

На правах рукописи

Фетисов Сергей Николаевич

**Метод снесения граничного условия в задаче
рассеяния электромагнитных волн на идеально
проводящих объектах малой толщины**

Специальность 1.2.2 —
«Математическое моделирование, численные методы и комплексы
программ»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2023

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте вычислительной математики им. Г.И. Марчука Российской академии наук.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Сетуха Алексей Викторович

Официальные оппоненты: **Самохин Александр Борисович**,
доктор физико-математических наук, профессор,
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "МИРЭА - Российский технологический университет",
профессор

Крутицкий Павел Александрович,
кандидат физико-математических наук, доцент,
федеральное государственное учреждение "Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук",
старший научный сотрудник

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Пензенский государственный университет»

Защита состоится 28 июня 2023 г. в 16:00 часов на заседании диссертационного совета 24.1.455.01 при федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте вычислительной математики им. Г.И. Марчука Российской академии наук по адресу: 119333, г. Москва, ул. Губкина, д. 8, ауд. 727.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИВМ РАН и на сайте <https://www.inm.ras.ru>.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 119333, г. Москва, ул. Губкина, д. 8, ИВМ РАН, ученому секретарю диссертационного совета 24.1.455.01.

Автореферат разослан « ____ » _____ 2023 года .

Ученый секретарь
диссертационного
совета
24.1.455.01,
д.ф.-м.н

Бочаров Геннадий Алексеевич

Общая характеристика работы

В диссертации рассматривается трехмерная задача рассеяния монохроматической электромагнитной волны на идеально проводящих телах малой толщины. Под термином "тела малой толщины" понимаются тела, у которых один из габаритных размеров намного меньше, чем другие. Такая задача возникает при определении радиолокационных характеристик сложных технических объектов, например летательных аппаратов. В этом случае в роли элементов малой толщины выступают крылья и оперение летательного аппарата, воздушные винты и вентиляторы силовых установок.

Актуальность темы. В настоящее время для анализа характеристик рассеяния сложных технических объектов широко применяются методы численного моделирования, основанные на решении уравнений Максвелла. Однако решение задач монохроматического рассеяния в рамках нестационарной модели для уравнений Максвелла во временной области является менее эффективным, чем при решении так называемых уравнений в частотной области.

В случае однородной внешней среды высокую эффективность показывает метод граничных интегральных уравнений. Применение этого метода в рассматриваемых задачах основан на выражении электрического и магнитного полей через поверхностные токи. Для получения указанных токов решается интегральное уравнение, записанное на поверхности исследуемого объекта.

По сравнению с сеточными методами, предполагающими дискретизацию пространственной области, окружающей объекты, здесь расчетная сетка строится только на поверхности облучаемого тела. При этом условия на бесконечности выполняются автоматически и отсутствует проблема расширения области, охватываемой пространственной сеткой, для корректного учета этих условий.

В случае использования метода граничных интегральных уравнений для решения задач дифракции на телах малой толщины возникают определенные трудности. Примером такого тела является прямоугольное крыло конечного размаха с малым отношением толщины профиля его хорде. Характерными особенностями формы таких тел являются наличие закругленных кромок с малым радиусом кривизны, либо наличие острых кромок, имеющих форму клина с малым углом раствора. Интегральные уравнения, записанные на замкнутой поверхности, ограничивающей такое тело, вырождаются, когда толщина тела стремится к нулю. При численном решении интегрального уравнения методами, предполагающими дискретизацию граничной поверхности, необходимо использовать разбиение, в котором шаг сетки должен быть меньше толщины тела. Кроме того, шаг сетки должен быть достаточно мал, чтобы поверхностная сетка аппроксимировала закругления кромок малого радиуса. Все это приводит к

необходимости использовать поверхностные сетки с большим числом ячеек, растет вычислительная сложность задачи. В случае наличия острых кромок, погрешность численного решения может расти в окрестности этих кромок, причем, здесь проблема может не решаться за счет сгущения сетки.

Для простоты задачу дифракции на теле малой толщины часто заменяют задачей дифракции на тонком экране, который аппроксимирует это тело. Однако, простая замена телесного объекта экраном не всегда позволяет правильно получить все необходимые физические характеристики. Так, форма кромок идеально проводящих тел в некоторых случаях существенно влияет на диаграмму рассеяния. Это свойство электромагнитного рассеяния отражено в методах физической теории дифракции, которые применимы к случаю коротких волн. Однако, в случае длин волн, сопоставимых с размерами тела такие методы не применимы.

Исходная задача для электромагнитного поля ставится в области вне исходной поверхности тела, где требуется условие ортогональности электрического поля вектору нормали к поверхности.

В данной диссертации для решения задачи дифракции электромагнитной волны на идеально проводящем теле малой толщины разработан приближенный подход, основанный на переносе граничного условия на срединную поверхность тела. При этом рассматривается новая краевая задача для электромагнитного поля в области вне срединной поверхности вместо рассмотрения исходной краевой задачи. Эта задача сводится к граничным интегральным уравнениям, которые затем решаются численно.

Целью работы является построение численного метода решения задачи дифракции электромагнитной волны на идеально проводящем теле малой толщины, основанного на переносе граничного условия на срединную поверхность тела и сведении задачи к граничным интегральным уравнениям.

