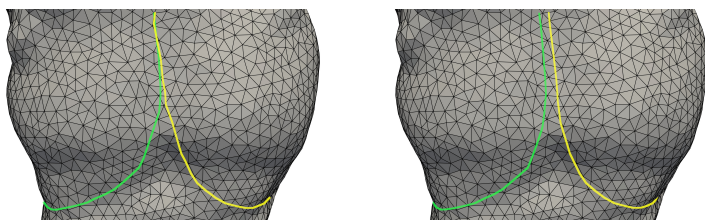


Рис. 4 — Коррекция линии шва на корне аорты: до и после

Раздел 3.5 посвящён построению начального приближения конфигурации клапана для запуска модели — разработке алгоритмов виртуального размещения створок внутри геометрии корня аорты. Формулируются свойства, которым должно удовлетворять начальное приближение: 1) створки должны находиться внутри полости аорты; 2) створки не должны пересекаться между собой или с аортой; 3) граница закрепления створки должна совпадать с линией крепления; 4) створки не должны быть сильно деформированы; 5) конфигурация клапана не должна иметь пролапса. Отмечается, что выполнение 1)–4) необходимо для работоспособности численной модели, в то время как 5) позволяет избежать нежелательных решений задачи (задача может иметь несколько решений). Указывается, что сложность в построении начального приближения состоит в следующем: линейные размеры реально вшиваемых створок велики относительно диаметра аорты и их нельзя разместить без значительной деформации формы. Для размещения створок предлагается алгоритм, включающий 3 этапа: размещение уменьшенных створок, расправление створок до нормального размера и релаксация деформации. На первом и втором этапах,

проиллюстрированных на Рис. 5, створка описывается податливым материалом Нео-Гука ψ_{NH} (вместо собственного ψ). Первый этап состоит из двух шагов: а) уменьшается начальная конфигурация створок до тех пор, пока их не удаётся разместить без деформации вблизи линий швов, удовлетворив свойствам 1)-2); б) на границы закрепления накладывается растущее пружинное притяжение к линиям шва и решается ряд задач равновесия до тех пор, пока не будет удовлетворено 3). На втором этапе начальная конфигурация створок последовательно увеличивается до истинного размера и решаются задачи равновесия с приложением диастолического давления и удерживающей свободный край искусственной силы, введённой для удовлетворения свойству 5). Наконец, на третьем этапе решаются аналогичные задачи равновесия, но материал створки задаётся потенциалом ψ_α :

$$\psi_\alpha(\mathbb{C}) = \alpha\psi_{NH}(\mathbb{C}) + \psi(\mathbb{I} + (1 - \alpha)[\mathbb{C} - \mathbb{I}]), \quad (11)$$

податливость α которого постепенно меняется от 1 до 0, что позволяет достичь свойства 4). Алгоритм виртуального размещения тонких створок АК внутри просвета КА пациента, пригодный для размещения крупных створок и створок несогласованных размеров, предлагается **впервые**.

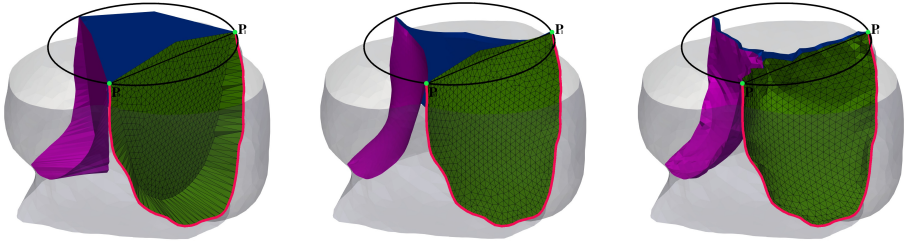


Рис. 5 — Виртуальное размещение створок внутри аорты: размещение уменьшенных створок, начало и конец расправления створок

В разделе 3.6 рассматриваются клинические формулировки ряда геометрических характеристик диастолической конфигурации клапана: зона и площадь S_{coapt} коаптации, центральная длина L_{centr} коаптации, эффективная высота H_{eff} , правая $L_{coapt,r}$ и левая $L_{coapt,l}$ боковые длины коаптации створки, биллоунг H_{bill} ; и предлагаются их обобщения для реальных геометрий АК, задаваемых триангулированными поверхностями. Понятия зон коаптации претерпевают лишь незначительные изменения, направленные на учёт дискретного представления поверхностей. Новые формулировки линейных характеристик (длин, высот) строятся за счёт введения направления «оси аорты», в качестве которого можно взять нормаль к плоскости комиссур АК.

