

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт вычислительной математики им. Г. И. Марчука
Российской академии наук

На правах рукописи

Фетисов Сергей Николаевич

**Метод снесения граничного условия в задаче рассеяния
электромагнитных волн на идеально проводящих
объектах малой толщины**

Специальность 1.2.2 —

«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Сетуха Алексей Викторович

Москва — 2023

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Модель рассеяния электромагнитных волн на идеально проводящих объектах	14
1.1 Постановка задачи	14
1.2 Сведение задачи к граничному интегральному уравнению	17
1.3 Численная схема решения задачи	20
1.4 Аппроксимация слабосингулярных интегралов.	24
1.5 Нахождение диаграмм рассеяния.	25
Глава 2. Метод снесения граничного условия на срединную поверхность	28
2.1 Специфика задачи рассеяния на тонких объектах	28
2.2 Постановка задачи на срединной поверхности со снесением граничного условия	29
2.3 Сведение задачи со снесенным граничным условием к интегральным уравнениям	31
2.4 Разбиение поверхности и аппроксимация интегральных операторов	33
2.5 Аппроксимация поверхностной дивергенции	37
2.6 Численное решение задачи	41
Глава 3. Программная реализация	45
Глава 4. Результаты расчетов и обсуждение	47
4.1 Влияние точности вычисления интегралов по ячейкам на решение исходной задачи рассеяния	47
4.2 Влияние числа ячеек доразбиения на решение для крыла в исходной постановке	50
4.3 Сеточная сходимость для задачи в исходной постановке	55
4.4 Влияние толщины профиля на диаграмму рассеяния	57
4.5 Решение задачи рассеяния на телах малой толщины с применением метода снесения граничного условия	59

	Стр.
4.6 Сравнение численных решений задачи с результатами физических экспериментов	60
4.7 Анализ диаграмм обратного рассеяния	62
4.8 Анализ рассеянных полей для различных углов облучения	65
4.9 Выводы	77
Заключение	79
Список литературы	80

Введение

В диссертации рассматривается трехмерная задача рассеяния монохроматической электромагнитной волны на идеально проводящих телах малой толщины. Под термином "тела малой толщины" понимаются тела, у которых один из габаритных размеров намного меньше, чем другие. Такая задача возникает при определении радиолокационных характеристик сложных технических объектов, например летательных аппаратов. В этом случае в роли элементов малой толщины выступают крылья и оперение, воздушные винты, вентиляторы двигателей силовых установок.

Актуальность темы исследования. В настоящее время для анализа характеристик рассеяния сложных технических объектов широко применяются методы численного моделирования, основанные на решении уравнений Максвелла. При решении нестационарных уравнений Максвелла могут использоваться различные сеточные методы. Одним из первых таких методов стал метод конечных разностей во временной области (FDTD - Finite-Difference Time-Domain method), берущий свое начало от работы [30]. В настоящее время схема этого метода получила развитие и широко применяется. Описание современных алгоритмов и примеры решенных задач можно найти в [7; 10; 15; 38; 51; 55]. Особенностью классической схемы этого метода является необходимость использовать регулярную прямоугольную пространственную сетку. Более гибки к выбору расчётной сетки являются методы конечного объема во временной области (FVTD - Finite Volume Time-Domain method) [36; 49] и метод конечных элементов [22; 24; 29; 62] применимые на неравномерных неструктурированных сетках.

Однако решение задач монохроматического рассеяния в рамках нестационарной модели для уравнений Максвелла во временной области является менее эффективным, чем при решении уравнений в частотной области. При использовании нестационарных уравнений требуется моделирование электромагнитного поля на достаточно большом временном интервале. При этом необходимы высокая точность аппроксимации, не позволяющая развиваться паразитным возмущениям за время моделирования, а также применение специальных условий на внешней границе расчетной области, исключающих

отражение и рождение волн на границе расчетной области. Здесь используются специальные виды поглощающих граничных условий [14; 43–46].

При решении задач рассеяния монохроматических волн более эффективным является решение уравнений Максвелла в частотной области, в которых время исключено из рассмотрения и ставится краевая задача. Здесь могут применяться различные варианты сеточных методов и метода конечных элементов для непосредственного решения краевой задачи в пространственной области [1–3; 5; 6; 26; 28; 61] .

При решении задач рассеяния для тел, помещенных в однородную окружающую среду, во многих случаях высокую эффективность показывает метод граничных интегральных уравнений. Этот метод применим в случаях, когда удается построить интегральное представление для электрического и магнитного полей через поверхностные интегралы. В случае задач рассеяния на идеально проводящих телах таким представлением является выражение электрического и магнитного полей через поверхностные токи на поверхности облучаемых тел. Для нахождения неизвестных поверхностных токов необходимо записать интегральное уравнение, обеспечивающее выполнение граничного условия на поверхности тела (см., например, [13; 23; 40; 56]).

По сравнению с сеточными методами, предполагающими дискретизацию пространственной области, окружающей объекты, здесь расчетная сетка строится только на поверхности облучаемого тела. При этом условия на бесконечности выполняются автоматически и отсутствует проблема сеточной дискретизации области для корректного учета этих условий. В задачах рассеяния последний вопрос стоит особенно остро, поскольку шаг пространственной дискретизации определяется не только сложностью геометрии, но и длиной волны (шаг дискретизации должен быть значительно меньше длины волны). Ограничение, накладываемое длиной волны на шаг сетки, часто является определяющим и не позволяет использовать неоднородные сетки, как это делается, например, во внешних задачах вычислительной аэрогидродинамики.

В случае использования метода граничных интегральных уравнений для решения задач дифракции на телах малой толщины возникают определенные трудности. Примером такого тела является прямоугольное крыло конечного размаха с малым отношением толщины профиля к его хорде. Характерными особенностями формы таких тел является наличие закругленных кромок с малым радиусом кривизны, либо наличие острых кромок, имеющих форму клина

с малым углом раствора. Интегральные уравнения, записанные на замкнутой поверхности, ограничивающей такое тело, вырождаются, когда толщина тела стремится к нулю. При численном решении интегрального уравнения методами, предполагающими дискретизацию граничной поверхности, необходимо использовать разбиение, в котором шаг сетки должен быть меньше толщины тела. Кроме того, шаг сетки должен быть достаточно мал, чтобы поверхностная сетка аппроксимировала закругления кромок малого радиуса. Все это приводит к необходимости использовать поверхностные сетки с большим числом ячеек, растет вычислительная сложность задачи. В случае наличия острых кромок, погрешность численного решения может расти в окрестности этих кромок, причем, здесь проблема может не решаться за счет примитивного сгущения сетки.

Методы решения задач рассеяния электромагнитных волн на идеально проводящих телах малой толщины с применением интегральных уравнений, в частности, описаны в [17; 39]. Отметим, что в последней статье авторы предлагают подход к решению задачи рассеяния тонким телом, основанный на применении комбинированного интегрального уравнения поля (CFIE), которое записывается на поверхности тела. В [39] авторы также отмечают, что стандартные численные алгоритмы решения граничных интегральных уравнений, которые хорошо работают для толстых тел, требуют существенного сгущения сетки в случае тел малой толщины.

Для простоты задачу дифракции на теле малой толщины часто заменяют задачей дифракции на тонком экране, который аппроксимирует это тело. Однако простая замена телесного объекта экраном не всегда позволяет правильно получить все необходимые физические характеристики. Так, форма кромок идеально проводящих тел в некоторых случаях существенно влияет на диаграмму рассеяния. Это свойство электромагнитного рассеяния отражено в методах физической теории дифракции, которые применимы к случаю коротких волн [9; 54]. Однако, в случае длин волн, сопоставимых с размерами тела такие методы не применимы.

В случае численного решения граничных интегральных уравнений задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений с плотной матрицей. Количество уравнений такой системы определяется количеством ячеек разбиения граничных поверхностей. Значительно повысить возможности по решению задачи большой вычислительной сложности с позволяют специальные методы сжатия плотных матриц и быстрые матричные алгоритмы. Эти методы широко

используются при решении интегральных уравнений в задачах электродинамики, позволяя использовать расчетные сетки с существенно большим числом ячеек разбиения, чем при использовании прямых алгоритмов [11; 12; 16; 21; 37; 42; 50; 52; 57]. Применение таких методов позволяет во многих случаях решать задачи рассеяния на телах малой толщины при использовании мелких расчетных сеток с большим числом ячеек. Однако, проблема разработки алгоритмов, позволяющих решать такие задачи без дополнительного сгущения сетки при этом остается. Отметим, что проблема численного решения краевых задач вне тел малой толщины типична для метода граничных интегральных уравнений (она возникает не только в задачах дифракции).

В данной диссертации для решения задачи дифракции электромагнитной волны на идеально проводящем теле малой толщины разработан приближенный подход, основанный на переносе граничного условия на срединную поверхность тела. Основная идея заключается в следующем. Предполагается, что вся исходная поверхность тела состоит из двух компонент, находящихся на небольшом расстоянии друг от друга. Каждая точка z^+ одной из этих компонент однозначно соответствует точке z^- другой компоненты. Также предполагается, что существует срединная поверхность, образованная серединами отрезков с концами в соответствующих точках z^+ и z^- упомянутых компонент поверхности. Исходная задача для электромагнитного поля ставится в области вне исходной поверхности тела, где требуется условие ортогональности электрического поля вектору нормали к поверхности.

Идея применяемого подхода состоит в рассмотрении новой краевой задачи для электромагнитного поля в области вне срединной поверхности вместо рассмотрения исходной краевой задачи. Здесь ставится условие, что на положительной стороне срединной поверхности электрическое поле ортогонально вектору, который является нормалью к исходной поверхности в соответствующей точке z^+ . Аналогично, на отрицательной стороне срединной поверхности устанавливается условие ортогональности между электрическим полем и вектором нормали к исходной поверхности в соответствующей точке z^- . Метод решения такой краевой задачи основана на сведении задачи к граничным интегральным уравнениям, которые затем решаются численно. При этом в диссертации ставилась цель разработать численный метод, который не вырождается при уменьшении расстояния между указанными компонентами. Если расстояние между этими компонентами становится равным нулю, наша чис-

ленная схема трансформируется в известную численную схему решения задачи рассеяния электромагнитной волны на идеально проводящем экране.

Отметим, что ранее аналогичная идея переноса граничных условий на срединную поверхность использовалась для численного моделирования безвихревого обтекания несжимаемой жидкостью профилей [33; 34]. После переноса граничного условия на срединную линию задача сводилась к численному решению системы двух сингулярных интегральных уравнений второго рода на отрезке. В [47] эта идея была распространена на трехмерные внешние краевые задачи для уравнений Лапласа с условием Неймана вне тел малой толщины. В указанной работе было рассмотрено применение предложенного подхода к численному моделированию безвихревого обтекания крыла конечного размаха. Задача свелась к системе интегро-дифференциальных уравнений с сильно сингулярными интегралами, записанными для срединной поверхности крыла. Численные эксперименты показали, что решение таких уравнений позволяет найти распределение давления по крылу, совпадающее с истинным распределением давления по исходному крылу.

В данной диссертации идея переноса граничного условия на срединную поверхность применяется к рассматриваемой задаче электродинамики. Возникшая новая краевая задача сводится к системе граничных интегро-дифференциальных уравнений относительно неизвестных поверхностных токов. В этой задаче возникают два неизвестных касательных векторных поля, заданные на срединной поверхности - так называемые электрические и магнитные поверхностные токи. Особенность возникших уравнений заключается в том, что они содержат интегралы с сильной сингулярностью и понимаются в смысле конечного значения Адамара. Кроме того, уравнения содержат члены вне интеграла в виде дифференциальных операторов (поверхностная дивергенция от неизвестных токов).

Численные методы, основанные на решении граничных интегральных уравнений с сильной особенностью, давно и успешно применяются в электродинамике. Так называемое интегральное уравнение электрического поля (EFIE) одинаково применимо для задач рассеяния как на идеально проводящих телесных объектах, так и на идеально проводящих экранах. Для численного решения такого уравнения часто используется метод моментов. Это вариант метода Галеркина с использованием поверхностных конечных элементов в качестве базовой и тестовой функций. Один из первых вариантов метода, основанного на

триангуляции поверхностей, восходит к статье [41]. В настоящее время существует множество вариантов метода моментов, применимых к поверхностным сеткам различных типов [8; 25; 32; 53; 58]. Основная идея этих методов состоит в том, что интегральное уравнение по сути рассматривается как интегро-дифференциальное уравнение. После умножения уравнения на тестовую функцию с интегрированием старшая производная переносится на эту функцию. Вследствие этого порядок особенности понижается.

В данной работе к возникающим граничным уравнениям применяется другой подход, основанный на методе коллокации. В этом случае сильно сингулярные интегралы понимаются в смысле конечного значения по Адамару. Для дискретизации таких уравнений используется кусочно-постоянная аппроксимация неизвестных функций. Этот подход исходит из методов решения граничных гиперсингулярных интегральных уравнений, возникающих из решения краевой задачи Неймана для уравнения Лапласа и скалярного уравнения Гельмгольца [33; 35]. Равномерная сходимость такого метода на сетке для некоторых уравнений такого типа на плоском экране доказана в [31; 35; 48]. Для краевых задач электродинамики такой метод с кусочно-постоянной аппроксимацией поверхностных токов был предложен в [20].

В данной работе для аппроксимации возникающих интегральных операторов использованы известные квадратурные формулы, ранее построенные в работах [59; 60]. Для аппроксимации членов с поверхностной дивергенцией от неизвестных поверхностных токов в диссертации построены новые квадратурные формулы.

Таким образом, граничные интегро-дифференциальные уравнения на срединной поверхности сводятся к решению системы линейных уравнений для координат неизвестных векторов, которые аппроксимируют поверхностные токи в узлах, совпадающих с точками коллокации.

Целью работы является построение численного метода решения задачи дифракции электромагнитной волны на идеально проводящем теле малой толщины, основанного на переносе граничного условия на срединную поверхность тела и сведения задачи к граничным интегральным уравнениям.

При этом ставятся следующие **задачи**:

1. Для моделирования дифракции электромагнитной волны на идеально проводящем теле малой толщины сформулировать краевую задачу вне

- срединной поверхности тела, в которой исходная толщина и форма тела учитываются за счет постановки соответствующих граничных условий.
2. Свести краевую задачу к системе граничных интегральных уравнений относительно поверхностных токов.
 3. Построить численную схему решения возникших граничных интегральных уравнений.
 4. Протестировать построенный численный метод и оценить его работоспособности при моделировании рассеянного электромагнитного поля.

Научная новизна работы состоит в том, что для решения задачи дифракции электромагнитной волны на идеально проводящем теле малой толщины разработан новый приближенный подход, основанный на переносе граничного условия на срединную поверхность тела. При этом формулируется и решается новая краевая задача для уравнений электромагнитного поля вне этой поверхности, в которой мы пытаемся учесть исходную форму тела путем постановки специальных граничных условий. Возникшая новая краевая задача сводится к системе граничных интегро-дифференциальных уравнений относительно неизвестных поверхностных токов. Специфика возникающих уравнений состоит в том, что они содержат интегралы с сильной особенностью и понимаются в смысле конечного значения по Адамара. Кроме того, уравнения содержат члены вне интеграла в виде дифференциальных операторов (поверхностная дивергенция от неизвестных токов). В диссертации построены новые квадратурные формулы для аппроксимации поверхностной дивергенции касательного векторного поля. Разработана численная схема решения этих возникших интегро-дифференциальных уравнений.

Теоретическая значимость работы состоит в выводе и дискретизации системы граничных уравнений, аппроксимирующих рассматриваемую задачу, а также в разработке квадратурной формулы для вычисления поверхностной дивергенции.

Практическая значимость работы заключается в разработке математической модели, построении численной схемы и написании компьютерной программы для решения задачи рассеяния монохроматических электромагнитных волн на объектах малой толщины, которая может быть использована для определения радиофизических характеристик элементов конструкций при разработке современных летательных аппаратов.

Методология и методы исследования. Для построения вычислительной модели используется метод граничных интегральных уравнений, которые решаются методами кусочно-постоянных аппроксимаций и коллокации.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Разработка метода моделирования рассеяния монохроматической электромагнитной волны на идеально-проводящих телах, основанного на переносе граничного условия на срединную поверхность тела малой толщины и сведении задачи к граничным интегро-дифференциальным уравнениям с сильно сингулярными интегралами.
2. Построение численной схемы решения возникшей системы граничных интегро-дифференциальных уравнений с применением методов кусочно-постоянных аппроксимаций и коллокации.
3. Построение квадратурной формулы аппроксимации поверхностной дивергенции векторной функции, заданной на поверхности в узлах структурированной сетки.
4. Разработка комплекса программ, реализующих разработанный численный алгоритм предназначенного для численного решения задач рассеяния монохроматической электромагнитной волны на идеально-проводящих телах малой толщины.
5. Верификация разработанного метода, включающая анализ практической сходимости при сгущении расчетной сетки, сравнение электродинамических характеристик, получаемых предложенным методом с результатами решения задачи в исходной постановке для точной геометрии тел, а так же сравнение с данными физического эксперимента.

Достоверность результатов диссертации основана на применении строгого математического аппарата при сведении краевой задачи к системе граничных интегральных уравнений и построении численной схемы. Разработанный численный метод с переносом граничного условия на срединную поверхность апробирован на примере задачи дифракции электромагнитной волны на теле в виде прямоугольного крыла. Диаграммы рассеяния, полученные описанным методом, сравнивались с результатами, полученными для исходной задачи (когда граничные интегральные уравнения решались на исходной поверхности крыла), и с существующими экспериментальными данными.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих научных мероприятиях:

1. Международный авиационно-космический научно-гуманитарный семинар имени братьев Белоцерковских Сергея Михайловича и Олега Михайловича, ЦАГИ, г. Москва, 2018 г.
2. Научный семинар на факультете ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством проф. Захарова Е. В., г. Москва, 2018 г.
3. Всероссийская научно-техническая конференция АВИАДВИГАТЕЛИ XXI ВЕКА, г. Москва, 2015 г.
4. Ломоносовские чтения, МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, 2017 г.
5. Семнадцатая ежегодная научная конференция ИТПЭ РАН, ИТПЭ РАН, г. Москва, 2016 г.
6. Международная научная конференция Progress in Electromagnetic Research Symposium 2017, г. Санкт-Петербург, 2017 г.
7. Международная научная конференция Days on Diffraction, г. Санкт-Петербург, 2018 г.
8. Девятнадцатая ежегодная научная конференция ИТПЭ РАН, ИТПЭ РАН, г. Москва, 2018 г.
9. Международная научная конференция Progress in Electromagnetic Research Symposium 2018, Япония, г. Тояма, 2018 г.

Личный вклад. Все результаты исследования, изложенные в диссертационной работе, получены лично соискателем в процессе научной деятельности. В работе [63] проведено исследование сеточной сходимости решения задачи рассеяния электромагнитных волн на объектах малой толщины в прямой постановке. В [68] проведено исследование вычислительной эффективности прямого метода на объектах малой толщины по результатам физического эксперимента. В работе [69] проведена разработка метода снесения граничного условия на срединную поверхность, построена численная схема возникающих в этом методе граничных интегральных уравнений, а так же проведена верификация разработанного метода на результатах физического эксперимента.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 7 печатных работах [63]-[69], 3 из которых [63], [68], [69] входят в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание учёной степени кандидата наук, в том числе 2 работы [68], [69] входят в систему цитирования Web of Science или Scopus.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы. Полный объём диссертации составляет 89 страниц с 40 рисунками. Список литературы содержит 69 наименований.

В главе 1 дается постановка задачи рассеяния монохроматической электромагнитной волны на идеально проводящих объектах. Описаны сведение задачи к граничным интегральным уравнениям и известная численная схема решения этих уравнений с применением кусочнопостоянных аппроксимаций и коллокации. При этом анализируются пути повышения точности аппроксимации интегральных операторов в рамках решения исходной задачи рассеяния на телах малой толщины.

В главе 2 дается постановка задачи со снесением граничного условия на срединную поверхность, сведение этой задачи к граничному интегральному уравнению и построение численной схемы решения задачи.

В главе 3 дается информация по программной реализации разработанного метода.

В главе 4 приводятся результаты тестирования вычислительных моделей. Во-первых, для задачи рассеяния электромагнитной волны на крыле конечного размаха получены решения в исходной постановке, при простой замене крыла срединной поверхностью без учета телесности и предложенным методом аппроксимации крыла срединной поверхностью со снесением граничного условия. При этом во всех трех случаях получены решения на разных вычислительных сетках для сравнительного анализа скорости сходимости численных схем в этих моделях. Во-вторых, проводится сравнение результатов получаемых по этим моделям между собой, а также с результатами физического эксперимента. При этом ищутся диапазоны углов облучения, при которых толщина тела является существенной, и анализируется возможность учета реальной исходной формы крыла при применении предложенного метода снесения граничного условия на срединную поверхность.

В заключении приводятся основные выводы по работе.

Глава 1. Модель рассеяния электромагнитных волн на идеально проводящих объектах

1.1 Постановка задачи

Рассматривается классическая задача рассеяния электромагнитных волн на идеально проводящем объекте. Объект может быть представлен как тело, ограниченное замкнутой поверхностью, так и тонким экраном. Задача решается при следующих предположениях:

- окружающая среда однородная, изотропная;
- падающая волна монохроматическая;
- на объектах и в среде отсутствуют источники электрических зарядов.

В ходе решения задачи ищутся распределения напряженностей электрического и магнитного полей вне исследуемого объекта, а так же эффективная поверхность рассеяния.

Состояние электромагнитного поля описывается нестационарными уравнениями Максвелла, которые связывают распределения напряженностей электрического и магнитного полей $\vec{E} = \vec{E}(x,t)$ и $\vec{H} = \vec{H}(x,t)$ и полей электрической и магнитной индукций $\vec{D} = \vec{D}(x,t)$ и $\vec{B} = \vec{B}(x,t)$, где t - время $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \subset R^3$ - точки пространства:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \rho, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

здесь ρ – плотность распределения электрических зарядов, \vec{j} – плотность электрических токов.

Предполагаем, что векторы напряженностей электрического и магнитного полей и векторы индукций электрического и магнитного полей связаны соотно-

шениями соответствующими линейной модели однородной изотропной среды:

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}, \\ \vec{B} &= \mu \mu_0 \vec{H},\end{aligned}\tag{1.2}$$

где $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная, $\varepsilon_0 = 1/(\mu_0 c_0^2)$ – электрическая постоянная, $c_0 = 2997922458$ м/с – скорость света в вакууме, ε – относительная диэлектрическая проницаемость среды, μ – относительная магнитная проницаемость среды. Считая, что вне тел в окружающей среде токи и заряды отсутствуют, уравнения Максвелла можно переписать в виде системы уравнений для напряженностей электрического и магнитного полей:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0,\tag{1.3}$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0,\tag{1.4}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},\tag{1.5}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},\tag{1.6}$$

В монохроматическом случае ищется решение уравнений (1.3-1.6), с гармонической зависимостью от времени вида:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}(x) e^{-i\omega t}, \\ \vec{H} &= \vec{H}(x) e^{-i\omega t},\end{aligned}\tag{1.7}$$

где ω – круговая частота, которая связана с частотой колебаний ν , измеряемой в Герцах, соотношением $\omega = 2\pi\nu$

Подставляя выражения (1.7) в уравнения (1.5-1.6), получим следующую связь между функциями $\vec{E}(x)$, $\vec{H}(x)$:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{E} &= i\omega \mu \mu_0 \vec{H}, \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= -i\omega \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E},\end{aligned}\tag{1.8}$$

Таким образом, монохроматическое электромагнитное поле описывается уравнениями (1.8), которые равносильны уравнениям Максвелла для электрического и магнитного полей вида (1.7).

Также заметим, что уравнения (1.8) можно свести к уравнениям относительно одного из полей. Так, подставляя первое выражение из (1.8) в уравнение (1.6), получим:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \omega^2 \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \vec{E},$$

Используя формулу векторного анализа:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{F} = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{F}) - \Delta \vec{F}, \quad (1.9)$$

и учитывая уравнение (1.3), получаем:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \vec{E} &= 0, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где

$$k = \frac{\omega}{c}, c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon \mu}},$$

где k – волновое число, c – скорость света в данной среде.

Теперь пусть в окружающую среду помещено одно или несколько идеально проводящих тел, суммарную поверхность которых обозначим Σ . При этом поверхность Σ может содержать замкнутые компоненты, являющиеся поверхностью телесных объектов, и разомкнутые компоненты, которые моделируют тонкие тела (экраны). Ω – область пространства вне объектов. В монохроматическом случае ищутся распределения напряженностей электрического и магнитного полей вне облучаемых тел $\vec{E}^*(x, t)$ и $\vec{H}^*(x, t)$ соответственно:

$$\begin{aligned} \vec{E}^*(x, t) &= \vec{E}_{tot}(x) e^{-i\omega t}, \\ \vec{H}^*(x, t) &= \vec{H}_{tot}(x) e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где $\vec{E}_{tot}(x, t)$, $\vec{H}_{tot}(x, t)$ – пространственные составляющие полных электрического и магнитного полей. Предполагается, что полное поле индуцировано первичным (падающим) полем, в котором напряженности имеют вид:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{inc}(x) e^{-i\omega t}, \\ \vec{H}_{inc}(x) e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

соответственно. При этом пространственные составляющие напряженностей полных электрического и магнитного полей ищем в виде:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{tot}(x) &= \vec{E}_{inc}(x) + \vec{E}(x), \\ \vec{H}_{tot}(x) &= \vec{H}_{inc}(x) + \vec{H}(x), \end{aligned} \quad (1.13)$$

где $\vec{E}(x)$, $\vec{H}(x)$ – неизвестные напряженности вторичных электрического и магнитного полей, которые должны удовлетворять уравнениям Максвелла (1.8)

Так же должны выполняться условия излучения Зоммерфельда на бесконечности:

$$\begin{cases} E(x) \rightarrow 0, H(x) \rightarrow 0, \\ \frac{\partial E}{\partial \tau} + ikE = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \frac{\partial H}{\partial \tau} + ikH = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \end{cases} \quad |x| \rightarrow \infty \quad (1.14)$$

где $\partial/\partial\tau$ - производная по направлению вектора $\vec{\tau} = x/|x|$, и условие Майксона:

$$\begin{aligned} \int_D (\nabla \vec{E})^2 dv &< \infty, \\ \int_D (\nabla \vec{H})^2 dv &< \infty, \end{aligned} \quad (1.15)$$

для любой ограниченной области D , лежащей вне тела, dv - элемент объема пространства.

На поверхности исследуемого объекта Σ должно выполняться условие равенства нулю касательной компоненты полного электрического поля, что с учетом (1.13) даёт в результате граничное условие:

$$\vec{n} \times \vec{E} = -\vec{n} \times \vec{E}_{inc}, \quad (1.16)$$

где \vec{n} - единичный вектор нормали к поверхности Σ .

Таким образом, с математической точки зрения, решается краевая задача для уравнений (1.8) относительно напряженностей электрического и магнитного полей, с граничным условием (1.16) и выполнением условий (1.14) и (1.15).

В дальнейшем будем предполагать, что окружающая среда удовлетворяет условию $\mu = \epsilon = 1$ (при этом скорость света в среде совпадает со скоростью света в вакууме).

1.2 Сведение задачи к граничному интегральному уравнению

В теории электромагнитных волн вводятся векторный $\vec{A} = \vec{A}(x,t)$ и скалярный $\varphi = \varphi(x,t)$ потенциалы, через которые выражаются напряженности

электрического и магнитного полей по формулам:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -grad\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \\ \vec{H} &= \frac{1}{\mu\mu_0} rot\vec{A},\end{aligned}\tag{1.17}$$

Скалярный и векторный потенциалы свяжем условием калибровки (условие калибровки Лоренца):

$$div\vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,\tag{1.18}$$

Тогда уравнения (1.3) и (1.5) выполнены автоматически.

Далее, с одной стороны, из соотношений (1.17) имеем:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -grad\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = c^2 grad(div\vec{A}) - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2},\tag{1.19}$$

С другой стороны, из уравнения (1.6)

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} rot\vec{H} = c^2 rot rot\vec{A},\tag{1.20}$$

Из последних двух выражений можем записать:

$$c^2 rot rot\vec{A} = c^2 grad(div\vec{A}) - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2},\tag{1.21}$$

Используя формулу (1.9), получаем:

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0,\tag{1.22}$$

Теперь пусть мы решаем задачу с гармонической зависимостью по времени. Будем искать потенциал \vec{A} в виде:

$$\vec{A}(M,t) = \vec{A}_\omega(M)e^{-i\omega t},$$

Тогда, считая, что электрическое поле имеет вид (1.10), из выражения (1.7) получаем равенство:

$$-i\omega\vec{E}e^{-i\omega t} = e^{-i\omega t} c^2 rot rot\vec{A}_\omega,$$

откуда:

$$\vec{E} = \frac{ic^2}{\omega} rot rot\vec{A}_\omega,\tag{1.23}$$

Кроме того, уравнение (1.22), с учётом (1.20), переписывается в виде:

$$\Delta \vec{A}_\omega + k^2 \vec{A}_\omega = 0, \quad (1.24)$$

Для любой точки y частным решением уравнения (1.24) при $x \neq y$ является функция:

$$\vec{A}_\omega(x) = \vec{j} \Phi(x - y), \quad (1.25)$$

где

$$\Phi(x - y) = \frac{e^{ikr}}{r}, \quad r = |x - y|, \quad \vec{j} - \text{произвольный вектор}, \quad (1.26)$$

Если теперь Σ есть некоторая поверхность и $\vec{j}(y)$ – векторная функция, заданная на поверхности Σ , то функция

$$\vec{A}_\omega(x) = -\frac{i\omega}{c^2} \int_{\Sigma} \vec{j}(y) \Phi(x - y) d\sigma_y, \quad (1.27)$$

является решением уравнения (1.24) вне поверхности Σ .