При этом ставятся следующие задачи:

1. Для моделирования дифракции электромагнитной волны на идеально проводящем теле малой толщины сформулировать краевую задачу вне срединной поверхности тела, в которой исходная толщина и форма тела учитываются за счет постановки соответствующих граничных условий.
2. Свести краевую задачу к системе граничных интегральных уравнений относительно поверхностных токов.
3. Построить численную схему решения возникших граничных интегральных уравнений.
4. Протестировать построенный численный метод и оценить его работоспособность при моделировании рассеянного электромагнитного поля.

Научная новизна работы состоит в том, что для решения задачи дифракции электромагнитной волны на идеально проводящем теле малой толщины разработан новый приближенный подход, основанный на переносе граничного условия на срединную поверхность тела. При этом формулируется и решается новая краевая задача для уравнений электромагнитного поля вне этой поверхности (экрана), в которой мы пытаемся учесть исходную форму тела путем постановки специальных граничных условий. Возникшая новая краевая задача сводится к системе граничных интегро-дифференциальных уравнений относительно неизвестных поверхностных токов. Особенность возникающих уравнений состоит в том, что они содержат интегралы с сильной особенностью и понимаются в смысле конечного значения по Адамару. Кроме того, уравнения содержат члены вне интеграла в виде дифференциальных операторов (поверхностная дивергенция от неизвестных токов). В диссертации построены квадратурные формулы для аппроксимации поверхностной дивергенции касательного векторного поля. Разработана численная схема решения этих возникших интегро-дифференциальных уравнений.

Теоретическая значимость работы состоит в выводе и дискретизации системы граничных уравнений, аппроксимирующих рассматриваемую задачу, а также в разработке квадратурной формулы для вычисления поверхностной дивергенции.

Практическая значимость работы заключается в разработке математической модели, построении численной схемы и написании компьютерной программы для решения задачи рассеяния монохроматических электромагнитных волн на объектах малой толщины, которая может быть использована для определения радиофизических характеристик элементов конструкций при разработке современных летательных аппаратов.

Методология и методы исследования. Для построения вычислительной модели используется метод граничных интегральных уравнений, которые решаются методами кусочно-постоянных аппроксимаций и коллокации.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Разработка метода моделирования рассеяния монохроматической электромагнитной волны на идеально проводящих телах, основанного на переносе граничного условия на срединную поверхность тела малой толщины и сведении задачи к граничным интегро-дифференциальным уравнениям с сильно сингулярными интегралами.
2. Построение численной схемы решения возникшей системы граничных интегро-дифференциальных уравнений с применением методов кусочно-постоянных аппроксимаций и коллокации.
3. Построение квадратурной формулы аппроксимации поверхностной дивергенции векторной функции, заданной на поверхности в узлах структурированной сетки.

4. Разработка комплекса программ, реализующих разработанный численный алгоритм и предназначенного для численного решения задач рассеяния монохроматической электромагнитной волны на идеально-проводящих телах малой толщины.
5. Верификация разработанного метода, включающая анализ практической сходимости при сгущении расчетной сетки, сравнение электродинамических характеристик, получаемых предложенным методом, с результатами решения задачи в исходной постановке для точной геометрии тел, а так же сравнение с данными физического эксперимента.

Достоверность результатов диссертации основана на применении строгого математического аппарата при сведении краевой задачи к системе граничных интегральных уравнений и построении численной схемы. Разработанный численный метод с переносом граничного условия на срединную поверхность апробирован на примере задачи дифракции электромагнитной волны на теле в виде прямоугольного крыла. Диаграммы рассеяния, полученные описанным методом, сравнивались с результатами, полученными для исходной задачи (когда граничные интегральные уравнения решались на исходной поверхности крыла), и с существующими экспериментальными данными.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих научных мероприятиях: Международный авиационно-космический научно-гуманитарный семинар имени братьев Белоцерковских Сергея Михайловича и Олега Михайловича, ЦАГИ, г. Москва, 2018 г.; Научный семинар на факультете ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством проф. Захарова Е. В., г. Москва, 2018 г.; Всероссийская научно-техническая конференция АВИАДВИГАТЕЛИ XXI ВЕКА, г. Москва, 2015 г.; Ломоносовские чтения, МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, 2017 г.; Семнадцатая ежегодная научная конференция ИТПЭ РАН, ИТПЭ РАН, г. Москва, 2016 г.; Международная научная конференция Progress in Electromagnetic Research Symposium 2017, г. Санкт-Петербург, 2017 г.; Международная научная конференция Days on Diffraction, г. Санкт-Петербург, 2018 г.; Девятнадцатая ежегодная научная конференция ИТПЭ РАН, ИТПЭ РАН, г. Москва, 2018 г.; Международная научная конференция Progress in Electromagnetic Research Symposium 2018, Япония, г. Тояма, 2018 г.

