

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука
Российской академии наук (ИВМ РАН)

На правах рукописи

Лёзина Наталья Романовна

**Методы разделения области для задач геофизической
гидротермодинамики в морях и океанах**

Специальность 1.2.2 — «Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Агошков Валерий Иванович

Москва — 2022

Оглавление

Введение	3
Глава 1. Задача гидротермодинамики океанов и морей	9
1.1. Обозначения	10
1.2. Уравнения гидротермодинамики океанов и морей, краевые условия	13
1.3. Метод расщепления	15
Глава 2. Методы разделения области в задачах геофизической гидротермодинамики	18
2.1. Обзор методов разделения области	19
2.2. Метод разделения области для уравнения конвекции–диффузии	21
2.3. Сравнение методов разделения области для задачи конвекции–диффузии	31
2.4. Метод разделения области для линеаризованной системы уравнений мелкой воды	36
2.5. Об альтернативном подходе к методу разделения области для уравнений мелкой воды	43
Глава 3. Совместное использование алгоритмов разделения области и вариационной ассимиляции данных	57
3.1. Метод разделения области в задаче вариационной ассимиляции данных наблюдений за уровнем моря в открытой акватории	58
3.2. Применение метода разделения области к задаче вариационной ассимиляции данных о восстановлении граничных условий на жидкой границе	64
Глава 4. Комплекс программ и численные эксперименты для акватории Балтийского моря	74
4.1. Описание комплекса программ	74
4.2. Задача о распространении тепла	77
4.3. Задача об уровне	78
Заключение	82
Список литературы	84

Введение

Диссертационная работа посвящена разработке и применению итерационных алгоритмов разделения области к задачам геофизической гидротермодинамики океанов и морей. В конце XX века наблюдался рост научных работ, посвященных методам разделения области (см., например, [1–12] и др.). В значительной части работ основная идея методов заключается в том, что решение исходной задачи заменяется решением задач в подобластях. Тогда решение исходной задачи может быть сведено к решению задачи в подобластях, а также решению вспомогательных подзадач на части пересечения подобластей (которые могут быть также представлены всего лишь границей их пересечения для случая с неперекрывающимися областями). Во многих работах исследуется применение метода разделения области к модельным задачам, таким как задача конвекции–диффузии [13–18] и задача, соответствующая системе уравнений мелкой воды [19, 20]. Одной из областей математической физики, в которой используются такие задачи, является гидротермодинамика, в частности, океанология.

В настоящей работе рассматривается σ -модель общей циркуляции океана ИВМ РАН [21]. В основе модели лежит система уравнений гидротермодинамики в приближениях гидростатики и Буссинеска. Одной из основных особенностей этой модели является использование в численной реализации метода расщепления по физическим процессам [22–24]. При использовании метода расщепления решение исходной нелинейной задачи сводится к последовательному решению задач для геофизических параметров (таких как температура, соленость, уровень моря и циркуляция), представимые в виде «основных подзадач» [25], к которым относятся задачи конвекции–диффузии и линеаризованной системы уравнений мелкой воды.

В последнее время получила развитие идея применения методов разделения области для задач моделирования физических процессов в океанах [25–27], а также для задач вариационной ассимиляции данных наблюдений [28–31].

Применение методов разделения области может оказаться перспективным направлением для задач геофизической гидротермодинамики, в том числе для процедур ассимиляции данных наблюдений. В работе рассматривается подход, который основывается на теории оптимального управления, результатах теории обратных и некорректных задач, применении сопряженных уравнений и итерационных процессов.

Актуальность темы исследования. Для сложных задач математического моделирования, таких как задачи гидротермодинамики океанов и морей, часто применяются методы, позволяющие упростить решение системы уравнений. При использовании метода расщепле-

ния решение общей системы уравнений сводится к решению известных задач: конвекции-диффузии, линеаризованной системы уравнений мелкой воды и эллиптических задач. В настоящей работе проводится исследование подхода к формулировке методов разделения области, предложенного В.И. Агошковым, для подзадач, к которым может быть сведена система уравнений гидротермодинамики, а также применение методов разделения области в процедурах вариационной ассимиляции данных.

Степень разработанности темы исследования. Существует значительное число работ, посвященных методу разделения области, большая часть из них доступна на интернет-сайте [32]. Среди работ, посвященных методам разделения области и их применению, можно отметить как работы российских ученых ([33–37] и другие), так и зарубежных авторов ([38–41] и другие).

Применение методов разделения области позволяет сводить процесс решения задачи в исходной области к поочередному их решению в подобластях, возможно, имеющих уже более простую форму, а также применять различные сетки [19], шаги которых, например, в подобластях могут отличаться по величине [42, 43]. Кроме того, использование метода разделения области дает возможность создания алгоритмов, пригодных для параллельных вычислений. К основным направлениям развития методов разделения области можно отнести построение новых алгоритмов для различных классов задач и эффективную их реализацию на многопроцессорных вычислительных системах.

Изначально идея метода разделения области была предложена Шварцем. Метод был применен к стационарным задачам с использованием условий Дирихле на внутренней границе. Он рассматривался на подобластях, обладающих простой геометрией, с непустым пересечением, в каждой из которых легко отыскать решение. Перекрытие подобластей было необходимым условием применимости метода. Долгое время классический метод Шварца носил теоретический характер, однако, в настоящее время модификации данного метода получили широкое применение для различных классов задач.

За последние тридцать лет были разработаны и проанализированы некоторые варианты усовершенствования этого алгоритма: рассматривались случаи как с перекрытием, так и без перекрытия. Модификации алгоритмов Шварца были рассмотрены для широкого круга задач.

Задачи моделирования гидротермодинамики моря являются вычислительно трудоемкими, что вызывает необходимость использования параллельных алгоритмов. Такие алгоритмы могут быть созданы на основе методов разделения области [44, 45]. Отдельным вопросом при

применении параллельных алгоритмов является задача об обмене данными между подобластями и оптимизации распределения вычислительной нагрузки.

В последнее время, методы разделения области стали активно применяться при математическом моделировании процессов в океане [26, 27, 46–48]. Использование вариационной ассимиляции данных для улучшения прогноза в математических моделях представляет собой одну из наиболее актуальных задач в современной математической геофизике. Такие задачи получили распространение вследствие значительного увеличения данных наблюдений таких как, например, спутниковые измерения. Это влечет за собой необходимость создания эффективных алгоритмов ассимиляции данных для многопроцессорных систем. Методы разделения области, используемые для моделирования океанов и морей, также широко применяются для задач вариационной ассимиляции данных, где они используются как развитие параллельных алгоритмов [29, 44].

Основной целью работы является исследование итерационных алгоритмов разделения области, основанных на теории обратных задач и сопряженных уравнений, их применение к задачам вариационной ассимиляции данных, а также создание комплекса программ для применения метода разделения области к модели реальной акватории.

Для достижения цели необходимо решить следующие **задачи**:

- 1) провести численное исследование алгоритмов разделения области, основанных на теории обратных задач и сопряженных уравнений, для задачи конвекции–диффузии и линеаризованной системы уравнений мелкой воды;
- 2) исследовать и провести сравнение подхода, основанного на теории обратных задач и сопряженных уравнений, с другими подходами для построения алгоритмов разделения области;
- 3) исследовать совместное применение алгоритмов вариационной ассимиляции данных и разделения области для задач гидротермодинамики моря;
- 4) разработать комплекс программ для использования метода разделения области в модели гидротермодинамики реальной акватории.

Научная новизна работы заключается в применении подхода к построению алгоритмов разделения области, основанных на теории обратных задач и сопряженных уравнений, в задачах гидротермодинамики моря отдельно и совместно с процедурами вариационной ассимиляции данных наблюдений за геофизическими параметрами.

Теоретическая ценность работы состоит в исследовании и теоретическом обосновании применения методов разделения области в задачах гидротермодинамики моря на примере «основных подзадач» (конвекции-диффузии и линеаризованной системы уравнений мелкой воды), а также в разработке соответствующих алгоритмов для представленных методов разделения области.

Практическая ценность работы заключается в применении и исследовании предложенных алгоритмов разделения области к модели реальной акватории моря.

Содержание работы. В первой главе представлена система уравнений для задачи гидротермодинамики моря в приближениях гидростатики и Буссинеска. В параграфе 1.1 приведены используемые обозначения, в параграфе 1.2 записана система уравнений гидротермодинамики в приближениях гидростатики и Буссинеска для функций температуры, солености, уровня и вектора скорости, а также представлены граничные и начальные условия. В параграфе 1.3 представлены «основные подзадачи», к которым сводится исходная задача после формулировки метода расщепления.

Вторая глава посвящена методам разделения области в задачах геофизической гидротермодинамики. В главе описана основная идея подхода к построению алгоритмов разделения области, а также рассмотрены подробнее некоторые подходы к их построению для задач конвекции-диффузии и линеаризованной системы уравнений мелкой воды. В параграфе 2.1 представлен обзор известных методов разделения области, параграф 2.2 посвящен методу разделения области, основанному на теории обратных задач и сопряженных уравнений, для задачи конвекции-диффузии (задачи о распространении тепла). В параграфе описана постановка задачи, представлены вариационные уравнения и приведен итерационный алгоритм метода разделения области. Параграф 2.3 посвящен сравнению метода разделения области, основанного на теории обратных задач и сопряженных уравнений, для задачи конвекции-диффузии с другим известным подходом к построению алгоритма разделения области, представлено описание оптимизированного метода Шварца и приведены результаты численных экспериментов. В параграфе 2.4 рассматривается линеаризованная система уравнений мелкой воды, приведена постановка задачи, а также предложен итерационный алгоритм для метода разделения области для стационарной задачи. Другой подход к методу разделения области для линеаризованной системы уравнений мелкой воды предложен автором в параграфе 2.5. Рассматривается подход к построению алгоритмов разделения области, приведено исследование о разрешимости задачи и предложен итерационный алгоритм, а также представлены результаты численного сравнения методов разделения области для линеаризованной системы уравнений мелкой воды.

В третьей главе рассматриваются вопросы совместного использования алгоритмов разделения области и вариационной ассимиляции данных. В главе рассмотрены задачи о восстановлении граничных функций на внешних и внутренних жидких границах, представляющие собой задачу о совместном применении метода разделения области и вариационной ассимиляции данных для открытых акваторий. Задача рассмотрена на примере линеаризованной системы уравнений мелкой воды с ассимиляцией данных как об уровне (параграф 3.1), так и скорости (параграф 3.2) на внешней жидкой границе.

В четвертой главе описан разработанный комплекс программ и приведены результаты численных экспериментов применения метода разделения области в задачах гидротермодинамики моря для реальной акватории Балтийского моря.

В работе были использованы следующие методы и подходы: методы разделения области; теория оптимального управления; теория обратных и некорректно поставленных задач; методы теории сопряженных уравнений; итерационные методы решения задач; методы вариационной ассимиляции данных наблюдений; методы вычислительной математики для численного решения задач.

Положения, выносимые на защиту.

- 1) исследование методов разделения области для «основных подзадач» модели гидротермодинамики моря;
- 2) сравнение предложенных методов разделения области с другими подходами к построению алгоритмов разделения области;
- 3) исследование совместного применения методов разделения области и вариационной ассимиляции данных в задачах гидродинамики открытой акватории;
- 4) программная реализация метода разделения области, основанного на теории обратных задач и сопряженных уравнений, для реальной акватории моря.

Степень достоверности и апробация результатов.

Основные результаты докладывались на семинаре «Вычислительная математика и приложения» в Институте вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН и следующих конференциях: 25th International Domain Decomposition Conference DDXXV; Numerical Analysis and Scientific Computation with Applications NASCA 2018; The 5th ECCOMAS Young Investigators Conference; Международная конференция «Марчуковские научные чтения 2021»; IMA Conference on Inverse Problems from Theory to Application; EGU General

Assembly 2017; Международная научная конференция «Современные проблемы математического моделирования, обработки изображений и параллельных вычислений 2017»; 60-я научная конференция МФТИ.

Публикации. По теме диссертации опубликованы 6 работ, в том числе 4 статьи [49–52] в рецензируемых научных журналах, удовлетворяющих требованиям ВАК, а также индексирующихся в Web of Science или Scopus, и 2 печатные работы [53, 54] в прочих изданиях.

Личный вклад автора. Автором реализован подход в виде алгоритмов и их программной реализации для метода разделения области для реальной акватории, а также проведены исследования других подходов к методу разделения области и их сравнение. Кроме того, автором совместно с Шелопут Т. О. проведено исследование применения метода разделения области для задач вариационной ассимиляции данных.

В работе [49] автором предложена модификация алгоритма разделения области, относящаяся к изменению вида условий сшивки. В работах [50, 51] автором совместно с Шелопут Т. О. предложен алгоритм совместного применения методов разделения области и вариационной ассимиляции данных. Численные эксперименты для совместного применения методов разделения области и вариационной ассимиляции данных проведены автором лично. В работе [52] вклад автора относится к применению метода разделения области. В совместной с Шелопут Т. О. работе [53] вклад автора относится к части, соответствующей применению метода разделения области. В работе [54] исследование проведено совместно с Агошковым В. И., автором проведены численные эксперименты для модели гидротермодинамики Балтийского моря.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, четырех глав и заключения. Полный объем работы составляет 93 страниц, включая 32 рисунка и 3 таблицы. Список литературы содержит 118 наименований.

Благодарности. Автор выражает благодарность Агошкову В. И. за научное руководство диссертацией, а также Шутяеву В. П., Пармузину Е. И. и Захаровой Н. Б. за обсуждение результатов работы и полезные замечания. Кроме того, автор благодарен Коньшину И. Н. за полезные комментарии относительно работы. Также автор выражает благодарность Шелопут Т. О. за плодотворную совместную работу.

Глава 1

Задача гидротермодинамики океанов и морей

В данной главе рассматривается задача гидротермодинамики океанов и морей, а также схема расщепления по физическим процессам для нее. Основной особенностью рассматриваемой модели циркуляции океана ИВМ РАН [21, 22, 24] является использование метода расщепления по физическим процессам [23] при ее численной реализации, что отличает ее от других известных моделей океана [55–58]. Данная глава представляет собой краткое описание уравнений модели и метода расщепления и основана на работах [25, 59]. Более подробную информацию об уравнениях, используемых упрощениях и методе расщепления можно найти в работах [25, 59].

Приведем некоторые комментарии о системах координат и приближениях, которые используются при описании крупномасштабной динамики океана (см. [60]).

При описании движений в океанах можно принять, что Земля является однородным эллипсоидом, масса которого равна массе Земли, ось вращения совпадает с осью вращения планеты и центр массы находится в центре массы Земли. Угловую скорость вращения эллипсоида ω принимают равной скорости вращения Земли. Такой эллипсоид называют Земным эллипсоидом.

Для численного решения уравнений моделей океанической циркуляции чаще всего используется геоцентрическая система координат, начало которой совпадает с центром Земного эллипсоида. Чтобы получить приближенные уравнения крупномасштабной динамики океана в сферической системе координат, следует перейти к переменным r, ϕ, λ (r – радиус, ϕ – широта, λ – долгота) и применить «сферическое приближение» (см. [61]).

Далее будем считать, что уравнения и функции рассматриваются в геоцентрической системе координат «на сфере» S_R радиуса R и в ее окрестности, а поверхность S_R является отображением геоида (или, например, поверхности «среднего уровня»).

Для простоты в дальнейшем ускорение свободного падения g считается постоянным. Остальные упрощения, используемые в математических моделях, будут отмечены далее в работе.

1.1. Обозначения

Введем основные обозначения и уравнения, которые используются в задачах гидротермодинамики океанов и морей [25, 59].

Рассмотрим географическую (–геодезическую) систему координат (λ, θ, r) , где λ – географическая долгота, увеличивающаяся с запада на восток, θ – географическая широта, растущая с юга на север ($\theta = \phi - \pi/2, \phi \in [0, \pi]$), r – расстояние точки от центра Земли, средний радиус которой принимается равным R_3 . Долгота λ изменяется от 0 до 2π , широта θ от $-\pi/2$ (Южный полюс) до $\pi/2$ (Северный полюс). Часто вместо r удобно вводить координату $z = R_3 - r$ оси Oz , направленной по нормали от поверхности сферы S_R радиуса R_3 к ее центру, т. е. по направлению силы тяжести. Единичные вектора в λ -, θ - и z -направлениях обозначим соответственно через e_λ, e_θ, e_z . Тогда вектор скорости в океане записывается в форме:

$$\vec{U} = u_1 e_\lambda + u_2 e_\theta + w e_z \equiv (\vec{u}, w)$$

или в координатной форме:

$$\vec{U} = (u_1, u_2, w) \equiv (\vec{u}, w),$$

где $\vec{u} = (u_1, u_2)$ – «горизонтальный вектор» скорости в координатной форме, а w – «вертикальная скорость».

Обозначим через Ω часть поверхности сферы S_R , которую будем называть также «поверхностью отсчета». Поверхность океана будем задавать уравнением $z = \xi(\lambda, \theta, t)$ или $f_0(\lambda, \theta, z, t) \equiv \xi(\lambda, \theta, t) - z = 0$, где $(\lambda, \theta, R_3) \in \Omega$, а t – временная переменная, $t \in [0, \bar{t}]$, ($\bar{t} < \infty$). Функцию рельефа дна определим как $z = H(\lambda, \theta)$ или $F_H(\lambda, \theta, z, t) \equiv -H(\lambda, \theta) + z = 0$ при $(\lambda, \theta, R_3) \in \Omega$, где $H(\lambda, \theta) > 0$. В дальнейшем мы будем использовать также следующие обозначения:

$$\lambda \equiv x, \quad \theta \equiv y, \quad \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z),$$

Элемент объема в области $D(t)$:

$$D(t) = \{(x, y, z) : (\lambda, \theta, R_3) \in \Omega, \xi(\lambda, \theta, t) < z < H(\lambda, \theta)\}, t \in [0, \bar{t}]$$

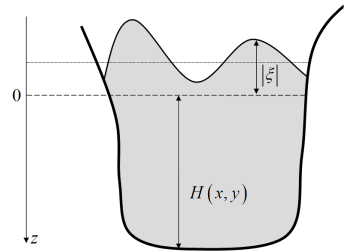


Рисунок 1.1 – Область D .

есть $dD = (R - z)^2 \cos y \, dx \, dy \, dz$, а элемент поверхности Ω имеет вид $d\Omega = R_3^2 \cos y \, dx \, dy$. Меры dD , $d\Omega$ и уравнения гидротермодинамики океана записаны с использованием упрощения,

принимаемого в описании крупномасштабной динамики океана, согласно которому $r = R - z$ приближенно заменяется на R_3 , поскольку глубина океана намного меньше радиуса Земли. В этом случае $dD \cong R_3^2 \cos y \, dx \, dy \, dz$.

Введем следующие дифференциальные операции градиента, дивергенции и полной производной в сферической системе координат при $r \equiv r(z) \equiv R - z \cong R_3$, $n \equiv 1/r$, $m \equiv 1/(r \cos y)$:

$$\mathbf{Grad} \Phi \equiv \nabla \Phi \equiv \left(\mathbf{grad} \Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right), \quad \mathbf{grad} \Phi \equiv \left(m \frac{\partial \Phi}{\partial x}, n \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right),$$

$$\mathbf{Div} \vec{U} \equiv \mathbf{div} \vec{u} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 w}{\partial z}, \quad \mathbf{div} \vec{u} \equiv m \frac{\partial u_1}{\partial x} + m \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{n}{m} u_2 \right],$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla \Phi), \quad (\vec{U} \cdot \nabla) \equiv (\vec{u} \cdot \mathbf{grad}) + w \frac{\partial}{\partial z},$$

$$(\vec{u} \cdot \mathbf{grad}) = u_1 m \frac{\partial}{\partial x} + u_2 n \frac{\partial}{\partial y},$$

здесь и в дальнейшем от переменной r произведем переход к z , в результате чего получено

$$\frac{\partial}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial z},$$

где выбран соответствующий знак у компонента скорости w и $r \equiv r(z) \equiv R - z$.

Далее используются также следующие дифференциальные операторы второго порядка:

$$\mathbf{Div} \mathbf{Grad} \Phi \equiv \mathbf{div} \mathbf{grad} \Phi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial z} r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

$$\mathbf{div} \mathbf{grad} \Phi \equiv \Delta \Phi \equiv m^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + mn \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{n}{m} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right),$$

$$A_\Phi \Phi \equiv -\mathbf{Div}(\hat{a}_\Phi \mathbf{Grad} \Phi),$$

где

$$\hat{a}_\Phi = \text{diag}((a_\Phi)_{ii}), \quad (a_\Phi)_{11} = (a_\Phi)_{22} \equiv \mu_\Phi, \quad (a_\Phi)_{33} \equiv \nu_\Phi,$$

а Φ может принимать значения u_1 , u_2 , T , S (т.е. обозначения компонентов вектора горизонтальной скорости, температуры T и солёности S). Принимается также: $\mu_{u_1} = \mu_{u_2} \equiv \mu$, $\nu_{u_1} = \nu_{u_2} \equiv \nu$ и предполагается, что μ , ν , μ_T , ν_T , μ_S , ν_S являются заданными положительными и ограниченными функциями. Если $\mu, \dots, \nu_S = \text{const}$, то в этом случае основные дифференциальные операторы в сферической системе координат есть:

$$A_{u_1} u_1 = -(\mu \Delta u_1 + \nu \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial z} r^2 \frac{\partial u_1}{\partial z}), \quad A_{u_2} u_2 = -(\mu \Delta u_2 + \nu \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial z} r^2 \frac{\partial u_2}{\partial z}), \quad A_{u_1} = A_{u_2} \equiv A,$$

$$A_T T = -(\mu_T \Delta T + \nu_T \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial z} r^2 \frac{\partial T}{\partial z}), \quad A_S S = -(\mu_S \Delta S + \nu_S \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial z} r^2 \frac{\partial S}{\partial z}).$$

Далее через $l = l(y)$ обозначается параметр Кориолиса: $l = 2\omega \sin y$, где ω – угловая скорость вращения Земли, а также $f(u_1) = l + m u_1 \sin y \equiv l + f_1(u_1)$.

Отметим еще одно общее упрощение, используемое при описании крупномасштабной динамики океана. Функция уровня $\xi = \xi(x, y, t)$ является также одной из неизвестных функций, подлежащих определению. Таким образом, область $D(t)$ является областью с неизвестной границей. Поэтому после того, как записаны уравнения гидротермодинамики океана в области $D(t)$ с соответствующими краевыми условиями, переходим к некоторой приближенной системе уравнений, рассматриваемой уже в фиксированной области:

$$D = \{(\lambda, \theta, z) : (\lambda, \theta, R_3) \in \Omega, 0 < z < H(\lambda, \theta)\}.$$

Границу области $\Gamma \equiv \partial D$ мы будем представлять как объединение четырех непересекающихся частей границы $\Gamma_S, \Gamma_{w,op}, \Gamma_{w,c}, \Gamma_H$, где $\Gamma_S \equiv \Omega$ – «невозмущенная поверхность», $\Gamma_{w,op}$ – жидкая (открытая) часть вертикальной боковой границы, $\Gamma_{w,c}$ – твердая часть вертикальной боковой границы, Γ_H – дно океана. Характеристические функции $\Gamma_S, \Gamma_{w,op}, \Gamma_{w,c}, \Gamma_H$ частей границы Γ , будем обозначать соответственно $m_S, m_{w,op}, m_{w,c}, m_H$. Отметим, что некоторые из частей границы $\Gamma_S, \Gamma_{w,op}, \Gamma_{w,c}, \Gamma_H$ могут отсутствовать.

В дальнейшем будем предполагать, что Ω является многосвязным многообразием на S_R , а границы $\partial\Omega$ и Γ являются кусочно-гладкими класса $\mathbf{C}^{(2)}$, локально удовлетворяющими условию Липшица. Единичный вектор внешней нормали к Γ обозначим через $\vec{N} \equiv (N_1, N_2, N_3)$. Отметим, что $\vec{N} = (0, 0, -1)$ на Γ_S и $\vec{N} = (N_1, N_2, 0)$ на $\Gamma_w = \Gamma_{w,op} \cup \Gamma_{w,c}$, при этом вектор $\vec{n} \equiv (N_1, N_2) \equiv (n_1, n_2)$ является единичным вектором внешней нормали к $\partial\Omega$. Выражение компонентов N_1, N_2, N_3 определяется выбираемым параметрическим представлением той или иной части границы.

При рассмотрении вектора скорости $\vec{U} = (u_1, u_2, w)$ на границе Γ мы будем обозначать его составляющую по нормали через U_n : $U_n = \vec{U} \cdot \vec{N} = u_1 N_1 + u_2 N_2 + w N_3$. И пусть далее согласно [25]

$$U_n^{(+)} \equiv \frac{|U_n| + U_n}{2}, \quad U_n^{(-)} \equiv \frac{|U_n| - U_n}{2}.$$

Отметим, что $U_n = U_n^{(+)} - U_n^{(-)}$.

1.2. Уравнения гидротермодинамики океанов и морей, краевые условия

Запишем в области D в переменных (λ, θ, z) при $t \in (0, \bar{t})$ систему уравнений гидротермодинамики в приближении Буссинеска и гидростатики [22, 62] и получим следующую систему уравнений для функций u_1, u_2, ξ, T, S :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{u}}{dt} + \begin{bmatrix} 0 & -f \\ f & 0 \end{bmatrix} \vec{u} - g \mathbf{grad} \xi + A_u \vec{u} + (A_k)^2 \vec{u} = \vec{f} - \frac{1}{\rho_0} \mathbf{grad} P_a - \\ - \frac{g}{\rho_0} \mathbf{grad} \int_0^z \rho_1(T, S) dz', \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} - m \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^H \Theta(z) u_1 dz \right) - m \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_0^H \Theta(z) \frac{n}{m} u_2 dz \right) = f_3, \\ \frac{dT}{dt} + A_T T = f_T, \quad \frac{dS}{dt} + A_S S = f_S, \end{array} \right. \quad (1.1)$$

где

$$\rho_1(T, S) = \rho_0 \beta_T (T - T^{(0)}) + \rho_0 \beta_S (S - S^{(0)}) + \gamma \rho_0 \beta_{TS} (T, S) + f_P,$$

при этом $\vec{f} = (f_1, f_2)$, f_T , f_S , f_P – заданные функции «внутренних» источников, $g = \text{const} > 0$ – ускорение свободного падения, ρ_0 , $T^{(0)}$, $S^{(0)}$ – «невозмущенные» значения плотности воды, температуры, солёности, β_T и β_S – заданные коэффициенты (считающиеся постоянными), $\beta_{TS}(T, S)$, P_a , $f_3 \equiv f_3(x, y, \xi, t) \equiv f_3(x, y, t)$ – заданные функции, а γ – числовой параметр. Здесь и в дальнейшем используется следующая весовая функция: $\Theta(z) \equiv r(z)/R$.

При рассмотрении системы (1.1) в $D \times (0, \bar{t})$ можно задавать следующие граничные и начальные условия [25].

Граничные условия на «невозмущенной поверхности» Γ_S :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\int_0^H \Theta \vec{u} dz \right) \vec{n} + m_{w,op} \sqrt{gH} \xi = m_{w,op} \sqrt{gH} d_s \text{ на } \partial\Omega, \\ U_n^{(-)} u_1 - \nu \frac{\partial u_1}{\partial z} - k_{33} \frac{\partial}{\partial z} A_k u_1 = \tau_x^{(a)} / \rho_0, \quad U_n^{(-)} u_2 - \nu \frac{\partial u_2}{\partial z} - k_{33} \frac{\partial}{\partial z} A_k u_2 = \tau_y^{(a)} / \rho_0, \\ A_k u_1 = 0, \quad A_k u_2 = 0, \\ U_n^{(-)} T - \nu_T \frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_T (T - T_a) = Q_T + U_n^{(-)} d_T, \\ U_n^{(-)} S - \nu_S \frac{\partial S}{\partial z} + \gamma_S (S - S_a) = Q_S + U_n^{(-)} d_S, \end{array} \right. \quad (1.2)$$

где $\tau_x^{(a)}$, $\tau_y^{(a)}$ – компоненты векторов касательных напряжений ветра, соответственно, вдоль осей Ox и Oy на поверхности $z = 0$, γ_T , γ_S , T_a , S_a , Q_T , Q_S , d_T , d_S – заданные функции. В системе (1.2) также выполняется: $U_n|_{z=0} = -w|_{z=0}$, а $w = w(u_1, u_2)$ вводится согласно формуле

$$w(x, y, z, t) = \frac{1}{r} \left(m \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_z^H r u_1 dz' \right) + m \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{n}{m} \int_z^H r u_2 dz' \right) \right), \quad (x, y, t) \in \Omega \times (0, \bar{t}). \quad (1.3)$$

Граничные условия на «твердой боковой стенке» $\Gamma_{w,c}$:

$$\begin{cases} U_n = 0, & A_k \vec{U} = 0, & \frac{\partial \vec{U}}{\partial N_u} \cdot \vec{\tau}_w + \left(\frac{\partial}{\partial N_u} A_k \vec{U} \right) \cdot \vec{\tau}_w = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial N_T} = 0, & \frac{\partial S}{\partial N_S} = 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

где $\vec{\tau}_w = (-N_2, N_1, 0)$, $\vec{U} \equiv (u_1, u_2, 0) \equiv (\vec{u}, 0)$, $\partial\varphi/\partial N_\varphi \equiv \vec{N} \hat{a}_\varphi \mathbf{Grad}\varphi$, $\varphi = \vec{u}, T, S$.

Граничные условия на «жидкой части боковой стенки» $\Gamma_{w,op}$ [59, 63]:

$$\begin{cases} U_n^{(-)}(\vec{U} \cdot \vec{N}) + \frac{\partial \vec{U}}{\partial N_u} \cdot \vec{N} + \left(\frac{\partial}{\partial N_u} A_k \vec{U} \right) \cdot \vec{N} = U_n^{(-)} d, & A_k \vec{U} = 0, \\ U_n^{(-)}(\vec{U} \cdot \vec{\tau}_w) + \frac{\partial \vec{U}}{\partial N_u} \cdot \vec{\tau}_w + \left(\frac{\partial}{\partial N_u} A_k \vec{U} \right) \cdot \vec{\tau}_w = 0, \\ U_n^{(-)} T + \frac{\partial T}{\partial N_T} = U_n^{(-)} d_T + Q_T, & U_n^{(-)} S + \frac{\partial S}{\partial N_S} = U_n^{(-)} d_S + Q_S, \end{cases} \quad (1.5)$$

где d , d_T , d_S , Q_T , Q_S – некоторые функции, которые здесь мы также считаем известными.

Граничные условия «на дне» Γ_H :

$$\begin{cases} w = u_1 m \frac{\partial H}{\partial x} + u_2 n \frac{\partial H}{\partial y}, & A_k \vec{U} = 0, \\ \frac{\partial \vec{U}}{\partial N_u} \cdot \tau_x + \left(\frac{\partial}{\partial N_k} A_k \vec{U} \right) \cdot \tau_x = -\tau_x^{(b)} / \rho_0, & \frac{\partial \vec{U}}{\partial N_u} \cdot \tau_y + \left(\frac{\partial}{\partial N_u} A_k \vec{U} \right) \cdot \tau_y = -\tau_y^{(b)} / \rho_0, \\ \frac{\partial T}{\partial N_T} = 0, & \frac{\partial S}{\partial N_S} = 0, \end{cases} \quad (1.6)$$

где τ_x , τ_y – система единичных ортогональных касательных векторов на поверхности $z = 0$; $\tau_x^{(b)}$ и $\tau_y^{(b)}$ – проекции вектора напряжения придонного трения на оси Ox и Oy соответственно.

Начальные условия для u_1 , u_2 , T , S , ξ :

$$u_1 = u_1^0, u_2 = u_2^0, T = T^0, S = S^0, \xi = \xi^0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad (1.7)$$

где u_1^0 , u_2^0 , T^0 , S^0 , ξ^0 – заданные функции.

Задача крупномасштабной динамики океана в терминах функций u_1, u_2, ξ, T, S формулируется следующим образом: *найти функции u_1, u_2, ξ, T, S , удовлетворяющие условиям (1.1)–(1.7).*

Если функции u_1, u_2, ξ, T, S найдены, то функция w определяется по формуле (1.3), а функция P – по формуле:

$$P(x, y, z, t) = P_a(x, y, t) + \rho_0 g(z - \xi) + \int_0^z g \rho_1(T, S) dz'.$$

Уравнения (1.1)–(1.7) аппроксимируются по методу расщепления с привлечением метода конечных разностей для аппроксимации подзадач на всех этапах схемы расщепления. Более детальное описание вычислительных методов и численных аналогов задачи может быть найдено, например, в работах [22, 64]. Используемые функциональные пространства, операторы и их свойства приведены в [59]. Неотрицательность операторов, установленная в [59], позволит в дальнейшем применить метод расщепления для аппроксимации исходной задачи.

1.3. Метод расщепления

При рассмотрении последовательно уравнений из системы (1.1) в классической постановке, считая все компоненты решений обладающими необходимой гладкостью по всем независимым переменным, и на соответствующих шагах метода расщепления будут получены «основные» подзадачи (подробное описание схемы расщепления и шагов метода расщепления можно найти в работах [25, 59]). При реализации шагов метода расщепления, после каждого шага получается приближение для соответствующей задачи. После формулировки схемы расщепления и перехода к полудискретной математической модели исходной задачи, реализация алгоритма решения всей полной задачи сводится к численному решению основных типов подзадач:

1. *Задача для уравнения конвекции-диффузии:*

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \mathbf{Grad})T + A_T T = f_T \text{ в } D \times (t_{j-1}, t_j), \\ T = T_{j-1} \text{ при } t = t_{j-1} \text{ в } D, \\ U_n^{(-)} T - \nu_T \frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_T (T - T_a) = Q_T^j \text{ на } \Gamma_S \times (t_{j-1}, t_j), \\ \frac{\partial T}{\partial N_T} = 0 \text{ на } \Gamma_{w,c} \times (t_{j-1}, t_j), \\ \frac{\partial T}{\partial N_T} = 0 \text{ на } \Gamma_H \times (t_{j-1}, t_j) \end{cases} \quad (1.8)$$

(и аналогичные задачи для S и $\vec{U}$).