При этом электрическое поле \vec{E} можно представить в виде:

$$\vec{E}(x) = \text{rot rot} \left(\int_{\Sigma} \vec{j}(y) \Phi(x - y) d\sigma_y \right), \quad (1.28)$$

Для любой скалярной функции $\varphi = \varphi(x)$ и постоянного вектора \vec{j} можем записать:

$$\text{rot rot}(\vec{j}\varphi) = \text{grad}(\text{div}(\vec{j}\varphi)) - \vec{j}\Delta\varphi, \quad (1.29)$$

Тогда

$$\vec{E}(x) = \text{grad div} \left(\int_{\Sigma} \vec{j}(y) \Phi(x - y) d\sigma_y \right) - \Delta \left(\int_{\Sigma} \vec{j}(y) \Phi(x - y) d\sigma_y \right), \quad (1.30)$$

Заметим, что при каждом y функция $\Phi(x - y)$, как функция от переменной x удовлетворяет при $x \neq y$ уравнению:

$$\Delta\Phi(x - y) + k^2\Phi(x - y) = 0, \quad (1.31)$$

Поэтому

$$\vec{E}(x) = \text{grad div} \int_{\Sigma} \vec{j}(y) \Phi(x - y) d\sigma_y + k^2 \int_{\Sigma} \vec{j}(y) \Phi(x - y) d\sigma_y, \quad (1.32)$$

Далее, заметим, что

$$\operatorname{div}(\vec{j}\varphi) = \vec{j}\operatorname{grad}\varphi, \quad (1.33)$$

Используя формулу

$$\operatorname{grad}(\vec{f}) = (\vec{f}\nabla)\vec{g} + (\vec{g}\nabla)\vec{f} + \vec{f} \times \operatorname{rot} \vec{g} + \vec{g} \times \operatorname{rot} \vec{f}, \quad (1.34)$$

можем записать

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div}(\vec{d}\varphi)) = \operatorname{grad}(\vec{d}\operatorname{grad}\varphi) = (\vec{d}\nabla)\operatorname{grad}\varphi, \quad (1.35)$$

Поэтому, выражение (1.30) можно также переписать в виде:

$$\vec{E}(x) = \int_{\Sigma} (\vec{j}(y)\nabla_x)\nabla_x\Phi(x-y)d\sigma_y + k^2 \int_{\Sigma} \vec{j}(y)\Phi(x-y)d\sigma_y, \quad (1.36)$$

Таким образом, неизвестную напряженность вторичного электрического поля будем искать, используя известное интегральное представление:

$$\vec{E}(x) = K[\Sigma, \vec{j}](x), \quad (1.37)$$

где $\vec{j} = \vec{j}(x)$, $x \in \Sigma$ - неизвестное векторное поле на поверхности Σ , направленное в каждой точке $x \in \Sigma$ по касательной к поверхности (поверхностные токи),

$$K[\Sigma, \vec{j}](x) = \int_{\Sigma} \{\operatorname{grad}_x \operatorname{div}_x [\vec{j}(y)\Phi(x-y)] + k^2 \vec{j}(y)\Phi(x-y)\} d\sigma_y, x \in \Omega, \quad (1.38)$$

где $k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$, Φ - функция Грина скалярного уравнения Гельмгольца.

Подставляя неизвестное поле $\vec{E}(x)$ в граничное условие (1.16), получается граничное интегральное уравнение с гиперсингулярным интегралом [27]:

$$\begin{aligned} \vec{n}(x) \times \int_{\Sigma} \{\operatorname{grad}_x \operatorname{div}_x [\vec{j}(y)\Phi(x-y)] + k^2 \vec{j}(y)\Phi(x-y)\} d\sigma_y = \\ = -\vec{n}(x) \times \vec{E}_{inc}(x), x \in \Sigma. \end{aligned} \quad (1.39)$$

1.3 Численная схема решения задачи

Для численного решения интегрального уравнения (1.39) используется метод коллокации с применением квадратурных формул типа прямоугольников на

основе значений неизвестной функции в узлах, совпадающих с точками коллокации. Суммарная поверхность Σ аппроксимируется системой ячеек $\sigma_i, i = 1, \dots, n$, края которых есть пространственные четырехугольники. На каждом таком четырехугольнике выбирается точка коллокации x_i , как центр тяжести вершин ячейки (в предположении, что все вершины имеют равную массу), и строится орт вектора нормали \vec{n}_i как вектор, ортогональный диагоналям ячейки:

$$x_i = \frac{(a_i + b_i + c_i + d_i)}{4},$$

где a_i, b_i, c_i, d_i – вершины ячейки. Далее на каждой ячейке строится локальная ортонормированная система координат с векторами:

$$\vec{e}_i^{1'} = \frac{(b_i + d_i - a_i - c_i)}{2}, \vec{e}_i^1 = \frac{\vec{e}_i^{1'}}{|\vec{e}_i^{1'}|} \text{ и } \vec{e}_i^2 = \vec{n}_i \times \vec{e}_i^1,$$

лежащими в касательной плоскости к поверхности (плоскости, ортогональной вектору \vec{n}_i). Направление вектора \vec{e}_{i1} выбирается произвольно в указанной плоскости. Векторы \vec{e}_i^1, \vec{e}_i^2 и \vec{n}_i образуют правую тройку векторов.

Используемые квадратурные формулы, полученные в работе [59], основаны на выделении в явном виде гиперсингулярной части в интегральном операторе $K[\Sigma, \vec{j}]$, определяемом формулой (1.38). Этот оператор представляется в виде:

$$\begin{aligned} K[\Sigma, \vec{j}] &= K^0[\Sigma, \vec{j}] + K^1[\Sigma, \vec{j}], \\ K^k[\Sigma, \vec{j}] &= \int_{\Sigma} \vec{e}^k(x, y, \vec{j}) d\sigma_y, \quad k = 0, 1, \\ \vec{e}^0(x, y, \vec{j}(y)) &= \frac{-\vec{j} + 3\vec{r}(\vec{r}, \vec{j})}{R^3}, \\ \vec{e}^1(x, y, \vec{j}(y)) &= (\vec{j} - 3\vec{r}(\vec{r}, \vec{j})) \frac{1 - e^{ikR} + ikR e^{ikR}}{R^3} + \\ &\quad + (\vec{j} - \vec{r}(\vec{r}, \vec{j})) \frac{k^2 e^{ikR}}{R}, \end{aligned} \tag{1.40}$$

где $R = |x - y|$, $\vec{r} = (x - y)/R$. При этом функция $e^1(x, y, \vec{j}(y))$ имеет при $x \rightarrow y$ особенность порядка $O(1/R)$ и интеграл в формуле (1.40) для $K^1[\Sigma, \vec{j}]$ является несобственным абсолютно сходящимся при $x \in \Sigma$.

Будем искать векторы \vec{j}_i , являющиеся приближенными значениями неизвестной функции \vec{j} в точках коллокации $x_i, i = 1, \dots, n$. Для аппроксимации

гиперсингулярного интеграла $K^0[\Sigma, \vec{j}]$ функция \vec{j} аппроксимируется на каждой ячейке разбиения поверхности функцией:

$$\vec{j}_i^*(y) = (\vec{j}_i \times \vec{n}_i) \times \vec{n}(y), y \in \sigma_i. \quad (1.41)$$

Интеграл от такой функции по ячейке был сведен Г. В. Рыжаковым к контурному интегралу [59]:

$$K^0[\sigma_i, \vec{j}_i^*](x) = \int_{\sigma_i} e^0(x, y, \vec{j}_i^*(y)) d\sigma_y = \text{grad} \oint_{\partial\sigma_i} \frac{1}{|x - y|} (\vec{n}(y) \times \vec{j}_i^*(y), \vec{\tau}(y)) ds_y, \quad (1.42)$$

причем, в случае, когда контур $\partial\sigma_i$ - край ячейки σ_i , является ломаной, последний интеграл в формуле (1.42) для величины $K^0[\sigma_i, \vec{j}_i^*](x)$ был найден аналитически [59]. Пусть отрезок $[AB]$ есть одно из звеньев ломаной $\partial\sigma_i$. Тогда на отрезке $[AB]$ выполнено равенство:

$$(\vec{n}(y) \times \vec{j}_i^*(y), \vec{\tau}(y)) = (\vec{j}_i \times \vec{n}_i, \vec{\tau}_{AB}), \vec{\tau} = \overline{AB} / |\overline{AB}|, y \in [AB],$$

и

$$\text{grad} \int_L \frac{1}{|x - y|} (\vec{n}(y) \times \vec{j}_i^*(y), \vec{\tau}(y)) ds_N = (\vec{j}_i \times \vec{n}_i, \vec{\tau}_{AB}) \text{grad} \int_L \frac{1}{|x - y|} ds_N,$$

$$\text{grad} \int_L \frac{1}{|x - y|} ds_N = \left(\frac{x - a}{|x - a|} + \frac{x - b}{|x - b|} \right) \frac{|b - a|}{(x - a, x - b) + |x - a| |x - b|},$$

Для аппроксимации интеграла $K^1[\Sigma, \vec{j}]$ в работе [59] функция \vec{j} на каждой ячейке разбиения σ_i аппроксимировалась постоянным значением \vec{j}_i , интеграл по ячейке разбиения представлялся в виде:

$$K^1[\sigma_i, \vec{j}_i](x) = \int_{\sigma_i} e^1(x, y, \vec{j}_i) d\sigma_y, \quad (1.43)$$

Для приближенного вычисления последнего интеграла по ячейке в точке x , являющейся точкой коллокации, использовалась приближенная формула с переходом в полярные координаты с центром в точке x и вычислением подынтегральной функции один раз для значения $y = x_i$.

Теперь для нахождения неизвестных $\vec{j}_i \approx \vec{j}(x_i)$, $i = 1, \dots, n$, заменим интеграл в уравнении (1.16) описанной квадратурной формулой и потребуем

выполнения уравнения (1.16) в узлах коллокации. В итоге получим систему операторных уравнений:

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} \vec{j}_j = \vec{f}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.44)$$

где $\vec{f}_i = f(x_i)$,

$$A_{ij} \vec{j}_j = \frac{i}{\omega \varepsilon_0} \vec{n}_i \times K[\sigma_j, \vec{j}_j](x_i), \quad K[\sigma_j, \vec{j}_j](x) = K^0[\sigma_j, \vec{j}_j^*](x) + K^1[\sigma_j, \vec{j}_j](x), \quad (1.45)$$

Систему операторных уравнений (1.44) можно переписать в виде системы линейных алгебраических уравнений относительно координат векторов \vec{j}_i , $i = 1, \dots, n$, в локальных базисах, построенных на ячейках разбиения:

$$\vec{j}_j = j_j^1 \vec{e}_j^1 + j_j^2 \vec{e}_j^2, \quad (1.46)$$

Результат применения оператора A_{ij} к вектору \vec{j}_j представим в виде разложения в локальном базисе ячейки y_i :

$$A_{ij} \vec{j}_j = c_{ij}^1 \vec{e}_i^1 + c_{ij}^2 \vec{e}_i^2,$$

При этом столбец координат $(c_{ij}^1, c_{ij}^2)^T$ получается из столбца $(j_j^1, j_j^2)^T$ линейным преобразованием:

$$\begin{pmatrix} c_{ij}^1 \\ c_{ij}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{ij}^{11} & a_{ij}^{12} \\ a_{ij}^{21} & a_{ij}^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_j^1 \\ j_j^2 \end{pmatrix},$$

в котором коэффициенты матрицы определяются выражением:

$$a_{ij}^{ml} = (A_{ij} \vec{e}_j^l, \vec{e}_i^m), \quad m, l = 1, 2, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (1.47)$$

Тогда система уравнений (1.44) записывается в виде системы из $2n$ линейных алгебраических уравнений относительно $2n$ комплексных неизвестных j_j^l , $l = 1, 2$, $j = 1, \dots, n$,

$$\sum_{\substack{j=1, \dots, n \\ l=1, 2}} a_{ij}^{ml} j_j^l = f_i^m, \quad i = 1, \dots, n, \quad m = 1, 2, \quad (1.48)$$

где $f_i^m = (\vec{f}_i, \vec{e}_i^m)$, $i = 1, n$, $m = 1, 2$.

Такой метод был описан в работе [59] и протестирован на примере некоторых модельных задач. Дальнейшее тестирование этого метода показало, что

даже при предположении, что на всей ячейке σ_i поверхностный ток имеет постоянное значение \vec{j}_i , повышение точности вычисления интеграла (1.43) для функции $K^1[\sigma_i, \vec{j}_i](x)$ позволяет существенно повысить точность получаемых решений всей задачи. Повышения точности вычисления этого интеграла можно добиться за счет дополнительного разбиения каждой ячейки основного разбиения на более мелкие ячейки и применения на каждой ячейке основного разбиения квадратурных формул на измельченной сетке. В статье [60] были предложены квадратурные формулы типа прямоугольников для вычисления интегралов со слабой особенностью вида (1.43) и получены теоретические оценки их точности. Такой подход был апробирован для задачи рассеяния скалярных волн, которая сводилась к гиперсингулярному интегральному уравнению [4; 19].

1.4 Аппроксимация слабосингулярных интегралов.

При наборе матрицы системы линейных уравнений (1.48) по формулам (1.47) возникает необходимость вычисления каждой координаты векторов $K^1[\sigma_j, \vec{e}_j^l](x_i)$, $l = 1, 2$ и $i, j = 1, \dots, n$, где $x_i \in \Sigma$, определяемых формулой (1.43). При этом каждый раз возникает интеграл вида:

$$u(x) = \int_{\sigma_i} K(x, y) d\sigma_y, \quad x \in \Sigma, \quad (1.49)$$

где $K(x, y)$ - некоторое ядро, представляющееся в виде:

$$K(x, y) = \sum_{\beta=1,2,3} K_\beta(x, y), \quad K_\beta(x, y) = \frac{K_\beta^*(x, y)}{|x - y|^\beta} \quad (1.50)$$

$$K_\beta^*(x, y) \in C^1(\Sigma), \quad \beta = 1, 2, 3,$$

$$|K_\beta^*(x, y)| \leq O(|x - y|^{\beta-1}) \text{ при } \beta = 2, 3,$$

$$\left| \frac{\partial K_3^*(x, y)}{\partial y_i} \right| \leq O(|x - y|), \quad i = 1, 2, 3$$

Приближенно интегралы вида (1.49) предлагается вычислять по формулам типа прямоугольников с доразбиением ячеек σ_i и сглаживанием особенности в ядре $K(x, y)$. Разобьем дополнительно каждую ячейку σ_i на более мелкие

ячейки σ_i^p , $p = 1, \dots, P$. Пусть h' – максимальный из диаметров разбиения ячеек σ_i^p , $p = 1, \dots, P$, $i = 1, \dots, n$. Положим:

$$\tilde{u}(x) = \sum_{p=1}^P K_\varepsilon(x, x_i^p) s_i^p, \quad K_\varepsilon(x, y) = K(x, y) \theta_\varepsilon(|x - y|), \quad (1.51)$$

где s_i^p – площадь ячейки σ_i^p , $x_i^p \in \sigma_i^p$ – узлы, выбираемые по одному на каждой ячейке, $\theta_\varepsilon(r)$ – сглаживающая функция, выбираемая так, что

$$\theta_\varepsilon(r) \in C^1[0, \infty), \quad \theta_\varepsilon(r) = 1 \text{ при } r \geq \varepsilon, \quad 0 \leq \theta_\varepsilon(r) \leq C_0 r / \varepsilon \text{ при } 0 \leq r \leq \varepsilon,$$

C_0 – константа, не зависящая от r и ε , где ε – малый параметр. При реализации данной схемы эта функция бралась в виде

$$\theta_\varepsilon(r) = 3(r/\varepsilon)^2 - 2(r/\varepsilon)^3,$$

при $0 \leq r \leq \varepsilon$. При этом параметр ε в расчетах, приведенных далее, выбирается как $\varepsilon = 2h'$. Доразбиение ячеек основного разбиения σ_i на более мелкие ячейки и построение узлов x_i^p осуществлялось по схеме, описанной в статье [4].

1.5 Нахождение диаграмм рассеяния.

В приводимых ниже примерах рассматривается задача дифракции на идеально проводящих телах плоской волны. В этом случае первичное поле имеет вид:

$$\vec{E}_{inc}(x) = \vec{E}_0 e^{i\vec{k}\vec{r}}, \quad \vec{H}_{inc}(M) = \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{\omega\mu} \vec{k} \times \vec{E}_0, \quad (1.52)$$

где \vec{k} – волновой вектор (при этом $|\vec{k}| = k$), \vec{r} – радиус-вектор точки x , \vec{E}_0 – заданный вектор, ортогональный вектору \vec{k} (вектор \vec{E}_0 определяет поляризацию). Важной характеристикой первичного поля является длина волны λ , для которой при последнем предположении справедливj выражений

$$\lambda = 2\pi/k = 2\pi c/\omega,$$

Основной исследуемой характеристикой является диаграмма направленности вторичного поля. Эта диаграмма характеризует зависимость эффективной площади рассеяния σ (ЭПР) в направлении заданного единичного вектора

$\vec{\tau}$, определяемой формулой:

$$\sigma(\vec{\tau}) = \lim_{R \rightarrow \infty} 4\pi R^2 \frac{|E(R\vec{\tau})|^2}{|E_{inc}|^2}, \quad (1.53)$$

от направления вектора $\vec{\tau}$.

Пусть $x \in \Omega$, $R = |x|$, $\tau = x/R$. Рассмотрим выражение в правой части выражения (1.37) при $R \rightarrow \infty$. Оператор $K[\Sigma, \vec{j}]$ можно переписать в виде:

$$K[\Sigma, \vec{j}](x) = \int_{\Sigma} e^{ikr} \left[\vec{j} \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{ik}{r^2} + \frac{k^2}{r} \right) + \frac{\vec{r}(\vec{r}, \vec{j})}{r^2} \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3ik}{r^2} - \frac{k^2}{r} \right) \right] d\sigma_y,$$

где $\vec{r} = x - y$, $r = |x - y|$, $\vec{j} = \vec{j}(y)$. При этом $\vec{r} = R\tau - y$ и следующие предельные переходы выполнены при $R \rightarrow \infty$ в смысле равномерной сходимости по $y \in \Sigma$:

$$\frac{\vec{r}}{R} = \tau - \frac{y}{R} \rightarrow \tau, \quad \frac{r}{R} = \left| \tau - \frac{y}{R} \right| \rightarrow 1,$$

Тогда

$$\begin{aligned} e^{ikr} &= e^{ik|\tau R - y|} = \exp \left(ikR \sqrt{\left(\tau - \frac{y}{R} \right)^2} \right) = \\ &= \exp \left(ikR \sqrt{1 - 2\frac{(\tau, y)}{R} + \frac{y^2}{R^2}} \right) = \\ &= \exp \left(ikR \left(1 - \frac{(\tau, y)}{R} \right) + o\left(\frac{1}{R}\right) \right), \end{aligned}$$

Тогда

$$e^{ikr} = e^{ikR} e^{-ik(\tau, y)} + o\left(\frac{1}{R}\right),$$

И можем записать:

$$K[\Sigma, \vec{j}](x) = \frac{1}{R} \int_{\Sigma} e^{ikR} e^{-ik(\tau, y)} k^2 \left(\vec{j} - \tau(\vec{j}, \tau) \right) d\sigma_y + o\left(\frac{1}{R}\right),$$

и

$$E(x) = \frac{e^{ikR}}{R} \int_{\Sigma} \left(\frac{i}{\omega \varepsilon} k(\vec{j} - \tau(\vec{j}, \tau)) \right) d\sigma_y + o\left(\frac{1}{R}\right),$$

Из последней формулы следует окончательное выражение для эффективной площади рассеяния:

$$\sigma(\tau) = \frac{4\pi}{|E_{inc}|^2} k^2 \left| \int_{\Sigma} \frac{i}{\omega \varepsilon} e^{-ik(\tau, y)} \left(\vec{j}_E - \vec{\tau}(\vec{j}(y), \vec{\tau}) \right) d\sigma_y \right|^2,$$

При численном решении используем приближенную формулу:

$$\sigma(\tau) = \frac{4\pi}{|E_{inc}|^2} \left| \sum_{j:\sigma_j \in \Sigma_1} e^{-ik(\vec{\tau}, x_j)} \frac{i}{\omega \varepsilon} k^2 \left(\vec{j}_j - \vec{\tau} \left(\vec{j}_j, \vec{\tau} \right) \right) |\sigma_j| \right|^2. \quad (1.54)$$

Глава 2. Метод снесения граничного условия на срединную поверхность

2.1 Специфика задачи рассеяния на тонких объектах

В случае, когда метод граничных интегральных уравнений применяется для решения внешних краевых задач вне тел малой толщины возникает целый ряд специфических проблем. Под телом малой толщины мы понимаем объект, граница которого состоит из двух частей – условно верхней и нижней поверхностей, которые находятся на малом расстоянии друг от друга. Если записывать интегральное уравнение на границе такого тела, то возникают интегралы по этим близким поверхностям. Ядро интегрального уравнения, описывающее взаимодействие точки источника и точки приемника, лежащих на граничной поверхности, обычно имеет особенность при уменьшении расстояния между этими точками. При стремлении толщины тела к нулю интегральные уравнения вырождаются.

Существенную проблему с точки зрения анализа интегральных уравнений представляет и наличие кромок у таких тел – на кромках решение интегрального уравнения может иметь особенности. Теоретический анализ граничных интегральных уравнений на телах с ребрами существенно сложнее, чем на гладких поверхностях.

При численном решении граничных интегральных уравнений поверхности тел обычно разбиваются на ячейки, количество которых в общем то и определяет вычислительную сложность задачи. В случае тел малой толщины размер ячеек разбиения лимитируется требованием малости этого размера по сравнению с толщиной тела. Еще одним лимитирующим фактором является наличие гладких кромок малого радиуса кривизны. Разбиение тела должно строиться таким образом, чтобы ячейки хорошо аппроксимировали закругление кромки. А значит, шаг сетки должен быть малым по сравнению с радиусом закругления кромок. Наконец, является типичным рост погрешности решения в окрестности острых кромок. Все это приводит к тому, что для получения приемлемых численных решений приходится использовать очень мелкие расчетные сетки.

Для преодоления указанных трудностей во многих задачах пренебрегают толщиной тела, заменяя его тонкой поверхностью. При этом возникает краевая задача на экране. Однако полное пренебрежение толщиной тела не всегда позволяет правильно учесть все физические эффекты. Так в аэродинамике в задаче об обтекании крыла конечного размаха идеальной несжимаемой жидкостью при замене крыла тонкой срединной поверхностью и рассмотрении задачи об обтекании такой поверхности удается правильно рассчитать суммарные силы, действующие на крыло, но не удается рассчитать распределение давления по поверхности крыла.

В задачах аэродинамики крыла был развит подход к приближенному учету толщины крыла путем снесения граничного условия на срединную поверхность [47]. В этом подходе крыло заменялось срединной поверхностью, вне которой ставилась внешняя краевая задача. При записи условия о равенстве нулю нормальной компоненты скорости на верхней и нижней сторонах срединной поверхности использовались векторы нормали, перенесенные с соответствующих частей (верхней и нижней) реальной поверхности. Далее эта краевая задача вне этой поверхности решалась методом граничных интегральных уравнений. Было показано, что подход позволяет получить распределение давления по поверхности крыла, причем расчеты можно проводить на более грубых сетках, чем при решении исходной краевой задачи на точной поверхности крыла.

В настоящей работе аналогичный подход предлагается применить к решению задачи о моделировании рассеяния монохроматического электромагнитного поля на идеально проводящем теле малой толщины.

2.2 Постановка задачи на срединной поверхности со снесением граничного условия

Рассмотрим случай, когда облучаемое тело имеет малую толщину (см. рисунок 2.1).

Предположим, что поверхность рассматриваемого тела Σ имеет следующую структуру. Пусть Σ_0 — некоторая заданная гладкая разомкнутая ориентированная поверхность с краем $\partial\Sigma_0$. Предположим, что поверхность Σ

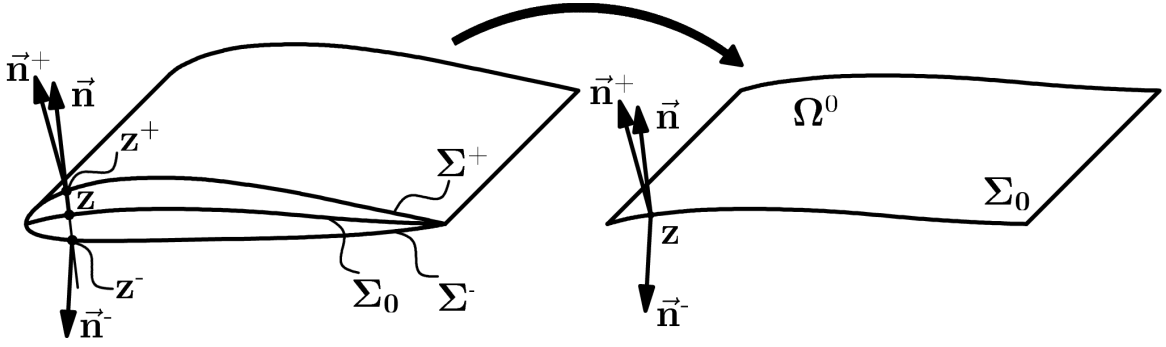


Рисунок 2.1 — Постановка задачи для случая тела малой толщины.

состоит из двух частей Σ^+ и Σ^- , каждая из которых образована следующими множествами точек соответственно:

$$z^+ = z + \frac{1}{2}\lambda(z)\vec{n}(z) \text{ и } z^- = z - \frac{1}{2}\lambda(z)\vec{n}(z), z \in \Sigma_0, \quad (2.1)$$

где $\vec{n}(z)$ — орт вектора положительной нормали к поверхности Σ_0 в точке z , $\lambda(z)$ — заданная функция на поверхности Σ_0 , удовлетворяющая условиям $\lambda(z) \geq 0$ на всей поверхности Σ_0 , $\lambda(z) = 0$ на краю поверхности Σ_0 . При этом подразумевается, что значения функции $\lambda(z)$ много меньше, чем диаметр поверхности Σ_0 (как множества точек). Поверхность Σ_0 будем называть серединной поверхностью для тела, ограниченного поверхностью Σ .

Для каждой точки $z \in \Sigma_0$ определим векторы $\vec{n}^+(z)$ и $\vec{n}^-(z)$, являющиеся ортами вектора нормали к поверхностям Σ^+ и Σ^- в точках $z^+(z)$ и $z^-(z)$, соответственно. При этом выберем векторы $\vec{n}^+(z)$ и $\vec{n}^-(z)$ так, чтобы они являлись векторами внешней нормали для поверхности Σ .

Пусть $\Omega_0 = R^3 \setminus \Sigma_0$ — область пространства вне экрана Σ_0 . Рассмотрим новую краевую задачу для уравнений Максвелла (1.3)-(1.6) в области Ω_0 с граничными условиями:

$$\vec{n}^\pm(z) \times \vec{E}^\pm(z) = -\vec{n}^\pm(z) \times \vec{E}_{inc}(z), z \in \Sigma_0^{in}, \quad (2.2)$$

$\Sigma_0^{in} = \Sigma_0 \setminus \partial\Sigma_0$, \vec{E}^+ и \vec{E}^- — краевые значения напряженности электрического поля на поверхности Σ_0 , \vec{E}_{inc} — как и ранее, напряженность первичного электрического поля. При этом, как и в исходной задаче, ставятся условие излучения (1.14) на бесконечности и условие (1.15) для любой ограниченной области $D \subset \Omega_0$.

Описанную краевую задачу с граничным условием (2.2) будем называть краевой задачей с граничным условием, снесенным на серединную поверхность.

2.3 Сведение задачи со снесенным граничным условием к интегральным уравнениям

Будем искать напряженность вторичного электрического поля в виде:

$$\vec{E}(x) = K[\Sigma_0, \vec{j}_E](x) + R[\Sigma_0, \vec{j}_M](x), \quad (2.3)$$

где $x \in \Omega_0$, $\vec{j}_E = \vec{j}_E(x)$, $\vec{j}_M = \vec{j}_M(x)$, $x \in \Sigma_0$ – неизвестные касательные комплексные векторные поля на поверхности Σ_0 , которые будем называть плотностями электрических и магнитных токов соответственно,

$$K[\Sigma_0, \vec{j}](x) = \int_{\Sigma_0} \vec{K}(\vec{j}(y), x, y) d\sigma_y, \quad (2.4)$$

$$\vec{K}(\vec{j}, x, y) = \{grad_x div_x [\vec{j} \Phi(x - y)] + k^2 \vec{j}(y) \Phi(x - y)\}, \quad (2.5)$$

$$R[\Sigma_0, \vec{j}](x) = \int_{\Sigma_0} \vec{R}(\vec{j}(y), x, y) d\sigma_y, \quad (2.6)$$

$$\vec{R}(\vec{j}, x, y) = grad_x \Phi(x - y) \times \vec{j}, \quad (2.7)$$

$$k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0, \Phi(x - y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{(ikr)}}{r}, r = |x - y|.$$

В формулах (2.4) и (2.6) \vec{j} есть касательное комплексное векторное поле, т.е. $\vec{j}(y) = (j^1(y), j^2(y), j^3(y))$, где $j^k(y)$, $k = 1, \dots, 3$, $y \in \Sigma_0$ – функции с комплексными значениями, определенные на поверхности Σ_0 , при каждом $y \in \Sigma_0$ вектор $\vec{j}(y)$ лежит в касательной плоскости к поверхности в точке y .

Заметим, что интегральное представление вида (2.3), в случае, когда поверхность Σ_0 является замкнутой и ограничивает некоторую область, возникают в формулах Стреттона-Чу, дающих выражение для электрического и магнитного полей через их краевые значения на поверхности Σ_0 ([18]). При этом как в случае замкнутой, так и в случае разомкнутой поверхности Σ_0 и при любых касательных полях $\vec{j}_E = \vec{j}_E(x)$, $\vec{j}_M = \vec{j}_M(x)$, заданных на этой поверхности, электрическое поле \vec{E} вида (2.3) и соответствующее ему магнитное поле $\vec{H} = rot \vec{E} / (i\omega \mu_0)$, удовлетворяют уравнениям Максвелла (1.3-1.6) вне поверхности Σ_0 и условиям (1.14) на бесконечности.

Вернемся к рассматриваемой поверхности Σ_0 . Рассмотрим свойства краевых значений векторного поля \vec{E} , определяемого формулой (2.3), на этой поверхности.

Предположим, что поверхность Σ_0 является гладкой поверхностью класса C^3 .

Пусть $\vec{E}_1 = K[\Sigma_0, \vec{j}]$, где \vec{j} — дважды непрерывно дифференцируемое комплексное касательное векторное поле на поверхности Σ_0 . В [59] доказано, что в каждой точке $x \in \Sigma_0^{in}$, где $\Sigma_0^{in} = \Sigma_0 \setminus \partial\Sigma_0$, существуют краевые значения \vec{E}_1^+ и \vec{E}_1^- поля \vec{E}_1 , для которых справедлива формула

$$\vec{E}_1^\pm(x) = \vec{E}_1(x) \mp \frac{1}{2} \vec{n}(x) \text{Div } \vec{j}(x), \quad x \in \Sigma_0^{in}, \quad (2.8)$$

где $\text{Div } \vec{j}(x)$ — поверхностная дивергенция векторного поля $\vec{j}(x)$, $\vec{E}_1(x)$ — прямое значение рассматриваемого векторного поля в точке $x \in \Sigma_0^{in}$, получаемое непосредственно из выражения (2.4), причем, возникающий интеграл следует понимать в смысле конечного значения по Адамару:

$$\vec{E}_1(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{\Sigma \setminus B(x, \varepsilon)} \vec{K}(\vec{j}(y), x, y) d\sigma_y - \frac{\vec{j}(x)}{2\varepsilon} \right),$$

$B(x, \varepsilon)$ — открытый шар радиуса ε с центром в точке x . Отметим, что поверхностная дивергенция может быть введена по формуле:

$$\text{Div } \vec{j}(x) = \lim_{h(\sigma) \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(\sigma)} \oint_{\partial\sigma} \left(\vec{n}(y) \times \vec{j}(y), \vec{\tau}(y) \right) ds, \quad x \in \Sigma^{in}, \quad (2.9)$$

где σ измеримая часть поверхности Σ , чья граница — гладкий контур $\partial\sigma$, $\mu(\sigma)$ — площадь соответствующего элемента, $h(\sigma)$ — диаметр элемента, $\vec{\tau}$ — касательный вектор на контуре $\partial\sigma$ такой, что если вектор \vec{n} направлен вверх, то поверхность элемента остается слева.