Раздел 3.7 раскрывает как происходило развитие и изменение формулировки модели и какова причина ряда технических решений, причём

описываются в том числе неудачные подходы, которые были опробованы. Отмечается, что мембранная модель упругости приводит к неплохому соответствию с результатами FSI в некоторых экспериментах, однако расчёты закрытия идеализированного АК показали значительное влияние изгибной жёсткости на его конфигурацию и параметры коаптации (см. Рис. 6).

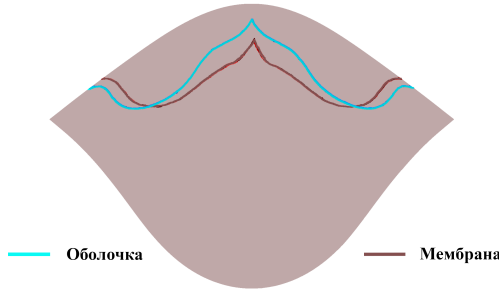


Рис. 6 — Изменение профиля коаптации при учёте изгибной жёсткости в эксперименте по закрытию идеализированного АК

Было опробовано несколько вариантов моделей контактного взаимодействия, однако, только модель, описанная в разделе 1.7, оказалась достаточно надёжной и позволила использовать неявные схемы. Отмечается, что изначально были попытки решать задачу как квазистатическую, однако в расчётах с реальными КА невязка часто начинала стагнировать, поэтому была выбрана динамическая постановка, где в качестве критерия останова выступает время, достаточное для закрытия АК.

В разделе 3.8 приводятся результаты сравнения численных расчётов закрытия реконструированного АК с данными натуральных экспериментов (Таблица 1), выполненных на 20 свиных корнях аорты.

	$L_{coapt,l}$	$L_{coapt,r}$	L_{centr}	H_{eff}	H_{bill}	S_{coapt}
min	10.69	9.62	7.71	7.12	1.26	173.3
max	20.97	18.31	17.40	13.72	9.33	622.9
mean	14.77	14.37	11.52	9.98	4.25	400.7
MPE	+15.8%	+17.8%	+9.4%	+48.5%	-23.9%	+0.4%
MAPE	18.3%	19.9%	13.1%	48.5%	40.2%	5.5%

Таблица 1 — Результаты натуральных экспериментов и сравнение с численными расчётами. Строки min, max и mean содержат мин., макс. и среднее значение величины в натуральных экспериментах. Строки MPE и MAPE демонстрируют среднее отличие численных результатов от натуральных, где

$$MPE(A) = 100\% \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{A_i^{num} - A_i^{nat}}{A_i^{nat}} \text{ и } MAPE(A) = 100\% \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{A_i^{num} - A_i^{nat}}{A_i^{nat}} \right|$$

Подчёркивается, что несмотря на отсутствие данных о жёсткости и толщине створок в натурном эксперименте, а также использование в расчётах мембранной модели упругости вместо оболочечной, по ряду параметров коаптации удалось добиться неплохой согласованности результатов. Наибольшее расхождение продемонстрировали величины H_{eff} и H_{bill} , которые, как показано на расчётах с идеализированным АК, являются наиболее чувствительными к выбору упругой модели и её жёсткости. Отмечается, что знаки систематических ошибок (МРЕ) таковы, что результаты при использовании оболочечной модели упругости, которые будут получены в будущих исследованиях, вероятно, покажут лучшее соответствие.

В четвёртой главе рассматриваются разработанные в процессе работы над диссертацией комплексы программ, включая особенности их архитектуры и функциональные возможности, а также приводятся некоторые примеры применения этих комплексов.

Раздел 4.1 посвящён описанию программной C++ библиотеки для построения конечно-элементных дискретизаций на тетраэдральных сетках **AniFem++**⁷. Код библиотеки основан на конечно-элементном пакете **Ani3D/AniFem** и расширяет возможности предшественника. **AniFem++** включает следующий функционал: вычисление элементных невязок и матриц; наложение условий Дирихле, в том числе векторных; вычисление конечно-элементных выражений в точке; использование встроенных (P_k , CR_1 , RT_0 , ND_0) и создание собственных конечно-элементных пространств; поддержка автодифференцирования выражений от небольшого числа переменных вплоть до вторых производных.

В разделе 4.2 приводится описание программной платформы **CarNum** для построения и организации расчётов задач электромеханики сердца. **CarNum** включает набор инструментов и предсобранных моделей для развертывания и запуска численных экспериментов и полностью реализован на языке C++. Платформа является **MPI** и **OpenMP** параллельной за счёт активного использования фреймворка **INMOST**. Благодаря активной работе с символьными выражениями и методами символьного и авто- дифференцирования **CarNum** предоставляет гибкие возможности для конструирования и подготовки моделей. Указывается, что предложенная автором архитектура (Рис. 7) преследует целью отделить описание отдельных подмоделей от их методов дискретизации и сопряжения. Уточняется, что в рамках целой платформы автор отвечал за разработку модуля кардиомеханики, поэтому результаты верификации приводятся для соответствующих задач⁸: деформация балки, пассивное и активное раздутие эллипсоидального желудочка сердца.