2. *Задача для линеаризованной системы уравнений мелкой воды:*

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \begin{bmatrix} 0 & -\ell \\ \ell & 0 \end{bmatrix} \vec{v} - g \mathbf{grad} \xi = 0 \text{ в } \Omega \times (t_{j-1}, t_j), \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} - \mathbf{div} (H_1 \vec{v}) = f_3 \text{ в } \Omega \times (t_{j-1}, t_j), \\ H_1 \vec{v} \cdot \vec{n} + \beta_0 m_{w,op} \sqrt{gH} \xi = m_{w,op} \sqrt{gH} d_s \text{ на } \partial\Omega \times (t_{j-1}, t_j), \\ \vec{v} = \vec{v}^0, \xi = \xi^0 \text{ при } t = t_0 \text{ (} j = 1 \text{)}. \end{cases} \quad (1.9)$$

3. *Задача вида (в обобщенной постановке):*

$$\left(\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t}, \hat{\tilde{\Phi}} \right) + \int_D (A_k u_1 \cdot A_k \hat{u}_1 + A_k u_2 \cdot A_k \hat{u}) dD = 0.$$

4. *Задача для эллиптических уравнений (с симметричными или несимметричными операторами 2-го или 4-го порядков).*

К численному решению сформулированных подзадач 1–4 можно применить методы разделения области. Отметим, что если после введения подходящих аппроксимаций по времени подзадачи 1–4 сводятся к решению последовательности эллиптических задач, то это можно сделать методами разделения области, основанными на теории операторов Пуанкаре–Стеклова [2, 3]. Если операторы этих эллиптических подзадач несимметричны или не являются положительно определенными, то может возникнуть ряд трудностей в теоретическом обосновании и оптимизации скорости сходимости алгоритма разделения области. Также с целью

оптимизации скорости сходимости нередко используют методику введения предобуславливателей [8]. Но в некоторых практически интересных случаях такая методика вызывает значительные трудности. Кроме того, большинство задач геофизической гидротермодинамики не являются задачами с положительно определенными операторами, поэтому интерес представляет подход к построению алгоритмов разделения области, основанный на теории обратных и некорректно поставленных задач, теории сопряженных уравнений и операторов [65–68], предложенный в работе [25]. После формулировки метода расщепления можно рассмотреть применение метода разделения области для каждой конкретной подзадачи. Таким образом, для «основных подзадач» может быть рассмотрена методология построения алгоритмов разделения области, которая базируется на теории оптимального управления, теории обратных и некорректно поставленных задач, теории сопряженных уравнений и операторов [25]. Метод разделения области будет применяться на каждом временном шаге.

Глава 2

Методы разделения области в задачах геофизической гидротермодинамики

Для современных задач науки и техники все чаще требуется создание детальных картин изучаемых явлений. При этом возникает потребность в высокой точности моделирования, что, в свою очередь, проявляется в усложнении геометрических областей решаемых задач. В случае решения краевых задач в областях сложной геометрической формы эффективными могут быть методы, которые связаны с упрощением геометрии области. Для этого могут быть использованы методы разделения (декомпозиции) сложной области на более простые.

Несмотря на значительное увеличение числа научных работ, посвященных методу разделения области, в большинстве из них не рассматриваются задачи применительно к геофизической гидротермодинамике, в частности, океанологии. Достаточно часто такие задачи являются задачами с преобладающим несимметричным оператором и для них возникают трудности в использовании известных методов разделения области. Методы разделения области имеют практическую ценность для решения задач гидродинамики [25], в частности, в сложной геометрической постановке, такой как реальная акватория моря. В задачах математического моделирования общей циркуляции океанов и морей часто возникает необходимость выделения некоторой подобласти D_1 из всей области (акватории) D , в которой можно было бы получать численные решения задач, используя сетку другого масштаба, достигая, возможно, тем самым, лучшей, чем во всей D , аппроксимации границ, топографии дна и т.п., и получая приближенные решения рассматриваемых задач, обладающих большей точностью. Вводя разделение D на D_1 и $D_2 = D \setminus D_1$ с помощью «внутренней» границы $\Gamma_{in} \equiv (\partial D_1 \cap \partial D_2) \subset D$ можно также добиться некоторого упрощения процедур численного решения задач в D_1 или D_2 .

В настоящей главе описывается одна из новых методологий формулировки методов разделения области в задачах гидротермодинамики океанов (морей) [25]. Исследования базируются на подходах, развитых в настоящее время в современной теории вариационной ассимиляции данных наблюдений [59, 67, 69] и использующих результаты ряда разделов математики: теории оптимального управления, теории обратных и некорректно поставленных задач, теории разрешимости операторных уравнений, сопряженных операторов и уравнений [65–68]. Идея методологии, предложенной в [25], состоит в следующем. При разделении исходной об-

ласти на подобласти на внутренней границе записываются условия сшивки. Некоторые из условий сшивки записываются через «граничные функции», которые объявляются «управлениями» и подлежат отысканию вместе с решением в подобластях. В качестве «уравнения замыкания» принимается вторая часть условий сшивки, которые записываются на внутренней границе. Таким образом, формулируется задача оптимального управления, которая решается уже известными методами. Стоит отметить, что данная методология применима к задачам с операторами различных типов и порядков [25]. В настоящей работе данная методология применяется к решению сформулированных в главе 1 «основных подзадач», к которым методом расщепления приближенно сводится исходная нестационарная задача гидротермодинамики океанов и морей.

2.1. Обзор методов разделения области

Изначально метод разделения области, предложенный Шварцем, был применен к стационарным задачам с использованием условий Дирихле на внутренней границе. Метод рассматривался на подобластях, обладающих простой геометрией, с непустым пересечением, в каждой из которых легко отыскать решение. Перекрытие подобластей было необходимым условием применимости метода. Долгое время классический метод Шварца носил теоретический характер, однако, в настоящее время модификации данного метода получили широкое практическое применение для различных классов задач.

За последние тридцать лет были разработаны и проанализированы некоторые варианты усовершенствования этого алгоритма: рассматривались случаи как с перекрытием, так и без перекрытия. Модификации алгоритмов Шварца были рассмотрены для широкого круга задач (так, например, есть значительное число исследований оптимизированного метода Шварца: для линейного уравнения Шредингера [70], с использованием разрывного метода Галеркина [71], некоторые обобщения метода для получения решений для гетерогенной декомпозиции [72, 73]), были исследованы методики как для граничных условий, так и для применения других методов. Значительное влияние на сходимость алгоритма оказывают условия на искусственно введенной внутренней границе, исследованию этого вопроса посвящены, например, работы [74–76].

Оптимизированный метод Шварца [77] по сравнению с классическим методом имеет улучшенные свойства сходимости. Некоторые разновидности метода Шварца [18, 20, 78, 79] не обязательно требуют пересечения подобластей для достижения сходимости. Кроме того, оптимизированный метод Шварца позволяет использовать различные шаги по времени и

пространству в подобластях [80], что может также быть эффективным для задач сшивки климатических моделей [81].

Некоторое число работ посвящено методам разделения области, которые не требуют пересечений подобластей. К таким методам можно отнести методы «Дирихле–Нейман» [82] и «Нейман–Нейман» [83], названия которых получены из условий сшивки на внутренней границе. Оптимизированный метод Шварца на основе метода «Нейман–Нейман» рассмотрен в работе [84].

В работе [85] рассматривается неоднородный метод разделения области с использованием связи подобластей по методу виртуального управления. Авторы рассматривают уравнения типа конвекции–диффузии в контексте задач виртуального управления. В работе этот метод применяется для достижения непрерывности на границе раздела областей как в случае с перекрывающимися, так и в случае непересекающихся областей. Продолжением исследования неоднородного метода декомпозиции на основе методов управления можно считать работы [16, 86]. В этих работах авторы рассматривали случай только пересекающихся подобластей для связи уравнений первого и второго порядка на основе подхода оптимального управления и с применением теории сопряженных уравнений. Авторы предлагают теоретический анализ операторных уравнений в случае с двумя и тремя функциями управления. Кроме того, был предложен алгоритм метода декомпозиции с управлением «смешанного типа» и рассмотрены предложенные подходы для эллиптической задачи второго порядка. Авторы продолжают развивать методы разделения области на основе теории оптимального управления в работах [87, 88].

Задачи моделирования гидротермодинамики моря являются вычислительно трудоемкими, что вызывает необходимость использования параллельных алгоритмов. Такие алгоритмы могут быть созданы на основе методов разделения области [44, 45, 89]. Отдельным вопросом при применении параллельных алгоритмов является задача об обмене данными между подобластями и оптимизации распределения вычислительной нагрузки.

В последнее время, методы разделения области стали активно применяться при математическом моделировании процессов в океане. Так, для моделирования примитивных уравнений динамики океана использовался оптимизированный метод Шварца [26]. Для моделирования прибрежных потоков [27] были предложены алгоритмы, основанные на методах разделения области. Некоторые частные вопросы о совмещении моделей рассматриваются также с использованием различных видов методов разделения области [46–48].

Использование вариационной ассимиляции данных для улучшения прогноза в математических моделях представляет собой одну из наиболее актуальных задач в современной ма-

тематической геофизике. В последнее время такие задачи получили распространение вследствие значительного увеличения данных наблюдений таких как, например, спутниковые измерения. Это влечет за собой необходимость создания эффективных алгоритмов ассимиляции данных для многопроцессорных систем. Методы разделения области, используемые для моделирования океанов и морей, также широко применяются для задач вариационной ассимиляции данных, где они используются как развитие параллельных алгоритмов [29, 44].

Несмотря на большое число имеющихся на сегодняшний день методов для решения задач математической физики, существуют актуальные вопросы скорости сходимости, устойчивости и сложности конструируемых алгоритмов. В связи с этим для задач в сложной геометрической постановке становится выгодным использование таких подходов, при которых расчетная область разбивается на более простые, для которых проще построить алгоритмы решения. Вычисленный таким образом набор решений необходимо согласовать так, чтобы получить единое решение во всей области, для разностной задачи, аппроксимирующей исходную. Существенным является тот факт, что на данный момент разработано достаточное число методов, базирующихся на идее разбиения области на более простые (или же дополнения области до более простой). Многие из них носят не просто теоретический характер, но хорошо зарекомендовали себя в применении к прикладным задачам. В ряде сложных случаев необходимо применять специализированные методы декомпозиции, зачастую разработанные под конкретную ситуацию. Методы декомпозиции области в настоящее время применяются для задач конвекции-диффузии [13–18], задач теории упругости [90, 91], а также для моделей морей и океанов с привлечением гидротермодинамических уравнений [25–27, 51]. В ряде работ Агошкова В.И. [4, 6, 7] обосновывается применение ряда алгоритмов разделения области для класса задач гидродинамики.

2.2. Метод разделения области для уравнения конвекции–диффузии

В данном параграфе кратко изложена методология разделения области, основанная на теории обратных задач и оптимального управления, для уравнения конвекции–диффузии. Идея данной методологии предложена в работах Агошкова В.И. [25, 92].

2.2.1. Постановка задачи

Пусть рассматривается полная система уравнений и краевых условий, задающая математическую модель гидротермодинамики (общей циркуляции) океана или моря в $D \times (t_0, t_1)$, где $D \subset \mathbb{R}^3$, $t_1 < \infty$. Пусть для аппроксимации этой модели по временной переменной $t \in [t_0, t_1]$

применяется метод расщепления и получена полудискретная модель, состоящая из «основных подзадач», представленных в главе 1. Сформулируем итерационный алгоритм метода разделения области для задачи о распространении тепла (одной из «основных подзадач», полученных при формулировке метода расщепления).

Рассмотрим задачу вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \mathbf{Grad}) T - \mathbf{Div}(\hat{a}_T \mathbf{Grad} T) = f_T \text{ в } D \times (t_0, t_1), \\ T = T(0) \text{ при } t = t_0 \text{ в } D, \\ U_n^{(-)} T - \nu_T \frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_T (T - T_a) = Q_T + U_n^{(-)} d_T \text{ на } \Gamma_s \times (t_0, t_1), \\ \frac{\partial T}{\partial N_T} = 0 \text{ на } \Gamma_{w,c} \times (t_0, t_1), \\ \frac{\partial T}{\partial N_T} = 0 \text{ на } \Gamma_H \times (t_0, t_1) \end{array} \right. \quad (2.1)$$

с заданными $\vec{U}$, $\hat{a}_T$, ν_T , f_T , γ_T , T_a , Q_T , d_T .

Пусть область D разделена кусочно-гладкой липшицевой поверхностью Γ_{in} на две подобласти D_1 , D_2 так, что границы ∂D_1 , ∂D_2 будут также липшицевыми. Пусть $T \equiv T_1$, $T(0) \equiv T_1(0)$ в D_1 , $T \equiv T_2$, $T(0) \equiv T_2(0)$ в $D_2 \forall t \in (t_0, t_1)$.

Рассмотрим подробнее условия, которые будут задаваться на «искусственно» введенной границе разделения областей $\Gamma_{in} \forall t \in (t_0, t_1)$. Можно ввести условия сопряжения вида [93]:

$$T_1 = T_2, \quad \frac{\partial T_1}{\partial N_{T,1}} = -\frac{\partial T_2}{\partial N_{T,2}} \text{ на } \Gamma_{in} \times (t_0, t_1). \quad (2.2)$$

Но можно также потребовать выполнения следующих условий [49]

$$T_1 = T_2, \quad \frac{p - \vec{U} \cdot \vec{N}_1}{2} T_1 + \frac{\partial T_1}{\partial N_{T,1}} = - \left(\frac{p - \vec{U} \cdot \vec{N}_2}{2} T_2 + \frac{\partial T_2}{\partial N_{T,2}} \right) \text{ на } \Gamma_{in} \times (t_0, t_1),$$

где $\vec{N}_i$ – вектор внешней нормали к ∂D_i , p – заданный параметр, возможно, зависящий от координат и времени (так, например, в работе [25, 92] параметр p принимается равным $|\vec{U} \cdot \vec{N}|$), $\partial T_i / \partial N_{T,i} \equiv \vec{N}_i \hat{a}_T \mathbf{Grad} T_i$, $i = 1, 2$.

Задача (2.1) может быть записана на каждом из множеств $D_1 \times (t_0, t_1)$, $D_2 \times (t_0, t_1)$ с условиями сшивки вида:

$$T_1 = T_2, \text{ на } \Gamma_{in} \times (t_0, t_1), \quad (2.3)$$

$$\frac{p - \vec{U} \cdot \vec{N}_1}{2} T_1 + \frac{\partial T_1}{\partial N_{T,1}} = - \left(\frac{p - \vec{U} \cdot \vec{N}_2}{2} T_2 + \frac{\partial T_2}{\partial N_{T,2}} \right) \text{ на } \Gamma_{in} \times (t_0, t_1), \quad (2.4)$$

где Γ_{in} – общая часть границ для $\partial D_1, \partial D_2$, разделяющая D на D_1, D_2 (при этом Γ_{in} может быть составлена из нескольких частей $\Gamma_{in}^k, k = 1, 2, \dots, k < \infty$).

Пусть вводится «дополнительная неизвестная» ϑ_T («управление») на $\Gamma_{in} \times (t_0, t_1)$ как

$$\vartheta_T \equiv \frac{p - \vec{U} \cdot \vec{N}_1}{2} T_1 + \frac{\partial T_1}{\partial N_{T,1}} \text{ на } \Gamma_{in} \times (t_0, t_1), \quad (2.5)$$

подлежащая определению вместе с T_1, T_2 . В силу (2.4) имеем:

$$\frac{p - \vec{U} \cdot \vec{N}_2}{2} T_2 + \frac{\partial T_2}{\partial N_{T,2}} = -\vartheta_T \text{ на } \Gamma_{in} \times (t_0, t_1). \quad (2.6)$$

В качестве уравнения замыкания задачи будем рассматривать (2.3) и введем следующий «функционал стоимости»:

$$J_\alpha(\vartheta_T) \equiv J_\alpha(T_1(\vartheta_T), T_2(\vartheta_T), \vartheta_T) \equiv \frac{\alpha}{2} \int_{\Gamma_{in}} \int_{t_0}^{t_1} (\vartheta_T - \vartheta_T^{(0)})^2 d\Gamma dt + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{in}} \int_{t_0}^{t_1} (T_1 - T_2)^2 d\Gamma dt, \quad (2.7)$$

где $\alpha = \text{const} \geq 0$ – «параметр регуляризации» [94], $\vartheta_T^{(0)}$ – заданная функция, «приближение» к ϑ_T . Далее будем считать, что $\vartheta_T^{(0)} \equiv 0, \vartheta_T \equiv 0$ на $(\Gamma \setminus \Gamma_{in}) \times (t_0, t_1)$.

Ставится следующая задача: *найти функции $T_i, (i = 1, 2)$ в $D_i \times (t_0, t_1)$, удовлетворяющие (2.1), (2.5), (2.6) при $D \equiv D_i, (i = 1, 2)$ и функцию ϑ_T , такие что функционал (2.7) принимает наименьшее значение:*

$$\inf_{\vartheta_T} J_\alpha(\vartheta_T). \quad (2.8)$$

Если найти решение этой экстремальной задачи $\vartheta_T \equiv \vartheta_T(\alpha)$ при $\alpha = \alpha_i, i = 1, 2, \dots (\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_k \rightarrow +0, k \rightarrow \infty)$, то при определенных условиях функцию $\vartheta_T(\alpha)$ и функции $T_1(\alpha) \equiv T_2(\vartheta_T(\alpha))$ можно принять в качестве приближенного решения исходной задачи [25, 92]:

$$T_1 \cong T_1(\vartheta_T(\alpha)), T_2 \cong T_2(\vartheta_T(\alpha)), \vartheta_T \cong \vartheta_T(\alpha).$$

2.2.2. Вариационные уравнения

Вычислим вариацию функционала δJ_α :

$$\begin{aligned} \delta J_\alpha = \alpha \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma_{in}} \left(\vartheta_T - \vartheta_T^{(0)} \right) \delta \vartheta_T d\Gamma dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma_{in}} (T_1 - T_2) \delta T_1 d\Gamma dt + \\ + \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma_{in}} (T_2 - T_1) \delta T_2 d\Gamma dt, \end{aligned}$$

где δT_i , $i = 1, 2$, удовлетворяют системе:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \delta T_i}{\partial t} + \left(\vec{U} \cdot \mathbf{Grad} \right) \delta T_i - \mathbf{Div} (\hat{a}_T \mathbf{Grad} \delta T_i) = 0 \text{ в } D_i \times (t_0, t_1), \\ \delta T_i = 0 \text{ при } t = t_0 \text{ в } D_i, \\ \frac{\partial \delta T_i}{\partial N_T} + \gamma_T \delta T_i = 0 \text{ на } \Gamma_s \times (t_0, t_1), \\ \frac{\partial \delta T_i}{\partial N_T} = 0 \text{ на } \Gamma_{w,c} \times (t_0, t_1), \\ \frac{\partial \delta T_i}{\partial N_T} = 0 \text{ на } \Gamma_H \times (t_0, t_1), \\ \frac{\partial \delta T_1}{\partial N_{T,1}} - \frac{\vec{U} \cdot \vec{N}_1 - p_1}{2} \delta T_1 = - \left(\frac{\partial \delta T_2}{\partial N_{T,2}} - \frac{\vec{U} \cdot \vec{N}_2 - p_2}{2} \delta T_2 \right) = \delta \vartheta_T \text{ на } \Gamma_{in}, \end{array} \right.$$

где граничные условия на $\Gamma_s, \Gamma_{w,c}$ ставятся на тех частях $\partial D_1, \partial D_2$, которые имеют пересечения положительной меры с частями $\Gamma_s, \Gamma_{w,c}$ границы $\Gamma \equiv \partial D$ всей области D .

Введем следующие «сопряженные задачи» ($i = 1, 2$):

$$\left\{ \begin{array}{l} - \frac{\partial T_i^*}{\partial t} - \left(\vec{U} \cdot \mathbf{Grad} \right) T_i^* - \mathbf{Div} (\hat{a}_T \mathbf{Grad} T_i^*) = 0 \text{ в } D_i \times (t_0, t_1), \\ T_i^* = 0 \text{ при } t = t_1 \text{ в } D_i, \\ \frac{\partial T_i^*}{\partial N_T} + \gamma_T T_i^* = 0 \text{ на } \Gamma_s \times (t_0, t_1), \\ \frac{\partial T_i^*}{\partial N_T} = 0 \text{ на } (\Gamma_H \cup \Gamma_{w,c}) \times (t_0, t_1), \\ \frac{\partial T_1^*}{\partial N_{T,1}} + \frac{\vec{U} \cdot \vec{N}_1 + p}{2} T_1^* = (T_1 - T_2) \text{ на } \Gamma_{in} \times (t_0, t_1), \\ \frac{\partial T_2^*}{\partial N_{T,2}} + \frac{\vec{U} \cdot \vec{N}_2 + p}{2} T_2^* = (T_2 - T_1) \text{ на } \Gamma_{in} \times (t_0, t_1). \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Тогда δJ_α может быть представлена в следующей форме:

$$\delta J_\alpha = \alpha \int_{\Gamma_{in}} \int_{t_0}^{t_1} \left(\vartheta_T - \vartheta_T^{(0)} \right) \delta \vartheta_T d\Gamma dt + \int_{\Gamma_{in}} \int_{t_0}^{t_1} (T_1^* - T_2^*) \delta \vartheta_T d\Gamma dt. \quad (2.10)$$

В силу произвольности выбора $\delta \vartheta_T$ из (2.10) получаем уравнение Эйлера (являющееся «вариационным уравнением») вида

$$\alpha \left(\vartheta_T - \vartheta_T^{(0)} \right) + (T_1^* - T_2^*) = 0 \text{ на } \Gamma_{in} \times (t_0, t_1). \quad (2.11)$$

Таким образом, решение задачи (2.8): $T_i = T$ в $D_i \times (t_0, t_1)$, $i = 1, 2$, ϑ_T на $\Gamma_{in} \times (t_0, t_1)$ удовлетворяет системе уравнений (2.1), (2.5), (2.6) при $D \equiv D_i \times (t_0, t_1)$, $i = 1, 2$, (2.9), (2.11).

Запишем представленные выше задачи в обобщенных постановках, а также как «операторные уравнения». Введем следующие вещественные гильбертовы пространства [25, 95]:

$$\mathbf{L}_2((t_0, t_1) \times D) \equiv \mathbf{H} : (\varphi, \psi)_{\mathbf{H}} \equiv (\varphi, \psi) = \int_{t_0}^{t_1} \int_D \varphi \psi dD dt,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_2^{0,1}((t_0, t_1) \times D) &\equiv \mathbf{L}_2((t_0, t_1); \mathbf{W}_2^1(D)) \equiv \\ &\equiv Y : (\varphi, \psi)_Y = (\varphi, \psi) + \int_{t_0}^{t_1} \int_D \mathbf{Grad} \varphi \cdot \mathbf{Grad} \psi dD dt, \end{aligned}$$

$$W((t_0, t_1) \times D) \equiv W : \|\varphi\|_W = \left(\|\varphi\|_Y^2 + \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\|_{Y^*}^2 \right)^{1/2}, \text{ где } Y^* = \mathbf{L}_2((t_0, t_1); (\mathbf{W}_2^1(D))^*),$$

$$\mathbf{W}_2^1((t_0, t_1) \times D) \equiv \mathbf{W}_2^1 : (\varphi, \psi)_{\mathbf{W}_2^1} = (\varphi, \psi)_Y + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right).$$

Отметим, что если $\varphi \in W$, то $\varphi \in \mathbf{C}((t_0, t_1), \mathbf{L}_2(D))$ (см. [95]) и

$$\max_{t \in [t_0, t_1]} \|\varphi\|_{\mathbf{L}_2(D)} \leq C \|\varphi\|_W, \quad C = \text{const} < \infty.$$

Пусть также:

$$V_0 = \{ \varphi \in W : \varphi = 0 \text{ при } t = t_0 \text{ почти всюду в } D \},$$

$$V_1 = \{ \varphi \in W : \varphi = 0 \text{ при } t = t_1 \text{ почти всюду в } D \}.$$

Предполагаем, что нормы во всех введенных пространствах порождаются соответствующими скалярными произведениями. Пусть такие же пространства введены также при $D \equiv D_1$ и $D \equiv D_2$.

Введем следующие билинейные формы:

$$\begin{aligned} a_i(\varphi, \psi) \equiv & - \left(\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) - \left(\varphi, \mathbf{Div}(\vec{U}\psi) \right) + \int_{t_0}^{t_1} \int_D \hat{a}_T \mathbf{Grad} \varphi \cdot \mathbf{Grad} \psi dD dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{\Gamma_{in}} \frac{\vec{U} \cdot \vec{N}_i + p}{2} \varphi \psi d\Gamma + \int_{\Gamma_s} \gamma_T \varphi \psi d\Gamma \right) dt + \\ & + \int_{D_i} \varphi \cdot \psi|_{t=t_1} dD \text{ при } \varphi, \psi \in W \text{ или } \varphi \in Y, \psi \in V_1, i = 1, 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_i(\psi) \equiv & \int_{t_0}^{t_1} \int_{D_i} f_T \psi dD dt + \int_{D_i} T(0) \psi|_{t=t_0} dD + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma_S} \gamma_T T_a \psi + Q_T \psi d\Gamma dt, i = 1, 2, \text{ при } \psi \in W \text{ или } \psi \in V_1, \end{aligned}$$

$$B_1(\vartheta_T, \psi) \equiv \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma_{in}} \vartheta_T \psi d\Gamma dt \quad \forall \psi \in W \text{ или } \psi \in V_1,$$

$$B_2(\vartheta_T, \psi) = -B_1(\vartheta_T, \psi) \quad \forall \psi \in W \text{ или } \psi \in V_1.$$

при этом в том числе будут выполнены соотношения вида:

$$a_i(T_i, \psi) = \mathfrak{F}_i(\psi) + B_i(\vartheta_T, \psi) \quad \forall \psi \in V_1((t_0, t_1) \times D_i), i = 1, 2. \quad (2.12)$$

Обобщенную постановку задачи в $D \times (t_0, t_1)$ можно сформулировать следующим образом: *найти функцию $T \in Y(D \times (t_0, t_1))$, удовлетворяющую (2.12) при $i = 1, 2$ (при переобозначении $T_i \equiv T, D_i \equiv D$) и выполнении условия (2.3). Условие (2.4) при этом оказывается естественным и рассматривается как равенство в $\mathbf{W}_2^{-1/2}(\Gamma_{in} \times (t_0, t_1)) \equiv \left(\mathbf{W}_2^{1/2}(\Gamma_{in} \times (t_0, t_1)) \right)^*$. Введем операторы L_i, B_i, C_i и функции $F_i, i = 1, 2$, определяемые как:*

$$(L_i \varphi, \psi)_{\mathbf{L}_2(D_i \times (t_0, t_1))} \equiv a_i(\varphi, \psi) \quad \forall \varphi \in Y(D_i \times (t_0, t_1)), \quad \forall \psi \in \mathbf{W}_2^1(D_i \times (t_0, t_1)),$$

$$(B_i \varphi, \psi)_{\mathbf{L}_2(\Gamma_{in} \times (t_0, t_1))} \equiv B_i (\vartheta_T, \psi) \quad \forall \psi \in \mathbf{W}_2^1(D_i \times (t_0, t_1)),$$

$$C_i \varphi \equiv \varphi|_{\Gamma_{in}} \text{ почти всюду на } (t_0, t_1) \quad \forall \varphi \in Y(D_i \times (t_0, t_1)),$$

$$(F_i, \psi)_{\mathbf{L}_2(D_i \times (t_0, t_1))} \equiv \mathfrak{F}_i(\psi) \quad \forall \psi \in \mathbf{W}_2^1(D_i \times (t_0, t_1)).$$

Оператор C_i есть оператор взятия следа на Γ_{in} при $t \in (t_0, t_1)$ у функции $\varphi \in Y(D_i \times (t_0, t_1))$. Сузим область определения оператора L_i , приняв ее равной пространству $Y(D_i \times (t_0, t_1))$, плотному в $Y(D \times (t_0, t_1))$, $i = 1, 2$. За сужением операторов оставляем прежние обозначения L_i , $i = 1, 2$.

Теперь задачи для T_i можно записать в форме операторных уравнений:

$$\begin{aligned} L_i T_i &= F_i + B_i \vartheta_T \text{ в } V_1^*, \\ C_1 T_1 &= C_2 T_2 \text{ почти всюду на } (t_0, t_1) \times \Gamma_{in}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Для операторов L_i , $i = 1, 2$, справедливо свойство положительной определенности при условии $p > 0$ [96]:

$$\begin{aligned} (L_i \varphi, \varphi) &= a_i(\varphi, \varphi) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{D_i} \hat{a}_T |\mathbf{Grad} \varphi|^2 dD dt + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{\Gamma_s} \gamma_T \varphi^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_s} \frac{1}{2} (U_{n,i}^{(+)} + U_{n,i}^{(-)}) \varphi^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_{in}} \frac{1}{2} p \varphi^2 d\Gamma \right] dt + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{D_i} (\varphi^2|_{t=t_0} + \varphi^2|_{t=t_1}) dD \geq C_i \int_{t_0}^{t_1} \int_{D_i} |\varphi|^2 dD dt, \quad C_i = const > 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Следовательно, операторы обратимы.

Выражая T_i из первого уравнения (2.13): $T_i = L_i^{-1} (F_i + B_i \vartheta_T)$, $i = 1, 2$, и подставляя во второе уравнение из (2.13), получаем:

$$C_1 L_1^{-1} (F_1 + B_1 \vartheta_T) = C_2 L_2^{-1} (F_2 + B_2 \vartheta_T)$$

или

$$A \vartheta_T = g \text{ в } \mathbf{L}_2((t_0, t_1) \times \Gamma_{in}), \tag{2.14}$$

где

$$A \equiv (C_1 L_1^{-1} B_1 - C_2 L_2^{-1} B_2), \quad g \equiv C_2 L_2^{-1} F_2 - C_1 L_1^{-1} F_1.$$

Некоторые теоретические вопросы (например, однозначная и плотная разрешимость задачи) для случая $p = |\vec{U} \cdot \vec{N}_i|$ приведены в работе [25]. В данной работе будем выбирать параметр $p = \varepsilon |\vec{U} \cdot \vec{n}_i|$, где $0 < \varepsilon \leq 1$ (отмечаем, что если $\varepsilon = 1$, то модифицированные условия сшивки совпадают с условиями из работы [25]). Доказательства для случая $p = \varepsilon |\vec{U} \cdot \vec{N}_i|$ аналогичны случаю из работы [25], поэтому приведем утверждение без доказательств.

Утверждение 2.1 ([25]). *Оператор A , как оператор, действующий в $\mathbf{L}_2((t_0, t_1) \times \Gamma_{in})$, является непрерывным.*

Представим $J_\alpha(\vartheta_T)$ как регуляризованный функционал от $(A\vartheta_T - g) = C_1T_1 - C_2T_2$:

$$J_\alpha(\vartheta_T) = \frac{\alpha}{2} \int_{\Gamma_{in}} \int_{t_0}^{t_1} (\vartheta_T - \vartheta_T^{(0)})^2 d\Gamma dt + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{in}} \int_{t_0}^{t_1} \|A\vartheta_T - g\|^2 d\Gamma dt. \quad (2.15)$$

Представление функционала $J_\alpha(\vartheta_T)$ в такой форме будет использоваться при формулировке итерационных алгоритмов решения задачи. Выпишем уравнение Эйлера, которому удовлетворяет решение задачи минимизации $J_\alpha(\vartheta_T)$:

$$\mathcal{A}_\alpha \vartheta_T \equiv \alpha m_{in} \vartheta_T + A^* A \vartheta_T = g_\alpha \equiv (A^* g + \alpha m_{in} \vartheta_T^{(0)}) \text{ в } \mathbf{L}_2(\Gamma_{in} \times (t_0, t_1)), \quad (2.16)$$

где функция m_{in} (характеристическая функция) задается следующим образом:

$$m_{in} = \begin{cases} 1 & \text{на } \Gamma_{in}, \\ 0 & \text{на } \partial D_i \setminus \Gamma_{in}, \end{cases}$$

и которое при $\alpha = 0$ есть уравнение (2.3), записанное в смысле «наименьших квадратов». Если $\alpha > 0$, то оператор $\mathcal{A}_\alpha$ самосопряжен и положительно определен в $\mathbf{L}_2(\Gamma_{in} \times (t_0, t_1))$ [25, 92].

2.2.3. Итерационные алгоритмы метода разделения области

Сформулируем подходящий итерационный алгоритм для операторных уравнений в применении к уравнению (2.16) и выпишем его в терминах операторов исходных задач. Так, один из простейших итерационных процессов для минимизации (2.15) является следующим:

$$\vartheta_T^{k+1} = \vartheta_T^k - \tau_k (\mathcal{A}_\alpha \vartheta_T^k - g_\alpha), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.17)$$

где $\{\tau_k\}$ – параметры итерационного процесса. Известно [64, 97], что если $\tau_k = \tau \forall k$ и

$$0 < \tau < \frac{2}{2\alpha + \|A\|^2},$$

то процесс (2.17) сходится.