Далее, пусть $\vec{E}_2 = R[\Sigma_0, \vec{j}]$, где $\vec{j}(x)$ — непрерывное по Гельдеру комплексное касательное векторное поле на поверхности Σ_0 . Тогда поле \vec{E}_2 также имеет краевые значения в каждой точке $x \in \Sigma_0^{in}$, для которых справедлива формула [18]:

$$\vec{E}_2^\pm(x) = \vec{E}_2(x) \pm \frac{1}{2} \vec{j}(x) \times \vec{n}(x), \quad x \in \Sigma_0^{in}, \quad (2.10)$$

где $\vec{E}_2(x)$ — прямое значение, получаемое для данной точки из выражения (2.6), причем интеграл здесь является слабо сингулярным и сходится абсолютно. Вернемся к рассматриваемой краевой задаче со снесенными граничными условиями. Подставляя напряженность электрического поля в виде (2.3) в

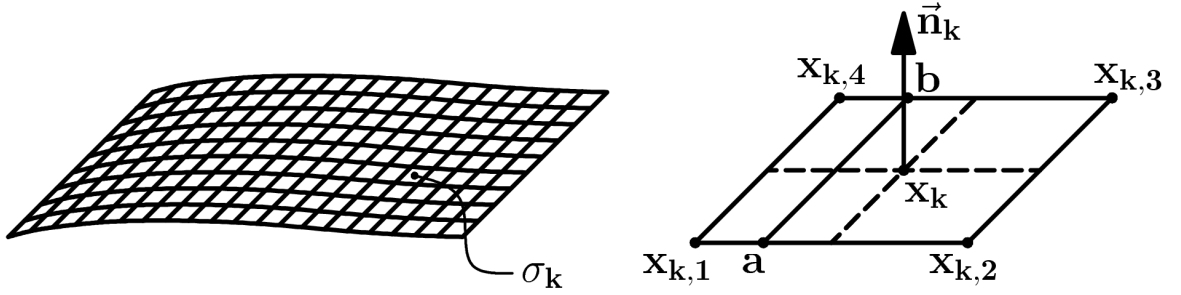


Рисунок 2.2 — Аппроксимация поверхности системой ячеек

граничные условия (2.2) и используя формулы (2.8) и (2.10), получаем два соотношения на поверхности Σ_0 :

$$\vec{n}^\pm \times K[\Sigma_0, \vec{j}_E] + \vec{n}^\pm \times R[\Sigma_0, \vec{j}_M] \mp \frac{1}{2} \text{Div } \vec{j}_E \vec{n}^\pm \times \vec{n} \pm \frac{1}{2} \vec{n}^\pm \times [\vec{j}_M \times \vec{n}] = -\vec{n}^\pm \times \vec{E}_{inc}.$$

Заметим, что данные соотношения являются интегральными уравнениями относительно неизвестных токов \vec{j}_E и \vec{j}_M , и их можно, также, переписать в виде:

$$\int_{\Sigma_0} \vec{n}^\pm(x) \times \vec{K}(\vec{j}_E(y), x, y) d\sigma_y + \int_{\Sigma_0} \vec{n}^\pm(x) \times \vec{R}(\vec{j}_M(y), x, y) d\sigma_y \mp \frac{1}{2} \text{Div } \vec{j}_E(x) \vec{n}^\pm(x) \times \vec{n}(x) \pm \frac{1}{2} \vec{n}^\pm(x) \times [\vec{j}_M(x) \times \vec{n}(x)] = f^\pm(x), x \in \Sigma_0^{in}, \quad (2.11)$$

$f^\pm(x) = -\vec{n}^\pm \times \vec{E}_{inc}(x)$. При этом первый интеграл понимается в смысле конечного значения по Адамару, второй интеграл как несобственный абсолютно сходящийся.

2.4 Разбиение поверхности и аппроксимация интегральных операторов

Для численного решения системы граничных интегральных уравнений (2.11) используется метод коллокации с применением квадратурных формул типа прямоугольников на основе значений неизвестной функции в узлах, совпадающих с точками коллокации.

Срединная поверхность Σ_0 аппроксимируется системой четырёхугольных ячеек σ_k , $k = 1, \dots, N$. Предполагаем, что объединение всех ячеек есть некоторая поверхность $\tilde{\Sigma}_0$ — приближение поверхности Σ_0 . Ячейки σ_k , $k = 1, \dots, N$, образуют на поверхности $\tilde{\Sigma}_0$ конформную сетку (две различные ячейки могут либо не пересекаться, либо иметь общую сторону или вершину).

Пусть $x_{k,m}$, $m = 1, \dots, 4$, — вершины ячейки σ_k , $k = 1, \dots, N$. Ниже строится численная схема, в которой вся информация о поверхности Σ_0 предполагается заложенной в координатах указанных точек $x_{k,m}$. Будем считать, что каждая ячейка σ_k образована семейством отрезков $[a,b]$, с концами:

$$a = \alpha x_{k,1} + (1 - \alpha) x_{k,2},$$

$$b = \beta x_{k,4} + (1 - \beta) x_{k,3},$$

$\alpha, \beta \in [0,1] \times [0,1]$ и что вершины ячеек лежат на поверхности Σ_0 . При этом край ячейки есть постространственный четырехугольник.

На каждой ячейке выберем точку коллокации:

$$x_k = \frac{(x_{k,1} + x_{k,2} + x_{k,3} + x_{k,4})}{4},$$

т.е. как центр параллелограмма с вершинами в серединах сторон ячейки, так же построим вектор \vec{n}_k — приближение вектора внешней нормали к поверхности на ячейке σ_k , как вектор, ортогональный указанному параллелограмму.

Далее на каждой ячейке строится локальная ортонормированная система координат с векторами $\vec{e}_{k,1}$ и $\vec{e}_{k,2} = \vec{n}_k \times \vec{e}_{k,1}$, лежащими в плоскости, ортогональной орту нормали \vec{n}_k (вектор $\vec{e}_{k,1}$ выбирается в плоскости, ортогональной вектору \vec{n}_k , произвольным образом). При этом векторы $\vec{e}_{k,1}$, $\vec{e}_{k,2}$, \vec{n}_k образуют правую тройку векторов.

Также, для каждой ячейки σ_k строятся векторы \vec{n}_k^+ и \vec{n}_k^- , аппроксимирующие значения векторных функций $\vec{n}^+(x)$ и $\vec{n}^-(x)$, соответственно, в точках этой ячейки. Это можно сделать, построив точки

$$x_{k,m}^\pm = z^\pm(x_{k,m}), \quad m = 1 \dots 4,$$

по формуле (2.1). Далее векторы \vec{n}_k^+ и \vec{n}_k^- строятся как векторы, ортогональные диагоналям образовавшихся ячеек на поверхностях Σ^+ и Σ^- с вершинами в построенных точках $x_{k,m}^\pm$.

Заметим, что при проведении реальных численных расчетов, обычно построение ячеек шло в обратном порядке. Если задана геометрия исходной поверхности тела Σ , то сначала эта поверхность разбивалась на компоненты Σ^+ и Σ^- , и осуществлялась аппроксимация этих компонент системами четырехугольных ячеек σ_k^\pm , $k = 1, \dots, N$, с вершинами $x_{k,m}^\pm \in \Sigma^\pm$, соответственно, $m = 1, \dots, 4$. Далее строились ячейки σ_k , $k = 1, \dots, N$, с вершинами

$$x_{k,m} = (x_{k,m}^+ + x_{k,m}^-)/2, \quad m = 1 \dots 4.$$

При таком способе аппроксимации поверхностей направление обхода вершин ячеек на поверхности Σ^- должно соответствовать внутренней нормали к поверхности Σ , однако, векторы \vec{n}_k^- строятся как векторы внешней нормали к этой поверхности (согласование направления обхода ячеек и вектора нормали указано в пояснении к формуле (2.9)).

Для аппроксимации операторов K и R , определяемых формулами (2.4) и (2.6), будем использовать квадратурные формулы, разработанные в статьях [59] и [60]. Пусть $\vec{j}(x)$, $x \in \Sigma_0$ – комплексное касательное векторное поле на срединной поверхности Σ_0 . На каждом участке поверхности Σ_0 , соответствующем ячейке σ_k , $k = 1, \dots, N$, будем аппроксимировать это поле одним значением \vec{j}_k .

Операторы $K[\Sigma_0, \vec{j}]$ и $R[\Sigma_0, \vec{j}]$ аппроксимируем выражениями

$$K[\Sigma_0, \vec{j}] \approx \sum_{k=1}^N \tilde{K}[\sigma_k, \vec{j}_k], \quad R[\Sigma_0, \vec{j}] \approx \sum_{k=1}^n \tilde{R}[\sigma_k, \vec{j}_k], \quad (2.12)$$

где $\tilde{K}[\sigma_k, \vec{j}_k]$ и $\tilde{R}[\sigma_k, \vec{j}_k]$ – приближения соответствующих интегралов по участку поверхности Σ_0 , аппроксимируемому ячейкой σ_k . Значение $\tilde{K}[\sigma_k, \vec{j}_k]$ вычисляется по формулам, основанным на выделении главной особенности в подынтегральном выражении, которые были предложены Рыжаковым Г.В. в статье [59]. Функция $\vec{K}(\vec{j}, x, y)$, определяемая выражением (2.5), представляется в виде:

$$\vec{K}(\vec{j}, x, y) = \vec{K}^0(\vec{j}, x, y) + \vec{K}^1(\vec{j}, x, y), \quad (2.13)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{K}^0(\vec{j}, x, y) &= \frac{-\vec{j} + 3\vec{r}(\vec{r}, \vec{j})}{4\pi R^3}, \\ \vec{K}^1(\vec{j}, x, y) &= (\vec{j} - 3\vec{r}(\vec{r}, \vec{j})) \frac{1 - e^{ikR} + ikR e^{ikR}}{4\pi R^3} + (\vec{j} - \vec{r}(\vec{r}, \vec{j})) \frac{k^2 e^{ikR}}{4\pi R}, \\ R &= |x - y|, \quad \vec{r} = (x - y)/R. \end{aligned}$$

При этом

$$\left| \vec{K}^0(\vec{j}, x, y) \right| \leq O(|x - y|^{-3}), \quad \left| \vec{K}^1(\vec{j}, x, y) \right| \leq O(|x - y|^{-1}).$$

Аппроксимация оператора $\tilde{K}^0[\sigma, \vec{j}]$ осуществляется по формулам, описанным в п. 1.3 (1.42)

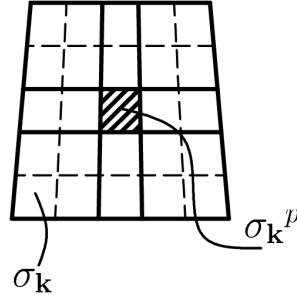


Рисунок 2.3 — Дополнительное разбиение ячейки

Для аппроксимации интегралов $\tilde{K}^1[\sigma_k, \vec{j}_k]$ и $\tilde{R}[\sigma_k, \vec{j}_k]$ по ячейке разбиения используется кусочно-постоянная аппроксимация тока значением \vec{j}_k на всей ячейке σ_k :

$$\tilde{K}^1[\sigma_k, \vec{j}_k](x) \approx \int_{\sigma_k} \vec{K}^1(\vec{j}_k, x, y) d\sigma_y, \quad \tilde{R}[\sigma_k, \vec{j}_k](x) \approx \int_{\sigma_k} \vec{R}(\vec{j}_k, x, y) d\sigma_y.$$

Возникшие интегралы по ячейкам вычисляются по формулам типа прямоугольников с доразбиением ячеек σ_k на более мелкие ячейки второго уровня и сглаживанием особенности в подынтегральном выражении, по схеме, описанной в статье [60] (см. рисунок 2.3). Разобьем дополнительно каждую ячейку σ_k на ячейки второго уровня σ_k^p , $p = 1, \dots, P_k$, и на каждой такой ячейке выберем точку коллокации $y_k^p \in \sigma_k^p$. Пусть h' — максимальный из диаметров ячеек σ_k^p , $p = 1, \dots, P_k$, $k = 1, \dots, N$. Положим:

$$\tilde{K}^1[\sigma_k, \vec{j}_k] = \sum_{p=1}^{P_k} \vec{K}_1(\vec{j}_k, x, y_k^p) \theta\left(\frac{|x - y_k^p|}{\varepsilon}\right) s_k^p, \quad (2.14)$$

$$\tilde{R}[\sigma_k, \vec{j}_k] = \sum_{p=1}^{P_k} \vec{R}(\vec{j}_k, x, y_k^p) \theta\left(\frac{|x - y_k^p|}{\varepsilon}\right) s_k^p,$$

где s_k^p — площадь ячейки σ_k^p , $\theta(r)$ — сглаживающая функция, выбираемая так, что $\theta(r) \in C^1[0, \infty)$, $\theta(r) = 1$ при $r \geq 1$, $0 \leq \theta(r) \leq 1$ при $0 \leq r \leq 1$, $\theta(r) = o(r)$ при $r \rightarrow 0$, ε — малый параметр. В расчетах, приводимых далее, полагаем

$$\theta(r) = 3r^2 - 2r^3, \quad \varepsilon = 2h'.$$

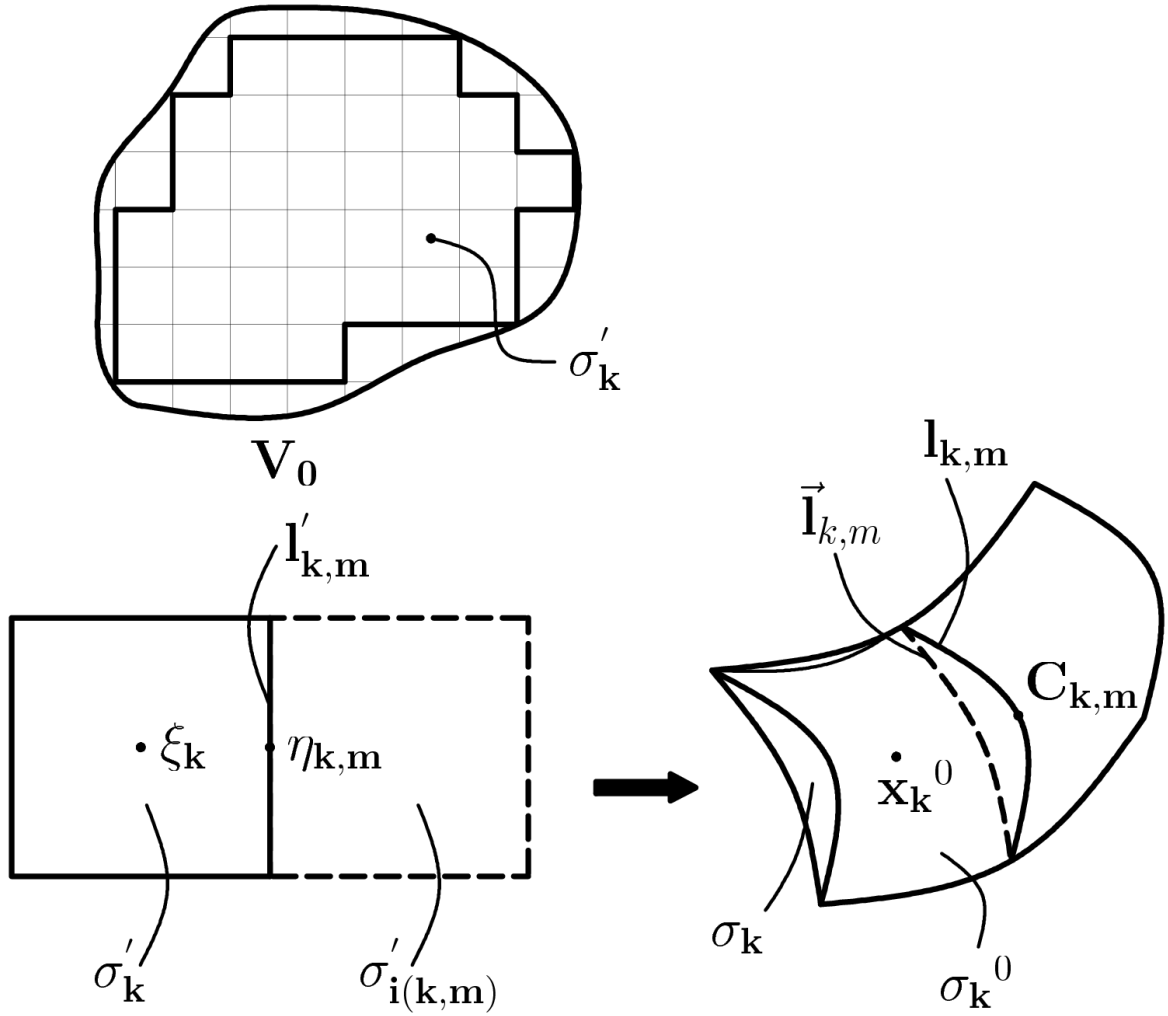


Рисунок 2.4 — К аппроксимации поверхностной дивергенции

2.5 Аппроксимация поверхностной дивергенции

Предположим, что поверхность Σ_0 задана параметрически как множество точек $z = \varphi(\xi)$, $\xi = (\xi^1, \xi^2) \in V_0 \subset \mathbb{R}^2$, причем, V_0 есть замыкание некоторой области на плоскости, отображение $\varphi : V_0 \rightarrow \Sigma_0$ есть взаимнооднозначное невырожденное отображение класса C^3 (см. рисунок 2.4).

Предположим, что введенная выше аппроксимация поверхности Σ_0 системой ячеек σ_k , $k = 1, \dots, N$, получена при отображении системы прямоугольных ячеек, аппроксимирующих множество V_0 , по следующей схеме. Осуществим разбиение плоскости \mathbb{R}^2 на равные квадраты со стороной $h_0 > 0$ вида

$$\sigma' = \{ \xi = (\xi^1, \xi^2) \mid jh_0 \leq \xi^1 \leq (j+1)h_0, mh_0 \leq \xi^2 \leq (m+1)h_0 \}, j, m \in \mathbb{Z},$$

и пусть σ'_k , $k = 1, \dots, N$ — есть множество всех квадратов, удовлетворяющих условию $\sigma'_k \subset V_0$.

Пусть $\xi_{k,m}$, $m = 1, \dots, 4$ — вершины квадрата σ'_k , $k = 1, \dots, N$, и пусть поверхность Σ_0 аппроксимируется ячейками σ_k , $k = 1, \dots, N$, вершины которых есть точки $x_{k,m} = \varphi(\xi_{k,m})$, $m = 1, \dots, 4$. Считаем, что на каждой ячейке построены точка коллокации x_k и вектор нормали \vec{n}_k , по правилу, описанному ранее.

Для вывода приближенной формулы для поверхностной дивергенции построим также ячейки $\sigma_k^0 = \varphi(\sigma'_k)$, $k = 1, \dots, N$, каждая из которых лежит на поверхности Σ_0 и пересекается с соответствующей ячейкой σ_k в точках $x_{k,m}$, $m = 1, \dots, 4$. Пусть, также,

$$\xi_k = \frac{(\xi_{k,1} + \xi_{k,2} + \xi_{k,3} + \xi_{k,4})}{4},$$

центр квадрата σ'_k , $x_k^0 = \varphi(\xi_k)$, $\vec{n}_k^0 = \vec{n}(x_k^0)$. Мы предполагаем, что точка x_k есть приближение для точки $x_k^0 \in \Sigma_0$, а вектор \vec{n}_k есть приближение вектора \vec{n}_k^0 — нормали к поверхности Σ_0 в этой точке.

Пусть $\vec{j}(x)$ — касательное комплексное векторное поле на поверхности Σ_0 , которое является гладкой функцией класса $C^2(\Sigma_0)$. Пусть $\vec{j}_k = \vec{j}(x_k^0)$, $k = 1, \dots, N$.

Рассмотрим ячейку σ_k , не пересекающуюся с краем поверхности $\tilde{\Sigma}_0$ (такая ячейка имеет соседнюю ячейку по каждой своей стороне). Получим приближенное выражение для величины $Div \vec{j}(x_k^0)$, использующее значения \vec{j}_i , набор точек $x_{i,m}$ (вершин ячеек разбиения) и построенные на их основе точки x_i и векторы \vec{n}_i , $i = 1, \dots, N$, $m = 1, \dots, 4$.

В рассматриваемом случае функция $Div \vec{j}(x)$ есть гладкая функция класса $C^1(\Sigma_0)$. Поэтому

$$Div \vec{j}(x_k^0) = \frac{1}{s_k^0} \int_{\sigma_k^0} Div \vec{j}(x) d\sigma + \Delta_k^1, \quad (2.15)$$

где s_k^0 — площадь ячейки

$$\sigma_k^0, \quad |\Delta_k^1| \leq Ch_0,$$

через C здесь и далее обозначены константы, зависящие только от функций φ и $\vec{j}(x)$, причем, в различных оценках значение константы C , вообще говоря, различно. Интеграл в формуле (2.15) преобразуется к контурному интегралу

(см. формулу (9) из статьи [59]):

$$\int_{\sigma_k^0} \text{Div } \vec{j}(x) d\sigma = \oint_{\partial\sigma_k^0} \vec{j}(x) \vec{\nu}(x) ds \equiv I_k, \quad \vec{\nu}(x) = \vec{\tau}(x) \times \vec{n}(x),$$

где $\vec{n}(x)$ — вектор нормали к поверхности Σ_0 , $\vec{\tau}(x)$ — направляющий вектор на контуре $\partial\sigma_k^0$ в точке $x \in \partial\sigma_k^0$. Интеграл I_k перепишем в виде:

$$I_k = I_{k,1} + I_{k,2} + I_{k,3} + I_{k,4}, \quad I_{k,m} = \int_{l_{k,m}^0} \vec{j}(x) \vec{\nu}(x) ds,$$

где $l_{k,m}^0$ — сторона ячейки σ_k^0 с номером m , под которой понимается часть контура $\partial\sigma_k^0$ с началом в точке $x_{k,m}$ и концом в точке $x_{k,l}$, $m = 1, \dots, 4, l = m + 1$ при $m = 1, \dots, 3, l = 1$ при $m = 4$. Полагая в последнем интеграле $x = \varphi(\xi(s'))$, где $\xi(s')$ — параметрическое задание соответствующей стороны $l'_{k,m}$ квадрата σ'_i с естественным параметром s' , и, применяя к возникшему интегралу формулу прямоугольников, можем записать:

$$I_{k,m} = \int_{l'_{k,m}} \vec{j}(x) \vec{\nu}(x) |dx/ds'| ds' = \vec{j}(c_{k,m}) \vec{\nu}(c_{k,m}) |dx/ds'|_{x=c_{k,m}} h_0 + \Delta_{k,m}^2,$$

где $c_{k,m} = \varphi(\eta_{k,m})$, $\eta_{k,m} = (\xi_{k,m} + \xi_{k,l})/2$ (середина стороны $l'_{k,m}$),

$$|\Delta_{k,m}^2| \leq Ch_0^2.$$

Пусть $\vec{l}_{k,m}$ — вектор, с началом в точке $x_{k,m}$ и концом в точке $x_{k,l}$. Поскольку

$$\vec{l}_{k,m} = \int_{l'_{k,m}} \vec{\tau}(x) |dx/ds'| ds' = \vec{\tau}(c_{k,m}) |dx/ds'|_{x=c_{k,m}} h_0 + \Delta_{k,m}^3,$$

$$|\Delta_{k,m}^3| \leq Ch_0^2,$$

и учитывая, что $\vec{\nu}(c_{k,m}) = \vec{\tau}(c_{k,m}) \times \vec{n}(c_{k,m})$, получаем:

$$I_{k,m} = \left(\vec{j}(c_{k,m}), \vec{l}_{k,m} \times \vec{n}(c_{k,m}) \right) + \Delta_{k,m}^4, \quad |\Delta_{k,m}^4| \leq Ch_0^2. \quad (2.16)$$

Пусть $i_b(k,m)$ — номер ячейки, граничащей с ячейкой σ_k по стороне с номером m . Тогда

$$|c_{k,m} - (\varphi(\xi_k) + \varphi(\xi_{i_b(k,m)}))/2| \leq Ch_0^2.$$

Справедливо приближение:

$$\vec{j}(c_{k,m}) = (\vec{j}_k + \vec{j}_{i_b(k,m)})/2 + \Delta_{k,m}^5, \quad |\Delta_{k,m}^5| \leq Ch_0^2. \quad (2.17)$$

Построим приближение вектора $\vec{n}(c_{k,m})$ в формуле (2.16). Заметим, что для любой точки $x \in \Sigma$ выполнено соотношение $(\vec{n}, \partial\vec{n}/\partial\xi_i) = 0$, $i = 1, 2$. Поэтому, справедливы оценки:

$$|\vec{n}(c_{k,m}) - \vec{n}_k^0| \leq Ch_0, \quad |(\vec{n}(c_{k,m}) - \vec{n}_k^0, \vec{n}(c_{k,m}))| \leq Ch_0^2. \quad (2.18)$$

Сравним векторы \vec{n}_k^0 и \vec{n}_k . Для этих векторов справедливы выражения:

$$\begin{aligned} \vec{n}_k^0 &= \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}, \quad \vec{N} = \vec{t}_1 \times \vec{t}_2, \quad \vec{t}_i = \left. \frac{\partial\varphi}{\partial\xi^i} \right|_{\xi=\xi_k}, \quad i = 1, 2, \\ \vec{n}_k &= \frac{\vec{N}'}{|\vec{N}'|}, \quad \vec{N}' = \frac{(x_{k,3} - x_{k,1}) \times (x_{k,4} - x_{k,2})}{h_0^2}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Поскольку

$$x_{k,3} - x_{k,1} = (\vec{t}_1 + \vec{t}_2)h_0 + \vec{\delta}^1, \quad x_{k,4} - x_{k,2} = (-\vec{t}_1 + \vec{t}_2)h_0 + \vec{\delta}^2, \quad (2.20)$$

где $|\vec{\delta}^1| \leq Ch_0^3$, $|\vec{\delta}^2| \leq Ch_0^3$, заключаем, что

$$|\vec{N} - \vec{N}'| \leq Ch_0^2.$$

Поскольку отображение φ не вырождено на компактном множестве V_0 , найдется константа $\theta > 0$, такая, что $|\vec{N}'| \geq \theta$. Поэтому справедлива оценка

$$|\vec{n}_k^0 - \vec{n}_k| \leq Ch_0^2.$$

Учитывая оценки (2.17)-(2.18), заключаем:

$$I_{k,m} = \left(\frac{\vec{j}_k + \vec{j}_{i(k,m)}}{2}, \vec{l}_{k,m} \times \vec{n}_i \right) + \Delta_{k,m}^6,$$

$$|\Delta_{k,m}^6| \leq Ch_0^3.$$

Наконец, площадь ячейки s_k^0 в формуле (2.15) можно приблизить, используя формулы (2.19)-(2.20):

$$s_k^0 = \int_{\sigma'_k} \left| \frac{\partial\varphi}{\partial\xi_1} \times \frac{\partial\varphi}{\partial\xi_2} \right| d\xi_1 d\xi_2 = \frac{1}{2} |\vec{N}'| h_0^2 + \Delta_k^7,$$

$$|\Delta_k^7| \leq Ch_0^3.$$

Таким образом, собирая полученные выражения, имеем формулу:

$$\text{Div } \vec{j}(x_0^k) \approx \frac{1}{s_k} \sum_{m=1}^4 \left(\frac{\vec{j}_k + \vec{j}_{i_b(k,m)}}{2}, \vec{l}_{k,m} \times \vec{n}_k \right), \quad (2.21)$$

где $s_k = |(x_{k,3} - x_{k,1}) \times (x_{k,4} - x_{k,2})|/2$, $\vec{l}_{k,m} = x_{k,l} - x_{k,m}$, $l = m + 1$ при $m = 1, \dots, 3$, $l = 1$ при $m = 4$, $i_b(k,m)$ — номер ячейки, граничащей с рассматриваемой ячейкой по стороне с номером m . Данная формула выполнена с точностью до величины порядка h_0 .

2.6 Численное решение задачи

Будем искать значения неизвестных плотностей электрического и магнитного токов:

$$\vec{j}_{E,i} \approx \vec{j}_E(x_i),$$

$$\vec{j}_{M,i} \approx \vec{j}_M(x_i),$$

из уравнений, аппроксимирующих уравнения (2.11) в точках коллокации x_i , как векторы, ортогональные соответствующим векторам \vec{n}_i , $i = 1, \dots, N$. Аппроксимируя входящие в эти уравнения интегральные операторы по формулам (2.12) и аппроксимируя поверхностную дивергенцию формулой (2.21), запишем следующую систему операторных уравнений:

$$\sum_{j=1}^N A_{ij}^{\pm} [\vec{j}_{E,j}] + \sum_{j=1}^N B_{ij}^{\pm} [\vec{j}_{M,j}] \pm \frac{1}{2} D_i \vec{n}_i^{\pm} \times \vec{n}_i \pm \frac{1}{2} \vec{n}_i^{\pm} \times [\vec{j}_{M,i} \times \vec{n}_i] = \vec{f}_i^{\pm}, \quad (2.22)$$

где $\vec{f}_i^{\pm} = -\vec{n}_i^{\pm} \times \vec{E}_{inc}(x_i)$, $i = 1, \dots, N$.

A_{ij}^{\pm} и B_{ij}^{\pm} — операторы: $\mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$, определяемые формулами:

$$A_{ij}^{\pm} [\vec{j}_{E,j}] = \vec{n}_i^{\pm} \times \tilde{K}[\sigma_j, \vec{j}_{E,j}](x_i), \quad (2.23)$$

$$B_{ij}^{\pm} [\vec{j}_{E,j}] = \vec{n}_i^{\pm} \times \tilde{R}[\sigma_j, \vec{j}_{M,j}](x_i), \quad (2.24)$$

$$D_i = \frac{1}{s_i} \sum_{m=1}^4 \left(\frac{\vec{j}_{E,i} + \vec{j}_{E,i_b(i,m)}}{2}, \vec{l}_{i,m} \times \vec{n}_i \right),$$

$\vec{l}_{i,m}$, $i_b(i,m)$ определены в формуле (2.21). Если ячейка σ_i лежит у края поверхности Σ_0 и не имеет соседней ячейки по стороне с номером m , то слагаемое

$\vec{j}_{E,ib(i,m)}$ не прибавляется. Для удобства формальной записи положим в этом случае $i_b(i,m) = N + 1$, $\vec{j}_{E,N+1} = 0$.