Личный вклад. Все результаты исследования, изложенные в диссертационной работе, получены лично соискателем в процессе научной деятельности. В работе [1] проведено исследование сеточной сходимости решения задачи рассеяния электромагнитных волн на объектах малой толщины в прямой постановке. В [6] проведено исследование вычислительной эффективности прямого метода на объектах малой толщины по результатам физического эксперимента. В работе [7] проведена разработка

метода снесения граничного условия на срединную поверхность, построена численная схема возникающих в этом методе граничных интегральных уравнений, а так же проведена верификация разработанного метода на результатах физического эксперимента.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 7 печатных работах [1]-[7], 3 из которых [1,6,7] входят в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание учёной степени кандидата наук, в том числе 2 работы [6-7] входят в систему цитирования Web of Science или Scopus.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и списка рисунков. Полный объём диссертации составляет 89 страниц с 40 рисунками. Список литературы содержит 69 наименований.

Основное содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследования, проводимого в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по методам математического моделирования в задачах рассеяния электромагнитных волн, описываются сложности, возникающие при исследовании задачи рассеяния электромагнитных волн на объектах малой толщины, формализуется цель работы, ставятся задачи работы, излагается научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

Первая глава посвящена модели рассеяния электромагнитных волн на идеально проводящих объектах в общем случае.

Рассматривается классическая задача рассеяния электромагнитных волн на идеально проводящем объекте. Объект может быть представлен как тело, ограниченное замкнутой поверхностью, так и тонким экраном.

В монохроматическом случае ищется решение уравнений Максвелла, с гармонической зависимостью от времени вида:

$$\vec{E} = \vec{E}(x)e^{-i\omega t}, \quad \vec{H} = \vec{H}(x)e^{-i\omega t}, \quad (1)$$

где ω – круговая частота, которая связана с частотой колебаний ν , измеряемой в Герцах, соотношением $\omega = 2\pi\nu$

Поля $\vec{E}(x)$, $\vec{H}(x)$ удовлетворяют уравнениям Максвелла в частотной области:

$$\text{rot}\vec{E} = i\omega\mu\mu_0\vec{H}, \quad \text{rot}\vec{H} = -i\omega\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}, \quad (2)$$

Пространственные составляющие напряженностей полных электрического и магнитного полей ищутся в виде:

$$\vec{E}_{tot}(x) = \vec{E}_{inc}(x) + \vec{E}(x), \quad \vec{H}_{tot}(x) = \vec{H}_{inc}(x) + \vec{H}(x), \quad (3)$$

где $\vec{E}_{tot}(x)$, $\vec{H}_{tot}(x)$ – пространственные составляющие полных электрического и магнитного полей, $\vec{E}_{inc}(x)$, $\vec{H}_{inc}(x)$ – первичных полей, $\vec{E}(x)$, $\vec{H}(x)$ – неизвестных вторичных полей.

В общем случае, на поверхности исследуемого объекта Σ должно выполняться условие равенства нулю касательной компоненты суммарного электрического поля, что с учетом (3) даёт в результате граничное условие:

$$\vec{n} \times \vec{E} = -\vec{n} \times \vec{E}_{inc}, \quad (4)$$

где \vec{n} – единичный вектор нормали к поверхности Σ .

Таким образом, с математической точки зрения, решается краевая задача для уравнений (2) относительно напряженностей электрического и магнитного полей.

В дальнейшем предполагаем, что окружающая среда удовлетворяет условию $\mu = \varepsilon = 1$ (при этом скорость света в среде совпадает со скоростью света в вакууме).

Неизвестную напряженность вторичного электрического поля ищем, используя известное интегральное представление:

$$\vec{E}(x) = K[\Sigma, \vec{j}](x) \quad (5)$$

где $\vec{j} = \vec{j}(x)$, $x \in \Sigma$ – неизвестное векторное поле на поверхности Σ , направленное в каждой точке $x \in \Sigma$ по касательной к поверхности,

$$K[\Sigma, \vec{j}](x) = \int_{\Sigma} \{grad_x div_x [\vec{j}(y)\Phi(x-y)] + k^2 \vec{j}(y)\Phi(x-y)\} d\sigma_y, x \in \Omega, \quad (6)$$

где $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu$, $\Phi(r) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r}$ – функция Грина.

Подставляя неизвестное поле $\vec{E}(x)$ в граничное условие (4), получается граничное интегральное уравнение с гиперсингулярным интегралом:

$$\vec{n}(x) \times K[\Sigma, \vec{j}](x) = -\vec{n}(x) \times \vec{E}_{inc}(x), x \in \Sigma, \quad (7)$$

Для численного решения интегрального уравнения (7) известен метод коллокации с применением квадратурных формул типа прямоугольников на основе значений неизвестной функции в узлах, совпадающих с точками коллокации.

Суммарная поверхность Σ аппроксимируется системой ячеек σ_i , $i = 1, \dots, n$, края которых есть пространственные четырехугольники. На каждом таком четырёхугольнике выбирается точка коллокации x_i , как центр тяжести вершин ячейки (в предположении, что все вершины имеют равную массу), и строится орт вектора нормали \vec{n}_i как вектор, ортогональный диагоналям ячейки. Далее на каждой ячейке строится локальная ортонормированная система координат: \vec{e}_i^1 , \vec{e}_i^2 и \vec{n}_i , которые образуют правую тройку векторов.