Если считать, что ϑ_T^k уже определено, а $\tau_k \equiv \tau$ – задано, то вычисление ϑ_T^{k+1} осуществляется согласно (2.17) и эквивалентно вычислению ϑ_T^{k+1} по следующей формуле [64, 97]:

$$\vartheta_T^{k+1} = \vartheta_T^k - \tau_k \left(\alpha \left(\vartheta_T^k - \vartheta_T^{(0)} \right) + m_{in} (T_{1,k}^* - T_{2,k}^*) \right) \text{ на } (t_0, t_1) \times \Gamma_{in}, \quad (2.18)$$

где $T_{i,k}^*$ – решения сопряженных задач (2.9) в $(t_0, t_1) \times D_i$, при $T_i \equiv T_{i,k}$ – решение (2.1) в $D \equiv D_i$, $i = 1, 2$, и $\vartheta_T \equiv \vartheta_T^k$.

В силу наличия свойства плотной разрешимости в рассматриваемой обратной задаче можно при достаточно малом $\alpha > 0$ выбирать τ_k в виде [69, 98]:

$$\tau_k = \frac{1}{2} \frac{\int_{\Gamma_{in}} \int_{t_0}^{t_1} (T_{1,k} - T_{2,k})^2 d\Gamma dt}{\int_{\Gamma_{in}} \int_{t_0}^{t_1} (T_{1,k}^* - T_{2,k}^*)^2 d\Gamma dt}. \quad (2.19)$$

Приближенное решение задачи может быть рассмотрено при предварительной аппроксимации по переменной t и переходе от исходной задачи к ее полудискретному аналогу. Численное решение рассматриваемой здесь экстремальной задачи можно осуществить, привлекая простейший итерационный алгоритм типа (2.17). В результате получаем следующий *итерационный алгоритм разделения области для стационарного уравнения конвекции-диффузии*.

Пусть $\vartheta_T \equiv \vartheta_T^k$ уже определено. Тогда:

- (1) В D_i определяется функция T_i^k как решение уравнения

$$\left(\vec{U} \cdot \mathbf{Grad} \right) T_i - \mathbf{Div} (\hat{a}_T \mathbf{Grad} T_i) + b T_i = F_T \text{ в } D_i, i = 1, 2, \quad (2.20)$$

при условиях

$$\frac{p - \vec{U} \cdot \vec{N}_1}{2} T_1 + \frac{\partial T_1}{\partial N_{T,1}} = \vartheta_T, \quad \frac{p - \vec{U} \cdot \vec{N}_2}{2} T_2 + \frac{\partial T_2}{\partial N_{T,2}} = -\vartheta_T \text{ на } \Gamma_{in};$$

(2) Решаем сопряженные задачи:

$$-\mathbf{Div}(\vec{U}T_i^*) - \mathbf{Div}(\hat{a}_T \mathbf{Grad} T_i^*) + bT_i^* = 0 \text{ в } D_i, i = 1, 2, \quad (2.21)$$

при условиях

$$\frac{p + \vec{U} \cdot \vec{N}_1}{2} T_1^* + \frac{\partial T_1^*}{\partial N_{T,1}} = (T_1 - T_2), \quad \frac{p + \vec{U} \cdot \vec{N}_2}{2} T_2^* + \frac{\partial T_2^*}{\partial N_{T,2}} = (T_2 - T_1) \text{ на } \Gamma_{in};$$

(3) находим новое приближение ϑ_T^{k+1} :

$$\vartheta_T^{k+1} = \vartheta_T^k - \tau_k \left(\alpha \left(\vartheta_T^k - \vartheta_T^{(0)} \right) + (T_1^* - T_2^*) \right) \text{ на } \Gamma_{in}, \quad (2.22)$$

где параметр τ_k может вычисляться по формуле (см. (2.19)):

$$\tau_k = \frac{\int_{\Gamma_{in}} (T_1 - T_2)^2 d\Gamma}{2 \int_{\Gamma_{in}} (T_1^* - T_2^*)^2 d\Gamma}.$$

Сформулированный алгоритм разделения области (2.20)–(2.22) сходится, если в качестве $\{\tau_k\}$ выбирать малый положительный параметр τ , причем [25, 92]:

$$\sum_{i=1}^2 \|T_i - T_{i,k}\|_{\mathbf{W}_2^1(D_i)} + \|\vartheta_T - \vartheta_T^k\|_{\mathbf{L}_2(\Gamma_{in})} \rightarrow 0 \text{ при } \alpha \rightarrow +0 \text{ и } k \rightarrow \infty.$$

Таким образом можно получить итерационный алгоритм метода разделения области для задачи конвекции–диффузии с модифицированными условиями сшивки по сравнению с [25, 92].

Замечание. Можно также рассмотреть следующие модифицированные условия сшивки:

$$T_1 = T_2 \text{ на } \Gamma_{in} \times (t_0, t_1), \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{p - \vec{U} \cdot \vec{N}_1}{2} T_1 + \frac{\partial T_1}{\partial N_{T,1}} &= \vartheta_T + d_1, \\ \frac{p - \vec{U} \cdot \vec{N}_2}{2} T_2 + \frac{\partial T_2}{\partial N_{T,2}} &= -\vartheta_T + d_2, \end{aligned} \quad \text{на } \Gamma_{in} \times (t_0, t_1), \quad (2.24)$$

где d_i , $i = 1, 2$ – заданная функция, возможно, зависящая от T_1 для подобласти Ω_2 и от T_2 для подобласти Ω_1 .

Отметим, что если выполнено (2.23), то, если сложить оба условия из (2.24), получим (при условии, что $\vec{N}_1 = -\vec{N}_2$):

$$\frac{p}{2}T_1 + \frac{p}{2}T_2 + \frac{\partial T_1}{\partial N_{T,1}} - \frac{\partial T_2}{\partial N_{T,1}} = d_1 + d_2.$$

Если выполнено условие (2.2), то

$$\frac{p}{2}T_1 + \frac{p}{2}T_2 = d_1 + d_2.$$

Таким образом, можно выбрать

$$d_1 = \frac{p}{2}T_2, \quad d_2 = \frac{p}{2}T_1 \quad \text{на } \Gamma_{in} \times (t_0, t_1). \quad (2.25)$$

При этом, если условие (2.2) не выполнено, но известна функция d на $\Gamma_{in} \times (t_0, t_1)$:

$$d = \frac{\partial T_1}{\partial N_{T,1}} + \frac{\partial T_2}{\partial N_{T,2}},$$

то данные функции d_i могут быть выбраны следующим образом:

$$d_1 = \frac{p}{2}T_2 - \frac{1}{2}d, \quad d_2 = \frac{p}{2}T_1 - \frac{1}{2}d \quad \text{на } \Gamma_{in} \times (t_0, t_1).$$

2.3. Сравнение методов разделения области для задачи конвекции–диффузии

Для оценки эффективности предложенного метода для задачи о распространении тепла было проведено его сравнение с оптимизированным методом Шварца [18, 77, 79], поскольку разновидность этого метода обладает несколькими преимуществами: возможно использование как для случая перекрывающихся подобластей, так и без перекрытия; также для данного метода характерна достаточно высокая скорость сходимости [79].

Некоторые обозначения для удобства будут использоваться только в данном параграфе и не соотносятся с обозначениями, введенными ранее в главе 1.

2.3.1. Оптимизированный метод Шварца для задачи конвекции–диффузии

Данный параграф основывается на работе [79], в которой рассматривается применение оптимизированного метода Шварца для нестационарного двумерного уравнения конвекции–диффузии.

Ставится следующая задача в Ω :

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} + u_1 \frac{\partial T}{\partial x} + u_2 \frac{\partial T}{\partial y} - \mu \Delta T + kT = f, \\ T = 0 \text{ на } \partial\Omega \equiv (\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2) \setminus \Gamma_{in}, \\ T = T(0) \text{ при } t = 0 \text{ в } \Omega = (\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma_{in}), \end{cases}$$

где $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $u_1, u_2 = \text{const}$, $\mu = \text{const} > 0$, $k = \text{const} \geq 0$, $t_1 < \infty$. Оператор конвекции–диффузии обозначим $L \equiv \partial_t + \vec{u} \nabla - \mu \Delta + k$.

Пусть область Ω разделена на две подобласти $\Omega^- = (-\infty, 0) \times \mathbb{R}$ и $\Omega^+ = (0, \infty) \times \mathbb{R}$ и граница их пересечения $\Gamma_{in} = \{y \in \mathbb{R}, x = 0\}$ (см. рисунок 2.1). Алгоритм оптимизированного метода Шварца формулируется следующим образом:

$$\begin{cases} Lv^{n+1} = f \text{ в } \Omega^-, \\ v^{n+1} = v(0) \text{ при } t = 0 \text{ в } \Omega^-, \\ B^- v^{n+1} = B^- w^n \text{ на } \Gamma_{in}, \end{cases} \quad \begin{cases} Lw^{n+1} = f \text{ в } \Omega^+, \\ w^{n+1} = w(0) \text{ при } t = 0 \text{ в } \Omega^+, \\ B^+ w^{n+1} = B^+ v^n \text{ на } \Gamma_{in}, \end{cases} \quad (2.26)$$

где $B^\pm$ – оператор на границе пересечения, который выбирается таким образом, чтобы данный алгоритм достаточно быстро сходиллся.

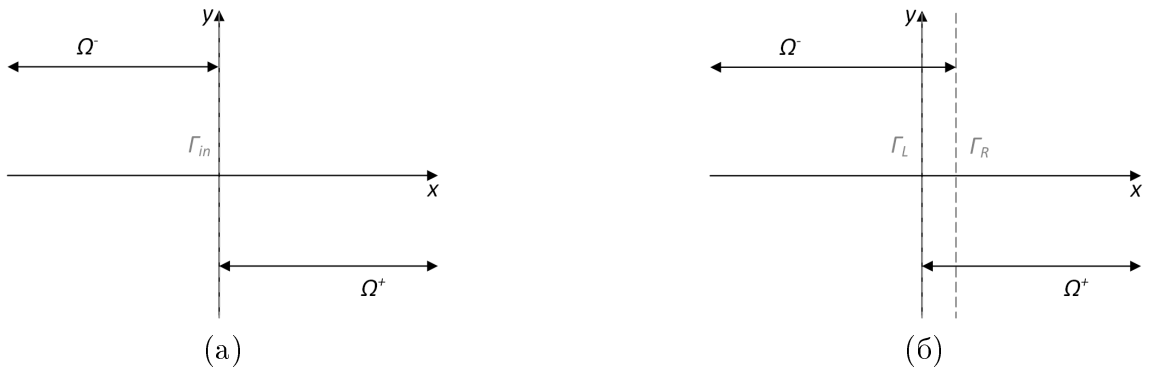


Рисунок 2.1 – Разделение области в $\mathbb{R}^2$ (а) без пересечения; (б) с пересечением

Оптимальные условия сшивки для данного алгоритма можно выбрать следующим образом:

$$B_{opt}^- = \frac{\partial}{\partial x} - S^-,$$

$$B_{opt}^+ = \frac{\partial}{\partial x} - S^+,$$

где S^+ и S^- – операторы, которые могут зависеть от тангенциальных и временной переменных (y, t) . Рассмотрим следующие условия (условия «нулевого порядка»):

$$S_0^\pm = \frac{u_1 \pm p}{2\mu}.$$

Выбор параметра $p > 0$ ограничен лишь тем, что задачи в подобластях должны быть корректно поставленными и чтобы метод быстро сходился. В некоторых случаях данный параметр может различаться для каждой из подобластей. Запишем алгоритм разделения области с выбранными условиями сшивки

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T_1^{n+1}}{\partial t} + u_1 \frac{\partial T_1^{n+1}}{\partial x} + u_2 \frac{\partial T_1^{n+1}}{\partial y} - \mu \Delta T_1^{n+1} + k T_1^{n+1} = f, \\ T_1^{n+1} = 0 \text{ на } \partial\Omega \equiv \partial\Omega_1 \setminus \Gamma_{in}, \\ T_1^{n+1} = T(0) \text{ при } t = 0 \text{ в } \Omega_1, \\ \frac{\partial T_1^{n+1}}{\partial x} - \frac{u_1 - p}{2\mu} T_1^{n+1} = \frac{\partial T_2^n}{\partial x} - \frac{u_1 - p}{2\mu} T_2^n \text{ на } \Gamma_{in}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T_2^{n+1}}{\partial t} + u_1 \frac{\partial T_2^{n+1}}{\partial x} + u_2 \frac{\partial T_2^{n+1}}{\partial y} - \mu \Delta T_2^{n+1} + k T_2^{n+1} = f, \\ T_2^{n+1} = 0 \text{ на } \partial\Omega \equiv \partial\Omega_2 \setminus \Gamma_{in}, \\ T_2^{n+1} = T(0) \text{ при } t = 0 \text{ в } \Omega_2, \\ \frac{\partial T_2^{n+1}}{\partial x} - \frac{u_1 + p}{2\mu} T_2^{n+1} = \frac{\partial T_1^n}{\partial x} - \frac{u_1 + p}{2\mu} T_1^n \text{ на } \Gamma_{in}. \end{array} \right.$$

В работе [79] рассмотрены также и другие условия сшивки, изучена скорость сходимости алгоритмов и проведены численные эксперименты по сравнению различных граничных условий.

Остановимся более подробно на представленных условиях сшивки для описанных алгоритмов разделения области.

Условия сшивки для алгоритма, основанного на теории обратных задач (см. § 2.2):

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon |u_1| - u_1}{2} T_1^k + \mu \frac{\partial T_1^k}{\partial x} &= \vartheta_T^k, \\ -\frac{\varepsilon |u_1| + u_1}{2} T_2^k + \mu \frac{\partial T_2^k}{\partial x} &= \vartheta_T^k.\end{aligned}\tag{2.27}$$

Условия сшивки оптимизированного метода Шварца:

$$\begin{aligned}\frac{p - u_1}{2} T_1^k + \mu \frac{\partial T_1^k}{\partial x} &= \frac{p - u_1}{2} T_2^{k-1} + \mu \frac{\partial T_2^{k-1}}{\partial x}, \\ -\frac{p + u_1}{2} T_2^k + \mu \frac{\partial T_2^k}{\partial x} &= -\frac{p + u_1}{2} T_1^{k-1} + \mu \frac{\partial T_1^{k-1}}{\partial x}.\end{aligned}\tag{2.28}$$

Далее будем рассматривать оптимизированный метод Шварца при условии, что $p = |u_1|$.

2.3.2. Численные эксперименты

Рассмотрим следующие параметры для численных экспериментов. Пусть область моделирования $\Omega = [-1, 1] \times [0, 1]$, граничные условия заданы как $T = 0$ на $\partial\Omega$, а функция правой части $f(x, y) = 0$. Шаги сетки выбраны равномерными по пространству $dx = dy = 0.01$ и по времени $dt = 0.01$. Начальное распределение температуры задано следующим образом:

$$T(0) = y(y-1)(1-x)(1+x).$$

Граница пересечения подобластей $x = 0$. Критерий остановки для итерационных алгоритмов выбирался следующим образом: количество итераций ≤ 50 или $\int_{\Gamma_{in}} (T_1 - T_2)^2 dy \leq 10^{-10}$.

Далее будем использовать следующие обозначения: *метод 1* – для алгоритма, основанного на теории обратных задач и сопряженных уравнений, *метод 2* – оптимизированный метод Шварца. Начальное приближение для метода 1 выбиралось равным 0, начальное приближение для метода 2 выбиралось с предыдущего шага по времени. Для метода 1 использовался параметр τ из уравнения (2.19) и параметр регуляризации $\alpha = 10^{-5}$.

В таблице 2.1 представлены результаты для скорости сходимости алгоритмов (количество итераций) на конечный момент времени ($t = 1$ с). Для метода 1 использовались условия сшивки (2.27), где $p = 0.01|u_1|$. Для метода 2 использовался параметр $p = |u_1|$. Для второго метода разделения области требуется меньшее количество итераций до достижения критерия остановки, чем для первого, а также максимальная величина модуля разности решения с исходным решением во всей области также меньше для метода 2.

Таблица 2.1 – Сравнение максимального значения модуля разности решения исходной задачи и задач с применением методов 1 и 2 в уравнении конвекции–диффузии

	метод 1	метод 1 с модифицированными условиями сшивки	метод 2
количество итераций	6	24	5
$\max T - T_\alpha $	0.002741	0.000258	0.000270

Если в качестве начального приближения к «управлению» рассматривать его значение на предыдущем шаге по времени, то количество итераций может быть сокращено и на максимальную величину модуля разности с решением исходной задачи практически не влияет (см. таблицу 2.2).

Таблица 2.2 – Сравнение максимального значения модуля разности решения исходной задачи и задач с применением метода 1 в уравнении конвекции–диффузии для другого начального приближения

	метод 1	метод 1 с модифицированными условиями сшивки
количество итераций	3	7
$\max T - T_\alpha $	0.002742	0.000258

Результаты моделирования для $\mu = 0.01$, $u_1 = -\cos \pi(x/2) \sin \pi(y - 1/2)$, $u_2 = 0.5 \sin \pi(x/2) \cos \pi(y - 1/2)$, $k = 0$ представлены на рисунке 2.2. Численные эксперименты для других соотношений коэффициентов конвекции и диффузии не были проведены, в связи с чем нет исследования для случаев преобладания конвективных членов над диффузионными.

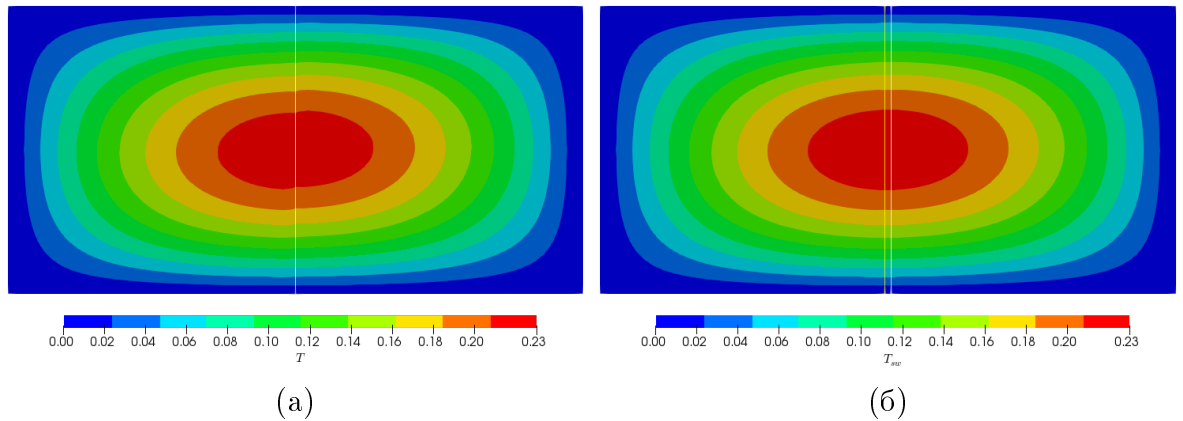


Рисунок 2.2 – Значение T на момент времени $t = 1$ с (а) для решения с применением метода 1; (б) для решения с применением метода 2

Разность результатов исходного моделирования с результатами с применением методов разделения области представлена на рисунке 2.3. Отметим, что разность между результа-

тами решений исходной задачи и задачи с применением методов 1 и 2 расположена вблизи введенной границы.

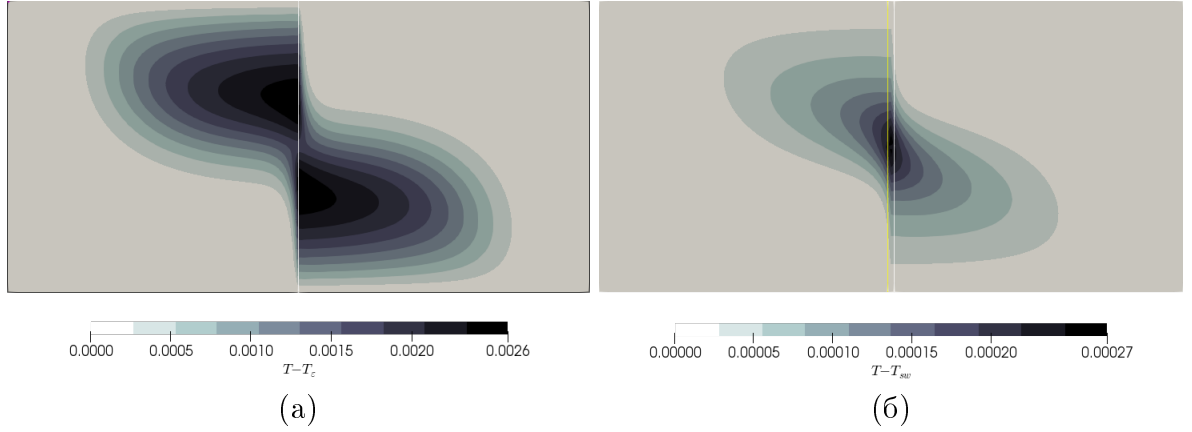


Рисунок 2.3 – Разность между результатами решений исходной задачи на момент времени $t = 1$ с и (а) задачи с применением метода 1; (б) задачи с применением метода 2 (использованы разные шкалы для значения разности)

По результатам численных экспериментов можно сделать следующий вывод: применение метода разделения области не вносит существенной ошибки в результаты моделирования, для метода 2 характерна большая скорость сходимости, чем для метода 1, а также меньшая величина ошибки по сравнению с исходным моделированием без применения метода разделения области.

2.4. Метод разделения области для линеаризованной системы уравнений мелкой воды

2.4.1. Постановка задачи

Рассмотрим подход, основанный на теории обратных задач и сопряженных уравнений, к формулировке алгоритмов разделения области для линеаризованной системы уравнений мелкой воды. Данный параграф основывается на работе [25].

Пусть рассматривается следующая задача (1.9):

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \begin{bmatrix} 0 & -\ell \\ \ell & 0 \end{bmatrix} \vec{v} + r\vec{v} - g \mathbf{grad} \xi = \vec{f} \text{ в } \Omega \times (t_0, t_1), \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} - \mathbf{div} (H_1 \vec{v}) = f_3 \text{ в } \Omega \times (t_0, t_1), \\ \vec{v} = \vec{v}_0, \xi = \xi_0 \text{ при } t = t_0 \text{ в } \Omega, \\ (H_1 \vec{v}) \cdot \vec{n} = 0 \text{ на } \partial\Omega \times (t_0, t_1), \end{cases} \quad (2.29)$$

где Ω – часть сферы, с кусочно-гладкой класса $\mathbf{C}^{(2)}$ липшицевой границей $\Gamma \equiv \partial\Omega$, $\vec{v} = (u, v)$ – вектор скорости, ξ – функция уровня, $f \equiv (f_1, f_2)$, H_1 – ограниченная, строго положительная, непрерывная по t функция, имеющие почти всюду в Ω ограниченные производные по пространственным переменным, $g = \text{const} > 0$. Функция r – «коэффициент трения» предполагается неотрицательной и ограниченной. Другие обозначения введены в главе 1 настоящей работы. Ниже мы считаем, что заданы все функции и коэффициенты из (2.29) кроме неизвестных $\vec{v}$, ξ .

Пусть величина длины временного интервала $\Delta t \equiv t_1 - t_0$ достаточно мала. Тогда, рассматривая (2.29) при $t = t_1$ и вводя аппроксимации

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cong \frac{\vec{v} - \vec{v}_{(0)}}{\Delta t}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} \cong \frac{\xi - \xi_{(0)}}{\Delta t} \quad \text{при } t = t_1,$$

где

$$\vec{v} \equiv \vec{v}|_{t=t_1}, \quad \xi = \xi|_{t=t_1},$$

переходим от (2.29) к полудискретной математической модели, которую рассмотрим только на первом шаге разбиения (t_0, t_1) (из всего набора (t_{j-1}, t_j) , $j = 1, \dots, J$, t_0 – начальная точка по t , $t_J \equiv t_1 < \infty$ – конечная, на других шагах рассматривается аналогично):

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & -\ell \\ \ell & 0 \end{bmatrix} \vec{v} + r_1 \vec{v} - g \mathbf{grad} \xi = \vec{F} \text{ в } \Omega, \\ -\mathbf{div} (H_1 \vec{v}) + b \xi = F_3 \text{ в } \Omega, \\ (H_1 \vec{v}) \cdot \vec{n} = 0 \text{ на } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.30)$$

где $\vec{v}, \xi$ – приближения к $\vec{v}|_{t_1}, \xi|_{t_1}$, $r_1 = r + 1/\Delta t$, $\vec{F} \equiv (F_1, F_2) = \vec{f} + u_{(0)}/\Delta t$, $F_3 = f_3 + \xi_{(0)}/\Delta t$, $b \equiv 1/\Delta t$, коэффициент r и функции $\vec{f}, f_3$ заданы.

Прежде чем сформулировать алгоритм разделения области для (2.30), обратимся к вопросу об «условиях сшивки» при рассмотрении системы (2.30).

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma_{in}$, где Γ_{in} – поверхность (линия) раздела Ω на липшицевы подобласти Ω_1, Ω_2 . Пусть также

$$\vec{v} = \{ \vec{v}_i \text{ в } \Omega_i \subset \mathbb{R}^N, \ i = 1, 2 \}, \quad \text{где } \vec{v}_i \in (\mathbf{L}_2(\Omega_i))^N, \ \mathbf{div} (H_1 \vec{v}_i) \in \mathbf{L}_2(\Omega_i). \quad (2.31)$$

Очевидно, что $\vec{v} \in (\mathbf{L}_2(\Omega))^N$. Согласно теории краевых задач существует след $((H_1 \vec{v}_i) \cdot \vec{n}_i) \in \mathbf{W}_2^{-1/2}(\Gamma_{in})$ [99]. Пусть введено ограничение вида:

$$(H_1 \vec{v}_1) \cdot \vec{n}_1|_{\Gamma_{in}-0} = (H_1 \vec{v}_2) \cdot \vec{n}_1|_{\Gamma_{in}+0}. \quad (2.32)$$

Утверждение 2.2 ([25]). Пусть выполнено (2.31) и $\vec{v} \equiv \{\vec{v}_i, \vec{v}_i \in \Omega_i, i = 1, 2\}$. Тогда для того, чтобы $\text{div}(H_1 \vec{v}_i) \in \mathbf{L}_2(\Omega)$, необходимо и достаточно выполнения (2.32).

Следствие 2.2.1 ([25]). Решение задачи (2.30) на внутренней границе $\Gamma_{in} \subset \Omega$ необходимо и достаточно удовлетворяет двум «условиям сшивки»:

$$\xi_1 = \xi_2, H_1 v_n^{(1)} = H_1 v_n^{(2)},$$

где $\xi_i \equiv \xi$, $v_n^{(i)} \equiv \vec{v}_i \cdot \vec{n}_1$, $\vec{v}_i \equiv \vec{v}$ в Ω_i , $i = 1, 2$.

Наличие двух «условий сшивки» на Γ_{in} для решения уравнений мелкой воды (тогда как на «внешней границе» $\partial\Omega$ требуется выполнения лишь одного граничного условия в каждой точке на $\partial\Omega$) является принципиальным с точки зрения формулировки алгоритма разделения области для (2.30) (поскольку, согласно подходу к формулировке этих алгоритмов, одно из этих условий рассматривается как «дополнительная неизвестная», а второе условие принимается как «уравнение замыкания») [25].

2.4.2. Алгоритм разделения области

Алгоритм метода разделения области будет сформулирован только для (2.30), поскольку для других временных интервалов его рассмотрение осуществляется аналогичным образом.

Пусть Ω разделена на две липшицевы подобласти Ω_1, Ω_2 кусочно-гладкой липшицевой линией $\Gamma_{in} \subset \Omega$: $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma_{in}$, $\text{mes}(\Omega_1 \cap \Omega_2) = 0$. Тогда задачу (2.30) можно переформулировать в виде:

$$\begin{cases} r_1 \vec{v}_i + \begin{bmatrix} 0 & -\ell \\ \ell & 0 \end{bmatrix} \vec{v}_i - g \mathbf{grad} \xi_i = \vec{F}^{(i)} \text{ в } \Omega_i, \\ -\text{div}(H_1 \vec{v}_i) + b \xi_i = F_3^{(i)} \text{ в } \Omega_i, \\ (H_1 \vec{v}_i) \cdot \vec{n}_i = 0 \text{ на } \partial\Omega_i, \end{cases} \quad i = 1, 2. \quad (2.33)$$

Кроме того, требуется выполнение «условий сшивки»:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \xi_2 \text{ на } \Gamma_{in}, \\ H_1 v_n^{(1)} &= H_1 v_n^{(2)} \text{ на } \Gamma_{in},\end{aligned}\tag{2.34}$$

где $v_n^{(i)} = \vec{v}_i \cdot \vec{n}$, $\vec{n} \equiv (n_x, n_y)$ – вектор нормали к Γ_{in} , внешней к Ω_1 . Отмечаем, что при сделанных ограничениях на Γ_{in} , Ω_1 , Ω_2 вектор $\vec{n}$ существует почти во всех точках границы Γ_{in} . Выполнение условий (2.34) является необходимым и достаточным для того, чтобы функции $\xi_i \in \mathbf{W}_2^1(\Omega)$ и $\vec{v} \equiv \{\vec{v}_i \text{ в } \Omega_i, i = 1, 2\}$ при выполнении (2.33) были решением (2.30).

Операторы, используемые в данной задаче, и обобщенные постановки могут быть найдены в [25]:

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_2^{(i)} : (\xi, \widehat{\xi})_{\mathbf{L}_2^{(i)}} &= \int_{\Omega_i} g \cdot \xi \widehat{\xi} d\Omega, \|\xi\|_{\mathbf{L}_2^{(i)}} \equiv (\xi, \widehat{\xi})_{\mathbf{L}_2^{(i)}}^{1/2}, \\ \mathbf{H}_2^{(i)} : (\vec{v}, \widehat{\vec{v}})_{\mathbf{H}_2^{(i)}} &= \int_{\Omega_i} H_1 \vec{v} \cdot \widehat{\vec{v}} d\Omega, \|\vec{v}\|_{\mathbf{H}_2^{(i)}} \equiv (\vec{v}, \widehat{\vec{v}})_{\mathbf{H}_2^{(i)}}^{1/2}, \\ W^{(i)} &= \left\{ \xi : \xi \in \mathbf{L}_2^{(i)}, \|\nabla \xi\|_{\mathbf{L}_2(\Omega_i)} < \infty \right\}, \\ X^{(i)} &= \left\{ \vec{v} : \vec{v} \in \mathbf{H}_2^{(i)}, \|\operatorname{div} (H_1 \vec{v})\|_{\mathbf{L}_2(\Omega_i)} < \infty, (\vec{v} \cdot \vec{n}) = 0 \text{ на } (\partial\Omega_c \cap \partial\Omega_i) \right\}, \\ \mathbf{H}^{(i)} &\equiv \mathbf{H}_2^{(i)} \otimes \mathbf{L}_2^{(i)}.\end{aligned}$$

Введем обобщенные постановки задач (2.33). Для этого умножим первое уравнение из (2.33) на H_1 и $\widehat{\vec{v}}_i \in X^{(i)}$, а второе – на $g\widehat{\xi}_i$, где $\widehat{\xi}_i \in W^{(i)}$, затем выполним интегрирование по Ω_i и интегрирование по частям в слагаемых, содержащих $\mathbf{grad} \xi_i$, с учетом граничных условий и условий сшивки на Γ_{in} . В результате получим следующие равенства для вектор-функций $\Phi^{(i)} \equiv (\vec{v}_i, \xi_i)$, $i = 1, 2$:

$$\begin{cases} a_1 \left(\Phi^{(1)}, \widehat{\Phi}^{(1)} \right) = \left(F^{(1)}, \widehat{\Phi}^{(1)} \right) + \int_{\Gamma_{in}} g \vartheta_{\text{sw}} H_1 \left(\vec{v}_1 \cdot \vec{n} \right) d\Gamma, \forall \widehat{\Phi}^{(1)} \in X^{(1)} \otimes W^{(1)}, \\ a_2 \left(\Phi^{(2)}, \widehat{\Phi}^{(2)} \right) = \left(F^{(2)}, \widehat{\Phi}^{(2)} \right) - \int_{\Gamma_{in}} g \vartheta_{\text{sw}} H_1 \left(\vec{v}_2 \cdot \vec{n} \right) d\Gamma, \forall \widehat{\Phi}^{(2)} \in X^{(2)} \otimes W^{(2)}, \end{cases}\tag{2.35}$$

где

$$a_i \left(\Phi^{(i)}, \widehat{\Phi}^{(i)} \right) \equiv \left(r_1 \Phi^{(i)}, \widehat{\Phi}^{(i)} \right)_{\mathbf{H}^{(i)}} + \left(l \otimes \vec{v}_i, \widehat{\vec{v}}_i \right)_{\mathbf{H}_2^{(i)}} + \\ + \int_{\Omega_i} g \left(\xi_i \operatorname{div} (H_1 \vec{v}_i) - \widehat{\xi}_i \operatorname{div} (H_1 \widehat{\vec{v}}_i) \right) d\Omega,$$

$$\left(F^{(i)}, \widehat{\Phi}^{\{i\}} \right) \equiv \left(\vec{f}^{(i)}, \widehat{\vec{v}}_i \right)_{\mathbf{H}_2^{(i)}} + \left(f_3, \widehat{\xi}_i \right)_{\mathbf{L}_2^{(i)}}, \quad i = 1, 2.$$

Введем следующее упрощение: пусть функция H_1 непрерывна в Ω , т.е. $(H_1)_1 = (H_1)_2 \equiv H_1$ на Γ_{in} .