Систему операторных уравнений (2.22) можно записать в виде системы линейных алгебраических уравнений относительно координат неизвестных векторов $\vec{j}_{E,i}$ и $\vec{j}_{M,i}$, $i = 1, \dots, N$, в локальных базисах, построенных на ячейках разбиения. Пусть

$$\begin{aligned}\vec{j}_{E,i} &= j_{E,i}^1 \vec{e}_i^1 + j_{E,i}^2 \vec{e}_i^2, \\ \vec{j}_{M,i} &= j_{M,i}^1 \vec{e}_i^1 + j_{M,i}^2 \vec{e}_i^2, \quad i = 1, \dots, N.\end{aligned}\tag{2.25}$$

Для каждого $i, j = 1, \dots, N$ векторы $A_{ij}^\pm \vec{j}_{E,j}$ и $B_{ij}^\pm \vec{j}_{M,j}$ ортогональны вектору \vec{n}_i . Поэтому, их можно представить в виде

$$\begin{aligned}A_{ij}^\pm[\vec{j}_{E,j}] &= c_{ij}^{\pm 1} \vec{e}_i^1 + c_{ij}^{\pm 2} \vec{e}_i^2, \\ B_{ij}^\pm[\vec{j}_{M,j}] &= d_{ij}^{\pm 1} \vec{e}_i^1 + d_{ij}^{\pm 2} \vec{e}_i^2.\end{aligned}$$

Тогда неизвестные столбцы коэффициентов $(c_{ij}^{\pm 1}, c_{ij}^{\pm 2})^T$ и $(d_{ij}^{\pm 1}, d_{ij}^{\pm 2})^T$ получаются из столбцов $(j_{E,j}^1, j_{E,j}^2)^T$ и $(j_{M,j}^1, j_{M,j}^2)^T$ соответственно линейными преобразованиями:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} c_{ij}^{\pm 1} \\ c_{ij}^{\pm 2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{ij}^{11\pm} & a_{ij}^{12\pm} \\ a_{ij}^{21\pm} & a_{ij}^{22\pm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{E,j}^1 \\ j_{E,j}^2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} d_{ij}^{\pm 1} \\ d_{ij}^{\pm 2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b_{ij}^{11\pm} & b_{ij}^{12\pm} \\ b_{ij}^{21\pm} & b_{ij}^{22\pm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{M,j}^1 \\ j_{M,j}^2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

где коэффициенты вычисляются как:

$$a_{ij}^{kl\pm} = \left(A^\pm[\vec{e}_j^l], \vec{e}_i^k \right), \quad b_{ij}^{kl\pm} = \left(B^\pm[\vec{e}_j^l], \vec{e}_i^k \right), \quad i, j = 1, \dots, N; \quad k, l = 1, 2.\tag{2.26}$$

Величину D_i можно представить в виде

$$D_i = \frac{1}{2s_i} \sum_{\substack{j=1, \dots, N \\ m=1, 4}} \left(\delta_j^i + \delta_j^{ib(i,m)} \right) \left(\vec{j}_{E,j}, \vec{l}_{i,m} \times \vec{n}_i \right),$$

где $\delta_i^j = 1$ при $i = j$, $\delta_i^j = 0$ при $i \neq j$.

В итоге система (2.22) записывается в виде системы из $4N$ линейных алгебраических уравнений относительно $4N$ комплексных неизвестных $j_{E,j}^l$ и

$j_{M,j}^l, l = 1,2, j = 1,\dots,N$:

$$\sum_{\substack{j=1,\dots,N \\ l=1,2}} (a_{ij}^{kl\pm} + d_{ij}^{kl\pm}) j_{E,j}^l + \sum_{\substack{j=1,\dots,N \\ l=1,2}} (b_{ij}^{kl\pm} + c_{ij}^{kl\pm}) j_{M,j}^l = f_i^{k\pm}, \quad (2.27)$$

$$i = 1,\dots,N, k = 1,2,$$

где $f_i^{k\pm} = (f_i^\pm, \vec{e}_i^k)$, коэффициенты $a_{ij}^{kl\pm}$ и $b_{ij}^{kl\pm}$ определяются формулами (2.26),

$$c_{i,j}^{k,l} = \frac{1}{2} \delta_i^j ([\vec{n}_i^\pm \times [\vec{e}_j^l \times n_i]], \vec{e}_i^k),$$

$$d_{i,j}^{k,l} = \frac{([\vec{n}_i^\pm \times \vec{n}_i], \vec{e}_i^k)}{4s_i} \sum_{\substack{j=1,\dots,N \\ m=1,4}} (\delta_i^j + \delta_j^{i_b(i,m)}) (\vec{e}_j^l, \vec{l}_{i,m} \times \vec{n}_i).$$

Таким образом, численное решение рассматриваемой задачи свелось к решению системы линейных уравнений (2.27). Далее строятся векторы $\vec{j}_{E,i}$ и $\vec{j}_{M,i}$, $i = 1,\dots,n$. После этого можно найти напряженность электрического поля \vec{E} в любой точке $x \in \Omega_0$ по формуле (2.3) с использованием приближенных формул (2.12). Заметим, что напряженность магнитного поля представляется в виде

$$\vec{H}(x) = \frac{1}{i\omega\mu} K[\Sigma_0, \vec{j}_M](x) - i\omega\epsilon R[\Sigma_0, \vec{j}_E](x).$$

В приводимых ниже численных примерах рассматривается случай, когда первичное есть плоская волна:

$$\vec{E}_{inc}(x) = \vec{E}_{inc}^0 e^{i(\vec{k},x)}, \vec{H}_{inc}(x) = \vec{H}_{inc}^0 e^{i(\vec{k},x)}, \quad (2.28)$$

\vec{k} — заданный волновой вектор, такой, что $|\vec{k}| = k$, \vec{E}_{inc}^0 , постоянный вектор, ортогональный вектору \vec{k} , (\vec{k},x) — скалярное произведение вектора \vec{k} и радиус вектора точки x ,

$$\vec{H}_{inc}^0 = [\vec{k} \times \vec{E}_{inc}^0]/(\omega\mu).$$

В этом случае вводится понятие эффективной площади рассеяния в направлении заданного единичного вектора $\vec{\tau}$:

$$\sigma(\vec{\tau}) = \lim_{R \rightarrow \infty} 4\pi R^2 \frac{|\vec{E}(R\vec{\tau})|^2}{|\vec{E}_{inc}^0|^2}. \quad (2.29)$$

В случае, когда напряженность электрического поля представлена в виде (2.3), величину $\sigma(\vec{\tau})$ можно выразить через поверхностные токи:

$$\sigma(\vec{\tau}) = \frac{4\pi}{|\vec{E}_{inc}|^2} \left| \int_{\Sigma} e^{-ik(\vec{\tau}, y)} \left[\frac{i}{\omega\epsilon} k^2 \left(\vec{j}_E - \vec{\tau} \left(\vec{j}_E^+, \vec{\tau} \right) \right) + ik \left[\vec{\tau} \times \vec{j}_M(y) \right] \right] d\sigma_y \right|^2,$$

При численном решении используем приближенную формулу:

$$\sigma(\vec{\tau}) = \frac{4\pi}{|\vec{E}_{inc}|^2} \left| \sum_{j=1}^N e^{-ik(\vec{\tau}, x^j)} \left[\frac{i}{\omega\epsilon} k^2 \left(\vec{j}_{E,j} - \vec{\tau} \left(\vec{j}_{E,j}, \vec{\tau} \right) \right) + ik \left[\vec{\tau} \times \vec{j}_{M,j} \right] \right] s_j \right|^2.$$

В заключение заметим, что построенный численный метод не вырождается, если толщина тела обращается в нуль. Так если в формуле (2.1) выполнено условие $\lambda \equiv 0$ на поверхности Σ_0 , то рассматриваемое тело становится тонким экраном. При этом

$$\Sigma^+ = \Sigma^- = \Sigma_0, \quad \vec{n}^+ = -\vec{n}^- = \vec{n},$$

В этом случае уравнения (2.11) принимают вид

$$\pm \int_{\Sigma_0} \vec{n}(x) \times \left(\vec{K}(\vec{j}_E(y), x, y) + \vec{R}(\vec{j}_M(y), x, y) \right) d\sigma_y + \frac{1}{2} \vec{j}_M(x) = \pm f(x), \quad x \in \Sigma_0^{in},$$

$$f(x) = -\vec{n}(x) \times \vec{E}_{inc}(x).$$

Из этих уравнений следуют равенство $\vec{j}_M(x) \equiv 0$ на поверхности Σ_0 и уравнение относительно тока \vec{j}_E :

$$\int_{\Sigma_0} \vec{n}(x) \times \vec{K}(\vec{j}_E(y), x, y) d\sigma_y = f(x), \quad x \in \Sigma_0^{in}. \quad (2.30)$$

Полученное уравнение есть уравнение (1.39) из раздела 1 для задачи рассеяния электромагнитной волны на идеально проводящем экране Σ_0 . При этом система (2.27) переходит в систему для решения последнего уравнения:

$$\sum_{\substack{j=1, \dots, N \\ l=1, 2}} a_{ij}^{kl} j_{E,j}^l = f(x_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad k = 1, 2, \quad (2.31)$$

где $a_{ij}^{kl} = a_{ij}^{kl+}$. Аналогично, если равенство $\lambda(z) = 0$ выполнено на части поверхности Σ_0 , то эта часть поверхности Σ_0 автоматически будет моделироваться как тонкий идеальнопроводящий экран.

Глава 3. Программная реализация

С целью отладки разработанного метода были созданы две программы: программа, реализующая численный метод решения исходной задачи, описанной в главе 1, и программа, реализующая метод решения задачи со снесением граничного условия на серединную поверхность, описанный в главе 2.

Расчеты по каждой из программ проводились по следующей схеме:

1. Разработка геометрической модели исследуемого объекта.
2. Сеточная аппроксимация геометрической модели объекта.
3. Задание параметров расчёта.
4. Проведение расчёта.
5. Обработка результатов.

Разработка геометрических моделей и построение сеточных моделей (п.п. 1 и 2 вышеуказанной схемы) осуществляется в программном пакете SALOME v. 5.1.0. Структура файла сеточной модели представлена ниже:

$$\left| \begin{array}{l} N, \\ h \ l, \\ X_{11} \ Y_{11} \ Z_{11} \dots X_{14} \ Y_{14} \ Z_{14}, \\ \vdots \\ X_{N1} \ Y_{N1} \ Z_{N1} \dots X_{N4} \ Y_{N4} \ Z_{N4}. \end{array} \right.$$

где N – общее количество элементов сеточной модели, h , l – количество сеточных элементов вдоль хорды и размаха крылового профиля соответственно, $X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij}, i \in [1, \dots, N], j \in [1, \dots, 4]$ – координаты j -ой вершины i -го элемента.

Для проведения расчёта, в программу подаются следующие входные данные: файл сеточной модели, длина падающей волны, максимальное количество доразбиений основных элементов сеточной модели, исследуемые углы облучения, тип исследования: прямая или обратная диаграмма рассеяния.

Вычислительный модуль состоит из следующих блоков:

- Обработка сеточной модели и входных данных – п.3 вышеуказанной схемы.
- Построение и LU-факторизация матрицы коэффициентов системы уравнения – п.4.

- Решение системы уравнений – п.4
- Запись и обработка результатов решения – п.5.

Программная реализация осуществлена на языке Fortran с компилятором GNU Fortran (GCC) v. 5.4.0 и использованием библиотеки математических функций OpenBLAS v. 0.3.21.

Результатом работы вычислительного модуля являются значения поверхностных токов, по которым в дальнейшем вычисляются значения в ближней или дальней зонах. Для построения диаграмм прямого и обратного рассеяния создается файл с табличными значениями: исследуемый угол и значения ЭПР. Для визуализации диаграмм рассеяния используется утилита GNUPLOT v. 5.2.

Для визуализации параметров электромагнитного поля в ближней зоне строится дополнительная сетка для исследуемого расчётного сечения в области вне исследуемого объекта. В узлах сетки производится расчёт значений параметров электромагнитного поля по полученным ранее значениям поверхностных токов. Визуализации параметров поля в ближней зоне производится в среде программирования jupyter-notebook на ядре Python v. 3.9.12 с использованием библиотеки PyVista v. 0.37.0.

Глава 4. Результаты расчетов и обсуждение

4.1 Влияние точности вычисления интегралов по ячейкам на решение исходной задачи рассеяния

Для первоначального тестирования разработанной версии численного алгоритма для задачи в исходной постановке рассмотрена дифракция плоской волны на идеально проводящей сфере радиуса 1. В этих расчетах использовалось разбиение сферы на основные ячейки, равномерное по сферическим координатам на поверхности сферы. При вычислении интегралов $K^1[\sigma_j, \vec{e}_j^l](x_i)$ при нахождении коэффициентов матрицы системы линейных уравнений (1.48) каждая ячейка дополнительно разбивалась на более мелкие ячейки путем деления по каждому направлению на m равных частей (при этом на каждой ячейке основного разбиения возникало m^2 ячеек сетки второго уровня). В результате расчета строилась диаграмма направленности, выражающая зависимость ЭПР $\sigma(\vec{\tau})$, определяемой формулой (1.53), от угла α между векторами $-\vec{k}$ и $\vec{\tau} = \vec{\tau}(\alpha)$, в случае, когда вектор $\vec{\tau}$ лежит в плоскости, определяемой векторами \vec{k} и \vec{E}_0 (см. рисунок 4.1). На рисунках 4.2 – 4.3 приведены графики функции

$$\tilde{\sigma}(\alpha) = 10 \log \frac{\sigma(\vec{\tau}(\alpha))}{\pi}, \quad (4.1)$$

($\tilde{\sigma}(\alpha)$ есть ЭПР сферы, нормированная на площадь поперечного сечения сферы, выраженная в децибелах).

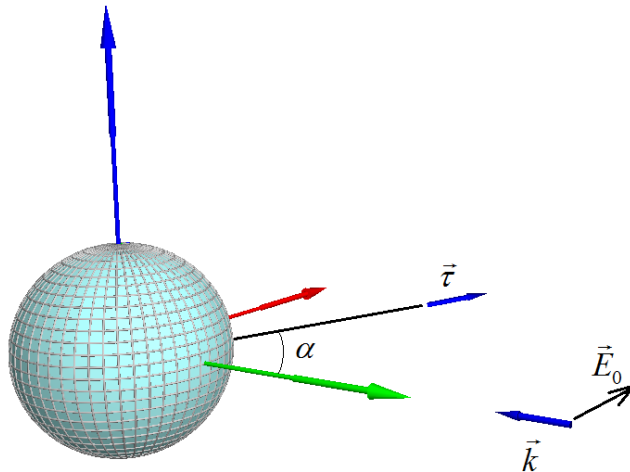


Рисунок 4.1 — Схема облучения

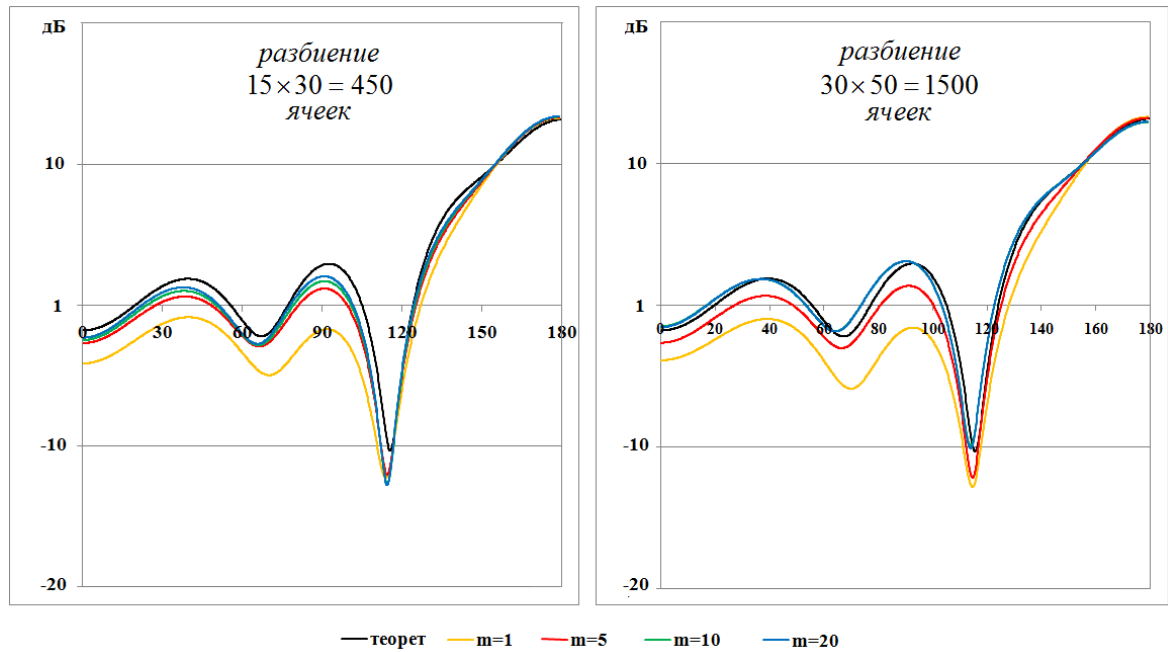


Рисунок 4.2 — Диаграмма рассеяния сферы. $k = 4.1$

На рисунках 4.2 - 4.3 приведены диаграммы рассеяния для волнового числа $k = 4.1$, полученные при использовании основного разбиения на $15 \times 30 = 450$ ячеек и $30 \times 50 = 1500$ ячеек, соответственно (первый сомножитель есть число ячеек по широте, второй по долготе). На каждом рисунке приведены кривые, полученные при различных значениях параметра m (числа ячеек доразбиения по каждому направлению), в сравнении с теоретическим решением [27].

Видно, что без использования доразбиения основных ячеек результаты имеют большую погрешность. При использовании основной сетки с ячейками меньших размеров точность результатов существенно повышается, причем, при значениях параметра $m = 10$ и $m = 20$ полученные диаграммы рассеяния близки друг к другу (на рисунке 4.2 для разбиения $30 \times 50 = 1500$ ячеек кривая, соответствующая значению $m = 10$, даже не видна, будучи накрытой кривой, соответствующей значению $m = 20$). Аналогичное поведение результатов имеет место и на рисунке 4.3, слева, где приведены диаграммы направленности, полученные для волнового числа $k = 10$ при использовании основного разбиения на $30 \times 50 = 1500$. На рисунке 4.3 справа приведены диаграммы направленности, полученные для значения волнового числа $k = 20$ на сетке $30 \times 50 = 1500$ при использовании параметра доразбиения $m = 20$ в сравнении с теоретическим решением. Здесь видно, что имеется качественное соответствие численного и теоретического решений, погрешность достигает 3 дБ.

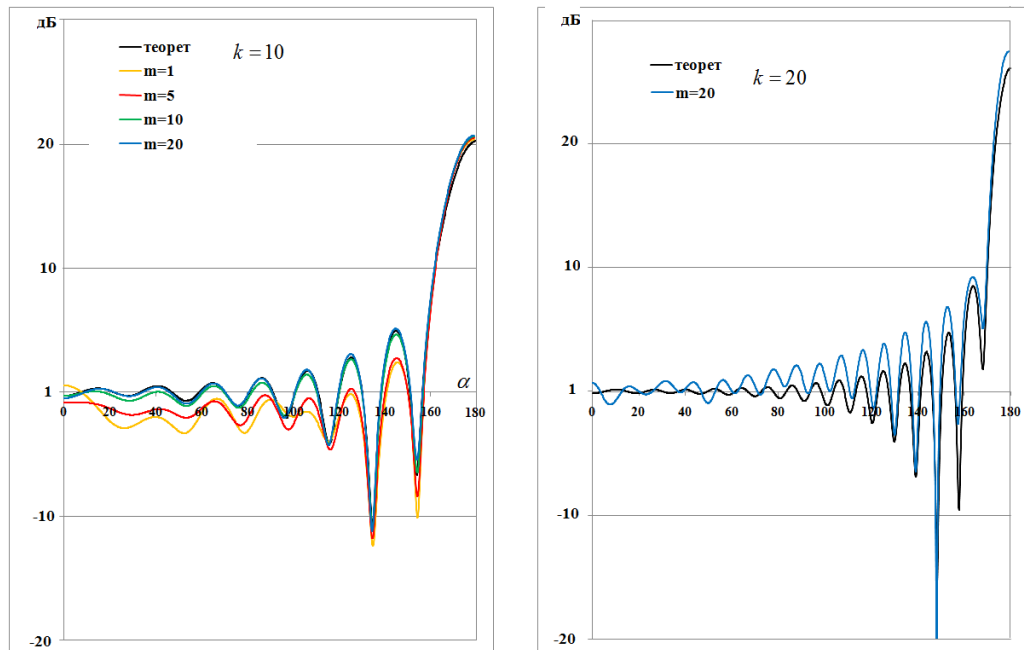


Рисунок 4.3 — Диаграмма рассеяния сферы. Разбиение на $30 \times 50 = 1500$ ячеек

Снижение точности получаемых решений при увеличении волнового числа связано с уменьшением длины волны λ , которая составляет $\lambda \approx 1.53$ для $k = 4.1$, $\lambda \approx 0.628$ для $k = 10$, $\lambda \approx 0.314$ для $k = 20$. В то же время, максимальный размер стороны ячейки основного разбиения составляет $h \approx 0.21$ для разбиения 15×30 ячеек, что в расчете для волнового числа $k = 4.1$ составляет примерно $1/7$ длины волны. Для разбиения 30×50 ячеек максимальный размер стороны ячейки составляет примерно $h \approx 0.12$, что составляет примерно $1/13$ длины волны для $k = 4.1$; $1/5$ для $k = 10$; $1/2.5$ для $k = 20$.

Таким образом, при использовании дополнительного разбиения для аккуратного вычисления слабосингулярных интегралов, хорошее согласование теоретических и расчетных результатов может быть достигнуто при отношении максимального размера ячеек разбиения и длины волны около $1/6$, что согласуется с известными оценками для наиболее эффективных численных методов. Для значения волнового числа $k = 20$ используемых сеток явно не достаточно.

Отметим, что в [59], где, как уже указывалось, использовалась схема с аппроксимацией слабосингулярных интегралов только по основной сетке, были получены аналогичные диаграммы направленности, хорошо согласующиеся с теоретическими, для ряда значений волнового числа $k \leq 4.1$, при использовании разбиения на около 11000 ячеек, что существенно больше, чем в расчетах, описанных в настоящей работе.

4.2 Влияние числа ячеек доразбиения на решение для крыла в исходной постановке

Для тестирования разработанного метода были получены численные решения задачи дифракции плоской волны на прямоугольном крыле с симметричным профилем NASA-0012. Рассматривалось крыло (см. рисунок 4.4) с удлинением $L/b = 5$ (L — размах крыла, b — хорда крыла), и с различной относительной толщиной профиля $\bar{c} = 5\%$ и 25% (под относительной толщиной профиля понимается отношение максимальной толщины профиля к его хорде, выраженное в процентах). Для сравнения были получены численные решения исходной краевой задачи (1.16), а также решения задачи дифракции на плоской пластине, являющейся срединной поверхностью крыла без снесения граничного условия. Использовались математическая модель и численный алгоритм, описанные в главе 1 настоящей работы.

Исследуемое крыло рассматривалось в системе координат $Oxyz$ с осью Ox , направленной вдоль хорды крыла от передней кромки к задней, осью Oy , направленной перпендикулярно плоскости крыла, и осью Oz , направленной вдоль размаха крыла. По результатам расчетов строились диаграммы обратного рассеяния, на которых приводится зависимость величины

$$\tilde{\sigma}(\alpha) = 10 \log \sigma(\vec{\tau}),$$

в направлении вектора $\vec{\tau} = -\vec{k}$, от угла α , задающего направление волнового вектора \vec{k} в плоскости Oxy :

$$\vec{k} = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0).$$

Рассматривался случай, когда вектор \vec{E}_{inc} , определяющий поляризацию волны, лежит в плоскости Oxy (формулы (2.28)).

Для исследования сеточной сходимости численных решений для каждого варианта крыла, определяемого относительной толщиной профиля, были подготовлены сеточные модели с разбиением верхней и нижней поверхностей крыла на 10×40 , 20×80 , 40×160 ячеек, где первое число — количество ячеек вдоль хорды b , а второе — вдоль размаха L . В процессе нахождения коэффициентов матрицы системы линейных уравнений при вычислении слабосингулярных интегралов вида использовалось дополнительное разбиение каждой ячейки на $m \times m$ дополнительных ячеек — на m ячеек по каждой стороне. Значение параметра m

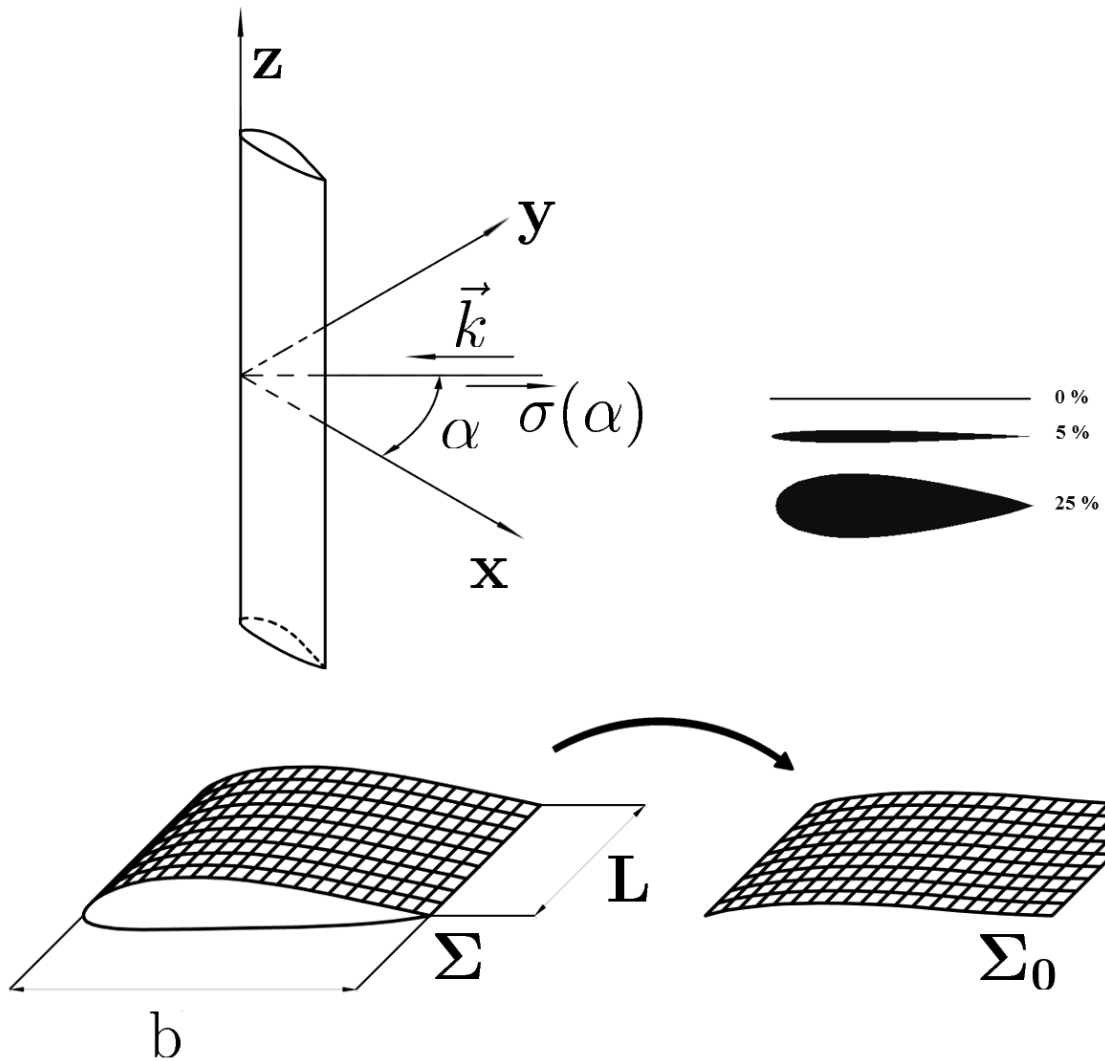


Рисунок 4.4 — Схема эксперимента и профиль исследуемого объекта

варьировалось в вычислительных экспериментах для выяснения его влияния на точность получаемых решений. Отметим, что значение этого параметра $m = 1$, соответствует расчету без дополнительного разбиения ячеек.

На рисунках 4.5 - 4.10 приведены диаграммы обратного рассеяния для крыловых профилей толщиной 5% и 25% , полученные при падении первичного поля с длиной волны $\lambda = b$, при различных значениях вычислительных параметров. Полученные результаты иллюстрируют зависимость получаемых результатов от параметра m - числа ячеек дополнительного разбиения по каждой стороне основной ячейки.