Используемые квадратурные формулы основаны на выделении в явном виде гиперсингулярной части в интегральном операторе $K[\Sigma, \vec{j}]$, определяемом формулой (6). Этот оператор представляется в виде:

$$\begin{aligned} K[\Sigma, \vec{j}] &= K^0[\Sigma, \vec{j}] + K^1[\Sigma, \vec{j}], \\ K^k[\Sigma, \vec{j}] &= \int_{\Sigma} \vec{e}^k(x, y, \vec{j}) d\sigma_y, \quad k = 0, 1 \\ \vec{e}^0(x, y, \vec{j}(y)) &= \frac{-\vec{j} + 3\vec{r}(\vec{r}, \vec{j})}{R^3}, \end{aligned} \quad (8)$$

функция $e^1(x, y, \vec{j}(y))$ имеет при $x \rightarrow y$ особенность порядка $O(1/R)$ и интеграл в формуле (8) для $K^1[\Sigma, \vec{j}]$ является несобственным абсолютно сходящимся при $x \in \Sigma$

Будем искать векторы \vec{j}_i , являющиеся приближенными значениями неизвестной функции \vec{j} в точках коллокации x_i , $i = 1, \dots, n$. Для численного решения оператор $K[\Sigma, \vec{j}]$ аппроксимируется по ячейкам разбиения:

$$K[\Sigma, \vec{j}] \approx \sum_{k=1}^N K[\sigma_k, \vec{j}_k], \quad (9)$$

Интеграл от функции $\vec{e}^0(x, y, \vec{j}(y))$ сводится к контурному интегралу и вычисляется аналитически¹.

Для аппроксимации интеграла $K^1[\Sigma, \vec{j}]$ функция \vec{j} на каждой ячейке разбиения σ_i аппроксимируется постоянным значением \vec{j}_i . Возникший интеграл по ячейкам вычисляется по формуле типа прямоугольников с доразбиением ячеек σ_k на более мелкие ячейки второго уровня и сглаживанием особенности в подынтегральном выражении. каждая ячейка σ_k дополнительно разбивается на ячейки второго уровня σ_k^p , $p = 1, \dots, P_k$, и на каждой такой ячейке выберем точку коллокации $y_k^p \in \sigma_k^p$. Пусть h' — максимальный из диаметров ячеек σ_k^p , $p = 1, \dots, P_k$, $k = 1, \dots, N$. Положим:

$$K^1[\sigma_k, \vec{j}_k] = \sum_{p=1}^{P_k} \vec{K}_1(\vec{j}_k, x, y_k^p) \theta\left(\frac{|x - y_k^p|}{\varepsilon}\right) s_k^p, \quad (10)$$

где s_k^p — площадь ячейки σ_k^p , $\theta(r)$ — сглаживающая функция, выбираемая так, что $\theta(r) \in C^1[0, \infty)$, $\theta(r) = 1$ при $r \geq 1$, $0 \leq \theta(r) \leq 1$ при $0 \leq r \leq 1$, $\theta(r) = o(r)$ при $r \rightarrow 0$, ε — малый параметр.

Для нахождения неизвестных $\vec{j}_i \approx \vec{j}(x_i)$, $i = 1, \dots, n$, интеграл в уравнении (4) заменяется квадратурной формулой и требуется выполнения уравнения (4) в узлах коллокации.

¹Захаров Е. В., Рыжаков Г. В., Сетуха А. В. Численное решение трехмерных задач дифракции электромагнитных волн на системе идеальнопроводящих поверхностей методом гиперсингулярных интегральных уравнений // Дифференциальные уравнения. — 2014. — Т. 50, № 9. — С. 1253–1263

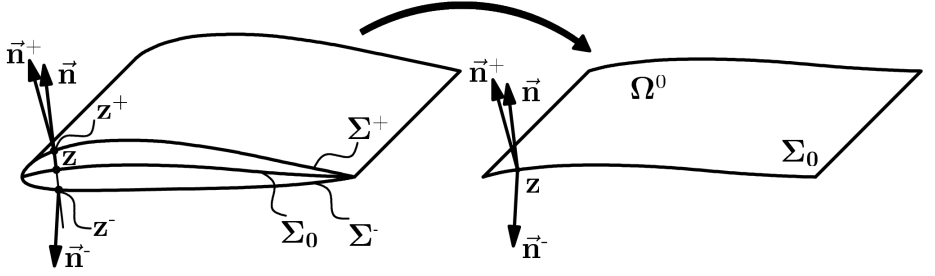


Рис. 1 — Постановка задачи для случая тела малой толщины.

Токи ищутся в виде:

$$\vec{j}_j = j_j^1 \vec{e}_j^1 + j_j^2 \vec{e}_j^2. \quad (11)$$

В результате возникает система из $2n$ уравнений относительно $2n$ комплексных неизвестных j_j^l , $l = 1, 2$, $j = 1, \dots, n$,

$$\sum_{\substack{j=1, \dots, n \\ l=1, 2}} a_{ij}^{ml} j_j^l = f_i^m, \quad i = 1, \dots, n, \quad m = 1, 2, \quad (12)$$

где $f_i^m = (f_i, \vec{e}_i^m)$, $i = 1, n$, $m = 1, 2$, а коэффициенты матрицы определяются выражением:

$$a_{ij}^{ml} = (A_{ij} \vec{e}_j^l, \vec{e}_i^m), \quad m, l = 1, 2, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (13)$$

где $A_{ij} \vec{e}_j^l = \vec{n}_i \times K[\sigma_j, \vec{e}_j^l](x_i)$

Вторая глава посвящена описанию метода снесения граничного условия на срединную поверхность в задаче рассеяния электромагнитных волн на объектах малой толщины.