Пусть функция ϑ_{sw} такая, что

$$\xi_1 = \xi_2 = \vartheta_{sw} \text{ на } \Gamma_{in} \quad (2.36)$$

является дополнительной неизвестной («управлением»), а уравнение замыкания записывается как

$$H_1 \cdot v_n^{(1)} = H_1 \cdot v_n^{(2)} \text{ на } \Gamma_{in}. \quad (2.37)$$

Сформулируем следующую задачу: *найти $\vec{v}_i$, ξ_i в Ω_i , $i = 1, 2$, и функцию ϑ_{sw} такие, что выполнены равенства (2.35) и (2.37).*

Приближенная постановка этой задачи заключается в отыскании $\vec{v}_i(\alpha)$, $\xi_i(\alpha)$, $\vartheta_{sw}(\alpha)$, $i = 1, 2$, таких, что для $\vec{v}_i \equiv \vec{v}_i(\alpha)$, $\xi_i \equiv \xi_i(\alpha)$, $\vartheta_{sw} \equiv \vartheta_{sw}(\alpha)$, $i = 1, 2$, выполнены равенства (2.35); при этом необходимо, чтобы функционал J_α :

$$J_\alpha(\vartheta_{sw}) \equiv J_\alpha(\vec{v}_1(\alpha), \vec{v}_2(\alpha), \vartheta_{sw}(\alpha)) = \frac{1}{2} \alpha \int_{\Gamma_{in}} g(\vartheta_{sw} - \vartheta_{sw}^{(0)})^2 d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{in}} H_1^2 (v_n^{(1)} - v_n^{(2)})^2 d\Gamma$$

принимал наименьшее значение:

$$\inf_{\vartheta_{sw}} J_\alpha(\vartheta_{sw}). \quad (2.38)$$

Здесь, $\alpha = \text{const} > 0$ – параметр регуляризации [94], а $\vartheta_{sw}^{(0)}$ – некоторая заданная функция, которую можно принять равной 0.

Если задача (2.38) имеет решение $\vartheta_{sw} \equiv \vartheta_{sw}(\alpha)$, то ϑ_{sw} удовлетворяет уравнению Эйлера:

$$\delta J_\alpha(\vartheta_{sw}, \delta \vartheta_{sw}) = 0, \quad (2.39)$$

где $\delta \vartheta_{\text{sw}}$ – независимая вариация функции ϑ_{sw} , и:

$$\begin{aligned} \alpha \int_{\Gamma_{in}} g (\vartheta_{\text{sw}} - \vartheta_{\text{sw}}^{(0)}) \delta \vartheta_{\text{sw}} d\Gamma + \int_{\Gamma_{in}} H_1^2 (v_n^{(1)} - v_n^{(2)}) \delta v_n^{(1)} d\Gamma + \\ + \int_{\Gamma_{in}} H_1^2 (v_n^{(2)} - v_n^{(1)}) \delta v_n^{(2)} d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Зависимые вариации $\delta v_n^{(i)} \equiv \delta \vec{v}_i \cdot \vec{n}$, $i = 1, 2$, определяются задачами для вариаций $\delta \vec{v}^{(i)}$, $i = 1, 2$:

$$\begin{cases} a_1 (\delta \Phi^{(1)}, \hat{\Phi}^{(1)}) = \int_{\Gamma_{in}} g \delta \vartheta_{\text{sw}} H_1 (\vec{v}_1 \cdot \vec{n}) d\Gamma & \forall \hat{\Phi}^{(1)} \in X^{(1)} \otimes W^{(1)}, \\ a_2 (\delta \Phi^{(2)}, \hat{\Phi}^{(2)}) = \int_{\Gamma_{in}} g \delta \vartheta_{\text{sw}} H_1 (\vec{v}_2 \cdot \vec{n}) d\Gamma & \forall \hat{\Phi}^{(2)} \in X^{(2)} \otimes W^{(2)}, \end{cases} \quad (2.41)$$

где $\delta \Phi^{(i)} \equiv (\delta \vec{v}_i, \delta \xi_i)$, $i = 1, 2$.

Получим еще одно представление уравнения (2.39) (или (2.40)). Для этого введем решения $\Phi_1^{(*)}$, $\Phi_2^{(*)}$ – «решения сопряженных задач», определяемых как $\Phi_i^* \in X^{(i)} \otimes W^{(i)}$, $i = 1, 2$, таких, что:

$$\begin{cases} a_1 (\hat{\Phi}^{(1)}, \Phi_1^*) = \int_{\Gamma_{in}} H_1^2 (v_n^{(1)} - v_n^{(2)}) \hat{v}_1 d\Gamma & \forall \hat{\Phi}^{(1)} \in X^{(1)} \otimes W^{(1)}, \\ a_2 (\hat{\Phi}^{(2)}, \Phi_2^*) = \int_{\Gamma_{in}} H_1^2 (v_n^{(2)} - v_n^{(1)}) \hat{v}_2 d\Gamma & \forall \hat{\Phi}^{(2)} \in X^{(2)} \otimes W^{(2)}. \end{cases} \quad (2.42)$$

Тогда из (2.41), (2.42) имеем:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{in}} H_1^2 (v_n^{(1)} - v_n^{(2)}) \delta v_n^{(1)} d\Gamma + \int_{\Gamma_{in}} H_1^2 (v_n^{(2)} - v_n^{(1)}) \delta v_n^{(2)} d\Gamma = \\ = a_1 (\delta \Phi^{(1)}, \Phi_1^*) + a_2 (\delta \Phi^{(2)}, \Phi_2^*) = \int_{\Gamma_{in}} g \delta \vartheta_{\text{sw}} H_1 ((\vec{v}_1^* \cdot \vec{n}) + (\vec{v}_2^* \cdot \vec{n})) d\Gamma \end{aligned} \quad (2.43)$$

(при преобразовании формы $a_2(\cdot, \cdot)$ при интегрировании по частям возникает $\vec{v}_2^* \cdot \vec{n}_2$ и при переходе к $\vec{n} \equiv \vec{n}_1 = -\vec{n}_2$ имеем $-(\vec{v}_2^* \cdot \vec{n})$). Подставляя (2.43) в (2.40), имеем:

$$\alpha \int_{\Gamma_{in}} g (\vartheta_{\text{sw}} - \vartheta_{\text{sw}}^{(0)}) \delta \vartheta_{\text{sw}} d\Gamma + \int_{\Gamma_{in}} g H_1 ((\vec{v}_1^* \cdot \vec{n}) - (\vec{v}_2^* \cdot \vec{n})) \delta \vartheta_{\text{sw}} d\Gamma = 0.$$

Так как $\delta \vartheta_{\text{sw}}$ выбирается произвольно, то:

$$\alpha g (\vartheta_{\text{sw}} - \vartheta_{\text{sw}}^{(0)}) + g H_1 ((\vec{v}_1^* \cdot \vec{n}) - (\vec{v}_2^* \cdot \vec{n})) = 0 \text{ п. в. на } \Gamma_{\text{in}}. \quad (2.44)$$

Если решения задач (2.35), (2.42) существуют, то можно исключить $\Phi^{(i)}$, $\Phi_i^{(*)}$, $i = 1, 2$, из рассмотрения, подставив их выражения в (2.42) и (2.44) (см. [25, 66]). В результате (2.44) примет вид

$$\mathcal{A}_\alpha \vartheta_{\text{sw}} = \tilde{g} \text{ в } \mathbf{L}_2(\Gamma_{\text{in}}), \quad (2.45)$$

где $\mathcal{A}_\alpha = \alpha g I + A^* A$, $\tilde{g} = \hat{g} + \alpha A^* \vartheta_{\text{sw}}^{(0)}$, A – некоторый оператор, а $\hat{g}$ – некоторая функция, зависящая от $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, $F^{(3)}$, но не зависящая от ϑ_{sw} , I – тождественный (единичный) оператор, а $\mathbf{L}_2(\Gamma_{\text{in}})$ – самосопряженное гильбертово пространство с нормой $\|\vartheta_{\text{sw}}\|_{\mathbf{L}_2(\Gamma_{\text{in}})} = \left(\int_{\Gamma_{\text{in}}} g |\vartheta_{\text{sw}}|^2 d\Gamma \right)^{1/2}$.

В работе [25] доказана однозначная и плотная разрешимость задачи (2.45).

В силу приведенных выше утверждений при достаточно малых α функции $\{\Phi_i(\alpha)\}$, $\vartheta_{\text{sw}}(\alpha)$ можно принять в качестве приближений к решению исходной задачи для $\{\Phi_i\}$, ϑ_{sw} . Теперь необходимо построить приближения к $\{\Phi_i(\alpha)\}$, $\vartheta_{\text{sw}}(\alpha)$, например, с помощью простейшего итерационного алгоритма [64, 97], который для (2.45) имеет вид:

$$\vartheta_{\text{sw}}^{k+1} = \vartheta_{\text{sw}}^k - \tau_k (\mathcal{A}_\alpha \vartheta_{\text{sw}}^k - \tilde{g}), \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.46)$$

с некоторыми итерационными параметрами $\tau_k > 0$, $k = 1, 2, \dots$

Практическая реализация (2.46) заключается в следующем: если приближение ϑ_{sw}^k найдено, то осуществляем следующие этапы:

- (1) при $\vartheta_{\text{sw}} \equiv \vartheta_{\text{sw}}^k$ решаем прямые подзадачи в Ω_1 , Ω_2 и находим $\Phi_i^k \equiv (\vec{v}_i^k, \xi_i^k)$ в Ω_i , $i = 1, 2$;
- (2) при $v_n^{(1)} \equiv (\vec{v}_1^k \cdot \vec{n})$, $v_n^{(2)} \equiv (\vec{v}_2^k \cdot \vec{n})$ решаем в подобластях Ω_i , $i = 1, 2$, сопряженные задачи (2.42);
- (3) вычисляем следующее приближение $\vartheta_{\text{sw}}^{k+1}$:

$$\vartheta_{\text{sw}}^{k+1} = \vartheta_{\text{sw}}^k - \tau_k \left(\alpha g (\vartheta_{\text{sw}}^k - \vartheta_{\text{sw}}^{(0)}) + g H_1 \left(\left(\vec{v}_1^{*,k} \cdot \vec{n} \right) - \left(\vec{v}_2^{*,k} \cdot \vec{n} \right) \right) \right).$$

При выполнении «подходящего критерия» окончания итерационного процесса, элементы ϑ_{sw}^k , Φ^k принимаются в качестве приближенных решений рассматриваемой задачи в Ω_i , $i = 1, 2$.

Рассмотренный итерационный алгоритм, представляющий собой алгоритм разделения области, *сходится при достаточно малых $\tau_k = \tau > 0 \forall k$ и сколь угодно малых положительных α* . Используя результаты общей теории итерационных процессов и экстремальных задач, можно оптимизировать скорости сходимости рассматриваемых алгоритмов разделения области. Так, можно выбрать итерационный параметр τ_k следующим образом [66, 98]:

$$\tau_k = \frac{1}{2} \frac{\int_{\Gamma_{in}} H_1^2 \left(v_n^{(1)} - v_n^{(2)} \right)^2 d\Gamma}{\int_{\Gamma_{in}} g^2 H_1^2 \left((\vec{v}_1^* \cdot \vec{n}) - (\vec{v}_2^* \cdot \vec{n}) \right)^2 d\Gamma}$$

2.5. Об альтернативном подходе к методу разделения области для уравнений мелкой воды

2.5.1. Постановка задачи

Рассмотрим линеаризованную систему уравнений мелкой воды (1.9):

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \begin{bmatrix} 0 & -\ell \\ \ell & 0 \end{bmatrix} \vec{v} + r\vec{v} - g \mathbf{grad} \xi = \vec{f} \text{ в } \Omega \times (t_{j-1}, t_j), \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} - \mathbf{div} (H\vec{v}) = 0 \text{ в } \Omega \times (t_{j-1}, t_j), \\ \vec{v}(t_{j-1}) = \vec{v}_{j-1}, \quad \xi(t_{j-1}) = \xi_{j-1} \text{ в } \Omega, \\ H\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \text{ на } \partial\Omega \times (t_{j-1}, t_j), \end{cases} \quad (2.47)$$

где $\vec{f}$ – заданная функция, r – коэффициент трения, $\vec{v}_{j-1}$, ξ_{j-1} при решении задачи на (t_{j-1}, t_j) считаются известными.

Запишем неявную схему аппроксимации задачи (2.47) на интервале (t_{j-1}, t_j) , $\Delta t = t_j - t_{j-1}$, по времени:

$$\begin{cases} \frac{\vec{v}^j - \vec{v}^{j-1}}{\Delta t} + \begin{bmatrix} 0 & -\ell \\ \ell & 0 \end{bmatrix} \vec{v}^j + r\vec{v}^j - g \mathbf{grad} \xi^j = \vec{f}^j \text{ в } \Omega, \\ \frac{\xi^j - \xi^{j-1}}{\Delta t} - \mathbf{div} (H\vec{v}^j) = 0 \text{ в } \Omega, \\ H\vec{v}^j \cdot \vec{n} = 0 \text{ на } \partial\Omega. \end{cases}$$

Введем полудискретную задачу, являющуюся приближением к (2.47):

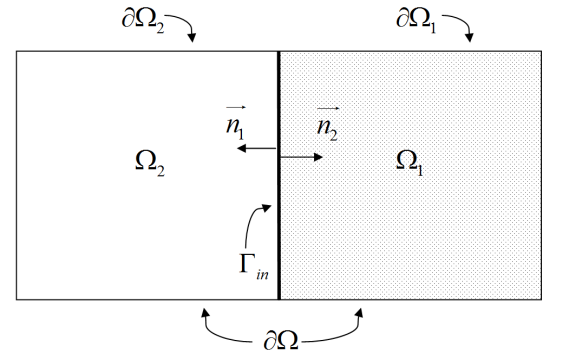
$$\begin{cases} \frac{\vec{v}^j}{\Delta t} + \begin{bmatrix} 0 & -\ell \\ \ell & 0 \end{bmatrix} \vec{v}^j + r\vec{v} - g \mathbf{grad} \xi^j = \vec{f}^j + \frac{\vec{v}^{j-1}}{\Delta t} \text{ в } \Omega, \\ \frac{\xi^j}{\Delta t} - \mathbf{div}(H\vec{v}^j) = \frac{\xi^{j-1}}{\Delta t} \text{ в } \Omega, \\ H\vec{v}^j \cdot \vec{n} = 0 \text{ на } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.48)$$

В дальнейшем будем рассматривать задачу на интервале времени (t_{j-1}, t_j) в полудискретном виде, поэтому для удобства будем опускать индексы j , т.е. переобозначим: $\vec{v} \equiv \vec{v}^j$, $\xi \equiv \xi^j$ и т.д. Также введем вектора $\vec{F} = (f_1^j + u^{j-1}/\Delta t, f_2^j + v^{j-1}/\Delta t, \xi^j/\Delta t)^T = (\vec{f}, (\vec{F})_3)^T = ((\vec{F})_1, (\vec{F})_2, (\vec{F})_3)^T$, $\vec{f} \equiv (\vec{f}_1, \vec{f}_2)$. Тогда задача (2.48) запишется следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\vec{v}}{\Delta t} + \begin{bmatrix} 0 & -\ell \\ \ell & 0 \end{bmatrix} \vec{v} + r\vec{v} - g \mathbf{grad} \xi = \vec{f} \text{ в } \Omega, \\ \frac{\xi}{\Delta t} - \mathbf{div}(H\vec{v}) = (\vec{F})_3 \text{ в } \Omega, \\ H\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \text{ на } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.49)$$

Пусть граница области $\partial\Omega$ является кусочно-гладкой класса $\mathbf{C}^{(2)}$ и удовлетворяет условию Липшица. Будем считать, что кривая $\Gamma_{in} \subset \Omega$ является гиперповерхностью класса $\mathbf{C}^{(2)}$ [100] и делит область Ω на две подобласти Ω_1 и Ω_2 , $\Omega \equiv \Gamma_{in} \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\bar{\Gamma}_{in} \equiv \overline{(\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2)}$, $\Gamma_{in} \subset \partial\Omega_1$ - открытое множество в $\partial\Omega_1$, $\Gamma_{in} \subset \partial\Omega_2$. Пусть границы $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$ - липшицевы кусочно-гладкие класса $\mathbf{C}^{(2)}$ (см. рисунок 2.4).

Будем помечать индексом $i = 1, 2$ функции, относящиеся к каждой из подобластей. Задача (2.49) может быть записана для функций $\vec{v}_1$, ξ_1 в подобласти Ω_1 , $\vec{v}_2$, ξ_2 в подобласти Ω_2 . Пусть $\Gamma_i = \partial\Omega_i$, $\vec{n}_i$ - внешняя нормаль к границе Γ_{in} области Ω_i , $i = 1, 2$. Потребуем выполнения условий сшивки на внутренней жидкой границе [25]:



$$\xi_1 = \xi_2 \text{ на } \Gamma_{in}, \quad (2.50) \quad \text{Рисунок 2.4 – Схема разделения области}$$

$$H\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 = -H\vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2 \text{ на } \Gamma_{in}. \quad (2.51)$$

В первом варианте метода разделения области, описанном в параграфе 2.4, «дополнительная неизвестная» выбиралась как $\xi_i = \vartheta_{\text{sw}}$, $i = 1, 2$, а уравнение (2.51) рассматривалось как «уравнение замыкания» («в смысле наименьших квадратов»). Рассмотрим другой вариант метода разделения области, который будем называть *вторым вариантом метода разделения области*.

2.5.2. Второй вариант метода разделения области

Введем дополнительную неизвестную функцию ϑ_{sw} :

$$H\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 = \sqrt{gH} \vartheta_{\text{sw}} \text{ на } \Gamma_{in}.$$

Запишем задачу (2.49) в каждой из подобластей ($i = 1, 2$):

$$\begin{cases} \frac{\vec{v}_i}{\Delta t} + \begin{bmatrix} 0 & -\ell \\ \ell & 0 \end{bmatrix} \vec{v}_i + r\vec{v}_i - g \mathbf{grad} \xi_i = \vec{f} \text{ в } \Omega_i, \\ \frac{\xi_i}{\Delta t} - \mathbf{div}(H\vec{v}_i) = (\vec{F})_3 \text{ в } \Omega_i, \\ H\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 = m_{in} \sqrt{gH} \vartheta_{\text{sw}} \text{ на } \partial\Omega_1, \\ H\vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2 = -m_{in} \sqrt{gH} \vartheta_{\text{sw}} \text{ на } \partial\Omega_2, \end{cases} \quad (2.52)$$

где функция m_{in} задается следующим образом:

$$m_{in} = \begin{cases} 1 \text{ на } \Gamma_{in}, \\ 0 \text{ на } \partial\Omega_i \setminus \Gamma_{in}. \end{cases}$$

Сформулируем обратную задачу о восстановлении граничных функций на внутренней границе следующим образом: найти вектор-функции решений в подобластях $\vec{\Phi}_i = (u_i, v_i, \xi_i)^T$, $i = 1, 2$, и дополнительную неизвестную граничную функцию ϑ_{sw} , которые удовлетворяют системам уравнений (2.52) при $i = 1, 2$ и дополнительному условию (2.50).

Введем пространство $H_0^{(i)}$ вектор-функций $\vec{\Phi}_i = (u_i, v_i, \xi_i)^T$, $u_i, v_i, \xi_i \in \mathbf{L}_2(\Omega_i)$ со скалярным произведением: $(\Phi_i, \hat{\Phi}_i)_{H_0^{(i)}} = \int_{\Omega_i} (H(u_i \hat{u}_i + v_i \hat{v}_i) + g \xi_i \hat{\xi}_i) d\Omega$. Обозначим через $W^{(i)}$ пространство вектор-функций $\Phi \in (\mathbf{L}_2(\Omega_i))^2 \times \mathbf{W}_2^1(\Omega_i)$. Пусть $\vec{f} \in (\mathbf{L}_2(\Omega))^2$, $(\vec{F})_3 \in \mathbf{L}_2(\Omega)$, $H \in \mathbf{C}^1(\Omega)$.

Домножим первые два уравнения из (2.52) на вектор-функцию $\hat{\Phi} \in W^{(i)}$ скалярно в $H_0^{(i)}$, $i = 1, 2$. Получим:

$$a_1(\Phi_1, \hat{\Phi}_1) = f_1(\hat{\Phi}_1) + b_1(\vartheta_{\text{sw}}, \hat{\Phi}_1), \quad (2.53)$$

$$a_2(\Phi_2, \hat{\Phi}_2) = f_2(\hat{\Phi}_2) - b_2(\vartheta_{\text{sw}}, \hat{\Phi}_2), \quad (2.54)$$

где

$$a_1(\Phi_1, \hat{\Phi}_1) = \int_{\Omega_1} \left[\frac{H\vec{v}_1\hat{v}_1 + g\xi_1\hat{\xi}_1}{\Delta t} + rH\vec{v}_1\hat{v}_1 + lH(u_1\hat{v}_1 - v_1\hat{u}_1) \right] d\Omega + \\ + \int_{\Omega_1} (gH\vec{v}_1 \mathbf{grad} \hat{\xi}_1 - gH\hat{v}_1 \mathbf{grad} \xi_1) d\Omega,$$

$$a_2(\Phi_2, \hat{\Phi}_2) = \int_{\Omega_2} \left[\frac{H\vec{v}_2\hat{v}_2 + g\xi_2\hat{\xi}_2}{\Delta t} + rH\vec{v}_2\hat{v}_2 + lH(u_2\hat{v}_2 - v_2\hat{u}_2) \right] d\Omega + \\ + \int_{\Omega_2} (gH\vec{v}_2 \mathbf{grad} \hat{\xi}_2 - gH\hat{v}_2 \mathbf{grad} \xi_2) d\Omega,$$

$$b_i(\vartheta_{\text{sw}}, \hat{\Phi}_i) = \int_{\Gamma_{in}} \sqrt{gH} \vartheta_{\text{sw}} g\hat{\xi}_i d\Gamma, \quad i = 1, 2,$$

$$f_i(\hat{\Phi}_i) = \int_{\Omega_i} [H\tilde{f} \cdot \hat{u} + g(\vec{F})_3 \hat{\xi}] d\Omega, \quad i = 1, 2.$$

Пусть $\mathbf{L}_2^W(\Gamma)$ – пространство функций из $\mathbf{L}_2(\Gamma)$ со взвешенным скалярным произведением: $(\cdot, \cdot)_{\mathbf{L}_2^W(\Gamma)} = (\sqrt{gH}\cdot, \cdot)_{\mathbf{L}_2(\Gamma)}$.

Как было показано в [25], билинейные формы $a_i(\Phi_i, \hat{\Phi}_i)$ являются ограниченными для функций $\Phi_i, \hat{\Phi}_i \in W^{(i)}$ по норме пространств $W^{(i)}$. Также заметим, что $f_i(\hat{\Phi}_i)$ – линейный ограниченный функционал, определенный на $W^{(i)}$. Можно также получить следующие оценки:

$$\|b_i(\vartheta_{\text{sw}}, \hat{\Phi}_i)\| \leq C_i \|\vartheta_{\text{sw}}\|_{\mathbf{L}_2^W} \|\hat{\Phi}_i\|_{W^{(i)}} \quad \forall u \in \mathbf{L}_2^W, \hat{\Phi}_i \in W^{(i)}, i = 1, 2.$$

Сформулируем обобщенную постановку задачи: найти функции $\Phi^{(i)} \in W^{(i)}$, $\vartheta_{\text{sw}} \in \mathbf{L}_2^W$, такие, что $\forall \hat{\Phi} \in W^{(i)}$ выполнены условия (2.53), (2.54), а также (2.50) (в смысле равенства почти всюду на Γ_{in}).

Приближенная постановка этой задачи заключается в отыскании $\vec{v}_i(\alpha)$, $\xi_i(\alpha)$, $\vartheta_{\text{sw}}(\alpha)$, $i = 1, 2$, таких, что для $\vec{v}_i \equiv \vec{v}_i(\alpha)$, $\xi_i \equiv \xi_i(\alpha)$, $\vartheta_{\text{sw}} \equiv \vartheta_{\text{sw}}(\alpha)$, $i = 1, 2$, выполнены равенства (2.53), (2.54), при этом необходимо, чтобы функционал J_α :

$$\begin{aligned} J_\alpha(\vartheta_{\text{sw}}) &\equiv J_\alpha(\xi_1(\alpha), \xi_2(\alpha), \vartheta_{\text{sw}}(\alpha)) = \\ &= \frac{1}{2}\alpha \int_{\Gamma_{in}} \left(\sqrt{gH} (\vartheta_{\text{sw}} - \vartheta_{\text{sw}}^{(0)})^2 \right) d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{in}} \left(\sqrt{gH} (\xi_1 - \xi_2)^2 \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (2.55)$$

принимал наименьшее значение:

$$\inf_{\vartheta_{\text{sw}}} J_\alpha(\vartheta_{\text{sw}}). \quad (2.56)$$

Здесь $\alpha = \text{const} > 0$ – параметр регуляризации [94], а $\vartheta_{\text{sw}}^{(0)}$ – некоторая заданная функция.

Если задача (2.56) имеет решение $\vartheta_{\text{sw}} \equiv \vartheta_{\text{sw}}(\alpha)$, то ϑ_{sw} удовлетворяет уравнению Эйлера:

$$\delta J_\alpha(\vartheta_{\text{sw}}, \delta \vartheta_{\text{sw}}) = 0,$$

где $\delta \vartheta_{\text{sw}}$ – независимая вариация функции ϑ_{sw} , и:

$$\alpha \int_{\Gamma_{in}} \sqrt{gH} (\vartheta_{\text{sw}} - \vartheta_{\text{sw}}^{(0)}) \delta \vartheta_{\text{sw}} d\Gamma + \int_{\Gamma_{in}} \sqrt{gH} (\xi_1 - \xi_2) (\delta \xi_1 - \delta \xi_2) d\Gamma = 0. \quad (2.57)$$

Зависимые вариации $\delta \xi_i$, $i = 1, 2$, определяются задачами для вариаций:

$$\begin{cases} a_1(\delta \Phi_1, \hat{\Phi}_1) = \int_{\Gamma_{in}} \sqrt{gH} \delta \vartheta_{\text{sw}} g \hat{\xi}_1 d\Gamma & \forall \hat{\Phi}_1 \in W^{(1)}, \\ a_2(\delta \Phi_2, \hat{\Phi}_2) = - \int_{\Gamma_{in}} \sqrt{gH} \delta \vartheta_{\text{sw}} g \hat{\xi}_2 d\Gamma & \forall \hat{\Phi}_2 \in W^{(2)}, \end{cases} \quad (2.58)$$

где $\delta \Phi_i \equiv (\delta \vec{v}_i, \delta \xi_i)$, $i = 1, 2$.

Получим еще одно представление уравнения (2.57). Для этого введем «решения сопряженных задач» Φ_1^* , Φ_2^* , определяемых как $\Phi_i^* \in H_0^{(i)}$, $i = 1, 2$, таких что:

$$\begin{cases} a_1(\hat{\Phi}_1, \Phi_1^*) = \int_{\Gamma_{in}} \sqrt{gH} (\xi_1 - \xi_2) g \hat{\xi}_1 d\Gamma & \forall \hat{\Phi}_1 \in W^{(1)}, \\ a_2(\hat{\Phi}_2, \Phi_2^*) = \int_{\Gamma_{in}} \sqrt{gH} (\xi_1 - \xi_2) g \hat{\xi}_2 d\Gamma & \forall \hat{\Phi}_2 \in W^{(2)}. \end{cases} \quad (2.59)$$

Тогда из (2.58) и (2.59) имеем:

$$\int_{\Gamma_{in}} \sqrt{gH}(\xi_1 - \xi_2)g(\delta\xi_1 - \delta\xi_2)d\Gamma = a_1(\delta\Phi_1, \Phi_1^*) - a_2(\delta\Phi_2, \Phi_2^*) = \int_{\Gamma_{in}} \sqrt{gH}g(\xi_1^* + \xi_2^*)\delta\vartheta_{sw} d\Gamma. \quad (2.60)$$

Подставляя (2.60) в (2.57), имеем:

$$\alpha \int_{\Gamma_{in}} \sqrt{gH}(\vartheta_{sw} - \vartheta_{sw}^{(0)})\delta\vartheta_{sw} d\Gamma + \int_{\Gamma_{in}} \sqrt{gH}(\xi_1^* + \xi_2^*)\delta\vartheta_{sw} d\Gamma = 0.$$

В силу произвольности $\delta\vartheta_{sw}$

$$\alpha(\vartheta_{sw} - \vartheta_{sw}^{(0)}) + (\xi_1^* + \xi_2^*) = 0 \text{ почти всюду на } \Gamma_{in}.$$

Если решение существует, то задача может быть представлена в следующем виде [66]:

$$A\varphi = G, \quad (2.61)$$

для этого выразим $\vec{v}$ из первого уравнения системы уравнений (2.49) через ξ :

$$\vec{v} = gM \mathbf{grad} \xi + M\tilde{f},$$

где

$$M = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ -\tilde{B} & \tilde{A} \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \frac{R}{R^2 + l^2} \quad \tilde{B} = \frac{l}{R^2 + l^2}, \quad R = 1/\Delta t + r.$$

Запишем слабую постановку задачи для системы уравнения (2.49) с исключенным $\vec{v}$:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1(\xi_1, \hat{\xi}_1) &= \tilde{f}_1(\hat{\xi}_1) + \tilde{b}_1(\vartheta_{sw}, \hat{\xi}_1), \\ \tilde{a}_2(\xi_2, \hat{\xi}_2) &= \tilde{f}_2(\hat{\xi}_2) - \tilde{b}_2(\vartheta_{sw}, \hat{\xi}_2), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1(\xi_1, \hat{\xi}_1) &= \int_{\Omega_1} \left[\frac{g\xi_1\hat{\xi}_1}{\Delta t} + gHM \mathbf{grad} \xi_1 \mathbf{grad} \hat{\xi}_1 \right] d\Omega \\ \tilde{a}_2(\xi_2, \hat{\xi}_2) &= \int_{\Omega_2} \left[\frac{g\xi_2\hat{\xi}_2}{\Delta t} + gHM \mathbf{grad} \xi_2 \mathbf{grad} \hat{\xi}_2 \right] d\Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{b}_i(\vartheta_{\text{sw}}, \hat{\xi}_i) &= \int_{\Gamma_{in}} \sqrt{gH} \vartheta_{\text{sw}} g \hat{\xi}_i d\Gamma, \quad i = 1, 2, \\ \tilde{f}_i(\hat{\xi}_i) &= \int_{\Omega_i} [g(\vec{F})_3 \hat{\xi} - HM \tilde{f} \mathbf{grad} \hat{\xi}_i] d\Omega, \quad i = 1, 2.\end{aligned}$$

2.5.3. Разрешимость задачи

Теорема 2.3 (Однозначная разрешимость задачи). *Уравнение (2.61) однозначно разрешимо.*

Доказательство. Покажем, что ядро оператора A состоит только из нулевого элемента ($\ker(A) = \{0\}$). Пусть существует функция $\varphi \neq 0$, удовлетворяющая однородному уравнению $A\varphi = 0$. Это означает, что существует $\varphi = \vartheta_{\text{sw}}$, что:

$$\begin{cases} \frac{\tilde{v}_i}{\Delta t} + \begin{bmatrix} 0 & -\ell \\ \ell & 0 \end{bmatrix} \tilde{v}_i + r \tilde{v}_i - g \mathbf{grad} \tilde{\xi}_i = 0 \text{ в } \Omega_i, \\ \frac{\tilde{\xi}_i}{\Delta t} - \mathbf{div} (H \tilde{v}_i) = 0 \text{ в } \Omega_i, \\ H \tilde{v}_1 \cdot \bar{n}_1 = m_{in} \sqrt{gH} \vartheta_{\text{sw}} \text{ на } \partial\Omega_1, \\ H \tilde{v}_2 \cdot \bar{n}_2 = -m_{in} \sqrt{gH} \vartheta_{\text{sw}} \text{ на } \partial\Omega_2, \end{cases}$$

где $i = 1, 2$. Заметим, что функции $\tilde{\xi} = \{\tilde{\xi}_i \text{ в } \Omega_i, i = 1, 2\}$, $\tilde{v} = \{\tilde{v}_i \text{ в } \Omega_i, i = 1, 2\}$ будут в данном случае являться решениями однородной задачи в области Ω [25]. Отсюда получаем, что $\tilde{\xi}_i = 0$, $\tilde{v}_i = 0$ и $\vartheta_{\text{sw}} = 0$. Значит, $\varphi = 0$ и $\ker(A) = \{0\}$, т.е. для рассматриваемой задачи выполняется условие единственности решений [66]. $\square$

Теорема 2.4 (Плотная разрешимость задачи). *Задача (2.61) плотно разрешима.*

Доказательство. Для доказательства плотной разрешимости достаточно показать, что ядро оператора A^* состоит только из нулевого элемента (см. [101]). Пусть теперь рассматриваются задачи вида:

$$\begin{aligned}\tilde{a}_1(\hat{\xi}_1, \xi_1^*) &= \int_{\Gamma_{in}} \sqrt{gH} h \hat{\xi}_1 d\Gamma \quad \forall \hat{\xi}_1 \in \mathbf{W}_2^1(\Omega_1), \\ \tilde{a}_2(\hat{\xi}_2, \xi_2^*) &= \int_{\Gamma_{in}} \sqrt{gH} h \hat{\xi}_2 d\Gamma \quad \forall \hat{\xi}_2 \in \mathbf{W}_2^1(\Omega_2),\end{aligned}$$

при некоторых (возможно, нетривиальных) функциях $h \in L_2(\Gamma_{in})$, и при дополнительных условиях

$$\xi_1^* + \xi_2^* = 0 \quad \text{на } \Gamma_{in}.$$

Заметим, что функция $\xi^* = \xi_1^*$ в Ω_i , $i = 1, 2$, удовлетворяет однородной сопряженной задаче в области Ω [25] и $\xi^* = 0$ в Ω . Отсюда получаем, что $\tilde{\xi}_i = 0$, $\tilde{v}_i = 0$ и $\vartheta_{sw} = 0$. Следовательно, $\xi_i^* = 0$ в Ω_i , $i = 1, 2$ и $h = 0$. Таким образом, $\ker(A^*) = \{0\}$, т.е. для рассматриваемой задачи выполняется *условие плотной разрешимости* [66]. $\square$

2.5.4. Итерационный алгоритм

Как было показано, задача об определении вектор-функций $\Phi_i = (u_i, v_i, \xi_i)^T$, $i = 1, 2$, и дополнительной неизвестной граничной функции ϑ_{sw} однозначно и плотно разрешима. Поэтому (см. [66]) при достаточно малых $\alpha > 0$ функции $\xi_i(\alpha)$, $\vartheta_{sw}(\alpha)$ можно принять в качестве приближений к решению исходной задачи. Приближения к функциям $\xi_i(\alpha)$, $\vartheta_{sw}(\alpha)$ будем искать с помощью следующего итерационного алгоритма:

- (1) Пусть найдено ϑ_{sw}^k . Решаем прямые подзадачи в каждой подобласти Ω_i , $i = 1, 2$:

$$\begin{cases} \frac{\vec{v}_i^k}{\Delta t} + \begin{bmatrix} 0 & -\ell \\ \ell & 0 \end{bmatrix} \vec{v}_i^k + r\vec{v}_i^k - g \mathbf{grad} \xi_i^k = \vec{f} \text{ в } \Omega_i, \\ \frac{\xi_i^k}{\Delta t} - \mathbf{div}(H\vec{v}_i^k) = (\vec{F})_3 \text{ в } \Omega_i, \\ H\vec{v}_1^k \cdot \vec{n}_1 = m_{in}\sqrt{gH}\vartheta_{sw}^k \text{ на } \partial\Omega_1, \\ H\vec{v}_2^k \cdot \vec{n}_2 = -m_{in}\sqrt{gH}\vartheta_{sw}^k \text{ на } \partial\Omega_2. \end{cases} \quad (2.62)$$

- (2) Решаем сопряженные подзадачи в Ω_i , $i = 1, 2$:

$$\begin{cases} \frac{\vec{v}_i^{*,k}}{\Delta t} - \begin{bmatrix} 0 & -\ell \\ \ell & 0 \end{bmatrix} \vec{v}_i^{*,k} + r\vec{v}_i^{*,k} + g \mathbf{grad} \xi_i^{*,k} = 0 \text{ в } \Omega_i, \\ \frac{\xi_i^{*,k}}{\Delta t} + \mathbf{div}(H\vec{v}_i^{*,k}) = 0 \text{ в } \Omega_i, \\ -H\vec{v}_i^{*,k} \cdot \vec{n}_i = m_{in}\sqrt{gH}(\xi_1^k - \xi_2^k) \text{ на } \partial\Omega_i. \end{cases} \quad (2.63)$$

- (3) Вычисляем следующее приближение ϑ_{sw}^{k+1} :

$$\vartheta_{sw}^{k+1} = \vartheta_{sw}^k - \tau_k(\alpha(\vartheta_{sw}^k - \vartheta_{sw}^{(0)}) + (\xi_1^{*,k} + \xi_2^{*,k})) \quad \text{на } \Gamma_{in}. \quad (2.64)$$

При выполнении подходящего критерия окончания итерационного процесса элементы ϑ_{sw}^k , ξ_1^k , $\vec{v}_i^k$ принимаются в качестве приближенных решений рассматриваемой задачи в Ω_i , $i = 1, 2$.