Из представленных результатов видно, что при увеличении числа ячеек дополнительного разбиения на каждой сетке основного разбиения наблюдается практическая сходимость получаемых результатов к некоторыми предельным

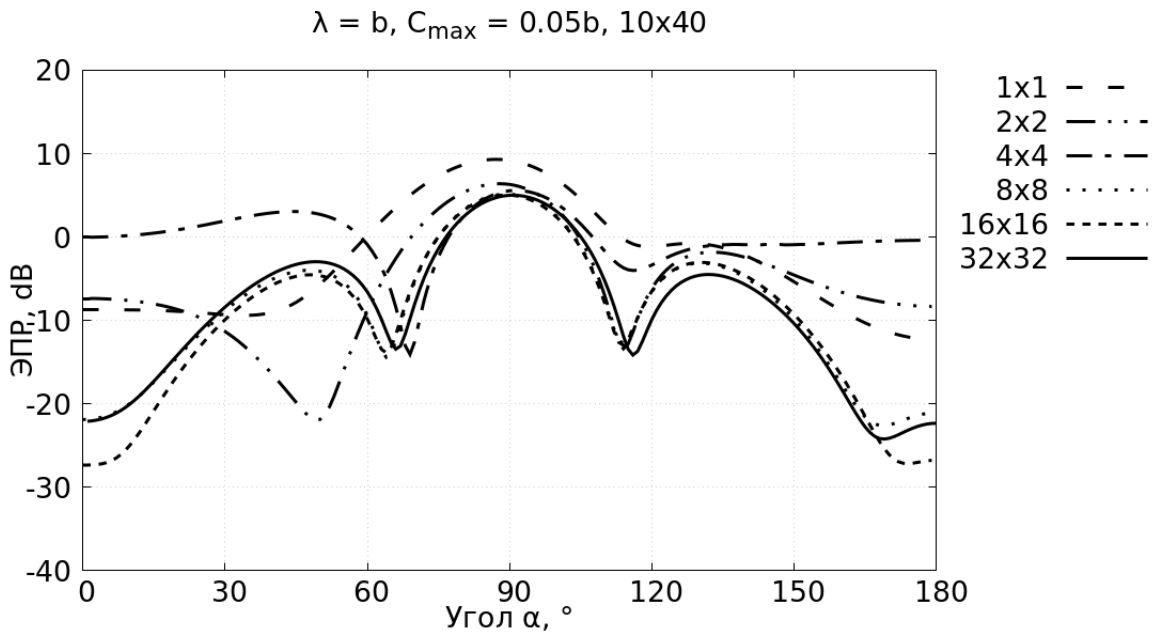


Рисунок 4.5 — Влияние доразбиения на результаты расчёта. Основное разбиение 10×40 . Толщина профиля $\bar{c} = 5\%$

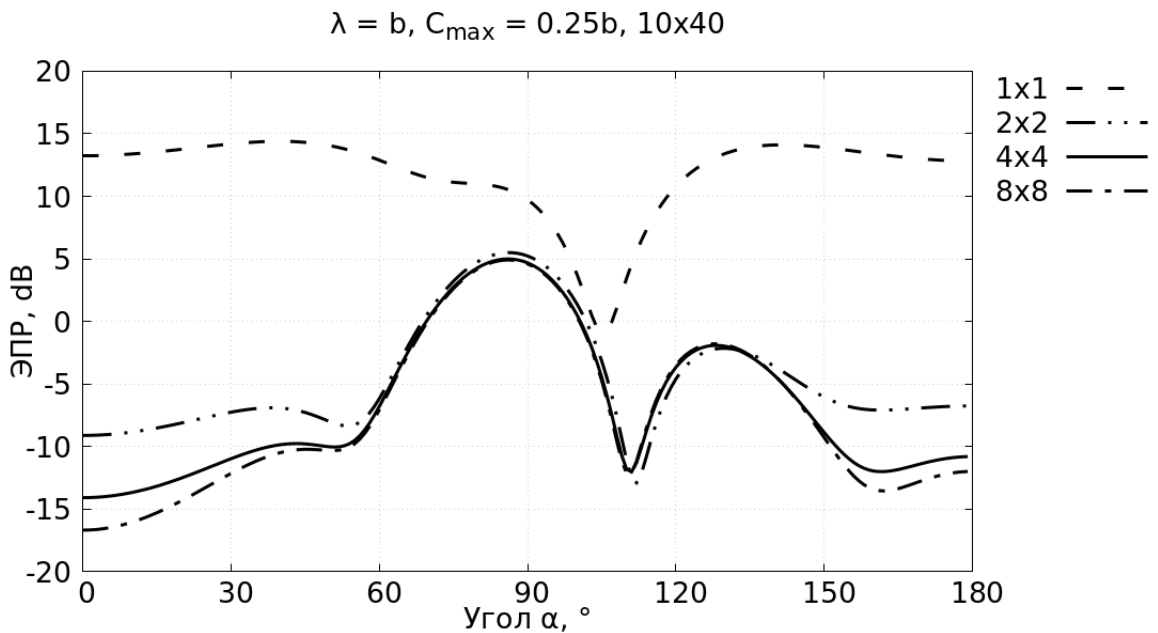


Рисунок 4.6 — Влияние доразбиения на результаты расчёта. Основное разбиение 10×40 . Толщина профиля $\bar{c} = 25\%$

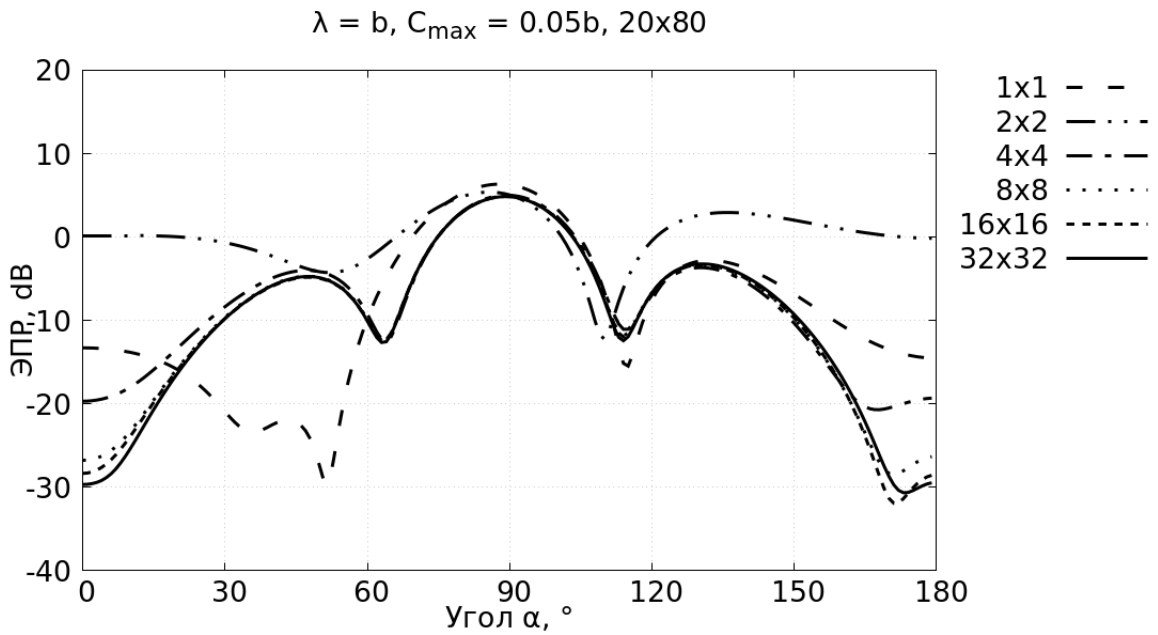


Рисунок 4.7 — Влияние доразбиения на результаты расчёта. Основное разбиение 20×80 . Толщина профиля $\bar{c} = 5\%$

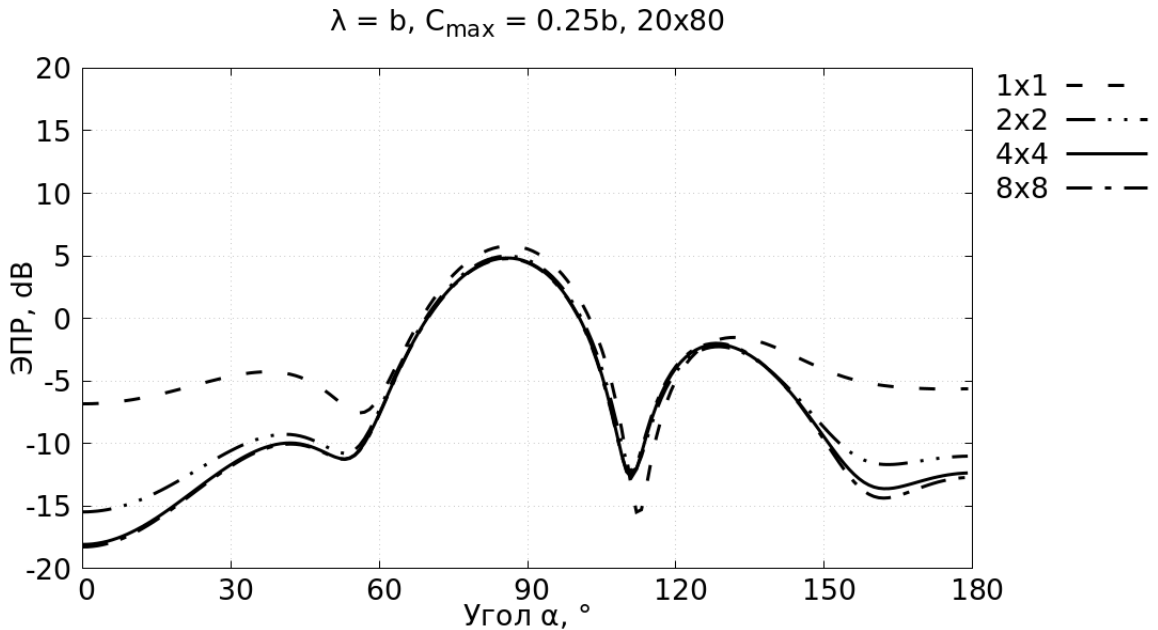


Рисунок 4.8 — Влияние доразбиения на результаты расчёта. Основное разбиение 20×80 . Толщина профиля $\bar{c} = 25\%$

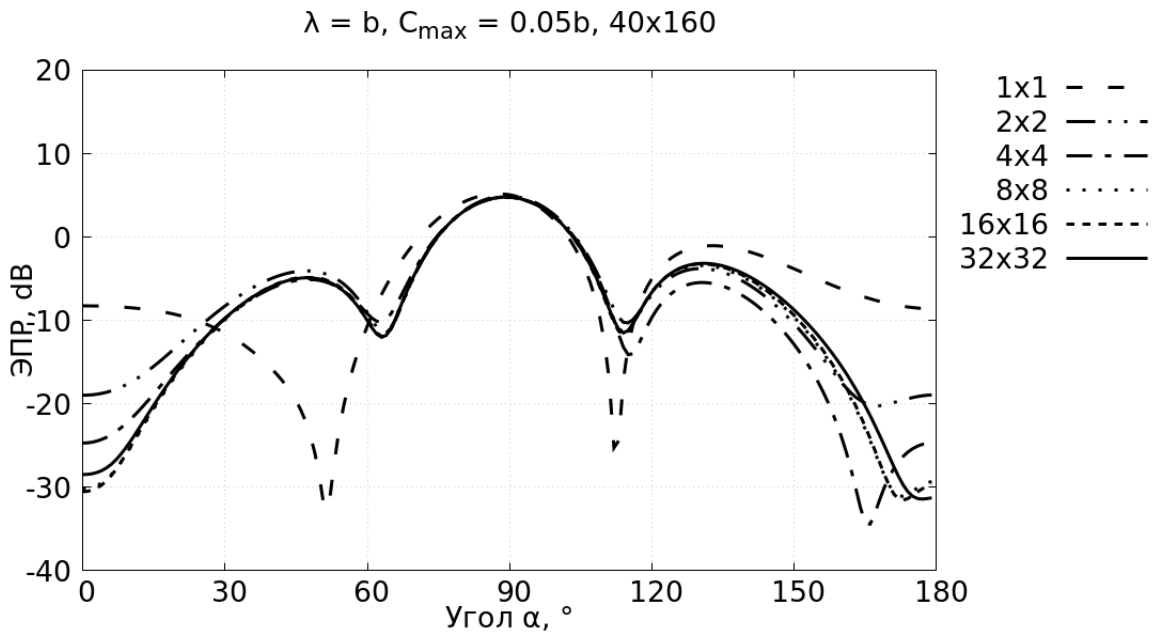


Рисунок 4.9 — Влияние доразбиения на результаты расчёта. Основное разбиение 40×160 . Толщина профиля $\bar{c} = 5\%$

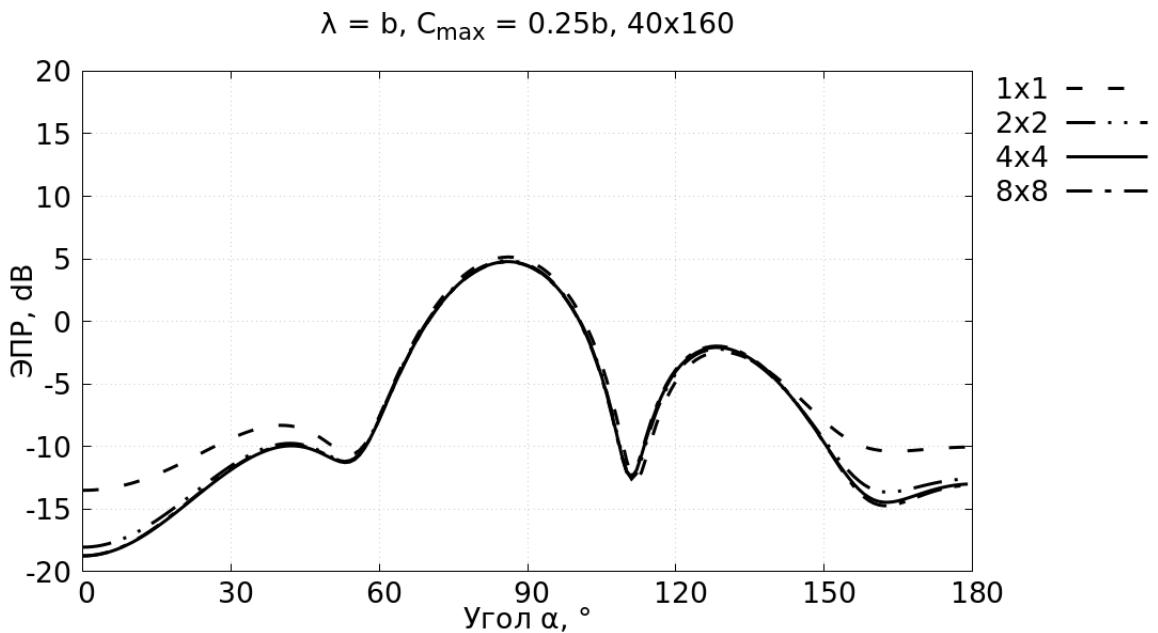


Рисунок 4.10 — Влияние доразбиения на результаты расчёта. Основное разбиение 40×160 . Толщина профиля $\bar{c} = 25\%$

решениям. При этом, во-первых, число ячеек дополнительного разбиения необходимо увеличивать при уменьшении толщины крыла. С другой стороны, при измельчении основного разбиения потребное число ячеек дополнительного разбиения на каждой ячейке уменьшается.

4.3 Сеточная сходимость для задачи в исходной постановке

Рисунки 4.11 - 4.13 иллюстрируют влияние шага основного разбиения поверхности на получаемые диаграммы рассеяния при решении задачи в исходной постановке для телесных крыловых профилей и пластины. Указано количество ячеек на каждой из этих поверхностей.

Стоит отметить, что сеточная сходимость для телесных объектов достигается тем быстрее, чем больше относительная толщина профиля. Сходимость же на тонком экране достигается еще быстрее, но качественно отличается от результатов в задаче с телесными объектами

Анализ результатов показывает, что даже на грубой основной сетке с разбиением поверхностей крыла на 10×40 ячеек можно получить достаточно точные результаты, если использовать дополнительное разбиение каждой стороны ячейки на 8 более мелких ячеек для крыла с относительной толщиной 25% и на 16 ячеек для крыла с относительной толщиной 5%. Заметим, что при этом для крыла с относительной толщиной 5% профиля крыла составляет $C = 0.05b$, размер ячейки основного разбиения составляет $h = 0.1b = 2C$, а размер ячейки дополнительного разбиения составляет $h = 0.00625b = C/8$.

Проведенное тестирование показало, что схема с использованием доразбиения ячеек основного разбиения и сглаживанием особенности при вычислении слабосингулярных интегралов позволяет существенно повысить точность получаемых численных решений без увеличения числа ячеек основного разбиения. Правильные результаты получаются, во-первых, при выполнении условия, что размер ячеек основного разбиения в несколько раз меньше длины волны (примерно в 6 раз и более). На крыле малой толщины требуется сгущать основную сетку, по сравнению с крылом большой толщины. При этом для получения приемлемых результатов необходимо использовать и достаточно мелкое вторичное разбиение.

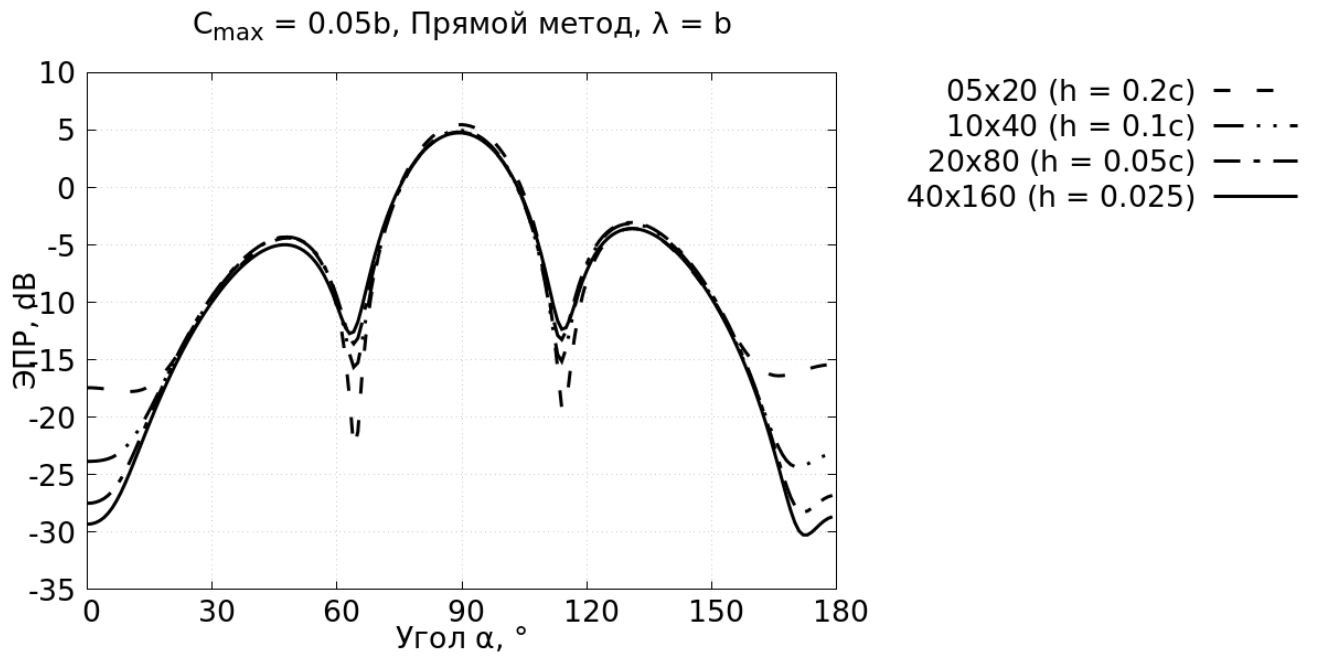


Рисунок 4.11 — Зависимость результатов от числа ячеек разбиения. Решение задачи на точной поверхности. $\bar{c} = 5\%$

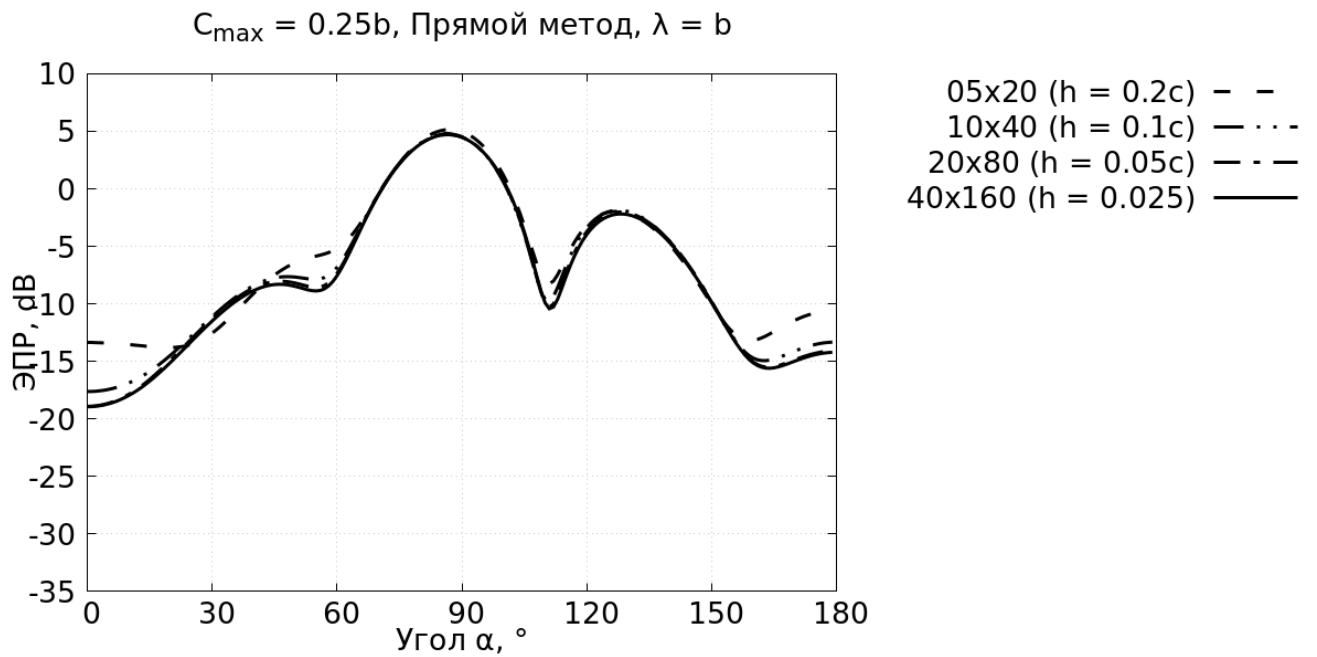


Рисунок 4.12 — Зависимость результатов от числа ячеек разбиения. Решение задачи на точной поверхности. $\bar{c} = 25\%$

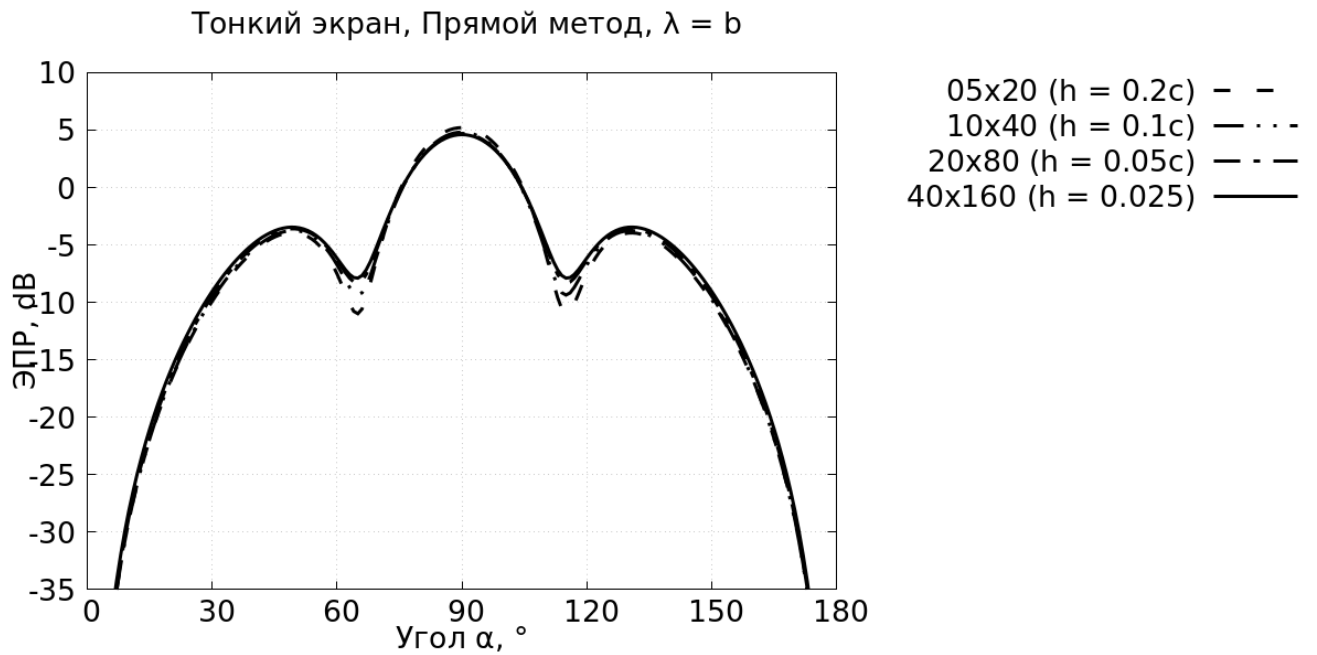


Рисунок 4.13 — Зависимость результатов от числа ячеек разбиения. Замена крыла тонким экраном. $\bar{c} = 0\%$

4.4 Влияние толщины профиля на диаграмму рассеяния

На рисунках 4.14 - 4.16 представлено влияние толщины профиля на диаграмму рассеяния крыла при облучении первичным полем с различной длиной волны.

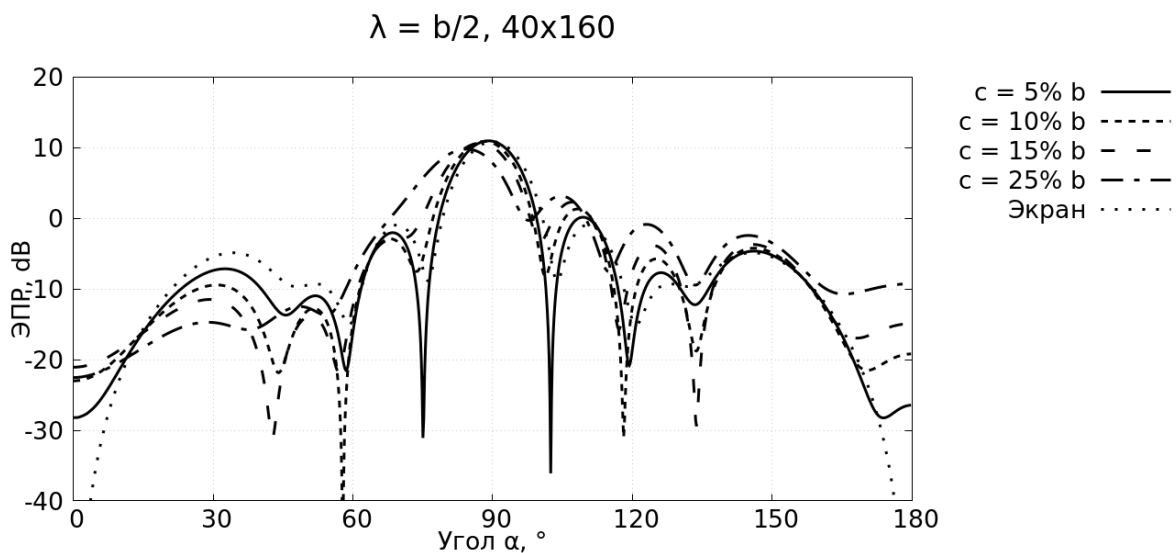


Рисунок 4.14 — Влияние толщины профиля на диаграмму рассеяния. Длина волны $\lambda = b/2$.

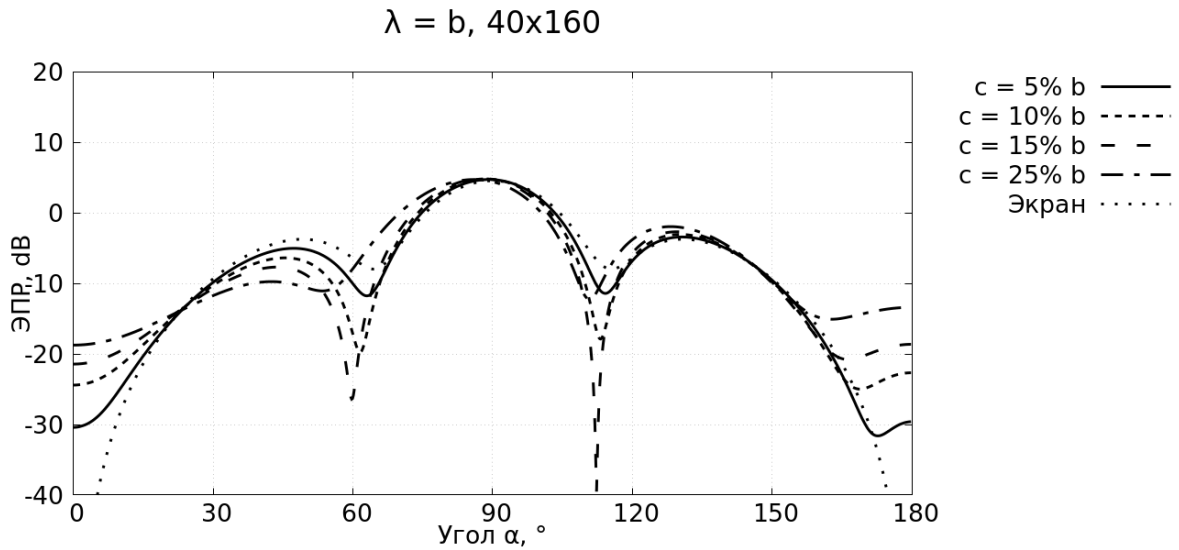


Рисунок 4.15 — Влияние толщины профиля на диаграмму рассеяния. Длина волны $\lambda = b$

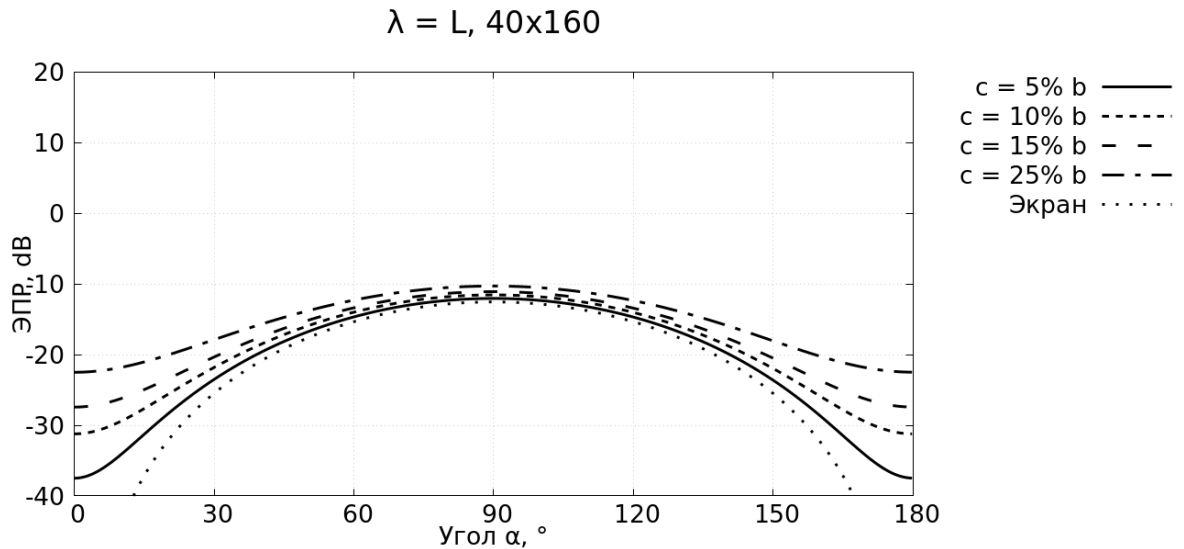


Рисунок 4.16 — Влияние толщины профиля на диаграмму рассеяния. Длина волны $\lambda = L$

Анализируя полученные данные, следует отметить, что при любых длинах волн существуют диапазоны углов, в которых расхождения полученных значений величины ЭПР существенны: $\alpha \in [150 : 180] \cup [0 : 15]$.