Предположим, что поверхность рассматриваемого тела Σ имеет следующую структуру (рисунок 1). Пусть Σ_0 — некоторая заданная гладкая разомкнутая ориентированная поверхность с краем $\partial\Sigma_0$. Предположим, что поверхность Σ состоит из двух частей Σ^+ и Σ^- , каждая из которых образована следующими множествами точек соответственно:

$$z^+ = z + \frac{1}{2} \lambda(z) \vec{n}(z) \quad \text{и} \quad z^- = z - \frac{1}{2} \lambda(z) \vec{n}(z), \quad z \in \Sigma_0, \quad (14)$$

где $\vec{n}(z)$ — орт вектора положительной нормали к поверхности Σ_0 в точке z , $\lambda(z)$ — заданная функция на поверхности Σ_0 , удовлетворяющая условиям $\lambda(z) \geq 0$ на всей поверхности Σ_0 , $\lambda(z) = 0$ на краю поверхности Σ_0 . При этом подразумевается, что значения функции $\lambda(z)$ много меньше, чем диаметр поверхности Σ_0 (как множества точек). Поверхность Σ_0 будем называть срединной поверхностью для тела, ограниченного поверхностью Σ .

Для каждой точки $z \in \Sigma_0$ определим векторы $\vec{n}^+(z)$ и $\vec{n}^-(z)$, являющиеся ортами вектора нормали к поверхностям Σ^+ и Σ^- в точках $z^+(z)$ и $z^-(z)$, соответственно. При этом выберем векторы $\vec{n}^+(z)$ и $\vec{n}^-(z)$ так, чтобы они являлись векторами внешней нормали для поверхности Σ .

Пусть $\Omega_0 = R^3 \setminus \Sigma_0$ – область пространства вне экрана Σ_0 . Рассмотрим новую краевую задачу для уравнений Максвелла в области Ω_0 с граничными условиями

$$\vec{n}^\pm(z) \times \vec{E}^\pm(z) = -\vec{n}^\pm(z) \times \vec{E}_{inc}(z), \quad z \in \Sigma_0^{in}, \quad (15)$$

$\Sigma_0^{in} = \Sigma_0 \setminus \partial\Sigma_0$, \vec{E}^+ и \vec{E}^- – краевые значения напряженности электрического поля на поверхности Σ_0 , \vec{E}_{inc} – как и ранее, напряженность первичного электрического поля. При этом, как и в исходной задаче, ставятся условие излучения Зоммерфельда на бесконечности и условие Майкснера для любой ограниченной области $D \subset \Omega_0$.

Описанную краевую задачу с граничным условием (15) будем называть краевой задачей с граничным условием, снесенным на серединную поверхность.

Будем искать напряженность вторичного электрического поля в виде:

$$\vec{E}(x) = K[\Sigma_0, \vec{j}_E](x) + R[\Sigma_0, \vec{j}_M](x), \quad (16)$$

где $x \in \Omega_0$, $\vec{j}_E = \vec{j}_E(x)$, $\vec{j}_M = \vec{j}_M(x)$, $x \in \Sigma_0$ – неизвестные касательные комплексные векторные поля на поверхности Σ_0 , которые будем называть плотностями электрических и магнитных токов соответственно. Оператор $K[\Sigma_0, \vec{j}](x)$ определяется как в главе 1. Оператор $R[\Sigma_0, \vec{j}](x)$ определяется как:

$$R[\Sigma_0, \vec{j}](x) = \int_{\Sigma_0} (\text{grad}_x \Phi(x-y) \times \vec{j}) d\sigma_y, \quad (17)$$

где $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu$, $\Phi(x-y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{(ikr)}}{r}$, $r = |x-y|$

Пусть $\vec{E}_1 = K[\Sigma_0, \vec{j}]$, где \vec{j} – дважды непрерывно дифференцируемое комплексное касательное векторное поле на поверхности Σ_0 . В каждой точке $x \in \Sigma_0^{in}$, где $\Sigma_0^{in} = \Sigma_0 \setminus \partial\Sigma_0$, существуют краевые значения \vec{E}_1^+ и \vec{E}_1^- поля \vec{E}_1 , для которых справедлива формула

$$\vec{E}_1^\pm(x) = \vec{E}_1(x) \mp \frac{1}{2} \vec{n}(x) \text{Div} \vec{j}(x), \quad x \in \Sigma_0^{in}, \quad (18)$$

где $\text{Div} \vec{j}(x)$ – поверхностная дивергенция векторного поля $\vec{j}(x)$, $\vec{E}_1(x)$ – прямое значение рассматриваемого векторного поля в точке $x \in \Sigma_0^{in}$.