Алгоритм (2.62)–(2.64), представляющий собой *алгоритм разделения области*, сходится при достаточно малых $\tau_k = \tau > 0$ [66]. Однако, в связи с тем, что выполняется свойство плотной разрешимости, выбор τ_k можно осуществить в соответствии со следующей формулой [66, 98]:

$$\tau_k = \frac{\int_{\Gamma_{in}} \sqrt{gH}(\xi_1 - \xi_2)^2 d\Gamma}{2 \int_{\Gamma_{in}} \sqrt{gH}(\xi_1^* + \xi_2^*)^2 d\Gamma}. \quad (2.65)$$

Такой выбор τ_k может сократить количество итераций, необходимых для выполнения критерия остановки.

2.5.5. Сравнение методов разделения области для уравнений мелкой воды

Для проверки использования предложенных алгоритмов был проведен ряд численных экспериментов. Рассматривалась следующая система уравнений мелкой воды:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + r\vec{v} + \begin{bmatrix} 0 & -\ell \\ \ell & 0 \end{bmatrix} \vec{v} - g \mathbf{grad} \xi = \vec{F} \text{ в } \Omega, \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} - \mathbf{div} (H\vec{v}) = F_3 \text{ в } \Omega, \\ H\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \text{ на } \partial\Omega \end{cases}$$

со следующими параметрами:

$$\begin{aligned} x &\in [0, L], \quad y \in [0, L], \quad L = 100 \text{ м}, \\ g &= const = 9,81 \text{ м/с}^2, \quad H = -0.7x/L + 1 \text{ м}, \\ l &= 0, \quad r = 0. \end{aligned}$$

Начальные условия были выбраны следующим образом:

$$\begin{cases} u_0 = 0, \quad v_0 = 0, \\ \xi_0 = 100 \left(\exp \left(-\frac{(x-25)^2 + (y-30)^2}{100} \right) + \exp \left(-\frac{(x-75)^2 + (y-30)^2}{100} \right) \right). \end{cases}$$

При этом внутренняя граница была выбрана следующим образом: $x = L/2 = 50$ м.

Результаты для значений

$$\text{Res}_L = \int_{\Gamma_{in}} (gH(\xi_1 - \xi_2)^2 + (Hu_1 - Hu_2)^2) d\Gamma$$

представлены на рисунке 2.5, а для значений

$$\text{Res}_C = \max \left(\sqrt{gH} |\xi_1 - \xi_2| + H |u_1 - u_2| \right)$$

представлены на рисунке 2.6.

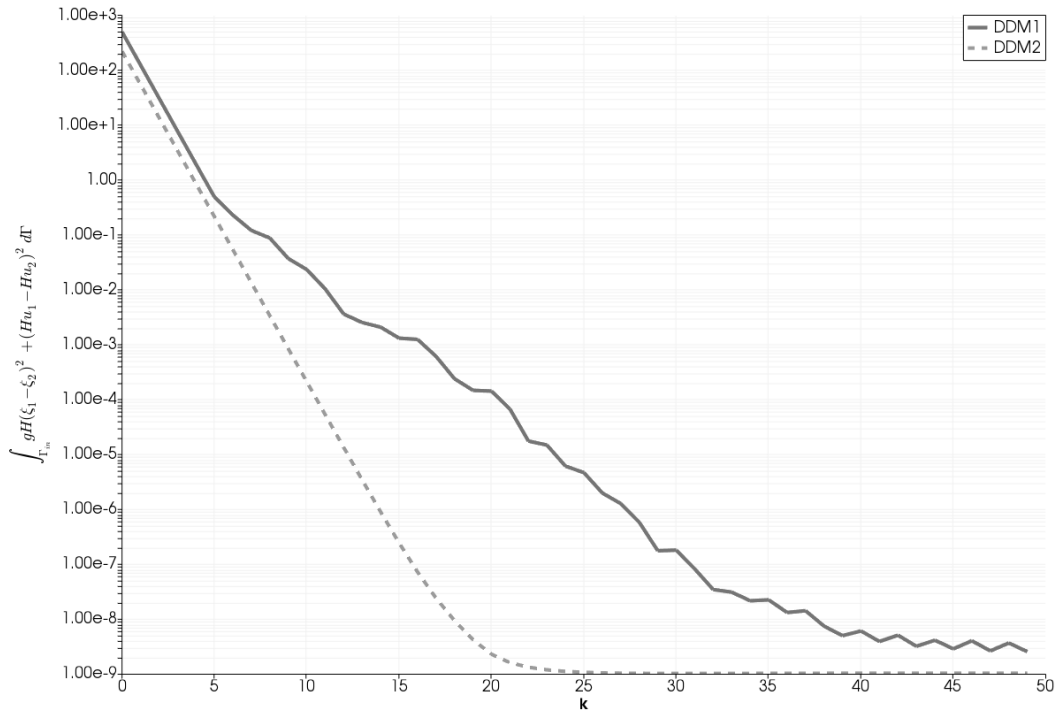


Рисунок 2.5 – Зависимость величины Res_L от числа итераций в конечный момент времени, на графике *DDM1* – первый вариант метода разделения области, *DDM2* – второй вариант метода разделения области. Использована логарифмическая шкала

Второй метод дает существенно лучшее значение для величин Res_L и Res_C . Зависимости модуля разности между решениями исходной задачи без метода разделения области и задач с применением метода разделения области в разные моменты времени представлены в таблице 2.3. Отметим, что по результатам расчетов в данной таблице можно сделать вывод о том, что при использовании второго варианта метода разделения области результаты моделирования ближе к результатам исходной задачи.

Результаты моделирования для функций уровня и векторов скорости в различные моменты времени представлены на рисунках 2.7–2.10.

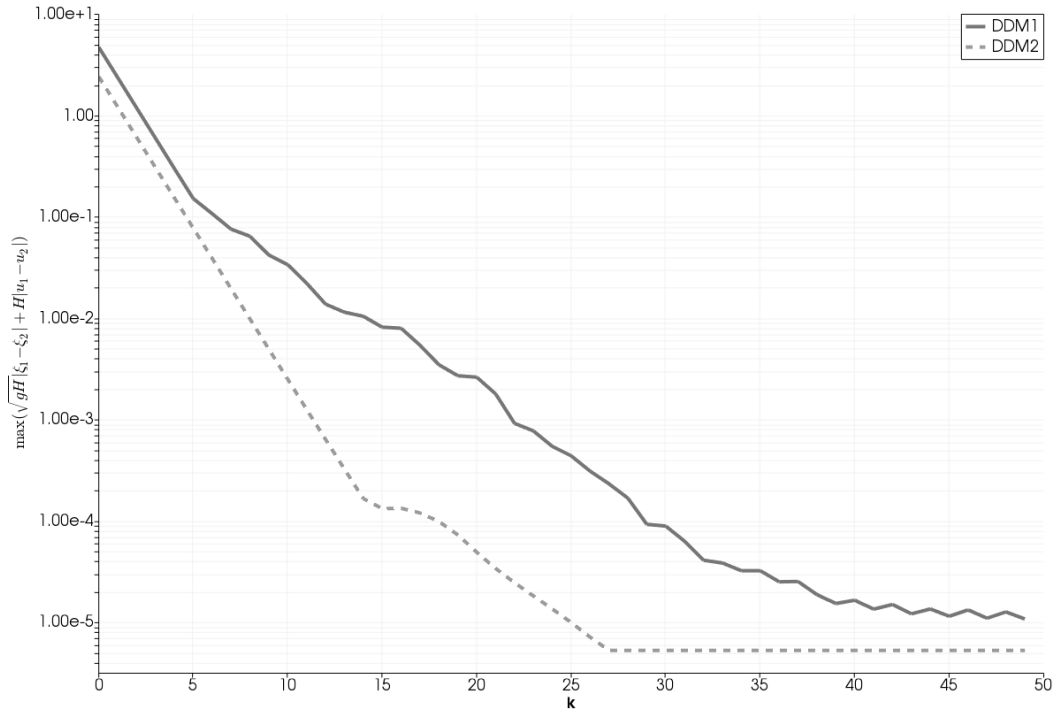


Рисунок 2.6 – Зависимость величины Res_C от числа итераций в конечный момент времени, на графике *DDM1* – первый вариант метода разделения области, *DDM2* – второй вариант метода разделения области. Использована логарифмическая шкала

Таблица 2.3 – Сравнение максимального значения модуля разности решения исходной задачи и задач с использованием двух вариантов метода разделения области ($\Phi_{\text{ddm}} \equiv (\xi_{\text{ddm}}, u_{\text{ddm}}, v_{\text{ddm}})^T$ – результаты моделирования с применением метода разделения области)

	$t = 10$		$t = 15$		$t = 25$	
	вариант 1	вариант 2	вариант 1	вариант 2	вариант 1	вариант 2
$\max \xi - \xi_{\text{ddm}} $	$3.62 \cdot 10^{-6}$	$7.60 \cdot 10^{-7}$	$4.70 \cdot 10^{-6}$	$6.66 \cdot 10^{-7}$	$4.53 \cdot 10^{-6}$	$1.05 \cdot 10^{-6}$
$\max u - u_{\text{ddm}} $	$1.26 \cdot 10^{-5}$	$3.61 \cdot 10^{-6}$	$1.77 \cdot 10^{-5}$	$3.57 \cdot 10^{-6}$	$1.33 \cdot 10^{-5}$	$4.74 \cdot 10^{-6}$
$\max v - v_{\text{ddm}} $	$6.82 \cdot 10^{-6}$	$1.80 \cdot 10^{-6}$	$1.21 \cdot 10^{-5}$	$3.47 \cdot 10^{-6}$	$7.66 \cdot 10^{-6}$	$1.28 \cdot 10^{-6}$

Для более детального изучения влияния методов разделения области на результаты моделирования рассмотрим модуль разности между полученными результатами для функции уровня (рисунок 2.11) и нормальной компоненты вектора скорости (рисунок 2.12).

По результатам численных экспериментов можно сделать следующий вывод: при использовании второго варианта метода разделения области разница значений исходной задачи и задачи с применением метода разделения области ниже, а также второй вариант метода разделения области сходится быстрее первого варианта.

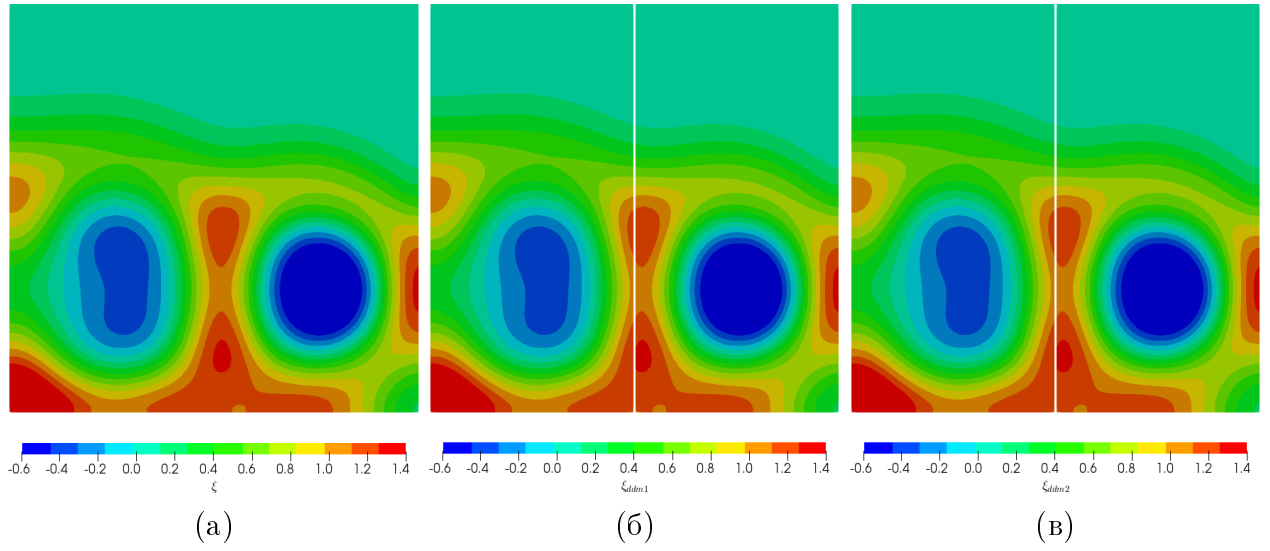


Рисунок 2.7 – Значение уровня (m) на момент времени $t = 10$ с (а) для решения исходной задачи; (б) для решения с применением первого варианта метода разделения области; (в) для решения с применением второго варианта метода разделения области

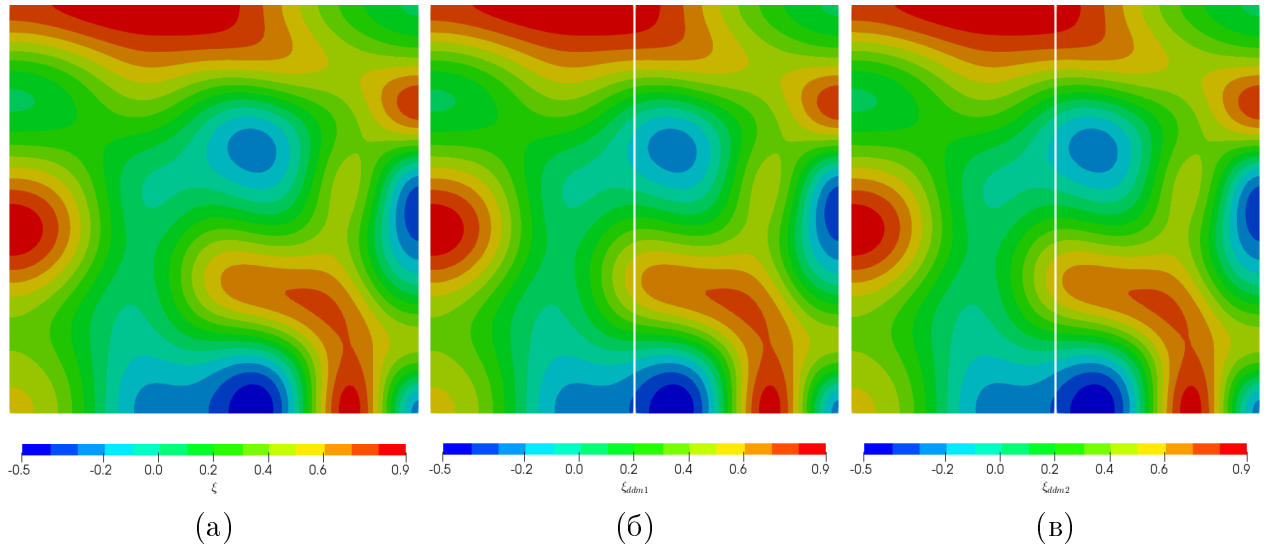


Рисунок 2.8 – Значение уровня (m) на момент времени $t = 25$ с (а) для решения исходной задачи; (б) для решения с применением первого варианта метода разделения области; (в) для решения с применением второго варианта метода разделения области

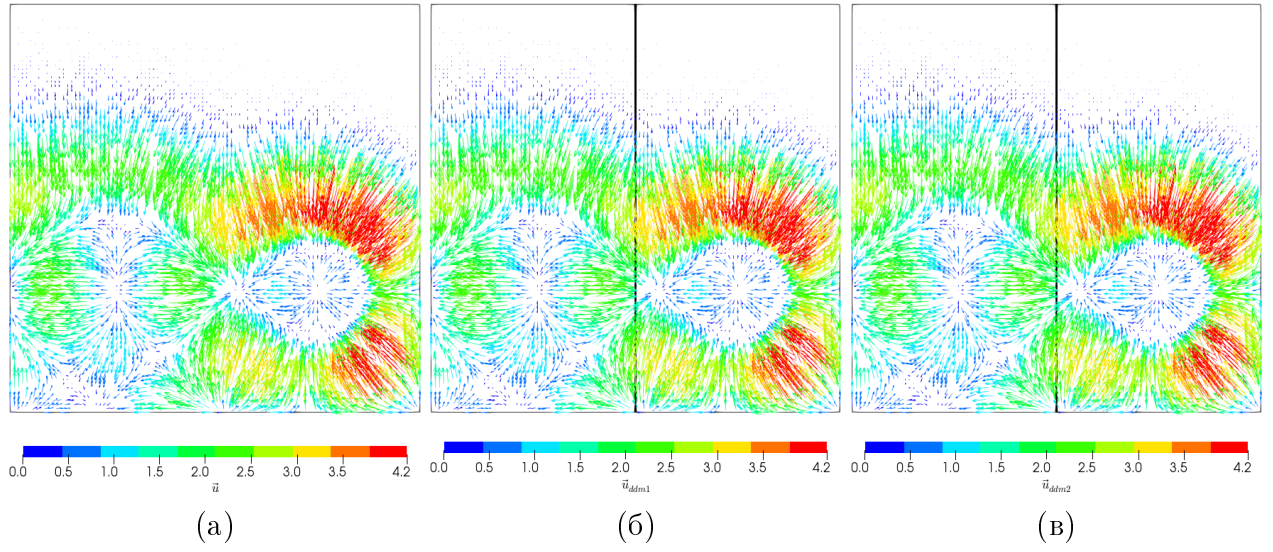


Рисунок 2.9 – Вектор скорости (м/с) на момент времени $t = 10$ с (а) для решения исходной задачи; (б) для решения с применением первого варианта метода разделения области; (в) для решения с применением второго варианта метода разделения области

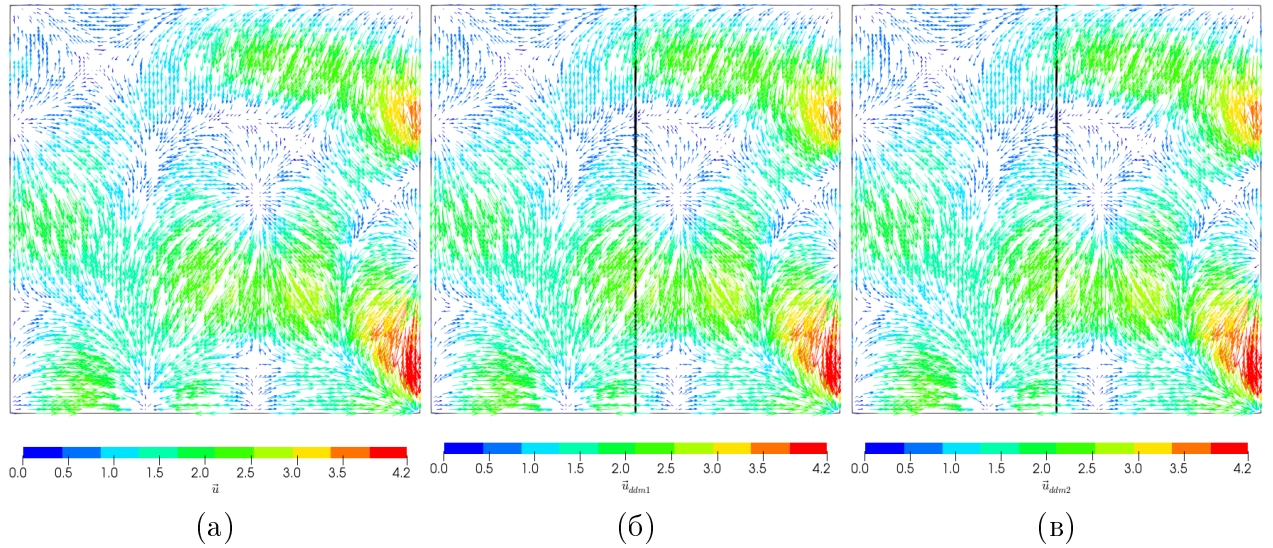


Рисунок 2.10 – Вектор скорости (м/с) на момент времени $t = 25$ с (а) для решения исходной задачи; (б) для решения с применением первого варианта метода разделения области; (в) для решения с применением второго варианта метода разделения области

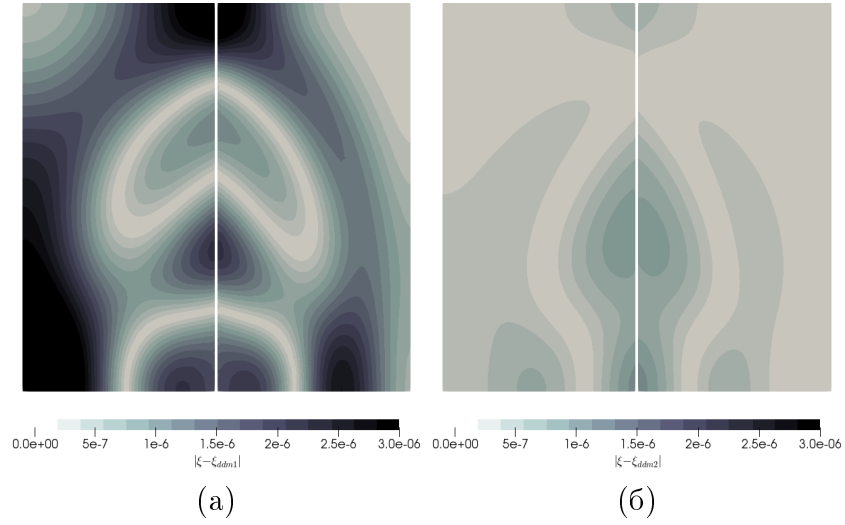


Рисунок 2.11 – Модуль разности между значениями уровня (м) на момент времени $t = 25$ с (а) для исходной задачи и первого варианта метода разделения области; (б) для исходной задачи и второго варианта метода разделения области

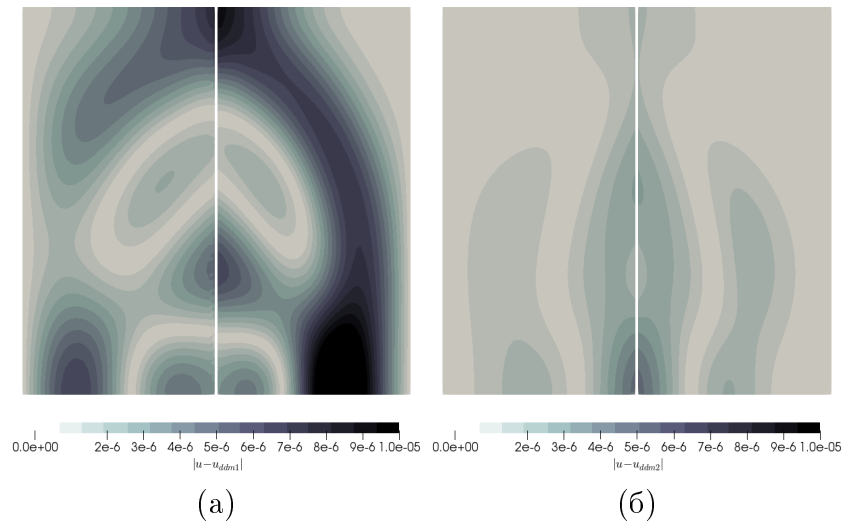


Рисунок 2.12 – Модуль разности между нормальной компонентой скорости (м/с) на момент времени $t = 25$ с (а) для исходной задачи и первого варианта метода разделения области; (б) для исходной задачи и второго варианта метода разделения области

Глава 3

Совместное использование алгоритмов разделения области и вариационной ассимиляции данных¹

Для задач геофизической гидротермодинамики часто возникает необходимость коррекции расчетов математической модели с использованием данных наблюдений. Такие задачи получили название задач ассимиляции, можно найти значительное число работ по данной теме [102–108]. В последнее время такие задачи особенно распространены вследствие значительного увеличения данных наблюдений, таких как, например, спутниковые измерения. Это влечет за собой необходимость создания эффективных алгоритмов ассимиляции данных для многопроцессорных систем. Одним из перспективных направлений повышения эффективности численного алгоритма является применение методов разделения области. Хотя большинство работ по совместному применению методов разделения области и вариационной ассимиляции данных рассматривается для создания параллельных алгоритмов [28–31], стоит также отметить, что в некоторых случаях метод разделения области пригоден и для задач, в которых данные наблюдений известны только в определенной подобласти всей области. Для применения процедур ассимиляции только в подобластях с данными наблюдений также может оказаться перспективным использование методов разделения области, описанных в главе 2.

В настоящее время одним из бурно развивающихся направлений является математическое моделирование отдельных акваторий (морей, заливов, открытых акваторий океана) и прибрежных территорий. Актуальность данной тематики обоснована необходимостью оценки антропогенных воздействий на морские территории и оценки последствий таких воздействий. Темой отдельного круга исследований является прогнозирование изменений характера циркуляции и климатических изменений для выбранной акватории на протяжении нескольких десятилетий. Для корректного воспроизведения физических явлений в отдельных акваториях требуются более мелкие масштабы пространственных сеток и учет специфики рассматриваемой зоны. Для решения этих задач создаются региональные модели.

Разработчики региональных моделей гидротермодинамики открытых акваторий неизбежно сталкиваются с проблемой постановки граничных условий на внешних жидких границах. Под внешней жидкой границей будем понимать границу типа «вода-вода», отделяющую

¹ Представленная в этой главе работа выполнена совместно с Шелопут Т. О., а именно сформулированы постановки задачи и итерационные алгоритмы, численные эксперименты проведены автором лично

рассматриваемую область от других водных областей Мирового океана. От способа задания граничных условий на жидких границах напрямую зависит полученный результат как при долгосрочных расчетах, так и в задачах оперативного прогноза. Согласно [109], граничные условия на открытых границах должны позволять потокам как генерирующимся в моделируемой области, так и приходящим извне свободно проникать через жидкую границу. Одна из трудностей в постановке таких условий заключается в том, что точная информация о внешних («приходящих») потоках энергии и массы отсутствует. Задание граничных условий на открытых границах может приводить к искажению результатов моделирования, несоответствию полученных результатов с наблюдаемыми полями течений, температурными полями и т.д. При долгосрочных (климатических) расчетах задание граничных условий на жидких границах может вносить существенный вклад в результаты моделирования. Обзор по методам ассимиляции данных в открытых акваториях может быть найден в работе [103].

В данном параграфе будет описана разработка метода решения задачи о восстановлении граничных функций на внешней и внутренней жидких границах на основе методов вариационной ассимиляции данных и разделения области. Внутренней жидкой границей будем называть границу, которая появляется при использовании метода разделения области. Данный параграф продолжает работы [50, 63, 110, 111].

3.1. Метод разделения области в задаче вариационной ассимиляции данных наблюдений за уровнем моря в открытой акватории [51]

3.1.1. Постановка задачи

Рассмотрим на интервале (t_0, t_1) следующую подзадачу метода расщепления, которая соответствует линеаризованной системе уравнений мелкой воды:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \begin{bmatrix} 0 & -\ell \\ \ell & 0 \end{bmatrix} \vec{v} + r\vec{v} - g \mathbf{grad} \xi = \vec{f} \text{ в } \Omega \times (t_0, t_1), \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} - \mathbf{div} (H_1 \vec{v}) = f_3 \text{ в } \Omega \times (t_0, t_1), \\ \vec{v} = \vec{v}_0, \xi = \xi_0 \text{ при } t = t_0 \text{ в } \Omega, \\ (H_1 \vec{v}) \cdot \vec{n} + m_{op} \sqrt{gH} \xi = m_{op} \sqrt{gH} d_s \text{ на } \partial\Omega \times (t_0, t_1), \end{array} \right. \quad (3.1)$$

где $\vec{v} = (u, v)$ – вектор баротропной скорости, ξ – функция уровня, $H(x, y)$ – глубина водоема в точке (x, y) , ℓ – параметр Кориолиса, коэффициент r учитывает силу трения о дно. Граничные условия на внешней «жидкой» границе заданы как в работах [59, 112].

Пусть область Ω разделена на две подобласти Ω_1 и Ω_2 кусочно-гладкой липшицевой границей Γ_{in} (см. рисунок 3.1). Введем следующие функции:

$$m_{in} = \begin{cases} 1 & \text{на } \Gamma_{in}, \\ 0 & \text{на } \partial\Omega_i \setminus \Gamma_{in}, \end{cases} \quad m_{op} = \begin{cases} 1 & \text{на } \Gamma_{op}, \\ 0 & \text{на } \partial\Omega \setminus \Gamma_{op}. \end{cases}$$

Обозначим через $\vec{n}$ нормаль, направленную наружу из первой подобласти на Γ_{in} . Далее индексами $i = 1, 2$ будем обозначать величины в различных подобластях.

Задача (3.1) может быть записана на каждой из подобластей с условиями сшивки на Γ_{in} вида (см. § 2.4):

$$\xi^{(1)} = \xi^{(2)}, \quad H\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 = -H\vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2.$$

Введем «дополнительную неизвестную» ϑ_{sw} на $\Gamma_{in} \times (t_0, t_1)$ как

$$\vartheta_{sw} \equiv H\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 = -H\vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2,$$

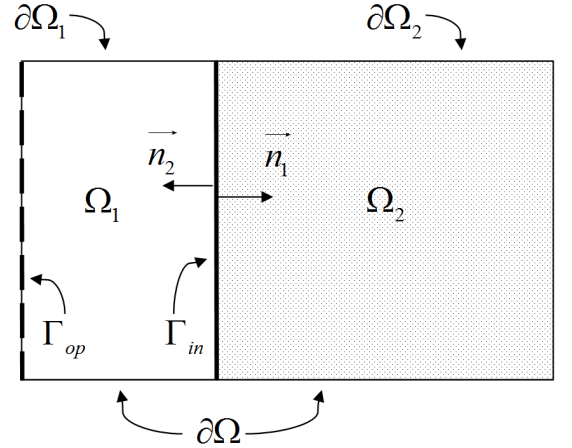


Рисунок 3.1 – Область Ω .

Введем аппроксимацию по времени, используя неявную схему (Δt – шаг по времени), и рассмотрим следующую задачу на одном из интервале по времени, например, первом:

$$\begin{cases} r_1 \vec{v} + \begin{bmatrix} 0 & -\ell \\ \ell & 0 \end{bmatrix} \vec{v} - g \mathbf{grad} \xi = \vec{F} \text{ в } \Omega, \\ \frac{\xi}{\Delta t} - \mathbf{div} (H\vec{v}) = F_3 \text{ в } \Omega, \\ (H\vec{v}) \cdot \vec{n} + m_{op} \sqrt{gH} \xi = m_{op} \sqrt{gH} d_s \text{ на } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.2)$$

где $r_1 = r + 1/\Delta t$, $\vec{F} = \vec{f} + \vec{v}_0/\Delta t$, $F_3 = f_3 + \xi_0/\Delta t$. Задача состоит в отыскании функций $\vec{v}_i$, ξ_i , $i = 1, 2$, и дополнительных неизвестных граничных функций d_s , ϑ_{sw} таких, что выполняется (3.2).