⁷<https://github.com/INMOST-DEV/INMOST-FEM>

⁸Land, S. Verification of cardiac mechanics software: benchmark problems and solutions for testing active and passive material behaviour / S. Land [et al.] // Proc. R. Soc. A: Math. Phys. Eng. Sci. 2015. Vol. 471, no. 2184. P. 20150641.

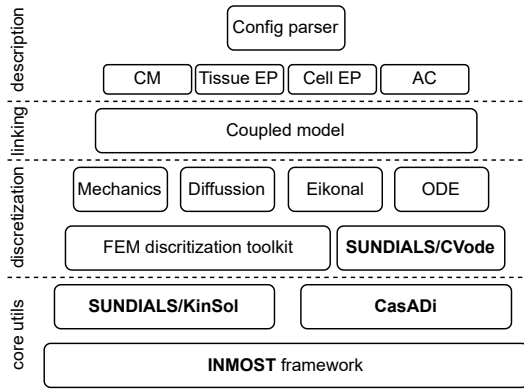


Рис. 7 — Схема организации платформы CarNum: description — структуры с описанием параметров подмоделей (сплошная механика CM, модель распространения эл. активации Tissue EP, клеточная электрофизиология Cell EP, модель активного сокращения AC) и основной парсер; linking — обобщённый интерфейс для сопряжения подмоделей друг с другом, установки межмодельных итераций по времени и интерполяторов с сетки одной подмодели на сетку другой; discretization — пространственно-временные схемы дискретизации нескольких вариантов поддерживаемых уравнений; core utils — инструменты для работы с распределёнными данными, сетками, алгебраическими решателями и символьными выражениями

Для задачи о пассивном раздутии желудочка на Рис. 8 представлены результаты исследования параллельной масштабируемости платформы. В эксперименте использовались две сетки: с шагом $h = 1.5$ мм (около 80 тыс. степеней свободы) и $h = 0.45$ мм (около 800 тыс. степеней свободы). Отмечается, что параллельное ускорение быстро выходит на насыщение из-за недостаточно большого числа элементов в сетках.

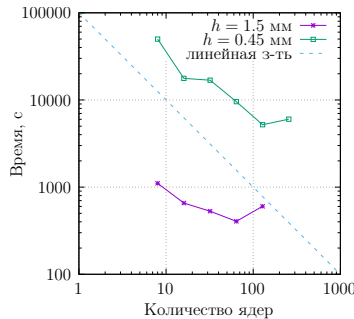


Рис. 8 — Время параллельного решения задачи о пассивном раздутии желудочка на кластере ИКНММ Сеченовского университета

В разделе 4.3 описывается программный пакет для моделирования деформации тонкостенных гиперупругих оболочек/мембран, разработанный на языке C++ на основе методов дискретизации из первой главы. Пакет обеспечивает гибкость в контроле над сборкой матриц и предоставляет удобный интерфейс символьных выражений для задания гиперупругих потенциалов. Указывается, что модель расчёта закрытой конфигурации АК, описанная в третьей главе, была разработана средствами данного пакета. Приводятся результаты верификации на ряде задач с аналитическим решением для мембран (раздутие цилиндра, сферы, круглого плоского листа) и оболочек (изгиб балки и лифтинг разреза кольцевого листа).

В **заключении** приведены основные результаты работы.

Приложение А содержит таблицу со значениями параметров сопряжённой модели из раздела 2.5.

В **приложении Б** приведена таблица с данными расчёта времени активации контрольных точек участка миокарда в эксперименте раздела 2.5.

В **приложении В** изложены алгоритмы для виртуального размещения створок АК в полости аорты, описанные в разделах 3.4-3.5.

Заключение

Основные результаты работы состоят в следующем:

- В работе представлена новая программная платформа для расчёта электромеханической функции миокарда **CarNum** и описаны концепции, которые обеспечивают её гибкость и применимость для работы с широким классом электромеханических моделей. На основе анализа связей сопряжённых моделей электромеханики предложена и реализована новая полностью расщеплённая по процессам численная схема, использующая дискретизации электрических и механических процессов на несогласованных сетках. В рамках пакета **CarNum** это позволяет достичь оптимального баланса между точностью и вычислительной эффективностью.
- Изучение протокола процедуры Озаки и физиологии АК позволило сформулировать и разработать технологию моделирования закрытого АК и оценки его состоятельности, с учётом персонализированной геометрии корня аорты. В ходе исследования удалось успешно решить проблему об отыскании начального приближения для запуска симуляций, что обеспечило полностью автоматизированную работу, без необходимости ручной настройки входной геометрии или граничных условий.
- Работа над решением задач диссертации привела к реализации программного пакета для расчёта деформирования тонкостенных структур и MPI/OpenMP параллельного пакета программ **AniFem++** для конечно-элементного моделирования.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Danilov, A. A.* Patient-Specific Geometric Modeling of an Aortic Valve / A. A. Danilov, A. A. Liogky, R. A. Pryamonosov, V. Y. Salamatova // Lecture Notes in Computational Science and Engineering. — 2019. — P. 217—227.
2. *Karavaikin, P. A.* Numerical assessment of aortic valve coaptation after neo-cuspidation procedure / P. A. Karavaikin, A. A. Liogky, A. A. Danilov, [et al.] // Russian Journal of Cardiology and Cardiovascular Surgery. — 2022. — Vol. 15, no. 4. — P. 369—376.
3. *Liogky, A. A.* Computational mimicking of surgical leaflet suturing for virtual aortic valve neocuspidization / A. A. Liogky // Russ. J. Numer. Anal. M. — 2022. — Nov. — Vol. 37, no. 5. — P. 263—277.
4. *Liogky, A. A.* Numerical Issues of Patient-specific Assessment of Reconstructed Aortic Valve / A. A. Liogky // Lobachevskii J. Math. — 2025. — Mar. — Vol. 46, no. 2. — P. 736—749.
5. *Liogky, A. A.* CarNum: parallel numerical framework for computational cardiac electromechanics / A. A. Liogky, A. Y. Chernyshenko, A. A. Danilov, F. A. Syomin // Russ. J. Numer. Anal. M. — 2023. — June. — Vol. 38, no. 3. — P. 127—144.
6. *Liogky, A. A.* Temporally and spatially segregated discretization for a coupled electromechanical myocardium model / A. A. Liogky, A. A. Danilov, F. A. Syomin // Russ. J. Numer. Anal. M. — 2024. — Nov. — Vol. 39, no. 5. — P. 243—258.
7. *Salamatova, V. Y.* Method of Hyperelastic Nodal Forces for Deformation of Nonlinear Membranes / V. Y. Salamatova, A. A. Liogky // Differ. Equ. — 2020. — July. — Vol. 56, no. 7. — P. 950—958.
8. *Salamatova, V. Y.* Impact of Material Stiffness and Anisotropy on Coaptation Characteristics for Aortic Valve Cusps Reconstructed from Pericardium / V. Y. Salamatova, A. A. Liogky, P. A. Karavaikin // Mathematics. — 2021. — Sept. — Vol. 9, no. 18. — P. 2193.
9. *Salamatova, V. Y.* Numerical assessment of coaptation for auto-pericardium based aortic valve cusps / V. Y. Salamatova, A. A. Liogky, P. A. Karavaikin, [et al.] // Russ. J. Numer. Anal. M. — 2019. — Oct. — Vol. 34, no. 5. — P. 277—287.
10. *Vassilevski, Y. V.* Application of Hyperelastic Nodal Force Method to Evaluation of Aortic Valve Cusps Coaptation: Thin Shell vs. Membrane Formulations / Y. V. Vassilevski, A. A. Liogky, V. Y. Salamatova // Mathematics. — 2021. — June. — Vol. 9, no. 12. — P. 1450.

11. *Vassilevski, Y. V.* How material and geometrical nonlinearity influences diastolic function of an idealized aortic valve / Y. V. Vassilevski, V. Y. Salamatova, A. A. Liogky // *Continuum Mech. Thermodyn.* — 2022. — Dec. — Vol. 35, no. 4. — P. 1581—1594.

Тезисы и сборники трудов конференций

12. *Легкий, А. А.* Влияние жёсткости и степени анизотропии материала на коаптационные характеристики реконструированного аортального клапана: мембрана и оболочка / А. А. Легкий, В. Ю. Саламатова // *Труды 64-й Всероссийской научной конференции МФТИ.* — 2021.
13. *Легкий, А. А.* Применение метода гиперупругих узловых сил для оценки коаптации створок модели аортального клапана: оболочечная формулировка против мембранной / А. А. Легкий, В. Ю. Саламатова // *Всероссийская конференция молодых ученых-механиков YSM-2021. Тезисы докладов.* — 2021.
14. *Легкий, А. А.* Влияние материальной и геометрической нелинейности, а также жёсткости и анизотропии материала на закрытое состояние модели аортального клапана / А. А. Легкий, В. Ю. Саламатова // *XIII Всероссийский Съезд по теоретической и прикладной механике: сборник тезисов докладов. Т. 4.* — 2023. — С. 72—74.

Легкий Алексей Андреевич

Вычислительная биомеханика сердца:
сократительная активность миокарда и
диастолическое состояние аортального клапана

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать _____._____._____. Заказ № _____

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Типография _____