Далее, пусть $\vec{E}_2 = R[\Sigma_0, \vec{j}]$, где $\vec{j}(x)$ – непрерывное по Гельдеру комплексное касательное векторное поле на поверхности Σ_0 . Тогда поле \vec{E}_2

также имеет краевые значения в каждой точке $x \in \Sigma^{in}$, для которых справедлива формула:

$$\vec{E}_2^\pm(x) = \vec{E}_2(x) \pm \frac{1}{2} \vec{j}(x) \times \vec{n}(x), \quad x \in \Sigma^{in}, \quad (19)$$

где $\vec{E}_2(x)$ – прямое значение, причем интеграл здесь является слабо сингулярным и сходится абсолютно

Подставляя напряженность электрического поля в виде (16) в граничные условия (15) и используя формулы (18) и (19), получаем два уравнения на поверхности Σ_0 :

$$\begin{aligned} & \vec{n}^\pm \times K[\Sigma_0, \vec{j}_E] + \vec{n}^\pm \times R[\Sigma_0, \vec{j}_M] \mp \\ & \mp \frac{1}{2} Div \vec{j}_E \vec{n}^\pm \times \vec{n} \pm \frac{1}{2} \vec{n}^\pm \times [\vec{j}_M \times \vec{n}] = -\vec{n}^\pm \times \vec{E}_{inc}, \end{aligned} \quad (20)$$

Для численного решения системы граничных интегральных уравнений (20) используется метод коллокации с применением квадратурных формул типа прямоугольников на основе значений неизвестной функции в узлах, совпадающих с точками коллокации. Срединная поверхность Σ_0 аппроксимируется системой из N четырёхугольных ячеек как в главе 1. Операторы $K[\Sigma_0, \vec{j}]$ и $R[\Sigma_0, \vec{j}]$ аппроксимируются выражениями:

$$\begin{aligned} K[\Sigma_0, \vec{j}] &\approx \sum_{k=1}^N \tilde{K}[\sigma_k, \vec{j}_k], \\ R[\sigma_k, \vec{j}] &\approx \sum_{k=1}^n \tilde{R}[\sigma_k, \vec{j}_k], \end{aligned} \quad (21)$$

где $\tilde{K}[\sigma_k, \vec{j}_k]$ и $\tilde{R}[\sigma_k, \vec{j}_k]$ – приближения соответствующих интегралов по участку поверхности Σ_0 , аппроксимируемому ячейкой σ_k .

Возникший интеграл по ячейке оператора $K[\sigma_k, \vec{j}_k]$ вычисляется как в главе 1 для гиперсингулярной и слабосингулярной частей. Для оператора $R[\sigma_k, \vec{j}_k]$ применяются формулы типа прямоугольников с доразбиением ячеек на более мелкие ячейки второго уровня и сглаживанием особенности в подынтегральном выражении как в главе 1 для слабосингулярной части оператора $K[\sigma_k, \vec{j}]$

В диссертации было получено выражение для аппроксимации поверхностной дивергенции

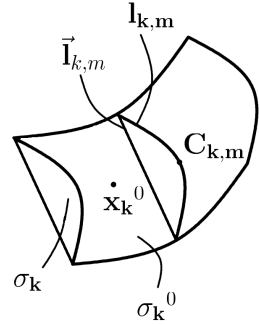


Рис. 2 — К определению поверхностной дивергенции

от векторной функции(см. рисунок 2):

$$Div \vec{j}(x_k^0) \approx \frac{1}{s_k} \sum_{m=1}^4 \left(\frac{\vec{j}_k + \vec{j}_{i_b(k,m)}}{2}, \vec{l}_{k,m} \times \vec{n}_k \right), \quad (22)$$

где s_k —площадь ячейки, $x_{k,l}$ — l -ая вершина k -ой ячейки, $\vec{l}_{k,m} = x_{k,l} - x_{k,m}$, $l = m + 1$ при $m = 1, \dots, 3$, $l = 1$ при $m = 4$, $i_b(k,m)$ — номер ячейки, граничащей с рассматриваемой ячейкой по стороне с номером m . Данная формула выполнена с точностью до величины порядка h_0 .

Будем искать значения неизвестных плотностей электрического и магнитного токов $\vec{j}_{E,i} \approx \vec{j}_E(x_i)$, $\vec{j}_{M,i} \approx \vec{j}_M(x_i)$ в виде:

$$\begin{aligned} \vec{j}_{E,i} &= j_{E,i}^1 \vec{e}_i^1 + j_{E,i}^2 \vec{e}_i^2, \\ \vec{j}_{M,i} &= j_{M,i}^1 \vec{e}_i^1 + j_{M,i}^2 \vec{e}_i^2, \end{aligned} \quad (23)$$

В итоге получается система из $4N$ уравнений относительно $4N$ комплексных неизвестных $j_{E,j}^l$ и $j_{M,j}^l$, $l = 1, 2$, $j = 1, \dots, N$:

$$\sum_{\substack{j=1, \dots, N \\ l=1, 2}} (a_{ij}^{kl\pm} + d_{ij}^{kl\pm}) j_{E,j}^l + \sum_{\substack{j=1, \dots, N \\ l=1, 2}} (b_{ij}^{kl\pm} + c_{ij}^{kl\pm}) j_{M,j}^l = f_i^{k\pm},$$