Рассмотрим исходную задачу как задачу минимизации функционала по вектор-функции $\phi = (\vartheta_{sw}, d_s)$:

$$J_\alpha = \frac{\alpha}{2} \left(\int_{\Gamma_{op}} \sqrt{gH} (d_s - d_s^{(0)})^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_{in}} \sqrt{gH} (\vartheta_{sw} - \vartheta_{sw}^{(0)})^2 d\Gamma \right) + \\ + \frac{1}{2} \left(\int_{\Gamma_{op}} \sqrt{gH} (\xi_1 - \xi_{obs})^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_{in}} \sqrt{gH} (\xi_1 - \xi_2)^2 d\Gamma \right),$$

где $\alpha > 0$ – параметр регуляризации [94].

3.1.2. Итерационный алгоритм

Сформулируем следующий алгоритм минимизации функционала [66], основанный на методах вариационной ассимиляции и разделения области, для линейаризованной системы уравнений мелкой воды. Пусть $\vartheta_{sw} \equiv \vartheta_{sw}^k$, $d_s \equiv d_s^k$ уже определены. Тогда:

(1) В Ω_i , $i = 1, 2$, определяются функции $\vec{v}_i$, ξ_i как решения системы уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1 \vec{v}_i + \begin{bmatrix} 0 & -\ell \\ \ell & 0 \end{bmatrix} \vec{v}_i - g \mathbf{grad} \xi_i = \vec{F} \text{ в } \Omega_i, i = 1, 2, \\ \frac{\xi_i}{\Delta t} - \mathbf{div} (H \vec{v}_i) = F_3 \text{ в } \Omega_i, i = 1, 2, \\ H \vec{v}_1 \cdot \vec{n} = H \vec{v}_2 \cdot \vec{n} = \sqrt{gH} \vartheta_{sw}^k \text{ на } \Gamma_{in}, \\ (H \vec{v}_i) \cdot \vec{n} = 0 \text{ на } \Gamma_c \cap \Gamma_i, i = 1, 2, \\ (H \vec{v}_1) \cdot \vec{n} + m_{op} \sqrt{gH} \xi_1 = m_{op} \sqrt{gH} d_s \text{ на } \Gamma_{op} \cap \Gamma_1. \end{array} \right.$$

(2) Решаются сопряженные задачи в Ω_i , $i = 1, 2$, и определяются функции $\vec{v}_i^*$, ξ_i^* :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1 \vec{v}_i^* - \begin{bmatrix} 0 & -\ell \\ \ell & 0 \end{bmatrix} \vec{v}_i^* + g \mathbf{grad} \xi_i^* = 0 \text{ в } \Omega_i, i = 1, 2, \\ \frac{\xi_i^*}{\Delta t} + \mathbf{div} (H \vec{v}_i^*) = 0 \text{ в } \Omega_i, i = 1, 2, \\ - (H \vec{v}_1^*) \cdot \vec{n} + m_{op} \sqrt{gH} \xi_1^* = m_{op} \sqrt{gH} (\xi_1 - \xi_{obs}) + m_{in} \sqrt{gH} (\xi_1 - \xi_2) \text{ на } \Gamma_1, \\ H \vec{v}_2^* \cdot \vec{n} = m_{in} \sqrt{gH} (\xi_1 - \xi_2) \text{ на } \Gamma_2. \end{array} \right.$$

(3) Находятся новые приближения ϑ_{sw}^{k+1} , d_s^{k+1} [66]:

$$\begin{aligned}\vartheta_{sw}^{k+1} &= \vartheta_{sw}^k - \tau_k \left(\alpha \left(\vartheta_{sw}^k - \vartheta_{sw}^{(0)} \right) + m_{in} (\xi_1^* + \xi_2^*) \right) \text{ на } \Gamma_{in}, \\ d_s^{k+1} &= d_s^k - \tau_k \left(\alpha \left(d_s^k - d_s^{(0)} \right) + m_{op} \xi_1^* \right) \text{ на } \Gamma_{op}.\end{aligned}$$

Данный алгоритм повторяется до тех пор, пока не выполнится условие остановки итерационного процесса. При достаточно малых α функции $\vec{v}_i(\alpha)$, $\xi_i(\alpha)$, $i = 1, 2$, можно принять в качестве приближений к решению исходной задачи [51].

Параметр τ_k может быть выбран следующим [66, 98]:

$$\tau_k = \frac{\int_{\Gamma_{op}} \sqrt{gH} (\xi_1 - \xi_{obs})^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_{in}} \sqrt{gH} (\xi_1 - \xi_2)^2 d\Gamma}{\int_{\Gamma_{op}} \sqrt{gH} (\xi_1^*)^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_{in}} \sqrt{gH} (\xi_1^* + \xi_2^*)^2 d\Gamma} \quad (3.3)$$

Рассмотренный итерационный алгоритм восстановления граничных функций на внешних и внутренних жидких границах сходится при малых параметрах $\alpha > 0$ [51].

3.1.3. Численные эксперименты

Для проверки использования предложенного в § 3.1 алгоритма был проведен численный эксперимент. Рассматривалась линеаризованная система уравнений мелкой воды (3.2) со следующими параметрами:

$$\begin{aligned}x &\in [0, L], \quad y \in [0, L], \quad L = 100 \text{ м}, \\ g &= const = 9,81 \text{ м/с}^2, \quad H = const = 1 \text{ м}, \quad l = 0, \quad r = 0.\end{aligned}$$

При этом внешняя жидкая граница (Γ_{op}) была выбрана как $x = 0$ м, а внутренняя жидкая граница (Γ_{in}) была выбрана следующим образом: $x = L/2 = 50$ м.

Для аппроксимации по времени была использована неявная схема. Шаг по времени был выбран равным 0.5 с. По пространству была выбрана равномерная сетка с шагом 1 м. Описанный алгоритм совместного применения методов разделения области и вариационной ассимиляции применялся на каждом шаге по времени.

Для задания начальных условий был проведен предварительный эксперимент. Шаги по времени и по пространству были выбраны как описано ранее, однако область была представлена прямоугольником $\Omega_p = (-L, L) \times (0, L)$. Для предварительного эксперимента (здесь

и далее для предварительного эксперимента будем использовать индекс p) были выбраны следующие начальные условия:

$$u_p = 0, v_p = 0, \xi_p = 10 \exp \left(-\frac{(x-25)^2 + (y-30)^2}{100} \right).$$

Граничные условия для предварительного эксперимента на $\partial\Omega_p$ были выбраны $H(\vec{v} \cdot \vec{n}) = 0$. Правые части $\tilde{f}$ и $\tilde{f}_3$ равны 0. Начальные условия для решения подзадачи были выбраны как результат расчета предварительного эксперимента после 10 с. Данные наблюдений xi_{obs} на внешней жидкой границе Γ_{op} были получены из предварительного эксперимента, который был продолжен еще на 5 с. Данные, которые использовались в дальнейшем в качестве данных наблюдений на открытой границе, выбирались по решению исходной задачи ξ_p следующим образом: $\xi_{obs} = \xi_p (1 + 0.1a + 0.1b)$, где a и b случайные величины в интервале $[0, 1)$. Таким образом, полученные данные наблюдения были искусственно зашумлены, но при этом не отличались от решения исходной задачи более, чем на 10%.

Критерий остановки был выбран как число итераций меньше 50, параметр регуляризации $\alpha = 10^{-5}$, итерационный параметр τ выбирался по формуле (3.3).

На рисунках 3.2–3.3 представлены результаты моделирования в конечный момент времени для решения исходной задачи и задачи с применением методов ассимиляции и разделения области. На рисунке 3.2 представлены полученные при расчете значения уровня, а на рисунке 3.3 – вектора скорости. Граница разделения области (внутренняя жидкая граница) Γ_{in} представлена линией. Левая граница области являлась внешней жидкой границей Γ_{op} .

Отметим, что качественно данные, представленные на рисунках 3.2–3.3, схожи, значительных различий в результатах моделирования не наблюдается, однако на внешней жидкой границе можно наблюдать некоторые изменения в векторах скорости (потоках). Сходимость алгоритма совместного применения методов разделения области и вариационной ассимиляции данных представлена на рисунке 3.4.

Для решения задачи восстановления граничных функций на внешних и внутренних жидких границах был реализован итерационный алгоритм, основанный на методах вариационной ассимиляции данных наблюдений и теории обратных задач. В работе был проведен численный эксперимент для модельной квадратной области с постоянной величиной глубины. Область была разделена на две одинаковые подобласти. В качестве данных наблюдений на внешней жидкой границе выбиралось решение предварительной задачи без методов ассимиляции и разделения области с добавлением некоторого «шума», который не превосходил значений функции уровня более чем на 10 процентов. По результатам моделирования мож-

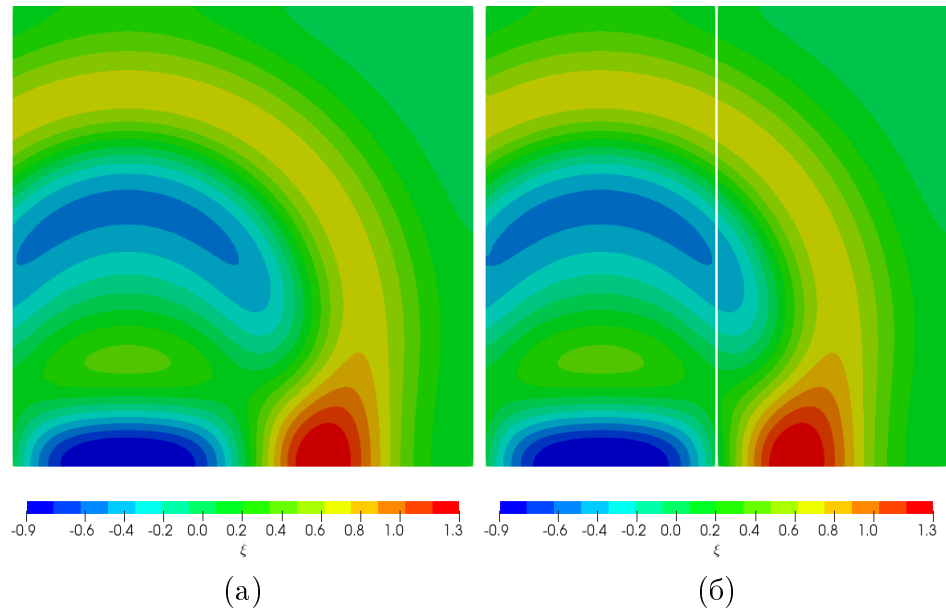


Рисунок 3.2 – Значение уровня (м) на момент времени $t = 5$ с (а) для решения предварительной задачи; (б) для решения с применением методов ассимиляции и разделения области

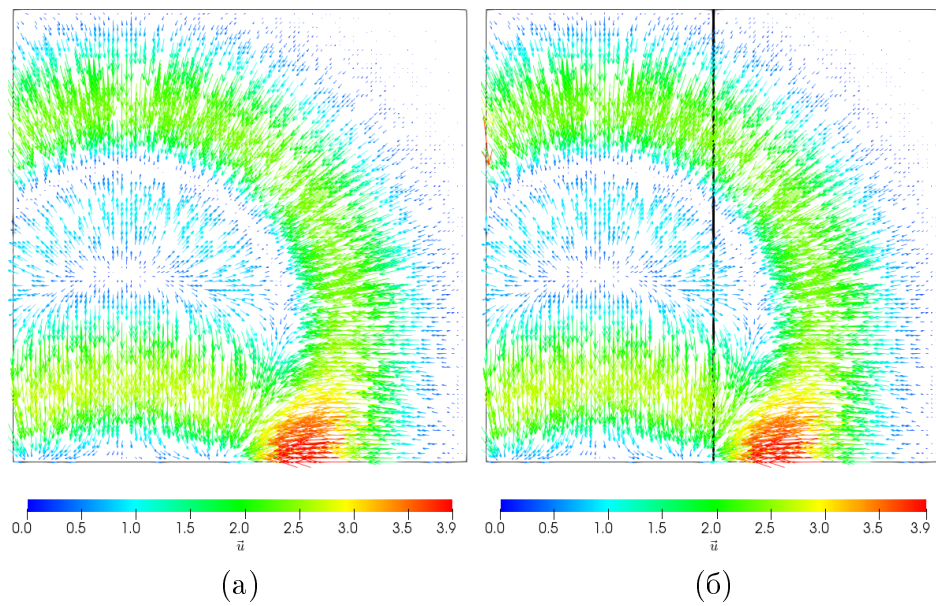


Рисунок 3.3 – Значение и направление скорости (м/с) на момент времени $t = 5$ с (а) для решения предварительной задачи; (б) для решения с применением методов ассимиляции и разделения области

но сделать следующие выводы. Итерационный алгоритм ассимиляции данных совместно с методом разделения области сходится при малом положительном параметре регуляризации α и предложенном параметре τ_k (3.3). Алгоритм ассимиляции эффективно сближает данные моделирования и данные наблюдения, в том числе воспроизводит добавленный «шум».

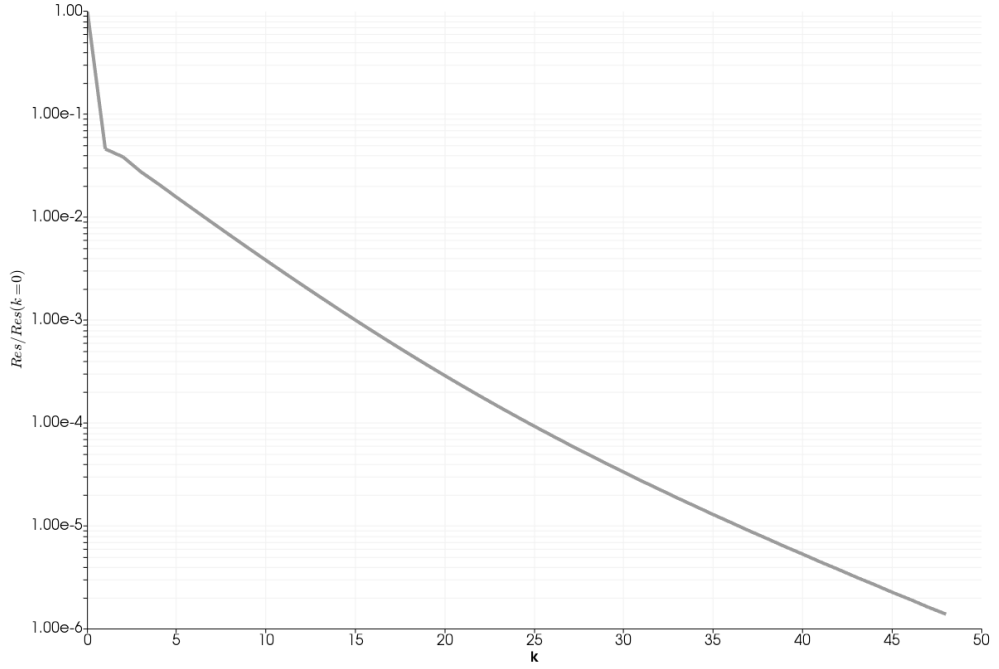


Рисунок 3.4 – Отношение величины невязки к величине невязки на итерации с номером 0 в зависимости от числа итераций. Использована логарифмическая шкала

3.2. Применение метода разделения области к задаче вариационной ассимиляции данных о восстановлении граничных условий на жидкой границе [50]

3.2.1. Постановка задачи

Обозначим через $\vec{n}$ единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$. Пусть l – параметр Кориолиса, g – ускорение свободного падения. Рассмотрим линеаризованную задачу мелкой воды:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \begin{bmatrix} 0 & -l \\ l & 0 \end{bmatrix} \vec{v} + r\vec{v} - g \mathbf{grad} \xi = \vec{f} & \text{в } \Omega \times (0, \bar{t}), \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} - \mathbf{div}(H\vec{v}) = 0 & \text{в } \Omega \times (0, \bar{t}), \\ \vec{v} = \vec{v}_0 \quad \xi = \xi_0 & \text{в } \Omega \text{ при } t = 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

где $\vec{f} = (f_1, f_2)^T$ – заданная функция, r – коэффициент трения. Решая задачи на (t_{j-1}, t_j) , полагаем функции $\vec{v}_{j-1}$, ξ_{j-1} известными. Подробное описание обозначений и приближений, используемых в работе, можно найти в главе 1 и работах [25, 59]. Рассмотрим граничное условие на внешней жидкой границе вида [113]:

$$H\vec{v} \cdot \vec{n} + m_{op}\sqrt{gH}\xi = m_{op}\sqrt{gH}d_s \quad \text{на } \partial\Omega \times (t_{j-1}, t_j), \quad (3.5)$$

где m_{op} – характеристическая функция внешней жидкой (открытой) границы Γ_{op} , т.е. $m_{op} = 1$ если $(\lambda, \theta, R_E) \in \Gamma_{op}$, в противном случае $m_{op} = 0$. Заметим, что на твердой части границы ($m_{op} = 0$) граничное условие принимает вид условия непротекания. Граничная функция d_s будет рассматриваться ниже как дополнительная неизвестная. Пусть для определенности $d_s = 0$ на $\partial\Omega \setminus \Gamma_{op}$.

Весь интервал по времени $[0, \bar{t}]$ разбивается на подынтервалы (t_{j-1}, t_j) , $\Delta t = t_j - t_{j-1}$, $t_0 = 0$, $t_J = \bar{t}$, $j = 1, \dots, J$. Запишем неявную схему аппроксимации задачи (3.4)–(3.5) на интервале (t_{j-1}, t_j) , по времени:

$$\begin{cases} \frac{\vec{v}^j}{\Delta t} + \begin{bmatrix} 0 & -l \\ l & 0 \end{bmatrix} \vec{v}^j + r\vec{v}^j - g \mathbf{grad} \xi^j = \vec{f}^j + \frac{\vec{v}^{j-1}}{\Delta t} & \text{в } \Omega, \\ \frac{\xi^j}{\Delta t} - \mathbf{div}(H\vec{v}^j) = \frac{\xi^{j-1}}{\Delta t} & \text{в } \Omega, \\ H\vec{v}^j \cdot \vec{n} + m_{op}\sqrt{gH}\xi^j = m_{op}\sqrt{gH}d_s^j & \text{на } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.6)$$

В дальнейшем будем рассматривать задачу (3.6) на интервале времени (t_{j-1}, t_j) в полудискретном виде, поэтому для удобства будем опускать индексы j , т.е.: $\vec{v} \equiv \vec{v}^j$, $\xi \equiv \xi^j$ и т.д. Также введем вектор-функцию $\tilde{f} = (f_1^j + u^{j-1}/\Delta t, f_2^j + v^{j-1}/\Delta t)^T$, $\tilde{f}_3 = \xi^{j-1}/\Delta t$, функцию $\tilde{f} \equiv (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)^T$. Тогда задача (3.6) запишется следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\vec{v}}{\Delta t} + \begin{bmatrix} 0 & -l \\ l & 0 \end{bmatrix} \vec{v} + r\vec{v} - g \mathbf{grad} \xi = \tilde{f} & \text{в } \Omega, \\ \frac{\xi}{\Delta t} - \mathbf{div}(H\vec{v}) = \tilde{f}_3 & \text{в } \Omega, \\ H\vec{v} \cdot \vec{n} + m_{op}\sqrt{gH}\xi = m_{op}\sqrt{gH}d_s & \text{на } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.7)$$

Пусть граница $\partial\Omega$ области Ω – кусочно-гладкая класса $\mathbf{C}^{(2)}$ и удовлетворяет условию Липшица. Будем считать, что кривая $\Gamma_{in} \subset \Omega$ является гиперповерхностью класса $\mathbf{C}^{(2)}$ [100] и делит область Ω на две подобласти Ω_1 и Ω_2 , $\Omega \equiv \Gamma_{in} \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\bar{\Gamma}_{in} \equiv \overline{(\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2)}$, $\Gamma_{in} \subset \partial\Omega_1$ – открытое множество в $\partial\Omega_1$, $\Gamma_{in} \subset \partial\Omega_2$. Пусть границы $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$ – кусочно-гладкие класса $\mathbf{C}^{(2)}$, липшицевы. Через $\partial\Omega_c$ обозначим твердую границу, т.е. $\partial\Omega_c \equiv \partial\Omega \setminus \Gamma_{op}$. Будем считать, что Γ_{op} (внешняя жидкая граница) не пересекается с Γ_{in} (внутренней жидкой границей) (см. рисунок 3.1).

Будем обозначать индексом $i = 1, 2$ решение в каждой из подобластей. Задача (3.6) может быть записана для функций $\vec{v}_1$ и ξ_1 в подобласти Ω_1 , $\vec{v}_2$ и ξ_2 в подобласти Ω_2 . Пусть $\vec{n}_i$ – внешняя нормаль к границе $\partial\Omega_i$, $i = 1, 2$. Потребуем выполнения условий сшивки на

внутренней жидкой границе [25]:

$$\xi_1 = \xi_2 \quad \text{на } \Gamma_{in}, \quad (3.8)$$

$$Hv_n^{(1)} = -Hv_n^{(2)} \quad \text{на } \Gamma_{in}, \quad (3.9)$$

где $v_n^{(i)} = (\vec{v}_i \cdot \vec{n}_i)$, $i = 1, 2$.

Введем дополнительную неизвестную функцию ϑ_{sw} так, что выполнено условие сшивки (3.8):

$$\xi_1 = \xi_2 = \vartheta_{sw} \quad \text{на } \Gamma_{in}.$$

Мы получаем следующий вид граничных условий на границе области Ω_1 :

$$H\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 + m_{op}\sqrt{gH}\xi_1 = m_{op}\sqrt{gH}d_s \quad \text{на } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma_{in},$$

$$\xi_1 = \vartheta_{sw} \quad \text{на } \Gamma_{in},$$

и на границе области Ω_2 :

$$Hv_n^{(2)} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma_{in},$$

$$\xi_2 = \vartheta_{sw} \quad \text{на } \Gamma_{in}.$$

Пусть имеются данные наблюдений $I_{obs} = (H\vec{v}_{obs} \cdot \vec{n})$ вдоль Γ_{op} , прошедшие предварительную обработку. Такие данные могут быть получены из наблюдений [114], а могут быть оценены по результатам расчетов по глобальной модели с более грубой сеткой. И в том, и в другом случае эти данные содержат ошибки, поэтому их непосредственное использование в качестве граничных условий не является желательным. Введем дополнительное условие (условие замыкания):

$$H\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 = I_{obs} \quad \text{на } \Gamma_{op}. \quad (3.10)$$

Из (3.7) в каждой подобласти ($i = 1, 2$) мы получаем:

$$\begin{cases} \frac{\vec{v}_i}{\Delta t} + \begin{bmatrix} 0 & -l \\ l & 0 \end{bmatrix} \vec{v}_i + r\vec{v}_i - g \mathbf{grad} \xi_i = \tilde{f} & \text{в } \Omega_i, \\ \frac{\xi_i}{\Delta t} - \mathbf{div}(H\vec{v}_i) = \tilde{f}_3 & \text{в } \Omega, \\ H\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 + m_{op}\sqrt{gH}\xi_1 = m_{op}\sqrt{gH}d_s & \text{на } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma_{in}, \\ \xi_1 = \xi_2 = \vartheta_{sw} & \text{на } \Gamma_{in}, \\ H\vec{v}_2 \cdot \vec{n} = 0 & \text{на } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma_{in}. \end{cases}$$

Рассмотрим исходную задачу как задачу минимизации функционала по вектор функции $\phi = (\vartheta_{\text{sw}}, d_s)$:

$$J_\alpha = \frac{\alpha}{2} \left(\gamma \int_{\Gamma_{op}} g \sqrt{gH} (d_s - d_s^{(0)})^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_{in}} g \sqrt{gH} (\vartheta_{\text{sw}} - \vartheta_{\text{sw}}^{(0)})^2 d\Gamma \right) + \\ + \frac{1}{2} \left(\gamma \int_{\Gamma_{op}} \sqrt{\frac{g}{H}} (H \vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 - I_{\text{obs}})^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_{in}} \sqrt{\frac{g}{H}} (H \vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 + H \vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2)^2 d\Gamma \right),$$

где $\alpha = \text{const} > 0$, $\gamma = \text{const} > 0$. Заметим, что функционал J_α имеет вид функционала А.Н. Тихонова [94, 115, 116], где α – параметр регуляризации. В дальнейшем будем считать, что $\vartheta_{\text{sw}}^{(0)} = 0$ и $d_s^{(0)} = 0$.

3.2.2. Итерационный алгоритм

Приближения к функциям $\vec{v}_i(\alpha)$, $\xi_i(\alpha)$, $\vartheta_{\text{sw}}(\alpha)$, $d_s(\alpha)$, доставляющим минимум функционалу J_α при некотором малом $\alpha > 0$, будем искать с помощью следующего итерационного алгоритма:

- (1) Пусть найдено $\phi^k = (d_s^k, \vartheta_{\text{sw}}^k)^T$. Решаем задачи в каждой подобласти Ω_i , $i = 1, 2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\vec{v}_i^k}{\Delta t} + \begin{bmatrix} 0 & -l \\ l & 0 \end{bmatrix} \vec{v}_i^k + r \vec{v}_i^k - g \mathbf{grad} \xi_i^k = \tilde{f} \quad \text{в } \Omega_i, \\ \frac{\xi_i^k}{\Delta t} - \mathbf{div} (H \vec{v}_i^k) = \tilde{f}_3 \quad \text{в } \Omega_i, \\ H \vec{v}_1^k \cdot \vec{n}_1 + \sqrt{gH} \xi_1^k = \sqrt{gH} d_s^k \quad \text{на } \Gamma_{op}, \\ \xi_1^k = \xi_2^k = \vartheta_{\text{sw}}^k \quad \text{на } \Gamma_{in}, \\ H \vec{v}_1^k \cdot \vec{n}_1 = 0 \quad \text{на } \partial\Omega_1 \setminus (\Gamma_{in} \cap \Gamma_{op}), \\ H \vec{v}_2^k \cdot \vec{n}_2 = 0 \quad \text{на } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma_{in}. \end{array} \right. \quad (3.11)$$

(2) Решаем сопряженные задачи в Ω_i , $i = 1, 2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\bar{v}_i^{*,k}}{\Delta t} - \begin{bmatrix} 0 & -l \\ l & 0 \end{bmatrix} \bar{v}_i^{*,k} + r \bar{v}_i^{*,k} + g \mathbf{grad} \xi_i^{*,k} = 0 \quad \text{в } \Omega_i, \\ \frac{\xi_i^{*,k}}{\Delta t} + \mathbf{div} (H \bar{v}_i^{*,k}) = 0 \quad \text{в } \Omega_i, \\ H \bar{v}_1^{*,k} \cdot \vec{n}_1 - m_{op} \sqrt{gH} \xi_1^{*,k} = \gamma m_{op} (H v_n^{(1),k} - I_{obs}) \quad \text{на } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma_{in}, \\ -\sqrt{gH} \xi_1^{*,k} = -\sqrt{gH} \xi_2^{*,k} = H v_n^{(1),k} + H v_n^{(2),k} \quad \text{на } \Gamma_{in}, \\ H \bar{v}_2^{*,k} \cdot \vec{n}_2 = 0 \quad \text{на } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma_{in}. \end{array} \right. \quad (3.12)$$

(3) Ищем новое приближение $\phi^{k+1} = (d_s^{k+1}, v^{k+1})^T$:

$$d_s^{k+1} = d_s^k - \tau_k (\alpha \gamma \sqrt{gH} d_s^k + H \bar{v}_1^{*,k} \cdot \vec{n}_1) \quad \text{на } \Gamma_{op}, \quad (3.13)$$

$$v_{sw}^{k+1} = v_{sw}^k - \tau_k (\alpha \sqrt{gH} v_{sw}^k + (H \bar{v}_1^{*,k} \cdot \vec{n}_1 + H \bar{v}_2^{*,k} \cdot \vec{n}_2)) \quad \text{на } \Gamma_{in}. \quad (3.14)$$

При выполнении подходящего критерия окончания итерационного процесса элементы $d_s^k, v_{sw}^k, \xi_i^k, \bar{v}_i^k$ принимаются в качестве приближенных решений рассматриваемой задачи в Ω_i , $i = 1, 2$. Подходящий критерий остановки следует выбирать в зависимости от параметров итерационного алгоритма, размера моделируемой области, численного метода и заданной точности. Алгоритм (3.11)–(3.14) сходится при достаточно малом параметре $\tau_k = \tau = const > 0$ [66]. Однако можно выбирать параметр τ_k и следующим образом:

$$\tau_k = \frac{1}{2} \frac{\int_{\Gamma_{op}} \gamma \sqrt{\frac{g}{H}} (H(\vec{v})_1 \cdot \vec{n}_1 - I_{obs})^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_{in}} \sqrt{\frac{g}{H}} (H(\vec{v})_1 \cdot \vec{n}_1 + H(\vec{v})_2 \cdot \vec{n}_2)^2 d\Gamma}{\int_{\Gamma_{op}} (H(\vec{v})_1^* \cdot \vec{n}_1)^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_{in}} (H(\vec{v})_1^* \cdot \vec{n}_1 + H(\vec{v})_2^* \cdot \vec{n}_2)^2 d\Gamma}.$$

Заметим, что решение прямых (3.11) и сопряженных (3.12) задач в подобластях может осуществляться одновременно, так как они являются зависимыми только на границе пересечения подобластей.

3.2.3. Численные эксперименты

Для численного исследования предложенного итерационного алгоритма был проведен ряд численных экспериментов. Область была выбрана квадратной $(0, L) \times (0, L)$. Она была разделена на две подобласти Ω_1 и Ω_2 без пересечений. Обозначим Γ_{in} внутренней жидкой границей, а $\Gamma_{op} = 0 \times (0, L)$ внешней жидкой границей. В этой работе полагалось $L = 100$

м. Значения параметров $g = 9.81$ м/с², $l = 0$, $r = 0$. Глубина выбиралась $H = 1$ м. Правые части $\tilde{f}$ и $\tilde{f}_3$ равны 0.

Для аппроксимации по времени была использована неявная схема. Шаг по времени был выбран равным 0.5 с. По пространству была выбрана равномерная сетка с шагом 1 м. Описанный алгоритм совместного применения методов разделения области и вариационной ассимиляции применялся на каждом шаге по времени.

Для задания начальных условий был проведен предварительный эксперимент. Шаги по времени и по пространству были выбраны как описано ранее, однако область была представлена прямоугольником $\Omega_p = (-L, L) \times (0, L)$. Для предварительного эксперимента (здесь и далее для предварительного эксперимента будем использовать индекс p) были выбраны следующие начальные условия:

$$u_p = 0, \quad v_p = 0, \quad \xi_p = 10 \exp \left(-\frac{(x - 25)^2 + (y - 30)^2}{100} \right).$$

Граничные условия для предварительного эксперимента на $\partial\Omega_p$ были выбраны $H(\vec{v} \cdot \vec{n}) = 0$. Правые части $\tilde{f}$ и $\tilde{f}_3$ равны 0. Начальные условия для решения подзадачи были выбраны как результат расчета предварительного эксперимента после 10 с. Данные наблюдений $I_{obs} = H\vec{v}_p \cdot \vec{n}_1$ на внешней жидкой границе Γ_{op} были получены из предварительного эксперимента, который был продолжен еще на 5 с.

Также был проведен эксперимент для исследования влияния алгоритма ассимиляции на внешней жидкой границе. Для данного эксперимента область также выбиралась квадратной $\Omega_s = (0, L) \times (0, L)$, но на границе $x = 0$ использовалось граничное условие непротекания $H(\vec{v} \cdot \vec{n}) = 0$ (здесь и далее для этого эксперимента будем использовать индекс s).

При реализации алгоритма совместного применения методов разделения области и вариационной ассимиляции (3.11)-(3.14) критерий остановки был выбран следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{op}} \gamma \sqrt{\frac{g}{H}} (H(\vec{v})_1 \cdot \vec{n}_1 - I_{obs})^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_{in}} \sqrt{\frac{g}{H}} (H(\vec{v})_1 \cdot \vec{n}_1 + H(\vec{v})_2 \cdot \vec{n}_2)^2 d\Gamma < \\ < 0.1\alpha \left(\int_{\Gamma_{op}} g(d_s)^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_{in}} g(\vartheta_{sw})^2 d\Gamma \right). \end{aligned}$$

Таким образом, итерационный алгоритм заканчивается в случае, если часть, соответствующая регуляризованным слагаемым, начинает преобладать. Зависимость величины

$$\text{Res} = \int_{\Gamma_{op}} \gamma \sqrt{\frac{g}{H}} (H(\vec{v})_1 \cdot \vec{n}_1 - I_{obs})^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_{in}} \sqrt{\frac{g}{H}} (H(\vec{v})_1 \cdot \vec{n}_1 + H(\vec{v})_2 \cdot \vec{n}_2)^2 d\Gamma$$

относительно величины Res на нулевой итерации в зависимости от параметра γ представлена на рисунке 3.5. Как видно, при выборе $\gamma = 100$ значение Res дает лучший результат (меньшее число итераций для достижения критерия выхода из итерационного процесса), поэтому для последующих экспериментов будет использоваться данное значение.