4.5 Решение задачи рассеяния на телах малой толщины с применением метода снесения граничного условия

Рисунки 4.17-4.18 иллюстрируют влияние шага разбиения поверхности на получаемые диаграммы рассеяния при использовании метода со снесением граничного условия, а также при решении исходной задачи и задачи рассеяния на тонком экране. Во всех расчетах рассматривалось электромагнитное поле с длиной волны $\lambda = 10 = b$ см. Структура расчетных сеток на поверхности крыла и на срединной поверхности показаны на рисунке 4.4 .

На рисунках 4.17 - 4.18 показаны диаграммы обратного рассеяния для крыла с относительной толщиной 5% и 25%, полученные методом со снесением граничного условия на срединную поверхность при использовании разбиения срединной поверхности на $5 \times 20 = 100$ ячеек ($h = 0.2b$), $10 \times 40 = 400$ ячеек ($h = 0.1b$), $20 \times 80 = 1600$ ячеек ($h = 0.05b$) и $40 \times 160 = 6400$ ячеек ($h = 0.025b$). Здесь первый множитель указывает на число ячеек разбиения по хорде, второй множитель по размаху крыла, ячейки разбиения имели форму близкую к квадрату, h – наибольший размер стороны ячейки.

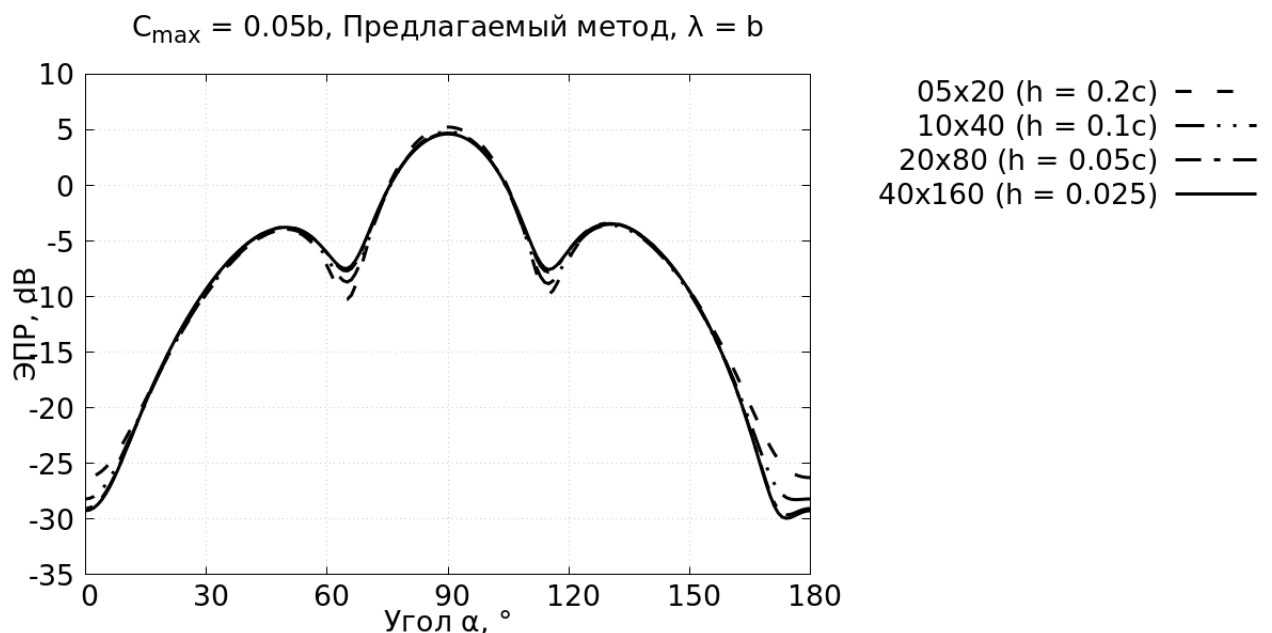


Рисунок 4.17 — Зависимость результатов от числа ячеек разбиения. Метод со снесением граничного условия. Толщина профиля $\bar{c} = 5\%$

Анализ этих результатов показывает, что во всех случаях видна тенденция к сходимости получаемых численных результатов при уменьшении шага

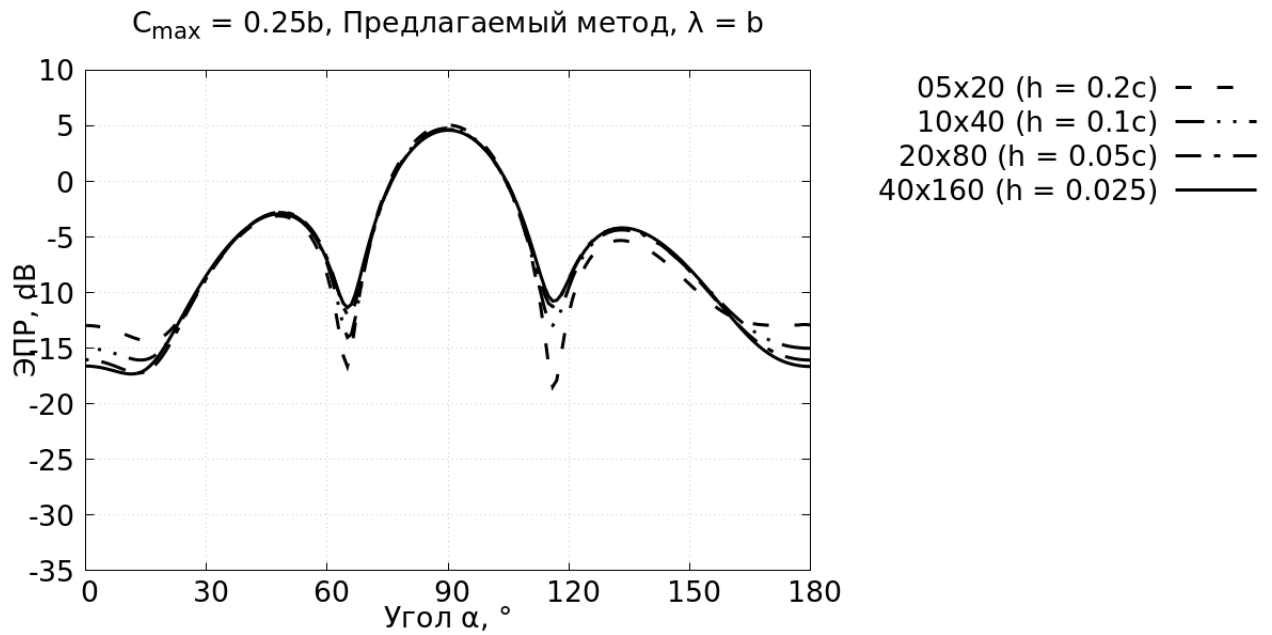


Рисунок 4.18 — Зависимость результатов от числа ячеек разбиения. Метод со снесением граничного условия. $\bar{c} = 25\%$

сетки. При этом для задачи рассеяния на тонкой пластине результаты, получаемые даже на самой грубой сетке близки к результатам, получаемым на метких сетках. Для задачи рассеяния на телесных крыльях, различие результатов, получаемые на различных сетках, более существенно. Это подтверждает сформулированный во введении тезис о том, что при решении граничного интегрального уравнения на замкнутой поверхности малой толщины необходимо использовать расчетные сетки с малым шагом размером ячеек. В то же время для предложенного метода со снесением граничного условия на серединную поверхность согласование результатов, полученных на различных сетках, существенно лучше, чем для задачи на телесном крыле. Здесь скорость сходимости увеличивается при уменьшении толщины крыла и приближается к скорости сходимости для задачи на тонком экране.

4.6 Сравнение численных решений задачи с результатами физических экспериментов

На рисунке 4.20 приведены для сравнения диаграммы обратного рассеяния для моделей крыльев с относительной толщиной 5% и 25% соответственно,

полученные при решении рассматриваемых различных вариантов математических задач. Сюда перенесены кривые с рисунков 4.17-4.18, соответствующие самым мелким из рассмотренных разбиений. Также, на этих рисунках приведены результаты, полученные в физическом эксперименте (данные предоставлены ИТПЭ РАН).

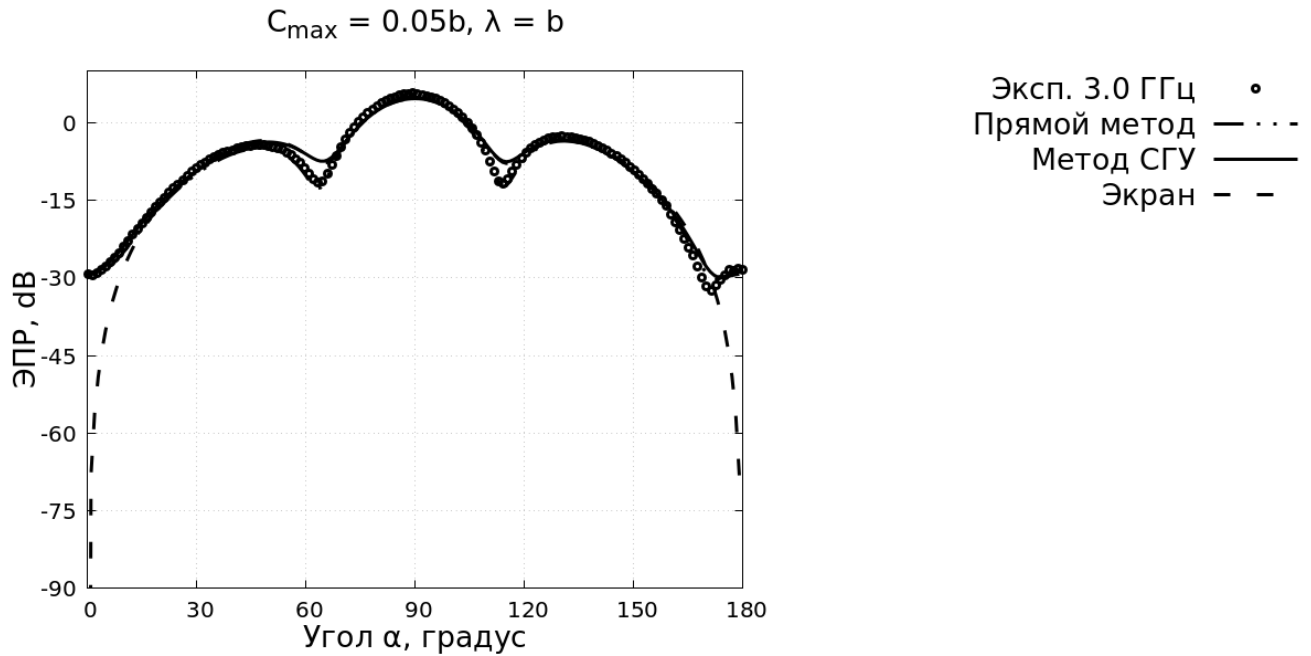


Рисунок 4.19 — Сравнение численных результатов с результатами эксперимента. $\bar{c} = 5\%$

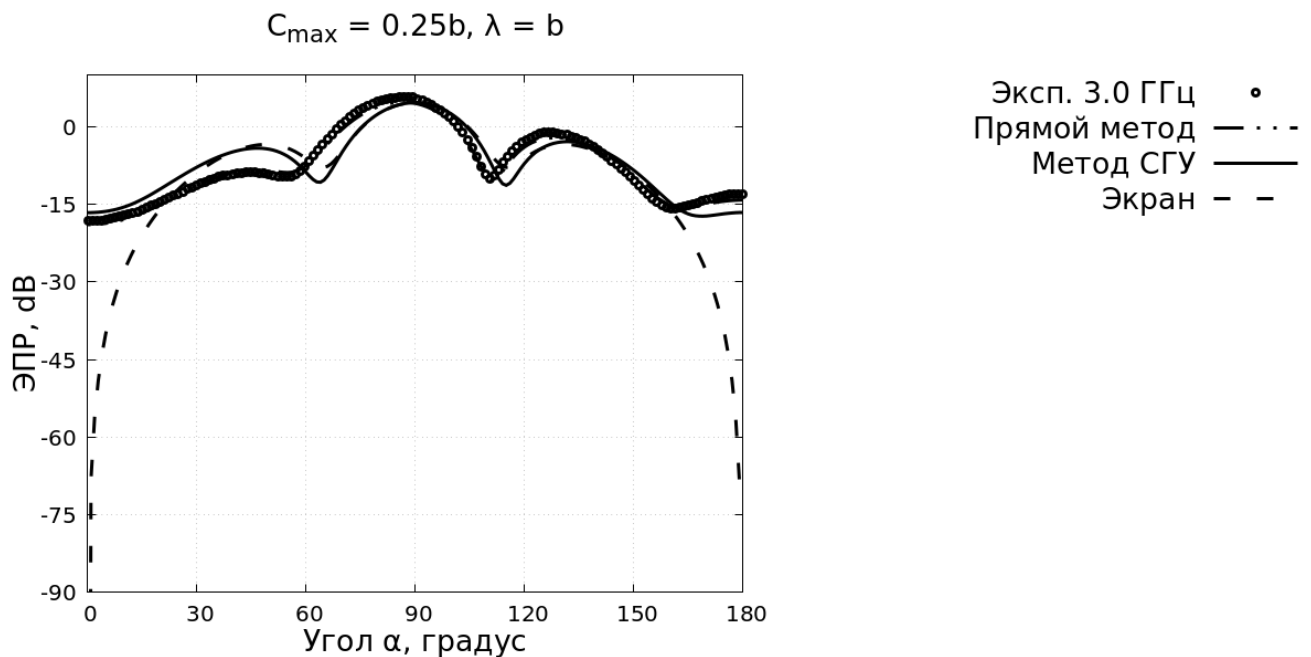


Рисунок 4.20 — Сравнение численных результатов с результатами эксперимента. $\bar{c} = 25\%$

Здесь и далее на рисунках приняты следующие обозначения:

1. Прямой метод – метод решения задачи в исходной постановке.
2. Метод СГУ – метод решения задачи с применением метода снесения граничного условия.
3. Экран – метод решения задачи в исходной постановке на тонком экране.
4. Эксп. – результаты, полученные в физическом эксперименте.

4.7 Анализ диаграмм обратного рассеяния

Для количественного анализа диаграмм обратного рассеяния исследованных крыльев используется метод сравнения результатов, осредненных по выбранному диапазону углов. Выбранный шаг для разбиения на диапазоны осреднения – 15° .

На рисунках 4.21 – 4.23 представлено сравнение осредненных диаграмм обратного рассеяния, полученных различными методами. Осреднение производится по формуле:

$$\bar{\sigma}(\alpha_{\text{ср}_i}) = \frac{\sum_{j=1}^n \sigma(\alpha_j)(\alpha_{j+1} - \alpha_j)}{\alpha_{i+1} - \alpha_i}, \quad \forall j : \alpha_j \in [\alpha_i : \alpha_{i+1}), \quad i = 1, \dots, k, \quad (4.2)$$

$\alpha_1 = -7.5^\circ$, $\alpha_{k+1} = -172.5^\circ$ в виду симметричности крылового профиля и полученных решений.

На рисунке 4.24 представлены погрешности осредненных результатов, приведенных ранее: $|\bar{\sigma}(\alpha_{\text{ср. эксп}_i}) - \bar{\sigma}(\alpha_{\text{ср. метод}_i})|$. При вычислении погрешности за эталон брались экспериментальные данные. Численные значения погрешностей сведены в таблицу 4.1.

Из полученных результатов видно, что максимальная погрешность соответствует решению на тонком экране при 0° и 180° . Погрешности для прямого метода и метода снесения граничного условия принимают схожие значения.

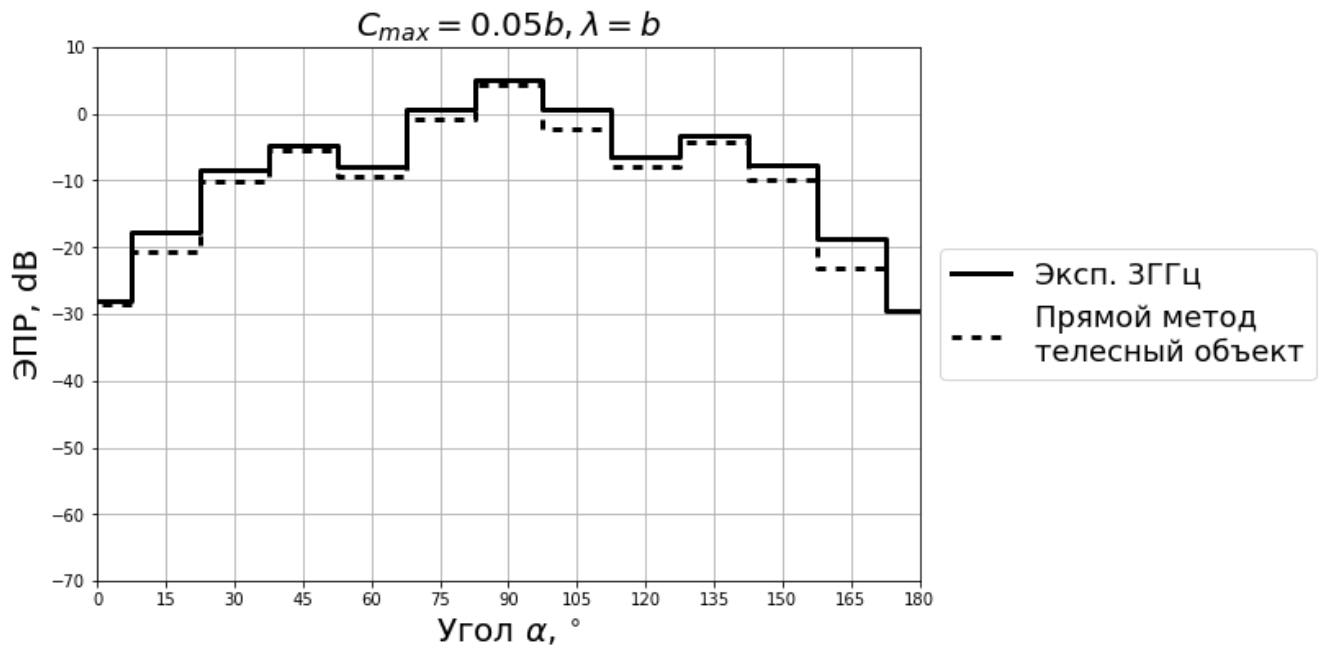


Рисунок 4.21 — Средние значения ЭПР при обратном рассеянии, полученные прямым методом и по результатам эксперимента

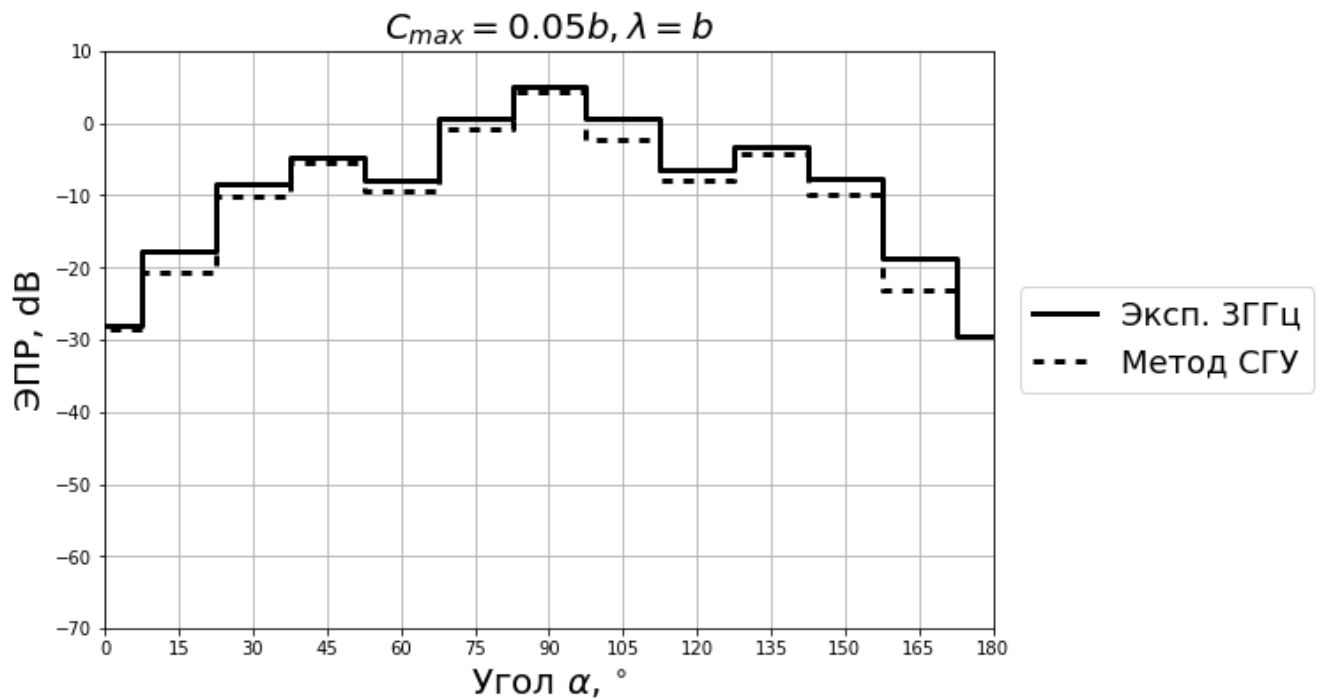


Рисунок 4.22 — Средние значения ЭПР при обратном рассеянии, полученные методом снесения граничного условия и по результатам эксперимента

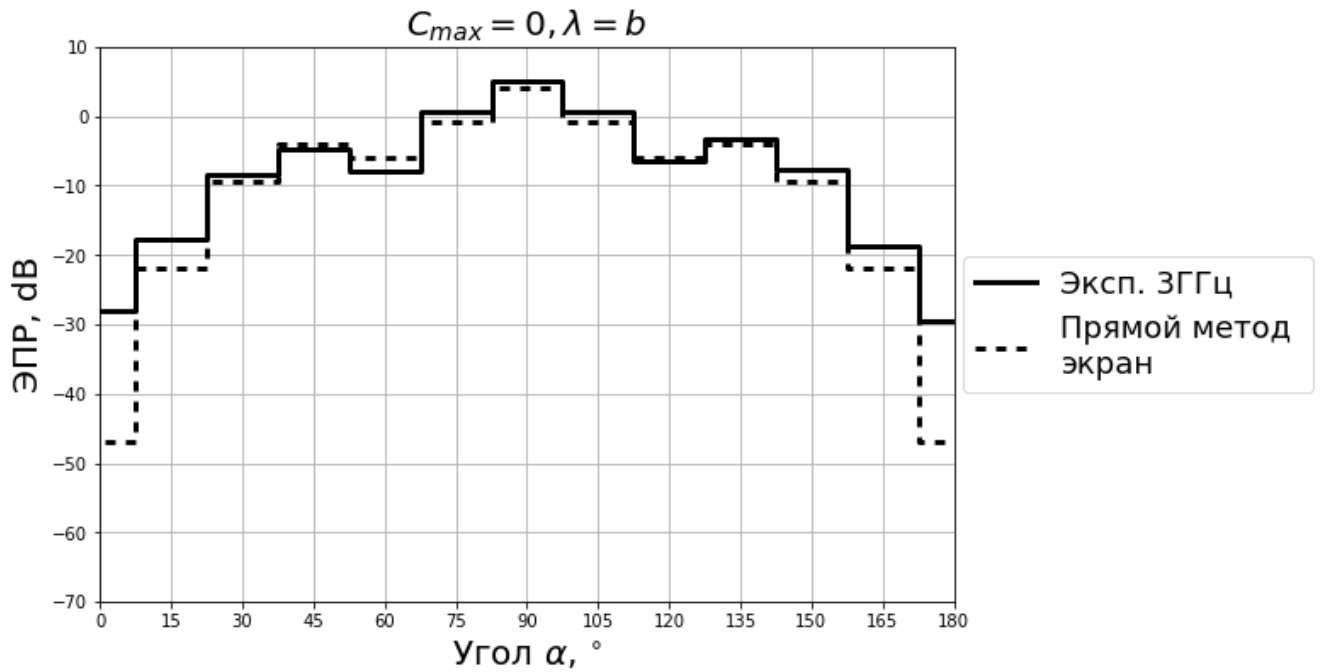


Рисунок 4.23 — Средние значения ЭПР при обратном рассеянии, полученные прямым методом на тонком экране и по результатам эксперимента

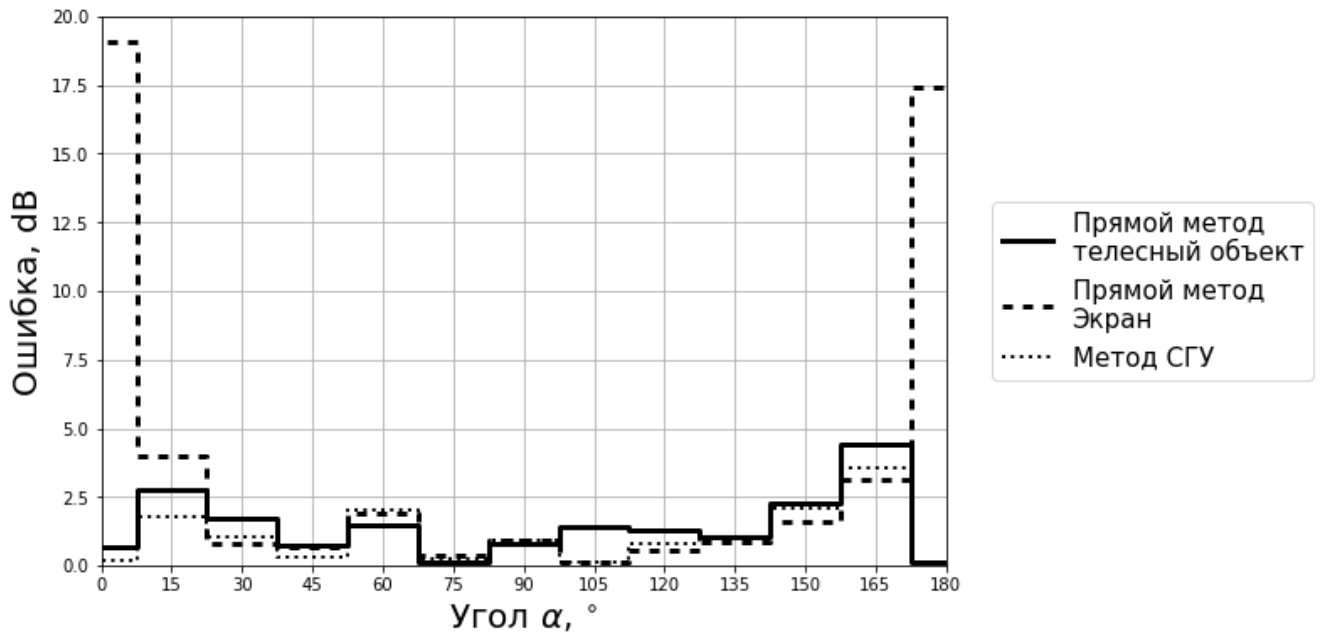


Рисунок 4.24 — Погрешность результатов, полученных различными методами, относительно результатов эксперимента

Таблица 4.1 — Погрешность осредненных значений ЭПР при обратном рассеянии

Средний угол	Экран	Прямой метод	Метод СГУ
0.0	19.06	0.66	0.20
15.0	3.97	2.77	1.76
30.0	0.82	1.70	1.02
45.0	0.67	0.72	0.31
60.0	1.92	1.47	2.02
75.0	0.35	0.14	0.25
90.0	0.92	0.79	0.90
105.0	0.13	1.39	0.13
120.0	0.55	1.26	0.81
135.0	0.88	1.06	0.98
150.0	1.60	2.25	2.10
165.0	3.13	4.41	3.56
180.0	17.45	0.14	0.06

4.8 Анализ рассеянных полей для различных углов облучения

Для крылового профиля с относительной толщиной 5% для более подробного анализа рассеянных полей получены решения задачи рассеяния для нескольких значений угла облучения в трёх постановках: прямым методом в полной постановке, методом снесения граничного условия и прямым методом в постановке тонкого экрана. В результате решения построены поля модулей действительной и мнимой частей напряженности электрического поля в ближней зоне исследуемого объекта, а так же диаграммы прямого рассеяния для выбранного набора углов.

На рисунках 4.25 - 4.28 представлены модули действительной и мнимой частей напряженности электрического поля для углов облучения: 0, 50, 65, 90 градусов. Из полученных результатов видно хорошее согласование решений, полученных прямым методом в полной постановке и методом снесения граничного условия во всех исследуемых случаях. В случае тонкого экрана наблюдается нулевое решение для угла облучения равного 0 градусам.

Для оценки характеристик дальнего поля для указанных направлений облучения были получены диаграммы прямого рассеяния, представленные на рисунках 4.29 - 4.32. По полученным данным можно сделать следующий вывод: при решении задачи прямым методом на тонком экране наблюдаются нулевые значения ЭПР в направлениях, лежащих в плоскости экрана, чего не наблюдается при решении прямой задачи в полной постановке и методом снесения граничного условия.

Для количественного анализа, были вычислены осредненные значения ЭПР прямого рассеяния в диапазоне углов $[0^\circ : 360^\circ]$ с шагом осреднения 15° . Диапазоны углов $[352.5^\circ : 360^\circ]$ и $[0^\circ : 7.5^\circ]$ объединены. Осреднение проводится по формуле 4.2.

На рисунках 4.33 - 4.36 приведены диаграммы ошибок относительно решения прямым методом в полной постановке: $|\bar{\sigma}(\alpha_{\text{ср. прям.}}) - \bar{\sigma}(\alpha_{\text{ср. метод}})|$. В таблицах 4.2 - 4.3 приведены численные значения ошибок отображенных на вышеуказанных диаграммах.

При рассмотрении диаграмм прямого рассеяния выявлено, что при всех углах облучения тонкий экран не рассеивает в плоскости в которой лежит (ЭПР в направлениях вектора наблюдения, параллельных плоскости экрана практически нулевая), а при решении задачи в прямой постановке для телесного объекта такое рассеяние наблюдается. Предложенный метод позволяет учесть это рассеяние.