где $f_i^{k\pm} = (f_i^\pm, \vec{e}_i^k)$, $i = 1, \dots, N$, $k = 1, 2$, а коэффициенты системы вычисляются как:

$$\begin{aligned} a_{ij}^{kl\pm} &= \left(A^\pm[\vec{e}_j^l], \vec{e}_i^k \right), \\ b_{ij}^{kl\pm} &= \left(B^\pm[\vec{e}_j^l], \vec{e}_i^k \right), \quad i, j = 1, \dots, N; \quad k, l = 1, 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{i,j}^{k,l} &= \frac{1}{2} \delta_i^j \left([\vec{n}_i^\pm \times [\vec{e}_j^l \times n_i]], \vec{e}_i^k \right), \\ d_{i,j}^{k,l} &= \frac{([\vec{n}_i^\pm \times \vec{n}_i], \vec{e}_i^k)}{4s_i} \sum_{\substack{j=1, \dots, N \\ m=1, 4}} \left(\delta_i^j + \delta_j^{i_b(i,m)} \right) \left(\vec{e}_j^l, \vec{l}_{i,m} \times \vec{n}_i \right), \end{aligned}$$

где $\delta_i^j = 1$ при $i = j$, $\delta_i^j = 0$ при $i \neq j$ и операторы:

$$A_i^\pm[\vec{e}_j] = \vec{n}_i^\pm \times \tilde{K}[\sigma_j, \vec{e}_j](x_i), \quad B_i^\pm[\vec{e}_j] = \vec{n}_i^\pm \times \tilde{R}[\sigma_j, \vec{e}_j](x_i),$$

В приводимых ниже численных примерах рассматривается случай, когда первичное поле есть плоская волна:

$$\vec{E}_{inc}(x) = \vec{E}_{inc}^0 e^{i(\vec{k}, x)}, \quad \vec{H}_{inc}(x) = \vec{H}_{inc}^0 e^{i(\vec{k}, x)}, \quad (24)$$

\vec{k} — заданный волновой вектор, такой, что $|\vec{k}| = k$, \vec{E}_{inc}^0 — постоянный вектор, ортогональный вектору \vec{k} , (\vec{k}, x) — скалярное произведение вектора \vec{k} и радиус вектора точки x , напряженность первичного магнитного поля

при этом выражается как:

$$\vec{H}_{inc}^0 = [\vec{k} \times \vec{E}_{inc}^0]/(\omega\mu).$$

В этом случае вводится понятие эффективной площади рассеяния в направлении заданного единичного вектора $\vec{\tau}$:

$$\sigma(\vec{\tau}) = \lim_{R \rightarrow \infty} 4\pi R^2 \frac{|\vec{E}(R\vec{\tau})|^2}{|\vec{E}_{inc}^0|^2}, \quad (25)$$

В случае, когда напряженность электрического поля представлена в виде (16), величину $\sigma(\vec{\tau})$ можно выразить через поверхностные токи

$$\sigma(\vec{\tau}) = \frac{1}{|4\pi\vec{E}_{inc}^0|^2} \left| \int_{\Sigma} e^{-ik(\vec{\tau}, y)} \left[\frac{i}{\omega\varepsilon} k^2 \left(\vec{j}_E - \vec{\tau} \left(\vec{j}_E, \vec{\tau} \right) \right) + ik \left[\vec{\tau} \times \vec{j}_M(y) \right] \right] d\sigma_y \right|^2,$$

При численном решении используется приближенная формула.

Третья глава посвящена программной реализации разработанных численных методов.

С целью отладки разработанного метода были созданы две программы: программа, реализующая численный метод решения исходной задачи, описанной в главе 1, и программа, реализующая метод решения задачи со снесением граничного условия на срединную поверхность, описанный в главе 2.

Расчеты по каждой из программ проводились по следующей схеме: разработка геометрической модели исследуемого объекта \rightarrow сеточная аппроксимация геометрической модели объекта \rightarrow задание параметров расчёта \rightarrow проведение расчёта \rightarrow обработка результатов.

Для проведения расчёта, в программу подаются следующие входные данные: файл сеточной модели, файл параметров численной схемы, файл параметров эксперимента.

Для построения диаграмм прямого и обратного рассеяния создается файл с табличными значениями: исследуемый угол и значение ЭПР. Для визуализации параметров электромагнитного поля в ближней зоне строится дополнительная сетка для исследуемого расчётного сечения в области вне исследуемого объекта. В узлах сетки производится расчёт значений параметров электромагнитного поля по полученным ранее значениям поверхностных токов.

В **четвертой главе** приведены результаты численных исследований и анализ полученных результатов. Для тестирования разработанного метода были получены решения задачи рассеяния плоской волны на прямоугольном крыле с симметричным профилем NASA-0012. Схема

проводимого численного эксперимента показана на рисунке 3. Рассматривалось крыло с удлинением $L/b = 5$ (L — размах крыла, b — хорда крыла). Длина волны принималась равной $\lambda = b$.

Облучение проводилось в плоскости OXY . По результатам решения строились диаграммы обратного рассеяния:

$$\tilde{\sigma}(\alpha) = 10 \log \sigma(\vec{\tau}),$$

в направлении вектора $\vec{\tau} = -\vec{k}$, $\vec{k} = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$.