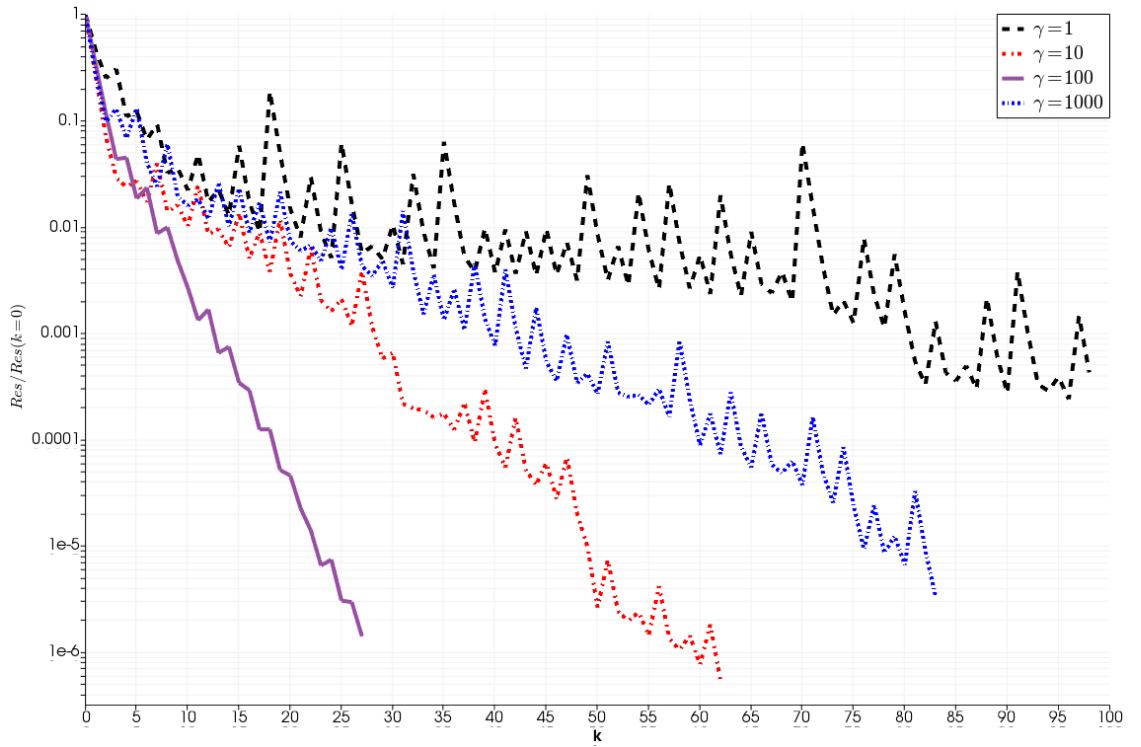


Рисунок 3.5 – Зависимость отношения величины Res к значению величины Res на нулевой итерации от числа итераций для разных выбранных значений параметра γ

Результаты моделирования для функции уровня ξ_i , где $i = 1, 2$, а также ξ_p и ξ_s , представлены на рисунке 3.6. Расположение внутренней границы Γ_{in} представлено белой линией. Отметим, что качественно рисунки 3.6 (а), (б) и (г) схожи, а для (в) наблюдается некоторое отличие, расположенное вблизи внешней жидкой границы.

Для более детального изучения влияния предложенного алгоритма на результаты моделирования рассмотрим также модуль разницы результатов для значений функций уровня (рисунок 3.7) и модуль разницы для величин компоненты вектора скорости $\vec{v}$ (рисунок 3.8). Использование ассимиляции данных на внешней жидкой границе значительно умень-

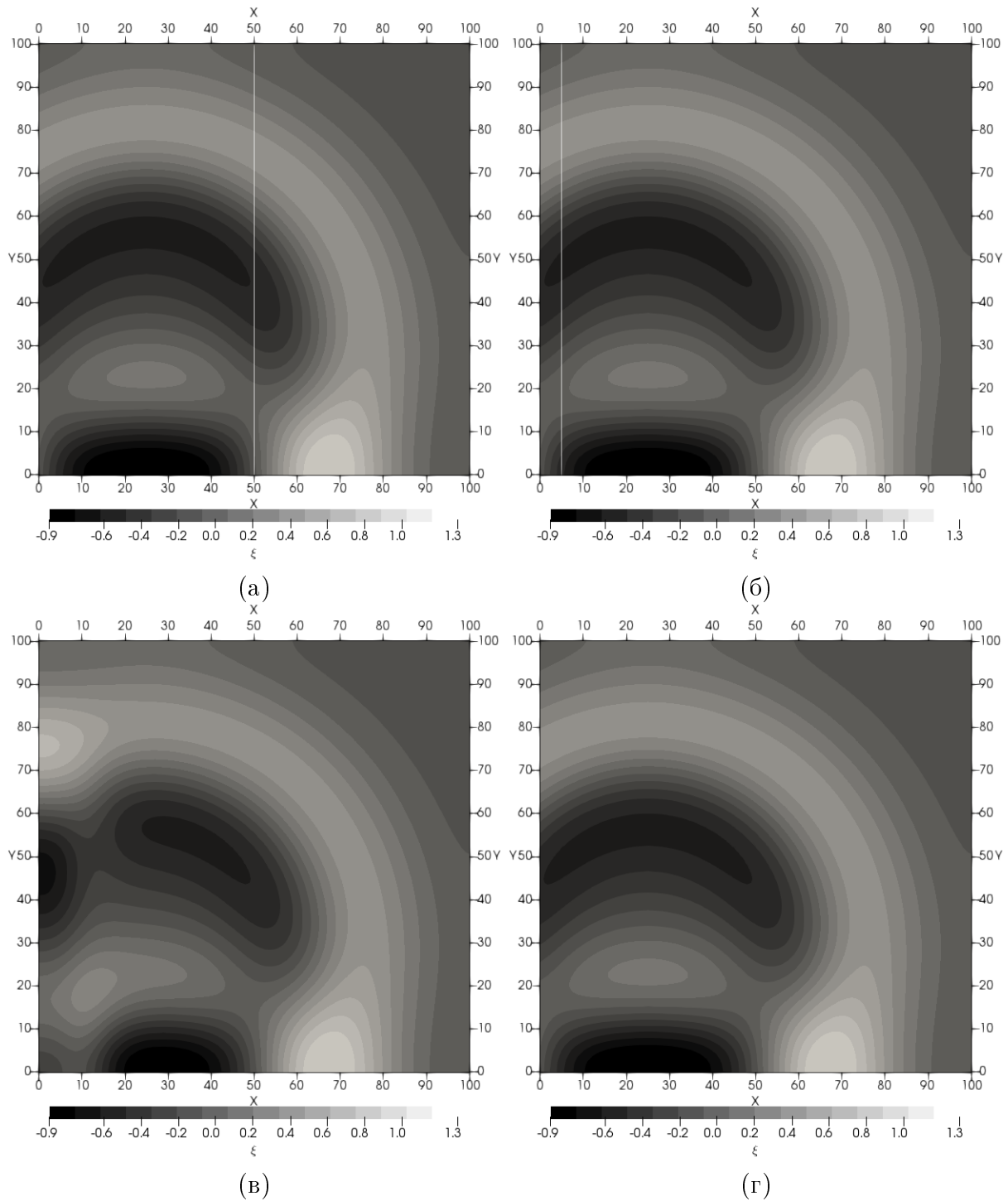


Рисунок 3.6 – Значение уровня (m) на момент времени $t = 5$ с (а) для решения с применением методов ассимиляции и разделения области, Γ_{in} расположена на $x = 50$; (б) для решения с применением методов ассимиляции и разделения области, Γ_{in} расположена на $x = 5$; (в) для решения задачи без методов разделения области и ассимиляции данных с нулевым граничным условием на жидкой границе; (г) для решения предварительной задачи

появляет различия между результатами моделирования с использованием методов ассимиляции данных и разделения области и результатами для предварительной задачи. Вблизи внутренней жидкой границы наблюдается ошибка, которая вносится при применении метода разделения области.

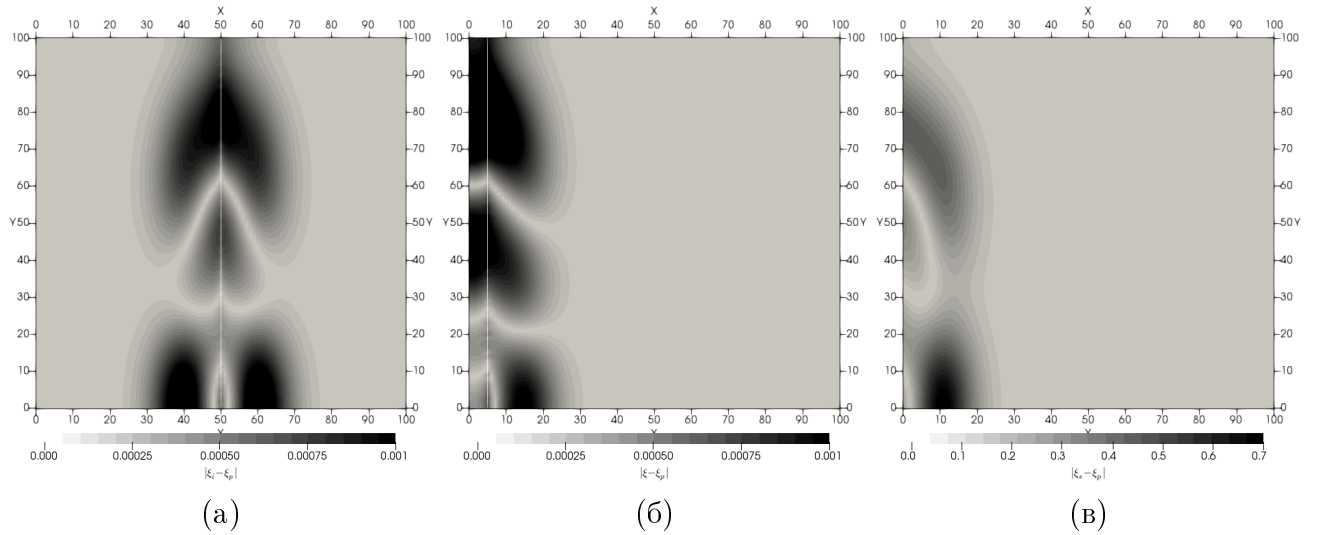


Рисунок 3.7 – Модуль разницы значения уровня (m) на момент времени $t = 5$ с (а) между решениями с применением методов разделения области и вариационной ассимиляции данных и предварительной задачи, Γ_{in} расположена на $x = 50$; (б) между решениями с применением методов разделения области и вариационной ассимиляции данных и предварительной задачи, Γ_{in} расположена на $x = 5$; (в) между решениями без применений методов разделения области и вариационной ассимиляции данных и предварительной задачи (для данного изображения выбрана другая шкала)

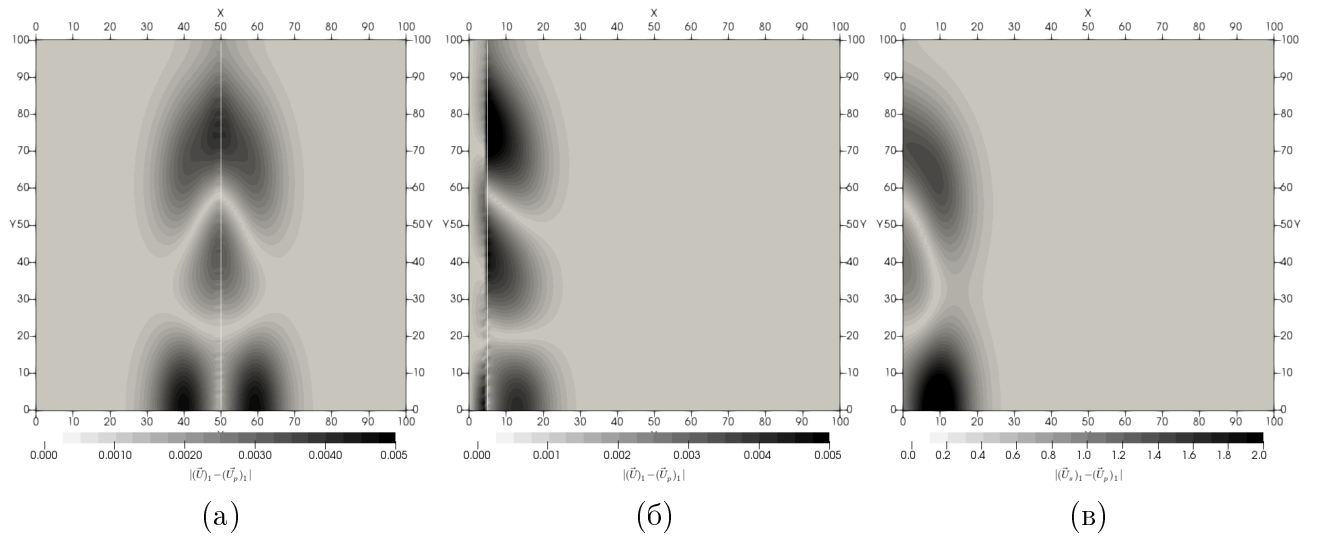


Рисунок 3.8 – Модуль разницы компонент скорости u (m/s) на момент времени $t = 5$ с (а) между решениями с применением методов разделения области и вариационной ассимиляции данных и предварительной задачи, Γ_{in} расположена на $x = 50$; (б) между решениями с применением методов разделения области и вариационной ассимиляции данных и предварительной задачи, Γ_{in} расположена на $x = 5$; (в) между решениями без применений методов разделения области и вариационной ассимиляции данных и предварительной задачи (для данного изображения выбрана другая шкала)

Для следующих численных экспериментов расположение Γ_{in} было выбрано на $x = 50$ м. Рассмотренный итерационный алгоритм сходится монотонно.

На рисунке 3.9 представлены результаты моделирования на разных итерациях (нулевой и последней, также для удобства на графике представлены данные наблюдений). Использо-

вание алгоритма ассимиляции эффективно сближает результаты моделирования и данные наблюдений.

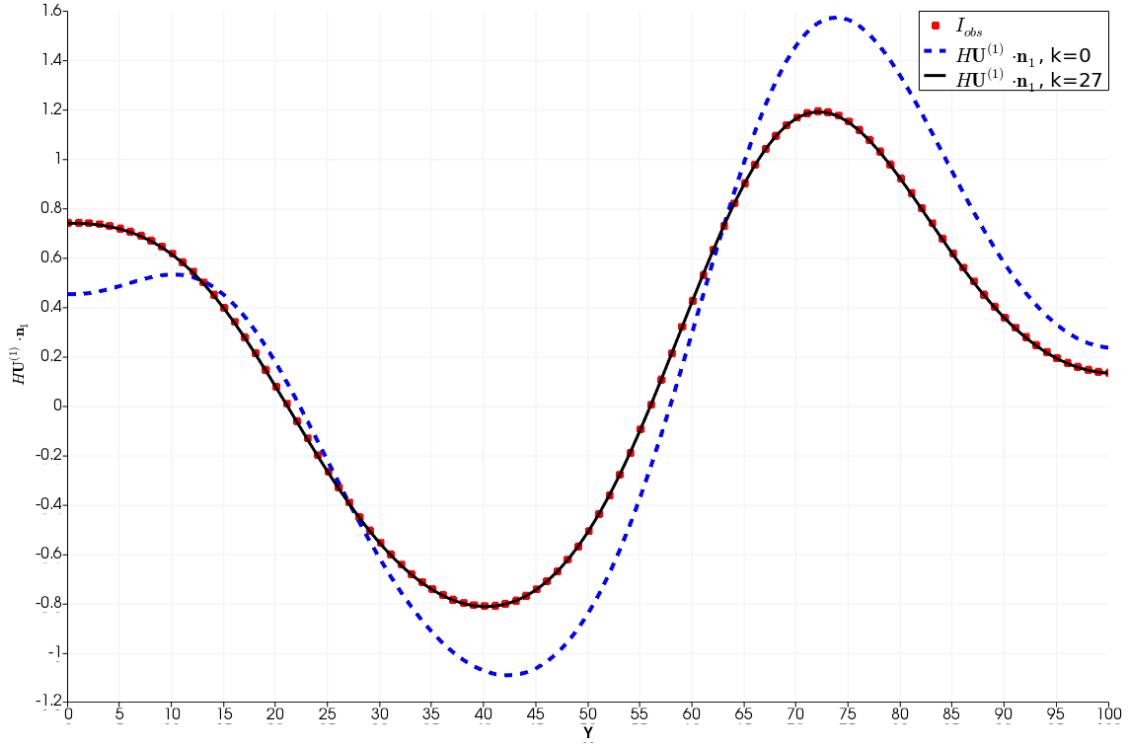


Рисунок 3.9 – Значения скорости $\vec{v} \cdot \vec{n}_1$ в конечный момент времени вдоль внешней жидкой границы на нулевой и последней итерации, а также данные наблюдений

По результатам моделирования можно сделать следующие выводы. Итерационный алгоритм ассимиляции данных совместно с методом разделения области сходится при малом положительном параметре регуляризации α и выбранном параметре τ_k . Алгоритм ассимиляции эффективно сближает данные моделирования и данные наблюдения. Результаты моделирования для задачи с использованием алгоритма вариационной ассимиляции данных показывают лучшее соответствие результатов предварительного эксперимента, чем результаты без применения метода ассимиляции на внешней жидкой границе.

Глава 4

Комплекс программ и численные эксперименты для акватории Балтийского моря

Для проверки эффективности использования предложенного метода разделения области из главы 2 был проведен ряд численных экспериментов, результаты которых будут представлены ниже. Описанный подход к построению алгоритмов разделения области был применен к модели гидротермодинамики Балтийского моря [117], используемой в ИВС «ИВМ РАН – Балтийское море» [52, 69]. Для численных экспериментов используется версия модели с разрешением $1/16^\circ$ по долготе и $1/32^\circ$ по широте. Область покрыта равномерной сеткой 336×394 узлов, по вертикали задано 25 σ -уровней. Шаг по времени был установлен 300 секунд. В рассматриваемой серии экспериментов вся акватория Балтийского моря была разделена на две подобласти. Введенная «внутренняя» граница отделяла Ботнический залив от остальной части моря (см. рисунок 4.1).

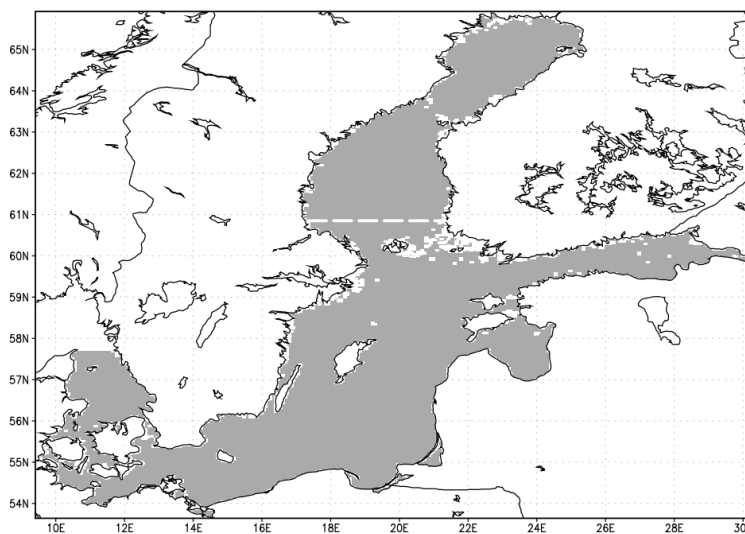


Рисунок 4.1 – Акватория Балтийского моря с введенной «внутренней» границей

4.1. Описание комплекса программ

Подробное описание и схема работы модели гидротермодинамики Балтийского моря могут быть найдены в [118]. Остановимся подробнее на внесенных изменениях для реализации метода разделения области в данной модели.

В директории *DDM* добавлен основной файл, отвечающий за включение/отключение метода разделения области и его совместного применения с процедурами ассимиляции. При этом дополнительная переменная (*ddmflag*), отвечающая за включение/отключение пользователем метода разделения области, добавлена в основной файл с параметрами *octask.par*. Значения *ddmflag* могут быть выбраны следующими: 0 – без использования метода разделения области; 1 – использование метода разделения области для задачи о распространении тепла; 3 – использование метода разделения области для блока, соответствующего линеаризованной системе уравнений мелкой воды. Тогда алгоритм запуска модулей программы для задачи о распространении тепла выглядит следующим образом:

Алгоритм 1 Алгоритм запуска модулей программы в зависимости от использования методов разделения области и ассимиляции данных для задачи о распространении тепла

```

Если ddmflag == 1 тогда
    Запустить DDM_Temperature
иначе
    Запустить TEMPERATURE_TRANSPORT_DIFFUSION_SPLIT
Конец условия

```

Алгоритм для блока адаптации гидрологических полей представлен на схеме ниже:

Алгоритм 2 Алгоритм запуска модулей программы в зависимости от использования методов разделения области для линеаризованной системы уравнений мелкой воды

```

Если ddmflag == 3 тогда
    Запустить SEALEVEL_DDM
иначе
    Запустить SEALEVEL_ZALRUS
Конец условия

```

Организация решения с применением метода разделения области на N подобластей следующая: вместо решения исходной задачи, решается N соответствующих подзадач с заданным граничным условием (см. главу 2), далее на внутренней границе разделения происходит обмен данными между подобластями для решения сопряженных задач в каждой подобласти. Следующий этап решения заключается в решении сопряженных подзадач в подобластях, после которого пересчитывается функция управления («дополнительная неизвестная»). Далее алгоритм повторяется до тех пор пока не выполнен критерий выхода из итерационного процесса. Для выполнения данного итерационного алгоритма был создан управляющий файл *ddm_subroutine.f* (см. алгоритм 3).

В управляющем файле *ddm_subroutine.f* могут быть найдены процедуры для запуска метода разделения области с двумя подобластями, а также расположение внутренней границы. Расположение внутренней границы задается путем указания i, j линии разделения

Алгоритм 3 Организация итерационного процесса

До тех пор пока не выполнен критерий остановки итерационного процесса **выполнять**
 Цикл от $i = 1$ до N **выполнять**
 Запустить процедуру решения прямой задачи в подобласти i
 Конец цикла
 Обмен данными на границе по заданным условиям сшивки
 Цикл от $i = 1$ до N **выполнять**
 Запустить процедуру решения сопряженной задачи в подобласти i
 Конец цикла
 Произвести вычисление нового приближения к функции управления
 Конец цикла

области в переменной n_{in} . Например, для двух подобластей в случае границы, параллельной оси x , решение будет осуществляться в пределах $j \in [0, n_{in}]$, $i \in [0, nx]$ для первой подобласти и $j \in [n_{in}, ny]$, $i \in [0, nx]$ для второй подобласти, где nx и ny – количество точек по x и y , соответственно. Блок программы, для которого необходимо применить метод разделения области, также задается в управляющем файле. Кроме управляющего файла, в директории *DDM* находятся вспомогательные файлы для решения основных подзадач с использованием метода разделения области. Отметим, что данные файлы не влияют на общую работу модели и используются только для процедур, которые задействуют метод разделения области. Таким образом, дополнительные файлы не вносят изменения в модель для случая использования ее без подключения процедур, относящихся к методу разделения области, за исключением подключения управляющего файла *ddm_subroutine.f* в файле *octask.f*.

В файле *ddm_subroutine.f* содержатся следующие процедуры:

- *DDM_Temperature* Данная процедура осуществляет итерационный алгоритм решения задачи о распространении тепла с использованием метода разделения области, а также получение итогового решения на исходной области для его использования в других модулях программы
- *SEALEVEL_DDM* Данная процедура осуществляет итерационный алгоритм решения задачи, соответствующей линеаризованной системе уравнений мелкой воды, с использованием метода разделения области, а также получение итогового решения на исходной области для его использования в других модулях программы

И вспомогательные процедуры для решения прямых и сопряженных задач переноса тепла для каждой из подобластей.

Для решения задачи, соответствующей линейаризованной системе уравнений мелкой воды также добавлен файл *sw_ddm.f*, в котором содержатся процедуры по решению системы уравнений мелкой воды для прямой и сопряженной задачи для каждой из подобластей.

4.2. Задача о распространении тепла

Рассмотрим метод разделения области, представленный в § 2.2.3, в сравнении с решением задачи (2.1) без его применения. Результаты численных экспериментов для обоих случаев приведены ниже. Результаты эксперимента представлены на 2 января 2007 года.

Результаты расчета поля температуры без применения алгоритма разделения области представлены на рисунке 4.2(а). Внутренняя граница Γ_{in} для метода разделения области выбрана между Ботническим заливом и остальной частью моря. Результаты расчета для акватории с использованием метода разделения области представлены на рисунке 4.2(б).

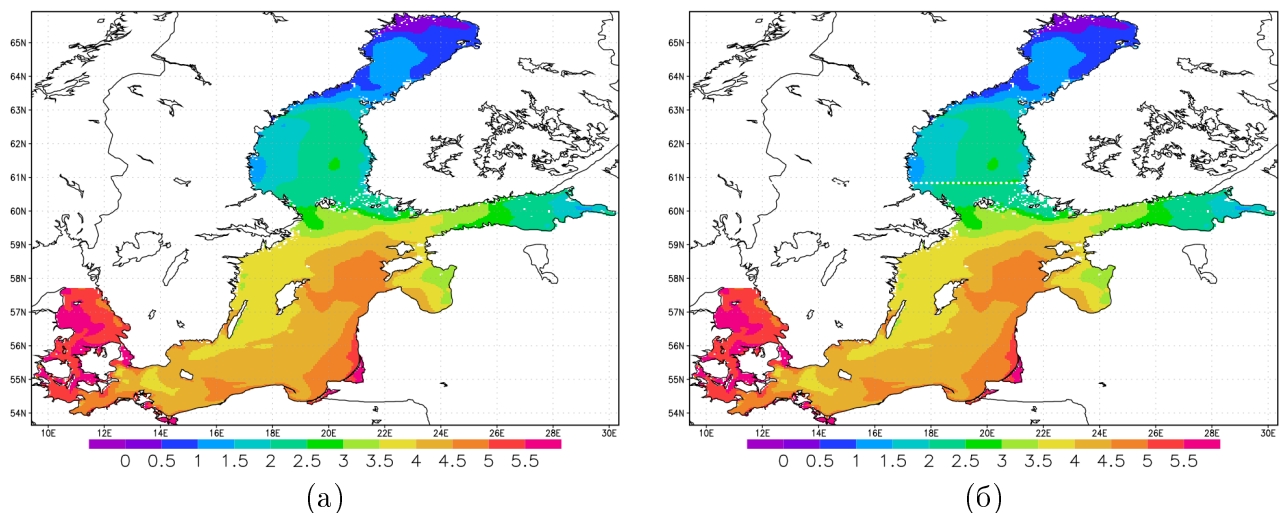


Рисунок 4.2 – Температура на поверхности моря (а) без использования метода разделения области; (б) с использованием метода разделения области

При использовании алгоритма метода разделения области был получен профиль разницы температур $T_{ddm} - T$ на внутренней границе раздела области Γ_{in} по глубине. Результаты представлены на рисунке 4.3.

Проведенные численные эксперименты без и с использованием метода разделения области для задачи о распространении тепла в акватории Балтийского моря показывают соответствие результатов. Так, представленное на рисунке 4.3 сравнение температур на внутренней границе Γ_{in} иллюстрирует незначительные отличия в большей части области, однако вблизи берегов может наблюдаться значительное расхождение. Схожие результаты наблюдаются и во всей акватории, что подтверждается на рисунках 4.2(а) и (б).

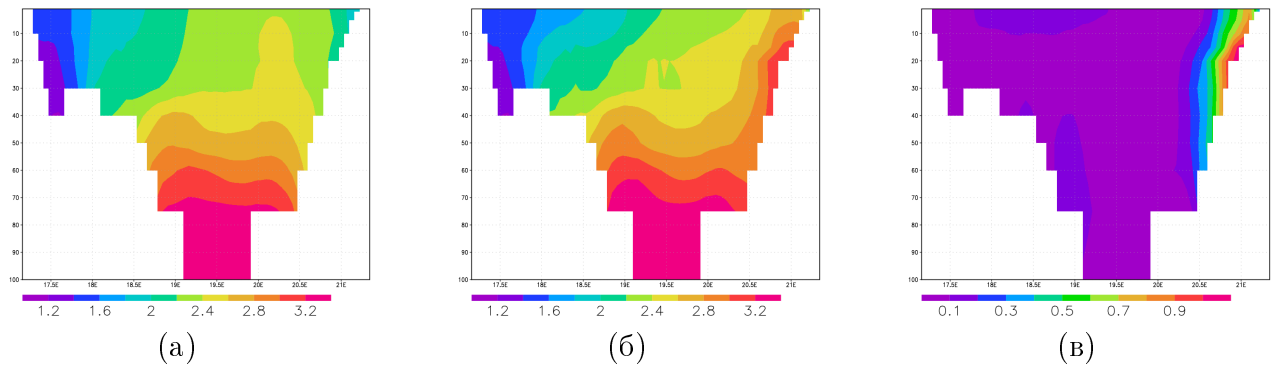


Рисунок 4.3 – Профиль температуры по глубине на границе Γ_{in} : (а) без использования метода разделения области; (б) с применением метода разделения области; (в) разница между полученными температурами.

4.3. Задача об уровне

Результаты с использованием метода разделения области сравнивались с результатами моделирования без его применения (далее внутренняя граница разделения области представлена пунктирной линией).

Далее будут представлены результаты моделирования, соответствующие модельному времени 5 января 2007 года.

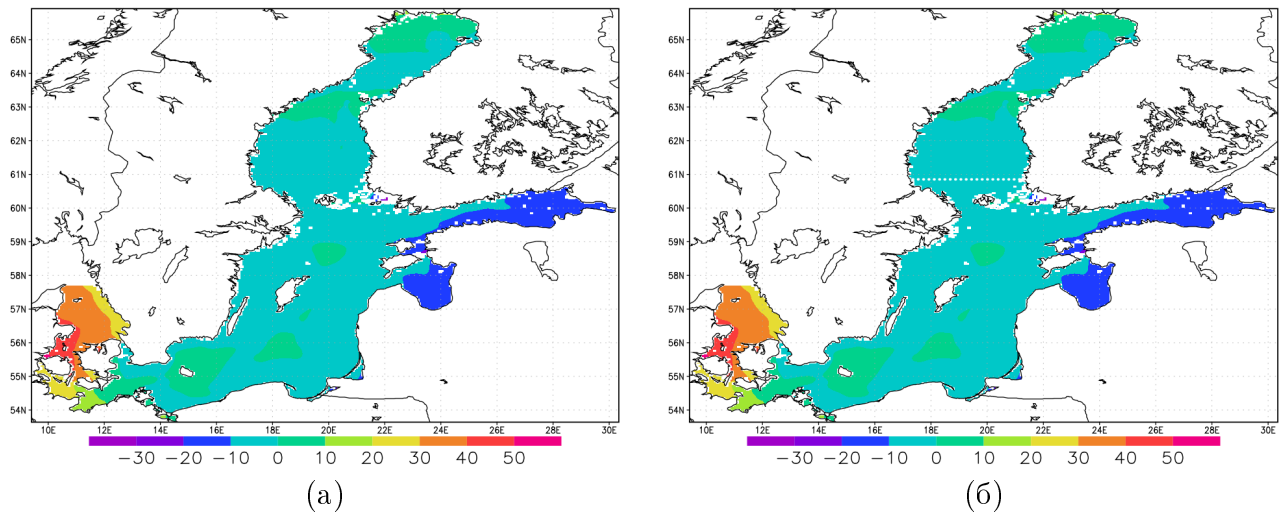


Рисунок 4.4 – Значение уровня (а) без использования метода разделения области; (б) с использованием метода разделения области

На рисунке 4.4 представлены результаты моделирования на момент времени 5 дней от начала расчета. Рисунок 4.4(а) соответствует результатам моделирования динамики Балтийского моря без применения метода разделения области, рисунок 4.4(б) с использованием данного метода. Можно отметить, что качественно значения уровня в области моделирования совпадают. Для более детального изучения влияния метода разделения области на

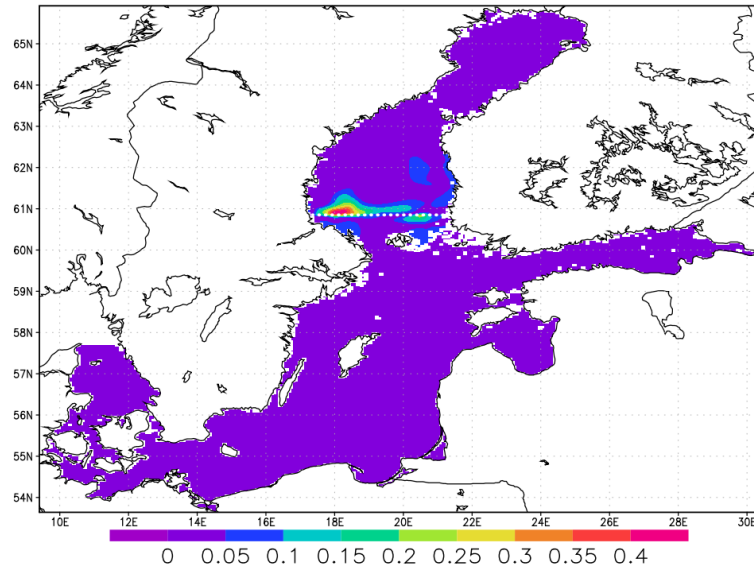


Рисунок 4.5 – Модуль разности между значениями уровня с использованием метода разделения области и без

результаты моделирования представлена разница между полученными значениями уровня (см. рисунок 4.5). Заметим, что разница не превышает 0.4 см, и, что область, в которой она наблюдается, располагается практически вдоль введенной внутренней границы.

Кроме того, было исследовано влияние метода разделения области на результаты моделирования в зависимости от времени проводимого расчета. На рисунке 4.6 представлена разница результатов моделирования для разных моментов времени вблизи внутренней границы. Заметим, что разница между результатами уровня с и без использования метода разделения области не сильно увеличивается со временем, однако наибольшее отклонение от результатов моделирования исходной задачи наблюдается вблизи внутренней границы.