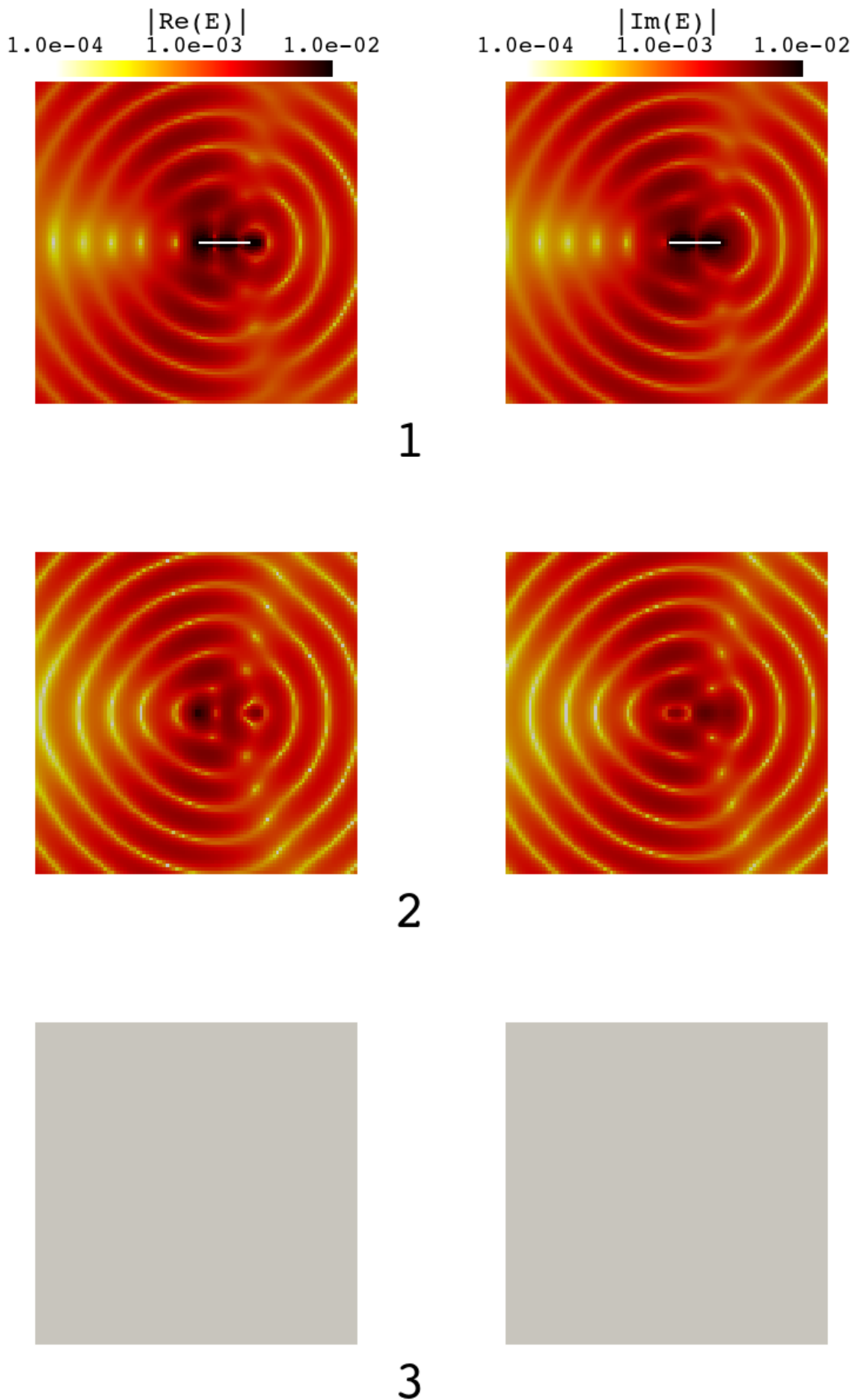


Рисунок 4.25 — Сравнение модулей действительной и мнимой частей напряженности электрического поля. 1 – Прямой метод, 2– Метод СГУ, 3 – Прямой метод на экране. Угол облучения 0°

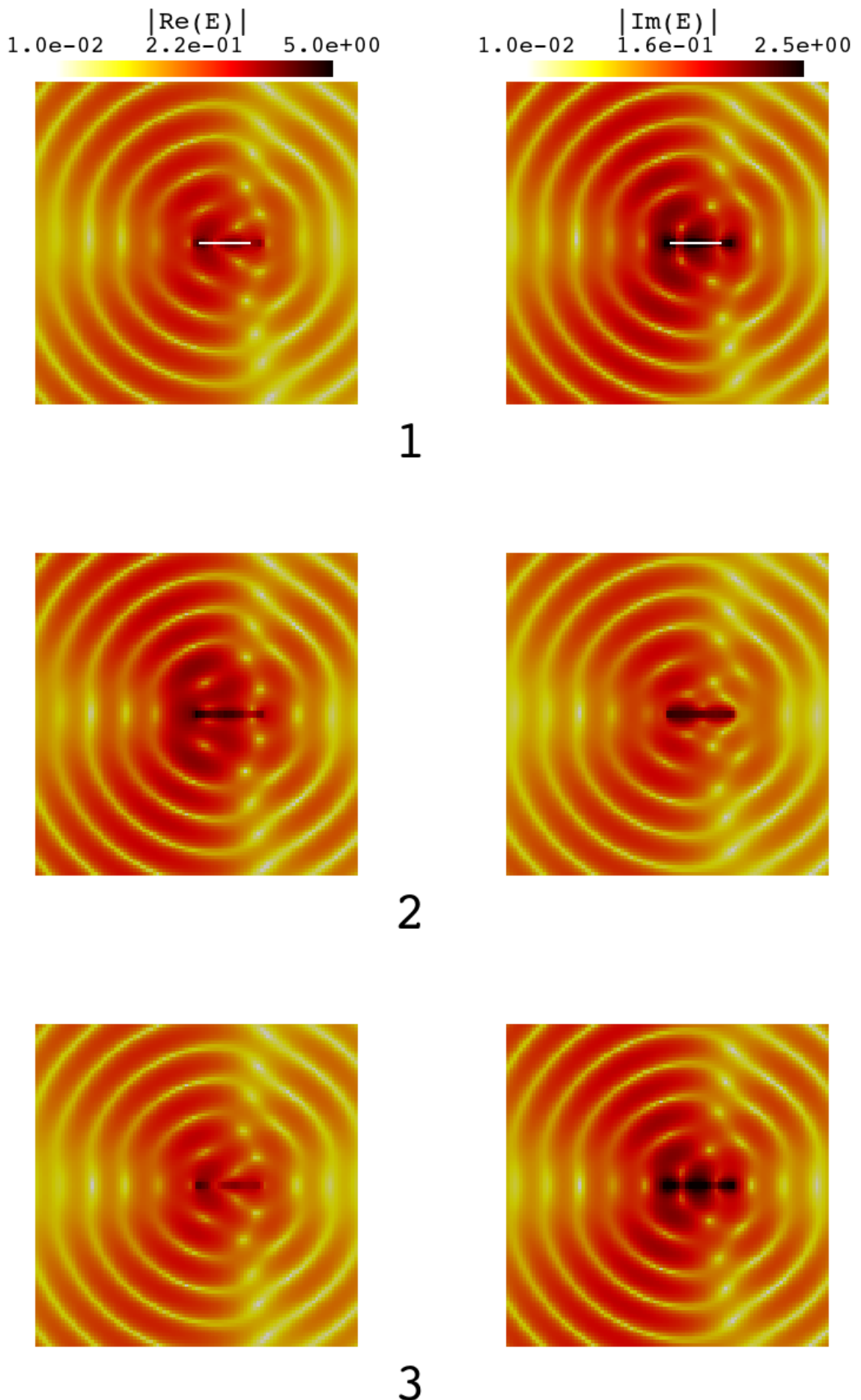


Рисунок 4.26 — Сравнение модулей действительной и мнимой частей напряженности электрического поля. 1 – Прямой метод, 2– Метод СГУ, 3 –Прямой метод на экране. Угол облучения 50°

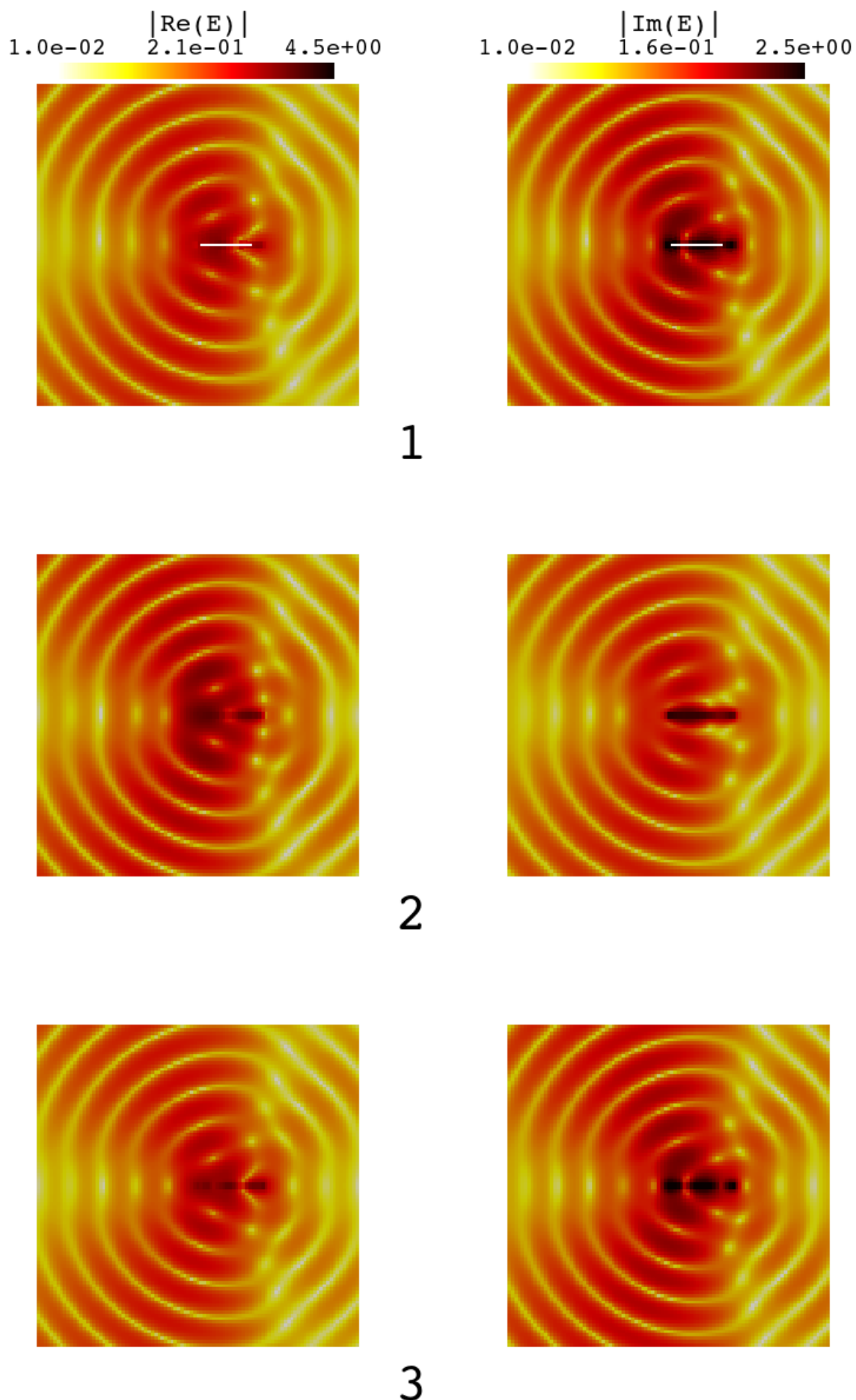


Рисунок 4.27 — Сравнение модулей действительной и мнимой частей напряженности электрического поля. 1 – Прямой метод, 2– Метод СГУ, 3 –Прямой метод на экране. Угол облучения 65°

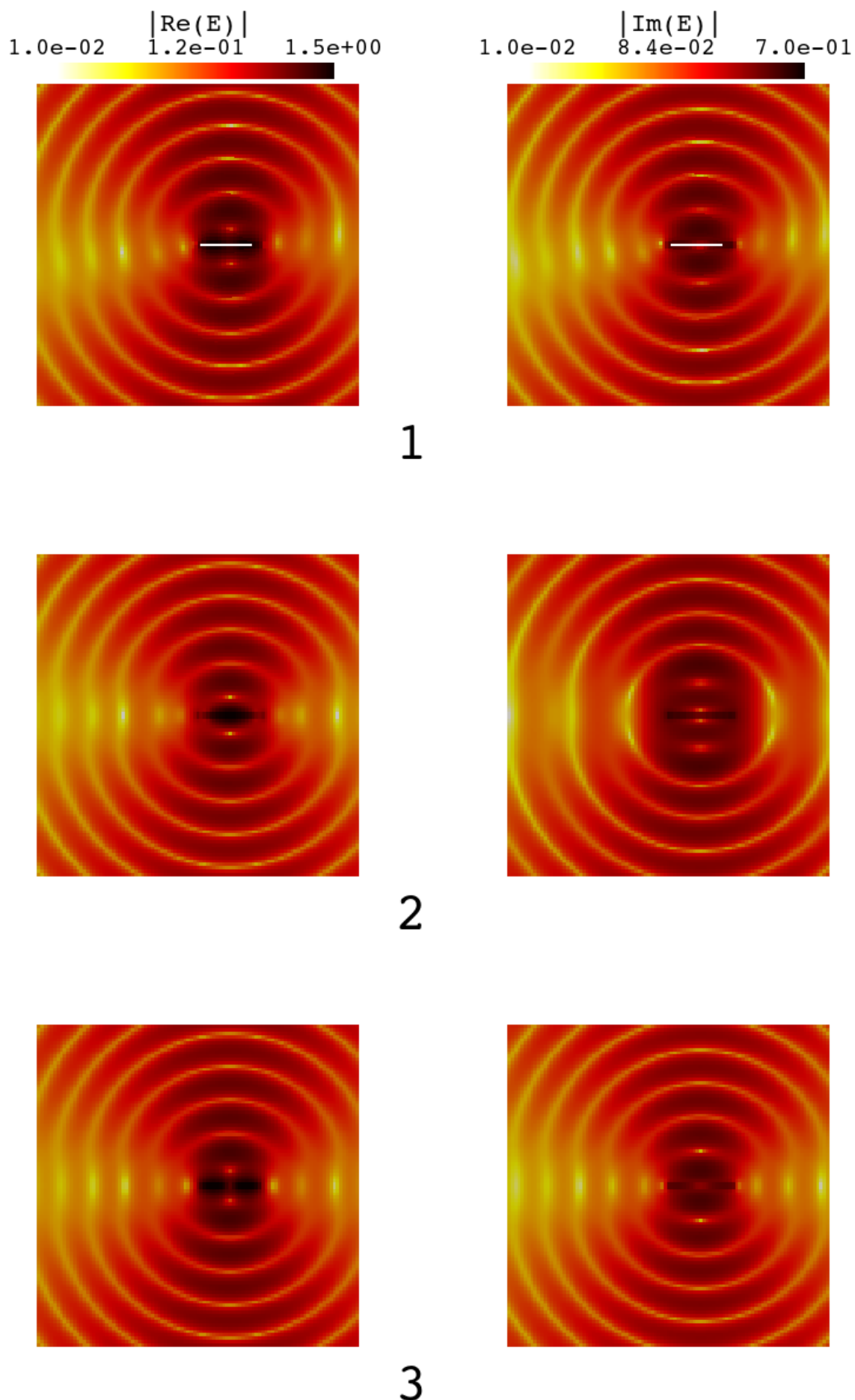


Рисунок 4.28 — Сравнение модулей действительной и мнимой частей напряженности электрического поля. 1 – Прямой метод, 2– Метод СГУ, 3 –Прямой метод на экране. Угол облучения 90°

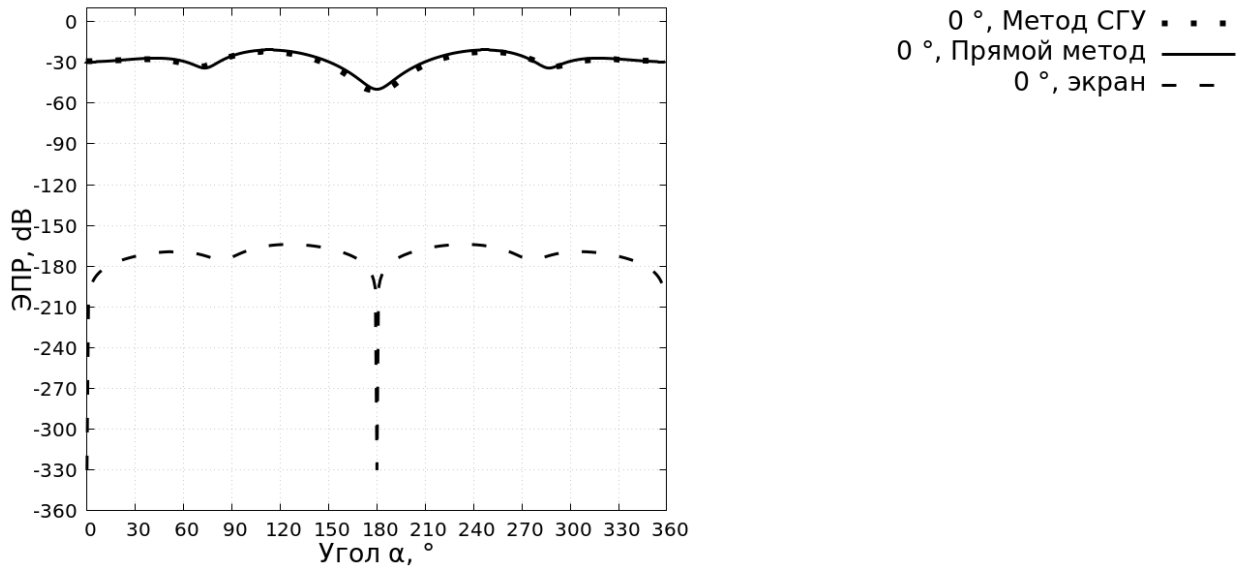


Рисунок 4.29 — Сравнение диаграмм прямого рассеяния при угле облучения 0°

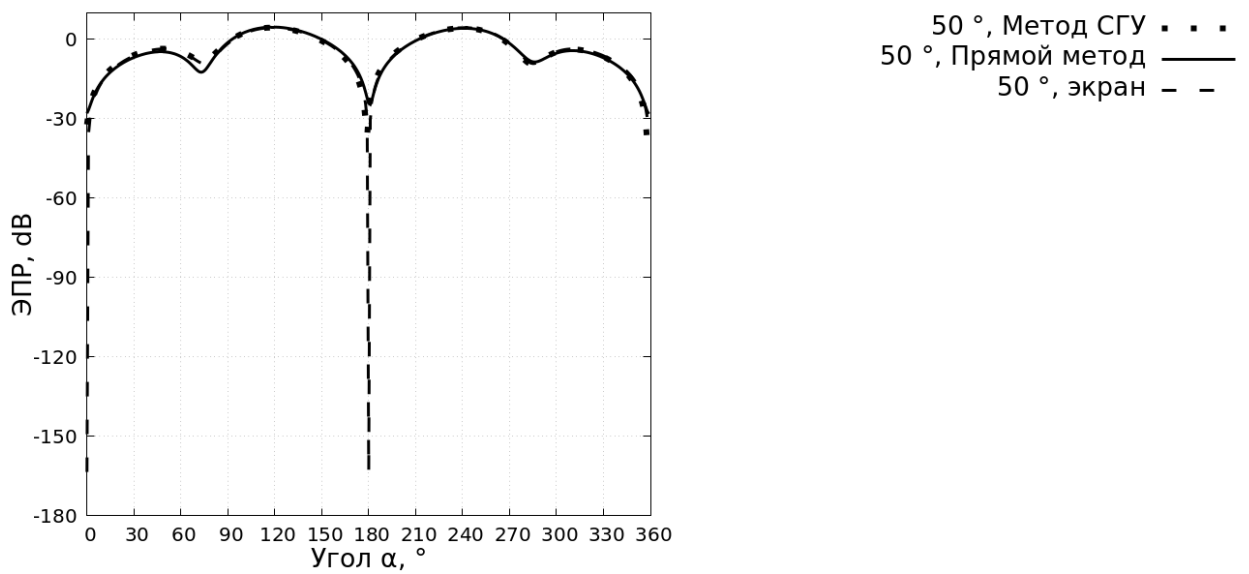


Рисунок 4.30 — Сравнение диаграмм прямого рассеяния при угле облучения 50°

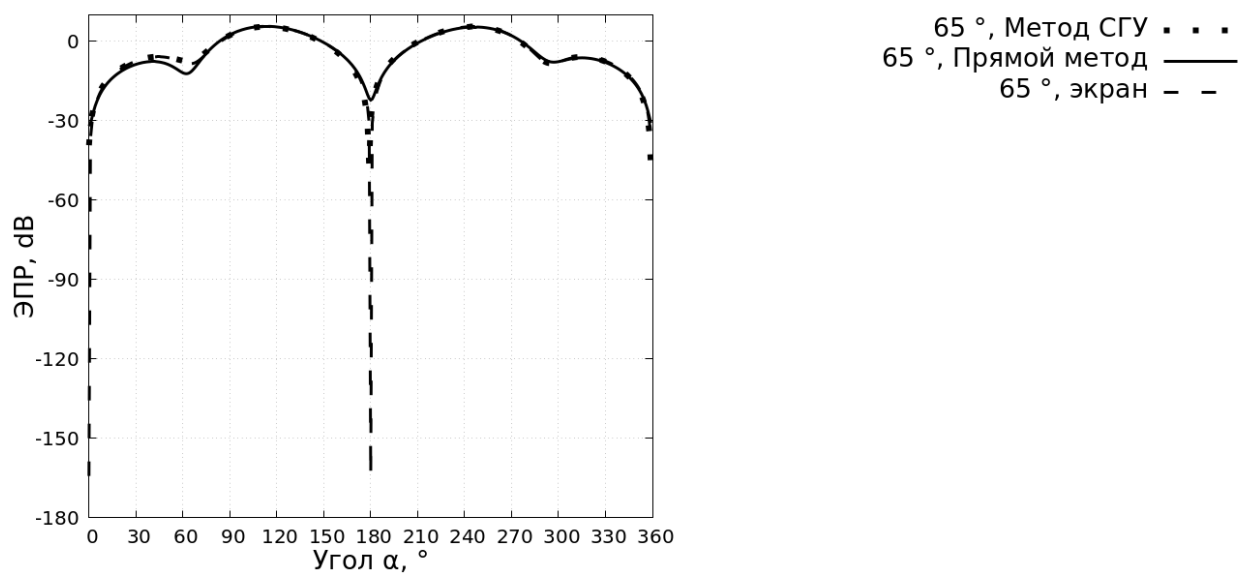


Рисунок 4.31 — Сравнение диаграмм прямого рассеяния при угле облучения 65°

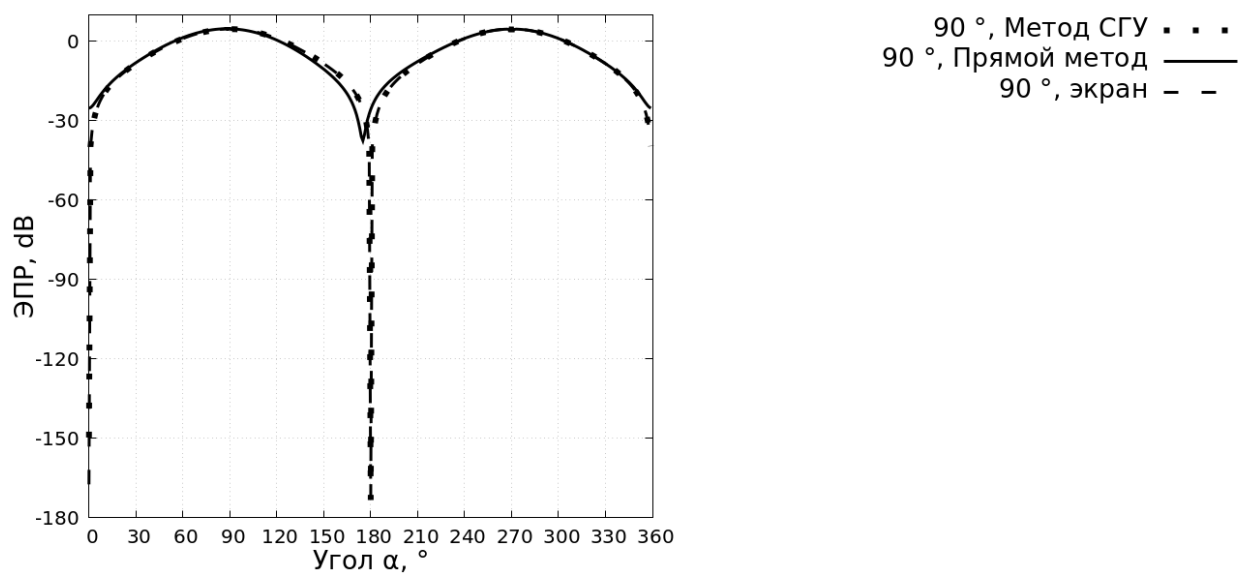


Рисунок 4.32 — Сравнение диаграмм прямого рассеяния при угле облучения 90°

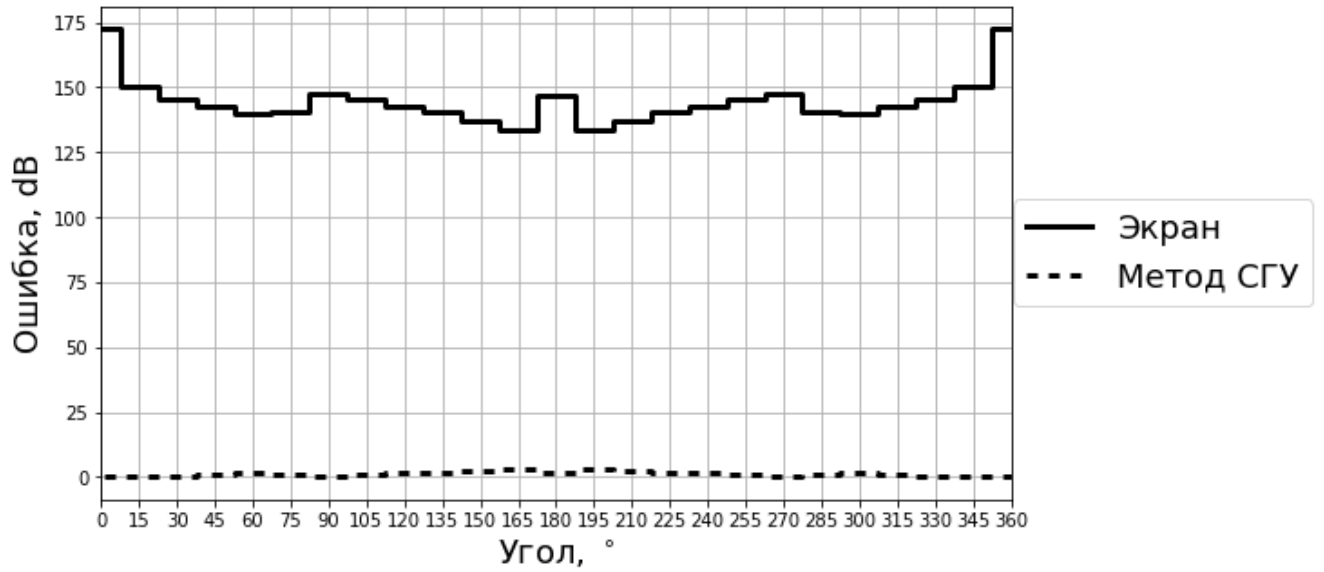


Рисунок 4.33 — Погрешность осредненных значений ЭПР при прямом рассеяния при облучении с 0°

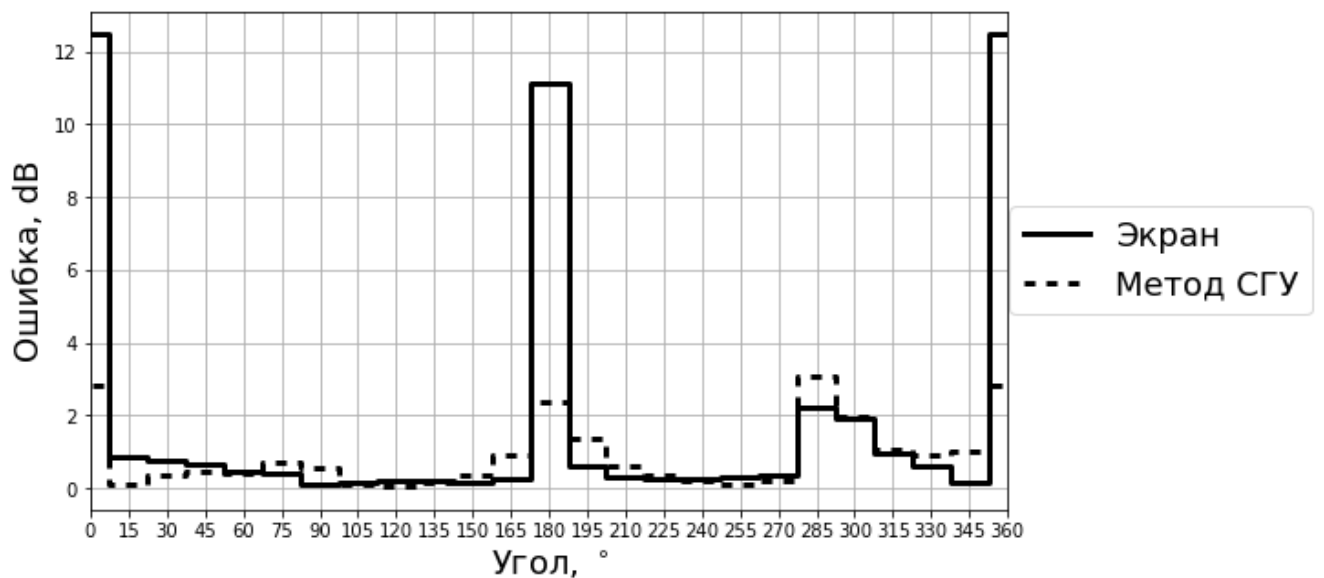


Рисунок 4.34 — Погрешность осредненных значений ЭПР при прямом рассеяния при облучении с 50°