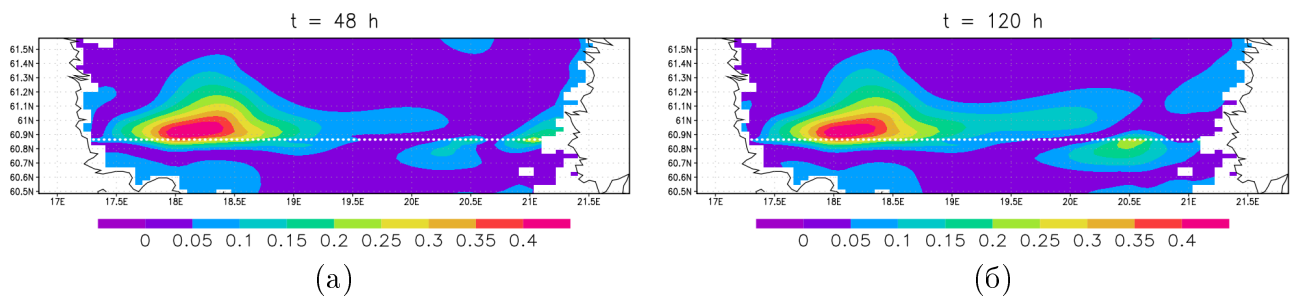


Рисунок 4.6 – Модуль разности значений уровня около внутренней границы для момента времени (а) $t = 2$ дня, (б) $t = 5$ дней

Поля вектора скорости с использованием и без применения метода разделения области представлены на рисунках 4.7–4.8.

Рассмотрим также значения u , v , ξ на Γ_{in} (далее результаты моделирования без использования метода разделения области будут представлены пунктирной линией, а результаты с использованием метода разделения области сплошной линией).

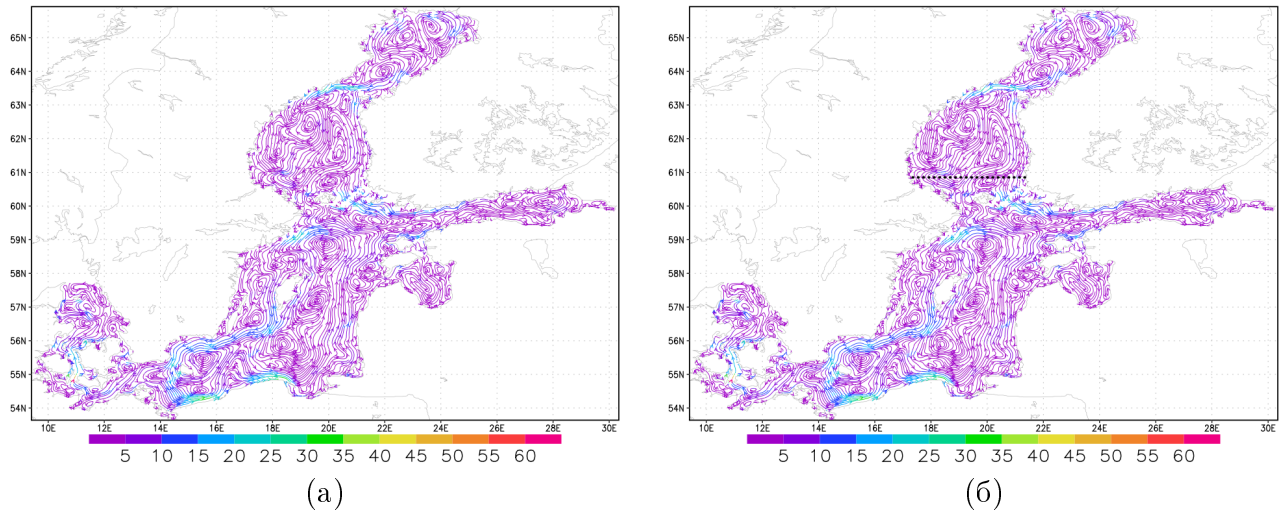


Рисунок 4.7 – Поле скоростей (а) без использования метода разделения области; (б) с использованием метода разделения области

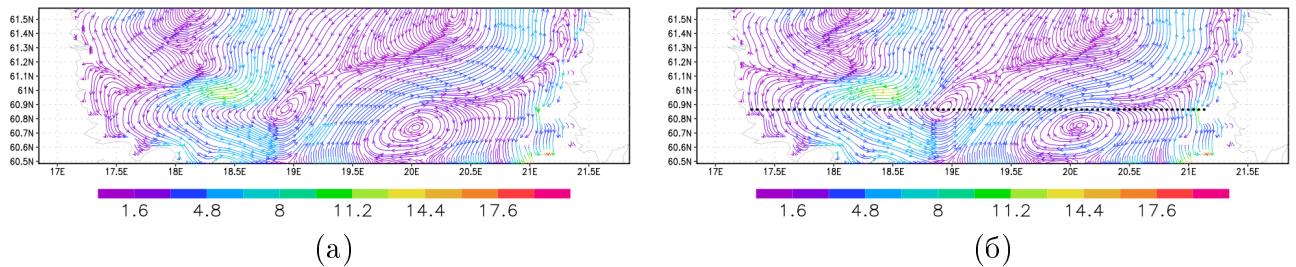


Рисунок 4.8 – Поле скоростей (а) без использования метода разделения области; (б) с использованием метода разделения области

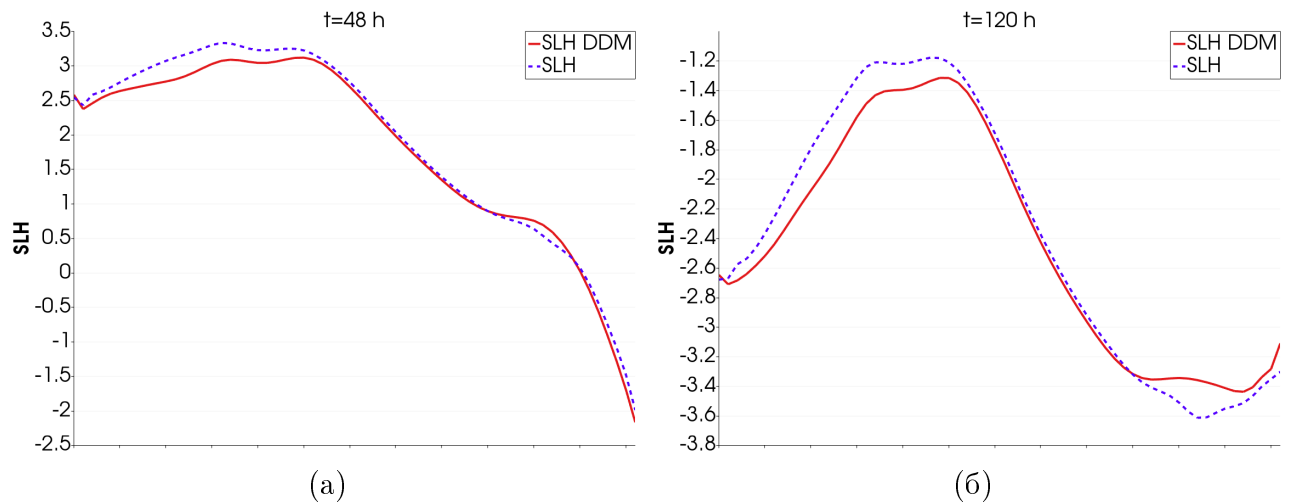


Рисунок 4.9 – Значения уровня на внутренней границе в момент времени (а) $t = 2$ дня, (б) $t = 5$ дней

На рисунках 4.9 – 4.10 представлены результаты моделирования вдоль внутренней границы в разные моменты времени от начала расчета. Значения уровня без и с использованием метода разделения области практически совпадают, однако для результатов скорости при качественно схожем поведении наблюдается существенная разница значений.

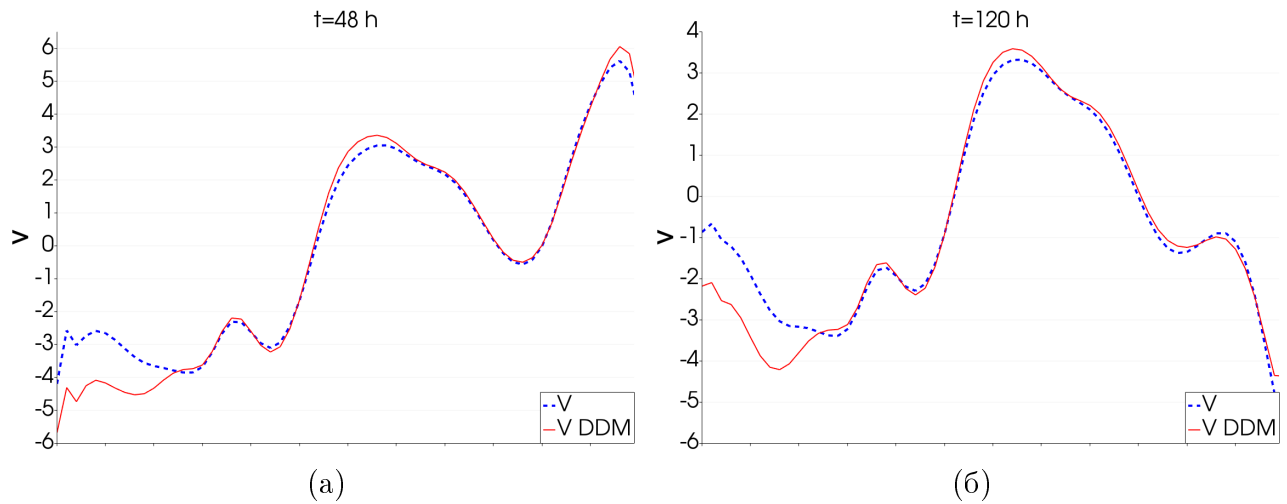


Рисунок 4.10 – Значения компоненты скорости (компонента скорости $\vec{u} \cdot \vec{n}$, которая использовалась в качестве уравнения замыкания) на внутренней границе в момент времени (а) $t = 2$ дня, (б) $t = 5$ дней

По полученным результатам моделирования можно отметить, что результаты для значений уровня практически совпадают, однако для значений скоростей может наблюдаться значительная разница. Также стоит отметить, что разница между результатами моделирования с и без применения метода разделения области наблюдается вблизи внутренней границы. Применение метода разделения области в задачах моделирования динамики Балтийского моря не вносит существенных ошибок и показывает хорошее соответствие результатов с результатами исходного моделирования. Несмотря на расхождение в результатах моделирования для скорости, полученное при использовании метода разделения области, решение для остальных блоков модели не подвергается существенным изменениям.

Заключение

Данная работа посвящена применению метода разделения области, основанного на теории обратных задач и сопряженных уравнений, в задачах геофизической гидротермодинамики. В работе представлен обзор существующих методов разделения области, описан один из подходов к формулировке метода разделения области и представлено его сравнение с существующими подходами. Также в работе рассмотрен вопрос о совместном использовании метода разделения области и метода вариационной ассимиляции данных в задачах гидродинамики морей и океанов. В работе проведено численное исследование метода разделения области в задачах гидротермодинамики морей и океанов на примере акватории Балтийского моря.

В работе представлена задача гидротермодинамики моря и приведен один из методов ее численного решения, использующий метод расщепления по физическим процессам. К некоторым из полученных основных подзадач был сформулирован и применен метод разделения области, основанный на теории обратных задач и сопряженных уравнений. Для полученных задач проведено теоретическое исследование, а также сформулированы итерационные алгоритмы метода разделения области. Для каждой из рассмотренных подзадач для численного исследования представленного метода разделения области были проведены тестовые расчеты. Полученные результаты показали, что метод разделения области обладает сходимостью и демонстрирует результаты, близкие к результатам для исходных задач.

По результатам численных экспериментов можно сделать следующие выводы. Проведенные численные эксперименты без и с использованием метода разделения области для задачи о распространении тепла в акватории Балтийского моря показывают соответствие результатов. Основное различие между результатами наблюдается вблизи внутренней границы. Для задачи моделирования уровня моря результаты показывают, что различие между полученными значениями уровня моря незначительно, и область, в которой оно наблюдается, локализована практически вдоль введенной внутренней границы. При этом различие между результатами уровня с и без использования метода разделения области не сильно увеличивается со временем, однако наибольшее отклонение от результатов расчетов по исходной модели наблюдается вблизи внутренней границы.

Применение метода разделения области в задачах моделирования динамики Балтийского моря не вносит существенных ошибок и показывает хорошее соответствие результатов с результатами исходного моделирования. Таким образом, решение с применением данного метода не вносит значительного расхождения в результаты моделирования.

Рассматриваемый подход продемонстрировал возможность применения общей методологии разделения области для различных классов задач, поэтому он может быть использован в задачах математического моделирования совместно с другими известными методами. В том числе применяться совместно с процедурами вариационной ассимиляции данных наблюдений.

Основные результаты работы заключаются в следующем:

- 1) разработана модификация алгоритма разделения области для задачи конвекции-диффузии, проведено его сравнение с известным методом разделения области и представлены результаты численных экспериментов;
- 2) предложен метод разделения области для линеаризованной системы уравнений мелкой воды, проведено его сравнение и представлены результаты численных экспериментов;
- 3) проведено численное исследование совместного применения методов разделения области и вариационной ассимиляции данных;
- 4) разработан комплекс программ для использования метода разделения области в модели гидротермодинамики Балтийского моря.

Список литературы

1. Матвеева Э. И., Пальцев Б. В. О разделении области при решении краевых задач для уравнения Пуассона в областях сложной формы // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1973. — Т. 13, № 6. — С. 1441–1452.
2. Лебедев В. И., Агошков В. И. Операторы Пуанкаре–Стеклова и их приложения в анализе. — М. : ОВМ АН СССР, 1983.
3. Агошков В. И., Лебедев В. И. Операторы Пуанкаре–Стеклова и методы разделения области в вариационных задачах // Вычислительные процессы и системы. Вып. 2. — М. : Наука, 1985. — С. 173–227.
4. Агошков В. И. Метод разделения области в задачах гидродинамики. I. Задача о плоской циркуляции в океане. // Препринт ОВМ АН СССР. — 1985. — № 96.
5. Мацокин А. М., Непомнящих С. В. Метод альтернирования Шварца в подпространстве // Известия высших учебных заведений. Математика. — 1985. — № 10. — С. 61–66.
6. Агошков В. И. Метод разделения области в задачах гидродинамики. II. Задача о распределении температуры. // Препринт ОВМ АН СССР. — 1986. — № 118.
7. Агошков В. И. Метод разделения области в задачах гидродинамики. III. Задача для уравнения переноса // Препринт ОВМ АН СССР. — 1986. — № 120.
8. Chan T. F. Analysis of preconditioners for domain decomposition // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 1987. — Vol. 24. — P. 382–390.
9. Lions P.-L. On the Schwarz alternating method. I // First international symposium on domain decomposition methods for partial differential equations / Paris, France. — Vol. 1. — 1988. — P. 42.
10. Nepomnyaschikh S. V. Application of domain decomposition to elliptic problems with discontinuous coefficients // Fourth International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations / SIAM. — Philadelphia, PA, USA, 1991.
11. Quarteroni A., Valli A. Theory and application of Steklov-Poincare operators for boundary-value problems // Applied and Industrial Mathematics. — Springer, 1991. — P. 179–203.
12. Мацокин А. М., Непомнящих С. В. Метод фиктивного пространства и явные операторы продолжения // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1993. — Т. 33, № 1. — С. 52–68.
13. Cai X. C. Additive Schwarz algorithms for parabolic convection–diffusion equations // Numerische Mathematik. — 1991. — Vol. 60, no. 1. — P. 41–61.

14. Lai C. H. A nonoverlapped domain decomposition for a class of convection–diffusion problems // *Applied mathematical modelling*. — 1992. — Vol. 16, no. 2. — P. 101–106.
15. Giladi E., Keller H. B. Space–time domain decomposition for parabolic problems // *Numerische Mathematik*. — 2002. — Vol. 93, no. 2. — P. 279–313.
16. Agoshkov V., Gervasio P., Quarteroni A. Optimal control in heterogeneous domain decomposition methods for advection–diffusion equations // *Mediterranean Journal of Mathematics*. — 2006. — Vol. 3, no. 2. — P. 147–176.
17. Burman E., Zunino P. A domain decomposition method based on weighted interior penalties for advection–diffusion–reaction problems // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. — 2006. — Vol. 44, no. 4. — P. 1612–1638.
18. Gander M. J., Halpern L. Optimized Schwarz waveform relaxation methods for advection reaction diffusion problems // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. — 2007. — Vol. 45, no. 2. — P. 666–697.
19. Optimized Schwarz methods with an overset grid for the shallow-water equations: preliminary results / A. Qaddouri, L. Laayouni, S. Loisel et al. // *Applied Numerical Mathematics*. — 2008. — Vol. 58, no. 4. — P. 459–471.
20. Martin V. Schwarz waveform relaxation algorithms for the linear viscous equatorial shallow water equations // *SIAM Journal on Scientific Computing*. — 2009. — Vol. 31, no. 5. — P. 3595–3625.
21. Дианский Н. А., Багно А. В., Залесный В. Б. Сигма–модель глобальной циркуляции океана и ее чувствительность к вариациям напряжения трения ветра // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*. — 2002. — Т. 38, № 4. — С. 537–556.
22. Марчук Г. И., Дымников В. П., Залесный В. Б. Математические модели в геофизической гидродинамике и численные методы их реализации. — Л. : Гидрометеиздат, 1987.
23. Марчук Г. И. Методы расщепления. — М. : Наука, 1988.
24. Алексеев В. В., Залесный В. Б. Численная модель крупномасштабной динамики океана // *Вычислительные процессы и системы*. Вып. 10. — М. : Наука, 1993. — С. 232–253.
25. Агошков В. И. Методы разделения области в задачах гидротермодинамики океанов и морей. — М. : ИВМ РАН, 2017.
26. Audusse E., Dreyfuss P., Merlet B. Optimized Schwarz waveform relaxation for primitive equations of the ocean // *SIAM Journal on Scientific Computing*. — 2010. — Vol. 3, no. 5. — P. 2908–2936.
27. Tang H. S., Qu K., Wu X. G. An overset grid method for integration of fully 3D fluid dynamics and geophysics fluid dynamics models to simulate multiphysics coastal ocean flows // *Journal*

- of Computational Physics. — 2014. — Vol. 273. — P. 548–571.
28. Trémolet Y., Le Dimet F. X. Parallel algorithms for variational data assimilation and coupling models // Parallel Computing. — 1996. — Vol. 22, no. 5. — P. 657–674.
 29. DD-OceanVar: a domain decomposition fully parallel data assimilation software for the Mediterranean Forecasting System / L. D’Amore, R. Arcucci, L. Carracciolo, A. Murli // Procedia Computer Science. — Vol. 18. — 2013. — P. 1235–1244.
 30. D’Amore L., Cacciapuoti R. A note on domain decomposition approaches for solving 3D variational data assimilation models // Ricerche di Matematica. — 2019. — Vol. 68, no. 2. — P. 679–691.
 31. Parallel implementation of a data assimilation scheme for operational oceanography: The case of the MedBFM model system / A. Teruzzi, P. Di Cerbo, G. Cossarini et al. // Computers & geosciences. — 2019. — Vol. 124. — P. 103–114.
 32. Domain decomposition methods (ddm). — 2020. — Access mode: <http://ddm.org> (online; accessed: 01.03.2020).
 33. Agoshkov V. I. Poincar–Steklov’s operators and domain decomposition methods in finite dimensional spaces // SIAM Proceedings of the First International Symposium on Domain Decomposition Methods. — 1987.
 34. Жадаева Н. Г. Об одном методе разбиения области в нестационарных задачах математической физики // Дифференциальные уравнения. — 1995. — Т. 31, № 7. — С. 1217–1221.
 35. Свешников В. М. О решении краевых задач методом декомпозиции расчетной области без пересечения подобластей // Автометрия. — 2007. — Т. 43, № 2. — С. 124–130.
 36. Penenko V., Tsvetova E. Orthogonal decomposition methods for inclusion of climatic data into environmental studies // Ecological Modelling. — 2008. — Vol. 217, no. 3-4. — P. 279–291.
 37. Ильин В. П., Перевозкин Д. В. О некоторых вариантах метода декомпозиции областей // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Вычислительная математика и информатика. — 2014. — Т. 3, № 2. — С. 5–19.
 38. Discacciati M., Quarteroni A. Navier-Stokes/Darcy coupling: modeling, analysis, and numerical approximation // Rev. Mat. Complut. — 2009. — Vol. 22, no. 2. — P. 315–426.
 39. Dryja M., Galvis J., Sarkis M. N–N solvers for a DG discretization for geometrically nonconforming substructures and discontinuous coefficients // Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XIX. — Springer, 2011. — P. 27–38.
 40. Häberlein F., Halpern L. Optimized Schwarz waveform relaxation for nonlinear systems of parabolic type // Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XXI. — Springer, 2014. — P. 29–42.

41. Pechstein C. On iterative substructuring methods for multiscale problems // Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XXI. — Springer, 2014. — P. 85–98.
42. Игнатьева М. А., Лапин А. В. Применение метода декомпозиции области и несогласованных сеток при решении некоторых нестационарных неравенств // Ученые записки Казанского университета. Физико-математические науки. — 2015. — Т. 157, № 2. — С. 68–78.
43. Gervasio P., Quarteroni A. Analysis of the INTERNODES method for non-conforming discretizations of elliptic equations // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2018. — Vol. 334. — P. 138–166.
44. Scroggs J. S. A parallel algorithm for nonlinear convection-diffusion equations // Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations. — Houston, TX, 1989. — P. 373–384.
45. d’Anfray P., Halpern L., Ryan J. New trends in coupled simulations featuring domain decomposition and metacomputing // ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis. — 2002. — Vol. 36, no. 5. — P. 953–970.
46. Coupling 3D Navier–Stokes and 1D shallow water models / M. P. Daou, E. Blayo, A. Rousseau et al. // Simhydro 2014. — 2014.
47. Blayo E., Rousseau A. About interface conditions for coupling hydrostatic and nonhydrostatic Navier–Stokes flows // Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series S. — 2016. — Vol. 9, no. 5. — P. 1565–1574.
48. Blayo E., Rousseau A., Tayachi M. Boundary conditions and Schwarz waveform relaxation method for linear viscous shallow water equations in hydrodynamics // SMAI Journal of Computational Mathematics. — 2017. — Vol. 3. — P. 117–137.
49. Methods of variational data assimilation and their application in problems of hydrothermodynamics of marine water areas / V. I. Agoshkov, N. R. Lezina, E. I. Parmuzin et al. // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2020. — Vol. 35, no. 4. — P. 189–202.
50. Агошков В. И., Лёзина Н. Р., Шелопут Т. О. Восстановление граничных функций на внешних и внутренних жидких границах в задаче гидродинамики открытой акватории // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2020. — Т. 60, № 11. — С. 1915–1932.
51. Agoshkov V., Lezina N., Sheloput T. Domain decomposition method for the variational assimilation of the sea level in a model of open areas hydrodynamics // Journal of Marine Science and Engineering. — 2019. — Vol. 7, no. 6 (195).

52. Informational Computational System “INM RAS–Baltic Sea” in the problem of operational forecasting of the marine environment state and assessment of risks of oil pollution / V. I. Agoshkov, N. A. Aseev, N. B. Zakharova et al. // 2018 IEEE/OES Baltic International Symposium (BALTIC) / IEEE. — 2018. — P. 1–9.
53. Шелопут Т. О., Лезина Н. Р. Совместная реализация методов ассимиляции данных на «жидкой» границе и разделения области в акватории Балтийского моря // Вестник Тверского государственного университета, Серия: География и геоэкология. — 2018. — № 3. — С. 168–179.
54. Agoshkov V. I., Lezina N. R. New approaches to the formulation of domain decomposition method and algorithm of the large-block parallelization for mathematical modeling problems // Computational Mathematics and Information Technologies. — 2017. — no. 2. — P. 14–20.
55. Mellor G. L. Users Guide for a Three-Dimensional, Primitive Equation, Numerical Ocean Model. — Program in Atmospheric and Oceanic Sciences, Princeton University Princeton, NJ, 1998.
56. Ocean general circulation model reference manual / G. Madec, P. Delecluse, M. Imbard, C. Levy // Note du Pôle de modélisation. — 1997.
57. Developments in ocean climate modelling / S. M. Griffies, C. Böning, F. O. Bryan et al. // Ocean Modelling. — 2000. — Vol. 2. — P. 123–192.
58. Pacanovsky R. C., Griffies S. M. — The MOM 3.0 Manual. — Geophysic Fluid Dynamics Laboratory, NOAA, Princenton, USA, 2000.
59. Агошков В. И. Методы решения обратных задач и задач вариационной ассимиляции данных наблюдений в проблемах крупномасштабной динамики океанов и морей. — М. : ИВМ РАН, 2016.
60. Агошков В. И., Ассовский М. В. Математическое моделирование динамики Мирового океана с учетом приливообразующих сил. — М. : ИВМ РАН, 2016.
61. Мориц Г. Современная физическая геодезия. — М. : Недра, 1983.
62. Доронин Ю. П. Физика океана. — Л. : Гидрометеиздат, 1978.
63. Agoshkov V. I. Statement and study of some inverse problems in modelling of hydrophysical fields for water areas with ‘liquid’ boundaries // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2017. — Vol. 32, no. 2. — P. 73–90.
64. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. — М. : Наука, 1980.
65. Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач. — М. : Издательство МГУ, 1994.

66. Агошков В. И. Методы оптимального управления и сопряженных уравнений в задачах математической физики. — М. : ИВМ РАН, 2016.
67. Agoshkov V. I. Estimates of spectrum bounds of some operators in geophysical hydrodynamics // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2008. — Vol. 23, no. 4. — P. 305–327.
68. Marchuk G. I., Agoshkov V. I., Shutyaev V. P. Adjoint equations and perturbation algorithms in nonlinear problems. — CRC Press, 2018.
69. Информационно-вычислительная система «ИВМ РАН – Балтийское море» / В. И. Агошков, Н. А. Асеев, Н. Б. Захарова и др. — М. : ИВМ РАН, 2016.
70. Halpern L., Szeftel J. Optimized and quasi-optimal Schwarz waveform relaxation for the one-dimensional Schrödinger equation // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. — 2010. — Vol. 20, no. 12. — P. 2167–2199.
71. Halpern L., Japhet C., Szeftel J. Optimized Schwarz waveform relaxation and discontinuous Galerkin time stepping for heterogeneous problems // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 2012. — Vol. 50, no. 5. — P. 2588–2611.
72. Gander M. J., Halpern L., Martin V. A new algorithm based on factorization for heterogeneous domain decomposition // Numerical Algorithms. — 2016. — Vol. 73, no. 1. — P. 167–195.
73. Gander M. J., Halpern L., Martin V. Multiscale analysis of heterogeneous domain decomposition methods for time-dependent advection–reaction–diffusion problems // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2018. — Vol. 34. — P. 904–924.
74. Halpern L. Artificial boundary conditions for the linear advection diffusion equation // Mathematics of computation. — 1986. — Vol. 46, no. 174. — P. 425–438.
75. Halpern L. Artificial boundary conditions for incompletely parabolic perturbations of hyperbolic systems // SIAM journal on mathematical analysis. — 1991. — Vol. 22, no. 5. — P. 1256–1283.
76. Lube G., Mueller L., Otto F.-C. A non-overlapping domain decomposition method for the advection–diffusion problem // Computing. — 2000. — Vol. 64, no. 1. — P. 49–68.
77. Gander M. J. Optimized Schwarz methods // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 2006. — Vol. 44, no. 2. — P. 699–731.
78. Lions P.-L. On the Schwarz alternating method. III: a variant for nonoverlapping subdomains // Third international symposium on domain decomposition methods for partial differential equations / SIAM Philadelphia, PA. — Vol. 6. — 1990. — P. 202–223.

79. Martin V. An optimized Schwarz waveform relaxation method for the unsteady convection diffusion equation in two dimensions // *Applied Numerical Mathematics*. — 2005. — Vol. 52, no. 4. — P. 401–428.
80. Gander M. J., Halpern L., Kern M. A Schwarz waveform relaxation method for advection–diffusion–reaction problems with discontinuous coefficients and non-matching grids // *Domain decomposition methods in science and engineering XVI*. — Springer, 2007. — P. 283–290.
81. Blayo E., Halpern L., Japhet C. Optimized Schwarz waveform relaxation algorithms with nonconforming time discretization for coupling convection-diffusion problems with discontinuous coefficients // *Domain decomposition methods in science and engineering XVI*. — Springer, 2007. — P. 267–274.
82. Bjørstad P. E., Widlund O. B. Iterative methods for the solution on elliptic problems on regions partioned into substructures // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. — 1986. — Vol. 23, no. 6. — P. 1097–1120.
83. Variational formulation and algorithm for trace operator in domain decomposition calculations / J.-F. Bourgat, R. Glowinski, P. Le Tallec, M. Vidrascu // *Proceedings of the Second International Conference on Domain Decomposition Methods*. — 1988.
84. Kwok F. Neumann–Neumann waveform relaxation for the time–dependent heat equation // *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XXI*. — Springer, 2014. — P. 189–198.
85. Gervasio P., Lions J. L., Quarteroni A. Heterogeneous coupling by virtual control methods // *Numerische Mathematik*. — 2001. — Vol. 90, no. 2. — P. 241–264.
86. Agoshkov V. I., Gervasio P., Quarteroni A. Optimal control in heterogeneous domain decomposition methods // *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. — 2005. — Vol. 20, no. 3. — P. 229–246.
87. Discacciati M., Gervasio P., Quarteroni A. The interface control domain decomposition (ICDD) method for elliptic problems // *SIAM Journal on Control and Optimization*. — 2013. — Vol. 51, no. 5. — P. 3434–3458.
88. The interface control domain decomposition method for Stokes–Darcy coupling / M. Discacciati, P. Gervasio, A. Giacomini, A. Quarteroni // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. — 2016. — Vol. 54, no. 2. — P. 1039–1068.
89. Карепова Е. Д., Шайдуров В. В., Вдовенко М. С. Параллельные реализации метода конечных элементов для краевой задачи для уравнений мелкой воды // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и*

- программирование. — 2009. — № 17(150).
90. Соболев С. Л. Алгоритм Шварца в теории упругости // Доклады Академии наук СССР. — 1936. — Т. 4, № 6. — С. 235.
 91. Никольский Е. Н. Алгоритм Шварца в задаче теории упругости о напряжениях // Доклады Академии наук. Российская академия наук. — 1960. — Т. 135, № 3. — С. 549–552.
 92. Агошков В. И. Новая методика формулировки алгоритмов разделения области // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2020. — Т. 60, № 3. — С. 351–368.
 93. Вабищевич П. Н., Самарский А. А. Вычислительная теплопередача. — М. : Едиториалл УРСС, 2003.
 94. Тихонов А. Н., Арсенин В. . Методы решения некорректных задач. — М. : Наука, 1979.
 95. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М. : Мир, 1971.
 96. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. — М. : Мир, 1985.
 97. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. — М. : Наука, 1978.
 98. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. — М. : Наука, 1981.
 99. Темам Р. Уравнения Навье–Стокса. — М. : Мир, 1981.
 100. Isakov V. Inverse source problems. — Providence, Rhode Island : American Mathematical Society, 1996.
 101. Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М. : Наука, 1971.
 102. Агошков В. И., Пармузин Е. И., Шутяев В. П. Численный алгоритм вариационной ассимиляции данных наблюдений о температуре поверхности океана // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2008. — Т. 48, № 8. — С. 1371–1391.
 103. Regional ocean data assimilation / C. A. Edwards, A. M. Moore, I. Hoteit, B. D. Cornuelle // Annual review of marine science. — 2015. — Vol. 7. — P. 21–42.
 104. Talagrand O., Courtier P. Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. I: Theory // Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society. — 1987. — Vol. 113, no. 478. — P. 1311–1328.
 105. Kalnay E. Atmospheric modeling, data assimilation and predictability. — Cambridge university press, 2003.
 106. Le Dimet F.-X., Talagrand O. Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations: theoretical aspects // Tellus A: Dynamic Meteorology and

- Oceanography. — 1986. — Vol. 38, no. 2. — P. 97–110.
107. Шутяев В. П. Операторы управления и итерационные алгоритмы в задачах вариационного усвоения данных. — М. : Наука, 2001.
 108. Marchuk G. I., Zalesny V. B. A numerical technique for geophysical data assimilation problems using Pontryagin's principle and splitting-up method // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 1993. — Vol. 8, no. 4. — P. 311–326.
 109. Orlanski I. A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows // J. Comput. Phys. — 1976. — Vol. 21, no. 3. — P. 251–269.
 110. Agoshkov V. I., Sheloput T. O. The study and numerical solution of some inverse problems in simulation of hydrophysical fields in water areas with 'liquid' boundaries // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2017. — Vol. 32, no. 3. — P. 147–164.
 111. Шелопут Т. О. Численное решение задачи вариационной ассимиляции данных об уровне на жидкой (открытой) границе в модели гидротермодинамики Балтийского моря // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. — 2018. — Т. 15, № 7. — С. 15–23.
 112. Дементьева Е. В., Каропова Е. Д., Шайдуров В. В. Восстановление граничной функции по данным наблюдений для задачи распространения поверхностных волн в акватории с открытой границей // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2013. — Т. 16, № 1. — С. 10–20.
 113. Agoshkov V. I. Inverse problems of the mathematical theory of tides: boundary-function problem // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2005. — Vol. 20, no. 1. — P. 1–18.
 114. Мысленков С. А. Использование спутниковой альтиметрии для расчета переноса вод в Северной Атлантике // Труды ГУ «Гидрометцентр России». — Вып. 345. — 2011. — С. 119–125.
 115. Ягола А. Г. О выборе параметра регуляризации при решении некорректных задач в рефлексивных пространствах // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1980. — Т. 20, № 3. — С. 586–596.
 116. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. В. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. — М. : Наука, 1978.
 117. Numerical model of the Baltic Sea circulation / V. B. Zalesny, A. V. Gusev, V. O. Ivchenko et al. // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2013. — Vol. 28, no. 1. — P. 85–100.

118. Гусев А. В. Численная модель гидродинамики океана в криволинейных координатах для воспроизведения циркуляции Мирового океана и его отдельных акваторий : Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук : 05.13.18. / Анатолий Владимирович Гусев ; Институт вычислительной математики РАН.— Москва, 2009.