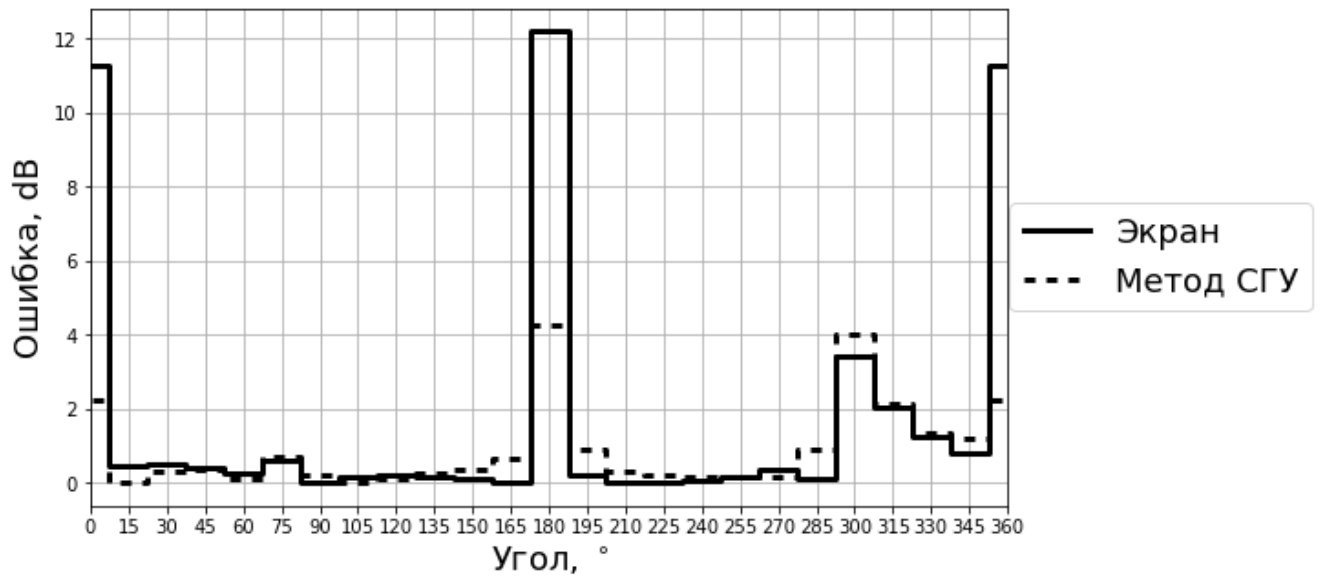


Рисунок 4.35 — Погрешность осредненных значений ЭПР при прямом рассеяния при облучении с 65°

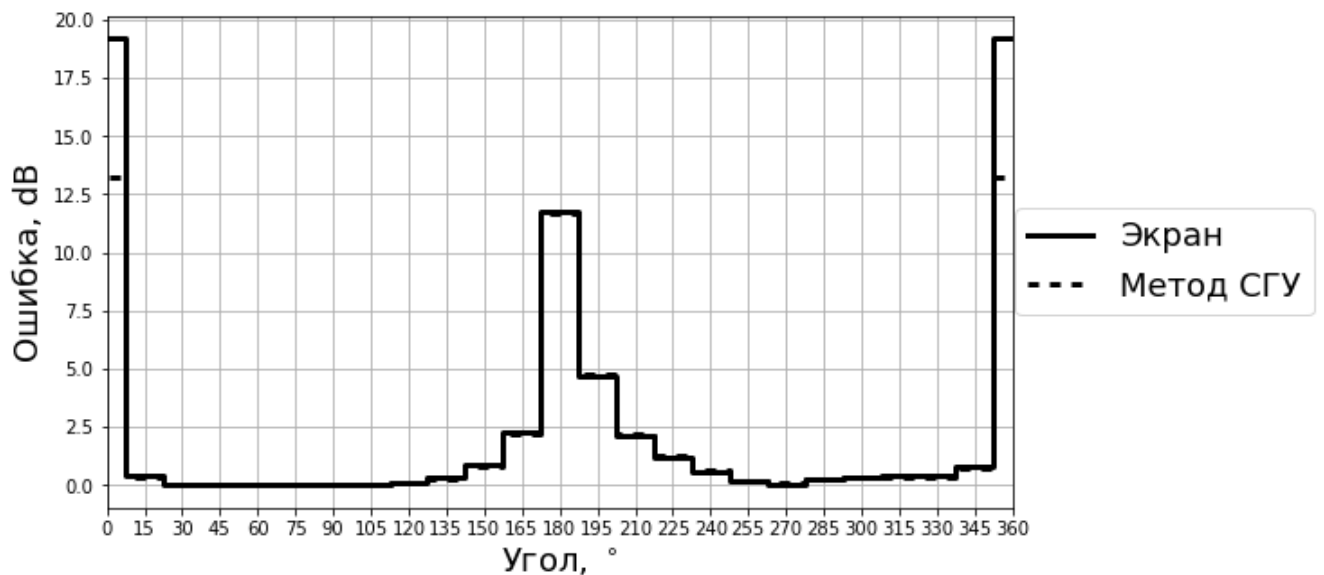


Рисунок 4.36 — Погрешность осредненных значений ЭПР при прямом рассеяния при облучении с 90°

Таблица 4.2 — Погрешность осредненных значений ЭПР при прямом
рассеянии

Сред. угол	Экран 0 °	Метод СГУ 0 °	Экран 50 °	Метод СГУ 50 °
0	172.65	0.49	12.48	2.82
15	150.23	0.22	0.88	0.09
30	145.23	0.42	0.75	0.34
45	142.83	1.14	0.66	0.44
60	140.16	1.37	0.48	0.42
75	140.24	1.1	0.43	0.69
90	147.49	0.13	0.09	0.57
105	145.32	1.08	0.18	0.12
120	142.88	1.5	0.21	0.05
135	140.41	1.8	0.19	0.18
150	137.38	2.25	0.18	0.37
165	133.8	3.3	0.27	0.93
180	146.99	1.82	11.15	2.38
195	133.8	3.3	0.62	1.35
210	137.38	2.25	0.33	0.59
225	140.41	1.8	0.25	0.35
240	142.88	1.5	0.24	0.22
255	145.32	1.08	0.31	0.12
270	147.49	0.13	0.36	0.23
285	140.24	1.1	2.2	3.09
300	140.16	1.37	1.91	1.97
315	142.83	1.14	0.98	1.09
330	145.23	0.42	0.62	0.94
345	150.23	0.22	0.16	0.99
360	172.65	0.49	12.48	2.82

Таблица 4.3 — Погрешность осредненных значений ЭПР при прямом
 рассеянии

Сред. угол	Экран 65 °	Метод СГУ 65 °	Экран 90 °	Метод СГУ 90 °
0	11.29	2.22	19.20	13.23
15	0.47	0.00	0.40	0.33
30	0.49	0.30	0.04	0.05
45	0.40	0.34	0.03	0.03
60	0.26	0.12	0.02	0.02
75	0.59	0.70	0.01	0.03
90	0.03	0.23	0.03	0.03
105	0.15	0.00	0.02	0.02
120	0.19	0.13	0.07	0.06
135	0.17	0.24	0.33	0.26
150	0.13	0.38	0.87	0.78
165	0.02	0.65	2.27	2.20
180	12.22	4.28	11.74	11.68
195	0.20	0.92	4.70	4.78
210	0.03	0.33	2.11	2.20
225	0.01	0.20	1.19	1.25
240	0.05	0.16	0.59	0.60
255	0.16	0.17	0.21	0.17
270	0.34	0.15	0.05	0.11
285	0.12	0.89	0.24	0.28
300	3.41	4.00	0.37	0.36
315	2.05	2.12	0.41	0.34
330	1.23	1.34	0.40	0.31
345	0.81	1.20	0.82	0.75
360	11.29	2.22	19.20	13.23

4.9 Выводы

Подведем итоги анализа результатов расчетов, приведенных в главе 4.

1. Решение задачи на телесном крыле в исходной постановке хорошо согласуются с данными физического эксперимента для всех углов облучения.
2. Даже для профиля с относительной толщиной 5% имеются достаточно широкие диапазоны направлений угла облучения (15° вокруг углов 0° и 180°), при которых простая замена телесного крыла тонкой пластиной приводит к существенному изменению результата. Эти углы соответствует облучению со стороны передней и задней кромок. Для профиля с относительной толщиной 25% эти диапазоны углов расширяются.
3. При облучении с вектором \vec{k} , образующем с плоскостью крыла угол больший 30° , для крыла с толщиной 5% все кривые достаточно близки друг к другу, что свидетельствует о малом влиянии телесности в этом случае. Для профиля с толщиной 25% различие уже заметное.
4. Предложенный метод со снесением граничного условия позволяет получить значения ЭПР при облучении со стороны передней и задней кромок, хорошо согласующиеся со значениями, полученными в расчете для исходной точной формы и в эксперименте. Это позволяет сделать вывод, что предложенный метод позволяет приближенно учесть телесность профиля при облучении с этих направлений (при том, что в задаче рассеяния на тонком экране без снесения граничного условия здесь получается существенно другой результат).
5. Надо отметить, что имеются и диапазоны углов (около 60° и 120°), где метод со снесением граничного условия дает результаты, почти идентичные результатам для тонкого экрана, но отличающиеся от численных результатов для телесного крыла и экспериментальных данных. При этом для профиля с толщиной 5% отличие от численных результатов для телесного крыла и экспериментальных данных невелико (до 5 дБ в небольшом диапазоне углов). Для профиля с толщиной 25% различие здесь становится более существенным и по величине и по диапазону углов. Но такое ухудшение результатов, получаемых предложенным методом, при увеличении толщины профиля является

- естественным. Для более толстых профилей метод, по-видимому, уже не применим.
6. При рассмотрении диаграмм прямого рассеяния выявлено, что при всех углах облучения тонкий экран не рассеивает в плоскости в которой лежит (ЭПР в направлениях вектора наблюдения, параллельных плоскости экрана практически нулевая), а при решении задачи в прямой постановке для телесного объекта такое рассеяние наблюдается. Предложенный метод позволяет учесть это рассеяние.
 7. Проведенная количественная оценка характеристик рассеянного поля в дальней зоне методом осреднения значений ЭПР при обратном и прямом рассеянии показала хорошее соответствие результатов, полученных методом снесения граничного условия с результатами физического эксперимента и результатов полученных прямым методом.

Таким образом, проведенное тестирование показало, что предложенный метод позволяет учесть телесность облучаемого объекта при решении граничного интегрального уравнения на срединной поверхности тела. Существуют диапазоны углов облучения, для которых простая замена тела тонким экранам не работает, в то время как предложенный метод дает правильные значения ЭПР. В то же время предложенный метод позволяет получать правильные результаты на более грубых сетках и следовательно при меньших вычислительных затратах, чем при решении методом граничных интегральных уравнений краевой задачи на исходной поверхности.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Разработан метод моделирования рассеяния монохроматической электромагнитной волны на идеально проводящих телах малой толщины, основанный на переносе граничного условия на срединную поверхность и сведении задачи к граничным интегро-дифференциальным уравнениям с сильно сингулярными интегралами.
2. Построена численная схема решения системы граничных интегро-дифференциальных уравнений с применением методов кусочно-постоянных аппроксимаций и коллокации.
3. Построена квадратурная формула аппроксимации поверхностной дивергенции векторной функции, заданной на поверхности в узлах структурированной сетки.
4. Разработан комплекс программ, реализующий разработанный численный алгоритм и предназначенный для численного решения задач рассеяния монохроматической электромагнитной волны на идеально проводящих телах малой толщины.
5. Проведена верификация разработанного метода путем сравнения с результатами физического эксперимента.

Список литературы

1. *Боголюбов, А. Н.* Метод конечных элементов в задаче волноводной дифракции / А. Н. Боголюбов, А. Л. Делицын, А. В. Лавренова // Электромагнитные волны и электронные системы. — 2004. — Т. 9, № 8. — С. 22—25.
2. *Боголюбов, А. Н.* Применение метода конечных элементов в волноводных задачах дифракции / А. Н. Боголюбов, А. Л. Делицын, А. В. Лавренова // Радиотехника. — 2004. — Т. 12. — С. 20—26.
3. *Боголюбов, А. Н.* Математическое моделирование дифракции на неоднородности в волноводе с использованием смешанных конечных элементов / А. Н. Боголюбов, А. В. Лаврёнова // Матем. моделирование. — 2008. — Т. 20, № 2. — С. 122—128.
4. *Даева, С. Г.* О численном решении краевой задачи Неймана для уравнения Гельмгольца методом гиперсингулярных интегральных уравнений / С. Г. Даева, А. В. Сетуха // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии (Электронный научный журнал). — 2015. — Т. 16. — С. 421—435.
5. *Свешников, А. Г.* Журн. вычисл. матем. и матем. физики / А. Г. Свешников, А. Н. Боголюбов. — 1974.
6. *Цветков, В.* Метод конечных элементов для решения одного класса трехмерных внешних задач электродинамик / В. Цветков // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1992. — Т. 32, № 7. — С. 1035—1045.
7. *Taflove, A.* Advances in FDTD Computational Electromagnetics / A. Taflove, S. G. Johnson, A. Oskooi. — Artech House, 2013.
8. *Adams, R.* Physical and Analytical Properties of a Stabilized Electric Field Integral Equation / R. Adams // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. — 2004. — Vol. 52, no. 2. — P. 362—372.
9. *Adana, F. S. de.* Practical Applications of Asymptotic Techniques in Electromagnetics / F. S. de Adana, O. Gutierrez, I. Gonzalez. — ARTECHHOUSE, 2011.

10. *Aminian, A.* Spectral FDTD: a novel technique for the analysis of oblique incident plane wave on periodic structures / A. Aminian, Y. Rahmat-Samii // IEEE Trans. Antennas and Propagation. — 2006. — Vol. 54. — P. 1818.
11. *Bleszynski, E.* AIM: Adaptive integral method for solving large-scale electromagnetic scattering and radiation problems / E. Bleszynski, M. Bleszynski, T. Jaroszewicz // Radio Science. — 1996. — Vol. 31, no. 5. — P. 1225—1251.
12. *Bogaert, I.* A low frequency stable plane wave addition theorem / I. Bogaert, F. Olyslager // Journal of Computational Physics. — 2009. — Vol. 228, no. 4. — P. 1000—1016.
13. *Bondeson, A.* Computational Electromagnetics / A. Bondeson, T. Rylander, P. Ingelstrom. — Springer Science, 2005. — 222 p.
14. *Bonnet, P.* Berenger absorbing boundary condition with time finite-volume scheme for triangular meshes / P. Bonnet, F. Poupaud // Appl. Numer. Math. — 1997. — Vol. 25, no. 4. — P. 333—354.
15. *Brodwin, M. E.* Numerical solution of steady-state electromagnetic scattering problems using the time-dependent Maxwell's equations / M. E. Brodwin, A. Taflove // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. — 1975. — Vol. 23. — P. 623—630.
16. *Chew, W. C.* A FAFFA-MLFMA algorithm for electromagnetic scattering / W. C. Chew, T. J. Cui, J. M. Song // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. — 2002. — Vol. 50, no. 11. — P. 1641—1649.
17. *Chew, W. S.* Integral Equation Methods for Electromagnetic and Elastic Waves / W. S. Chew, M. S. Tong, B. Hu. — San Rafael, CA, USA : Morgan, Claypool, 2008.
18. *Colton, D.* Integral Equation Methods in Scattering Theory / D. Colton, R. Kress. — SIAM, 2013. — 286 p.
19. *Daeva, S. G.* Numerical simulation of scattering of acoustic waves by inelastic bodies using hypersingular boundary integral equation / S. G. Daeva, A. Setukha // AIP Conference Proceedings. — 2015. — Vol. 1648.
20. *Davydov, A.* A Method for the Numerical Solution of Problems of Diffraction of Electromagnetic Waves by Nonclosed Surfaces of Arbitrary Shape / A. Davydov, E. Zakharov, Y. Pimenov // Dokl. Akad. Nauk. — 1984. — Vol. 276, no. 1. — P. 96—100.

21. *Ergul, O.* The Multilevel Fast Multipole Algorithm (MLFMA) for Solving Large-Scale Computational Electromagnetics Problems / O. Ergul, L. Gurel. — John Wiley, Sons, Ltd. 20, 2014.
22. Finite Element Method in Microwaves: A Selected Bibliography / R. Coccioli [et al.] // IEEE Antennas and Propagation Magazine. — 1996. — Vol. 38, no. 6. — P. 34—47.
23. *Gibson, W.* The method of moments in electromagnetics / W. Gibson. — Boca Raton : Chapman, Hall, CRC, 2008.
24. Handbook of Numerical Analysis. Vol. 2 / ed. by P. G. Ciarlet, J. L. Lions. — Elsevier, 1991.
25. High-order mixed RWG basis functions for electromagnetic applications / W. Cai [et al.] // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. — 2001. — Vol. 49, no. 7. — P. 1295—1303.
26. *Ho, T. Q.* / T. Q. Ho, B. Beker // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. — 1991. — Vol. 39, no. 6. — P. 1021.
27. *Hoenl, H.* Theorie der Beugung / H. Hoenl, A. Maue, K. Westpfahl. — Berlin, Heidelberg : Springer, 1961.
28. *Ise, K.* / K. Ise, K. Inoue, M. Koshiba // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. — 1990. — Vol. 38, no. 9. — P. 1032.
29. *Jin, J.-M.* The Finite Element Method in Electromagnetics, 3rd Edition / J.-M. Jin. — Wiley-IEEE Press, 2014. — 876 p.
30. *Kanee, Y.* Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media / Y. Kanee // Antennas and Propagation. — Vol. 14. — P. 302—307.
31. *Lebedeva, S. G.* On the Numerical Solution of a Complete Two-Dimensional Hyper-singular Integral Equation by the Method of Discrete Singularities / S. G. Lebedeva, A. V. Setukha // Differential Equations. — 2013. — Vol. 49, no. 2. — P. 224—234.
32. *Lee, J.* Loop star basis functions and a robust preconditioner for EFIE scattering problems / J. Lee, R. Lee, R. Burkholder // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. — 2003. — Vol. 51, no. 8. — P. 1855—1863.

33. *Lifanov, I. K.* Singular integral equations and discrete vortices / I. K. Lifanov. — Nethederlands : VSP, 1996.
34. *Lifanov, I. K.* Flow around permeable and thick airfoils and numerical solution of singular integral equations / I. K. Lifanov, A. F. Matveev, N. M. Molyakov // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modell. — 1992. — Vol. 4. — P. 104—144.
35. *Lifanov, I. K.* Hypersingular Integral Equations and Their Applications / I. K. Lifanov, L. N. Poltavslui, G. M. Vainikko. — Chapman, Hall CRC, 2004.
36. *Madsen, N. K.* A three-dimensional modified finite volume technique for Maxwell's equations / N. K. Madsen, R. W. Ziolkowski // Electromagnetics. — 1990. — Vol. 10. — P. 147—161.
37. MLFMA, RPFMA, and FAFFA Algorithms for EM Scattering by Very Large Structures / T. Cui [et al.] // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. — 2004. — Vol. 52, no. 3. — P. 759—770.
38. *Mur, G.* Absorbing Boundary Conditions for the Finite-Difference Approximation of the Time-Domain Electromagnetic-Field Equations / G. Mur // IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility. — 1981. — Vol. EMC—23, no. 4. — P. 377—382.
39. On the Nystrom Solutions for Electromagnetic Scattering by Thin Conducting Objects, / M. Tong [et al.] // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. — 2013. — Vol. 61, no. 11. — P. 5813—5817.
40. *Peterson, A. F.* Computational Methods for Electromagnetics / A. F. Peterson, S. L. Ray, R. Mittra. — Wiley IEEE Press, 1998. — 592 p.
41. *Rao, S.* Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape / S. Rao, D. Wilton, A. Glisson // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. — 1982. — Vol. AP—30, no. 3. — P. 409—418.
42. *Samokhin, A.* Stationary iteration methods for solving 3D electromagnetic scattering problems / A. Samokhin, Y. Shestopalov, K. Kobayshi // Applied Mathematics and Computation. — 2013. — Vol. 222. — P. 107—122.
43. *Sankaran, K.* Cell-centered finite-volume-based perfectly matched layer for time-domain Maxwell system / K. Sankaran, C. Fumeaux, R. Vahldieck // IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech. — 1997. — Vol. 25, no. 4. — P. 333—354.

44. *Sankaran, K.* Finite-volume Maxwellian absorber on unstructured grid / K. Sankaran, C. Fumeaux, R. Vahldieck // IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech. — 2006. — P. 169—172.
45. *Sankaran, K.* Spherical perfectly matched absorber for finite-volume 3-D domain truncatio / K. Sankaran, C. Fumeaux, R. Vahldieck // IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech. — 2007. — Vol. 55, no. 12.
46. *Sankaran, K.* Uniaxial and radial anisotropy models for finite-volume Maxwellian absorber / K. Sankaran, C. Fumeaux, R. Vahldieck // IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech. — 2006. — Vol. 54, no. 12. — P. 4297—4304.
47. *Setukha, A. V.* Shifting the Boundary Conditions to the Middle Surface in the Numerical Solution of Neumann Boundary Value Problems Using Integral Equations / A. V. Setukha // Springer International Publishing AG 2017, C. Constanda et al. (eds.), Integral Methods in Science and Engineering. — 2017. — Vol. 2. — P. 233—243.
48. *Setukha, A. V.* The Three Dimensional Neumann Problem with Generalized Boundary Conditions and the Prandtl Equation / A. V. Setukha // Differential Equations. — 2003. — Vol. 39, no. 9. — P. 1249—1262.
49. *Shankar, V.* A time-domain, finite-volume treatment for the Maxwell equations / V. Shankar, A. H. Mohhammadian, W. F. Hall // Electromagnetics. — 1990. — Vol. 10. — P. 127—145.
50. *Stavtsev, S. L.* Matrix and Integral Equation for Electromagnetic Scattering by a Perfectly Conducting Object / S. L. Stavtsev // Constanda C., Dalla Riva M., Lamberti P., Musolino P. (eds) Integral Methods in Science and Engineering. — Birkhauser, Cham, 2017. — Vol. 2.
51. *Taflove, A.* Computational Electrodynamics:The Finite-Difference Time-Domain Method / A. Taflove, S. C. Hagness. — Norwood, MA : Artech, 2000.
52. *Tong, M.* Multilevel fast,multipole algorithm for elastic wave scattering by large three-dimensional objects / M. Tong, W. Chew // Journal of Computational Physics. — 2009. — Vol. 228, no. 3. — P. 921—932.

53. *Trintinalia L. and Ling, H.* First Order Triangular Patch Basis Functions for Electromagnetic Scattering Analysis / H. Trintinalia L. and Ling // Journal of Electromagnetic Waves and Applications. — 2001. — Vol. 15, no. 11. — P. 1521—1537.
54. *Ufimtsev, P. Y.* Theory of edge diffraction in electromagnetics: Origination and validation of the physical theory of diffraction / P. Y. Ufimtsev. — 2009.
55. *Umashankar, K. R.* A novel method to analyze electromagnetic scattering of complex objects / K. R. Umashankar, A. Taflove // IEEE Trans. Electromagn. Compat. — 1982. — Vol. 24. — P. 397—405.
56. *Volakis, J.* Integral equation methods for electromagnetics / J. Volakis, S. Kubilay. — SciTech Publishing, 2012. — 560 p.
57. *Wang, P.* Analysis of Electrical Large Radiation Problem With Precorrected Multilevel Fast Multipole Algorithm / P. Wang, Y. Xie, R. Yang // IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters. — 2007. — Vol. 6, no. 11. — P. 340—343.
58. *Yla-Oijala, P.* Calculation of CFIE impedance matrix elements with RWG and $n \times$ RWG functions / P. Yla-Oijala, M. Taskinen // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. — 2003. — Vol. 51, no. 8. — P. 1837—1846.
59. *Zakharov, E.* Numerical solution of 3D problems of electromagnetic wave diffraction on a system of ideally conducting surfaces by the method of hypersingular integral equations / E. Zakharov, G. Ryzhakov, A. Setukha // Differential Equations. — 2014. — Vol. 50, no. 9. — P. 1240—1251.
60. *Zakharov, E.* Method of Hypersingular Integral Equations in a Three-Dimensional Problem of Diffraction of Electromagnetic Waves on a Piecewise Homogeneous Dielectric Body / E. Zakharov, A. Setukha, E. N. Bezobrazova // Differential Equations. — 2015. — Vol. 51, no. 9. — P. 1197—1210.
61. *Zhai, Y. B.* Scattering from complex bodies of revolution using a high-order mixed finite element method and locally-conformal perfectly matched layer / Y. B. Zhai, X. W. Ping, T. J. Cui // Antennas and Propagation. — 2011. — Vol. 59, no. 5. — P. 1761—1764.
62. *Стренг, Г.* Теория метода конечных элементов / Г. Стренг, Д. Фикс. — Мб : Мир, 1997. — 349 с.

Публикации автора по теме диссертации

63. *Фетисов, С. Н.* Особенности применения метода граничных интегральных уравнений в задаче дифракции электромагнитных волн на идеально проводящих телах малой толщины / С. Н. Фетисов, А. В. Сетуха // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии. — 2016. — Т. 17, № 4. — С. 460—473.
64. Учёт радиолокационных характеристик при формировании облика перспективных силовых установок летательных аппаратов на основе математического моделирования / С. Н. Фетисов [и др.] // Всероссийская научно-техническая конференция АВИАДВИГАТЕЛИ XXI ВЕКА. Москва 24-27 ноября г. Сборник тезисов докладов. — 2015. — С. 174—176.
65. *Фетисов, С. Н.* Метод снесения граничного условия в задачах рассеяния электромагнитных волн на объектах малой толщины / С. Н. Фетисов, А. В. Сетуха // Девятнадцатая ежегодная научная конференция ИТПЭ РАН, Москва 14-18 мая, сборник тезисов докладов. — 2018. — С. 48—49.
66. *Фетисов, С. Н.* Решение задач дифракции электромагнитных волн на идеально проводящих телах малой толщины / С. Н. Фетисов, А. В. Сетуха // Ломоносовские чтения: Научная конференция, Москва, факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова, 17-26 апреля г. Сборник тезисов докладов. — 2017. — С. 107—108.
67. *Fetisov, S. N.* Numerical method for solving the problem of electromagnetic wave scattering by a perfectly conducting object of small thickness / S. N. Fetisov, A. V. Setukha // International Conference Days on diffraction 2018, St. Peterburg june 4-8. — 2018. — P. 96—97.
68. *Fetisov, S. N.* Numerical solution of problem of electromagnetic wave diffraction by a perfectly conducting body of small thickness / S. N. Fetisov, A. V. Setukha // Progress In Electromagnetics Research Symposium. — 2017. — P. 2721—2727.
69. *Fetisov, S. N.* The method of relocation of boundary condition for the problem of electromagnetic wave scattering by perfectly conducting thin objects / S. N. Fetisov, A. V. Setukha // Journal of Computational Physics. — 2018. — Vol. 373. — P. 631—647.

Список рисунков

2.1	Постановка задачи для случая тела малой толщины.	30
2.2	Аппроксимация поверхности системой ячеек	33
2.3	Дополнительное разбиение ячейки	36
2.4	К аппроксимации поверхностной дивергенции	37
4.1	Схема облучения	47
4.2	Диаграмма рассеяния сферы. $k = 4.1$	48
4.3	Диаграмма рассеяния сферы. Разбиение на $30 \times 50 = 1500$ ячеек	49
4.4	Схема эксперимента и профиль исследуемого объекта	51
4.5	Влияние доразбиения на результаты расчёта. Основное разбиение 10×40 . Толщина профиля $\bar{c} = 5\%$	52
4.6	Влияние доразбиения на результаты расчёта. Основное разбиение 10×40 . Толщина профиля $\bar{c} = 25\%$	52
4.7	Влияние доразбиения на результаты расчёта. Основное разбиение 20×80 . Толщина профиля $\bar{c} = 5\%$	53
4.8	Влияние доразбиения на результаты расчёта. Основное разбиение 20×80 . Толщина профиля $\bar{c} = 25\%$	53
4.9	Влияние доразбиения на результаты расчёта. Основное разбиение 40×160 . Толщина профиля $\bar{c} = 5\%$	54
4.10	Влияние доразбиения на результаты расчёта. Основное разбиение 40×160 . Толщина профиля $\bar{c} = 25\%$	54
4.11	Зависимость результатов от числа ячеек разбиения. Решение задачи на точной поверхности. $\bar{c} = 5\%$	56
4.12	Зависимость результатов от числа ячеек разбиения. Решение задачи на точной поверхности. $\bar{c} = 25\%$	56
4.13	Зависимость результатов от числа ячеек разбиения. Замена крыла тонким экраном. $\bar{c} = 0\%$	57
4.14	Влияние толщины профиля на диаграмму рассеяния. Длина волны $\lambda = b/2$	57
4.15	Влияние толщины профиля на диаграмму рассеяния. Длина волны $\lambda = b$	58
4.16	Влияние толщины профиля на диаграмму рассеяния. Длина волны $\lambda = L$	58

4.17	Зависимость результатов от числа ячеек разбиения. Метод со снесением граничного условия. Толщина профиля $\bar{c} = 5\%$	59
4.18	Зависимость результатов от числа ячеек разбиения. Метод со снесением граничного условия. $\bar{c} = 25\%$	60
4.19	Сравнение численных результатов с результатами эксперимента. $\bar{c} = 5\%$	61
4.20	Сравнение численных результатов с результатами эксперимента. $\bar{c} = 25\%$	61
4.21	Средние значения ЭПР при обратном рассеянии, полученные прямым методом и по результатам эксперимента	63
4.22	Средние значения ЭПР при обратном рассеянии, полученные методом снесения граничного условия и по результатам эксперимента	63
4.23	Средние значения ЭПР при обратном рассеянии, полученные прямым методом на тонком экране и по результатам эксперимента .	64
4.24	Погрешность результатов, полученных различными методами, относительно результатов эксперимента	64
4.25	Сравнение модулей действительной и мнимой частей напряженности электрического поля. 1 – Прямой метод, 2– Метод СГУ, 3 – Прямой метод на экране. Угол облучения 0°	67
4.26	Сравнение модулей действительной и мнимой частей напряженности электрического поля. 1 – Прямой метод, 2– Метод СГУ, 3 –Прямой метод на экране. Угол облучения 50°	68
4.27	Сравнение модулей действительной и мнимой частей напряженности электрического поля. 1 – Прямой метод, 2– Метод СГУ, 3 –Прямой метод на экране. Угол облучения 65°	69
4.28	Сравнение модулей действительной и мнимой частей напряженности электрического поля. 1 – Прямой метод, 2– Метод СГУ, 3 –Прямой метод на экране. Угол облучения 90°	70
4.29	Сравнение диаграмм прямого рассеяния при угле облучения 0° . . .	71
4.30	Сравнение диаграмм прямого рассеяния при угле облучения 50° . . .	71
4.31	Сравнение диаграмм прямого рассеяния при угле облучения 65° . . .	72
4.32	Сравнение диаграмм прямого рассеяния при угле облучения 90° . . .	72
4.33	Погрешность осредненных значений ЭПР при прямом рассеяния при облучении с 0°	73

4.34	Погрешность осредненных значений ЭПР при прямом рассеяния при облучении с 50°	73
4.35	Погрешность осредненных значений ЭПР при прямом рассеяния при облучении с 65°	74
4.36	Погрешность осредненных значений ЭПР при прямом рассеяния при облучении с 90°	74