Рассматривался случай, когда вектор \vec{E}_{inc} , определяющий поляризацию волны, лежит в плоскости Oxy (24).

На рисунках 4-6 представлена сеточная сходимость для решений, полученных указанными методами.

На рисунке 7 представлено сравнение результатов численного моделирования с результатами физического эксперимента.

На рисунках 8-9 представлены значения модулей действительной и мнимой частей напряженности электрического поля в ближней зоне, полученные различными методами при облучении объекта со стороны кромки и плоскости крыла соответственно.

Основные выводы:

1. Решение задачи на телесном крыле в исходной постановке хорошо согласуется с данными физического эксперимента для всех углов облучения.

2. Имеются достаточно широкие диапазоны направлений угла облучения (15° вокруг углов 0° и 180°), при которых простая замена телесного крыла тонкой пластиной приводит к существенному изменению результата. Эти углы соответствуют облучению со стороны передней и задней кромок.

3. При облучении с вектором \vec{k} , образующем с плоскостью крыла угол больший 30° , для крыла все кривые достаточно близки друг к другу, что свидетельствует о малом влиянии телесности в этом случае.

4. Предложенный метод со снесением граничного условия позволяет получить значения ЭПР при облучении со стороны передней и задней кромок, хорошо согласующиеся со значениями, полученными в расчете для исходной точной формы и в эксперименте. Это позволяет сделать вывод, что предложенный метод позволяет приближенно учесть телесность профиля при облучении с этих направлений (при том, что в задаче рассеяния

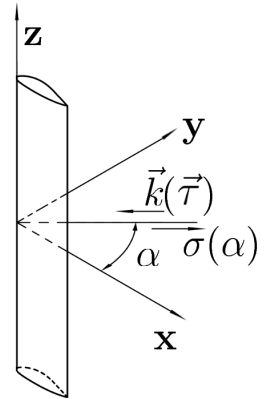


Рис. 3 — Схема эксперимента

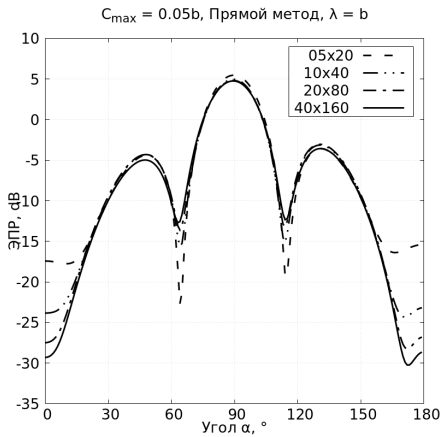


Рис. 4 — Сеточная сходимость для решения задачи прямым методом

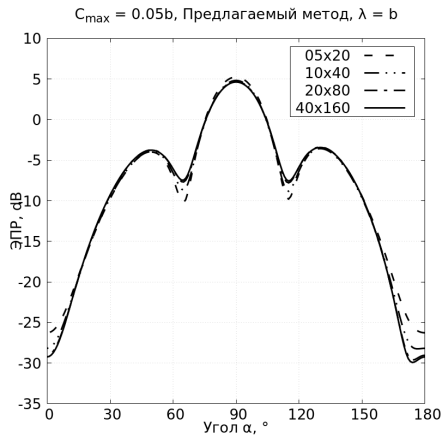


Рис. 5 — Сеточная сходимость для предлагаемого метода

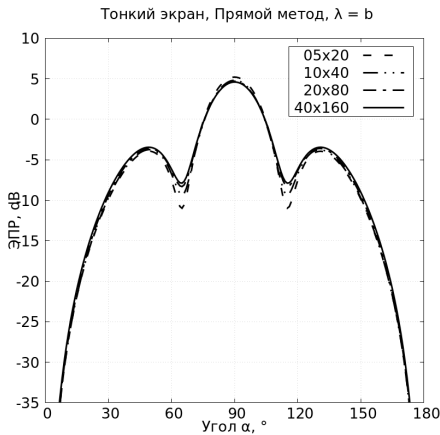


Рис. 6 — Сеточная сходимость для решения задачи прямым методом для тонкого экрана

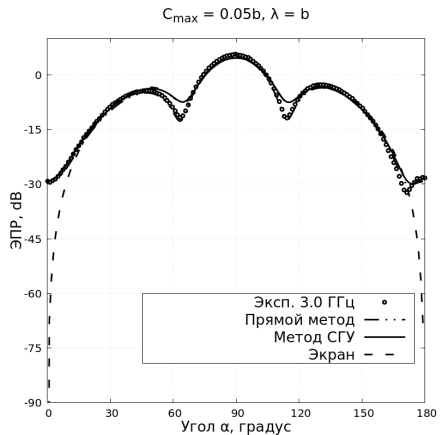


Рис. 7 — Сравнение различных методов с результатами физического эксперимента

на тонком экране без снесения граничного условия здесь получается существенно другой результат).

5. Надо отметить, что имеются и диапазоны углов (около 60° и 120°), где метод со снесением граничного условия дает результаты, почти идентичные результатам для тонкого экрана, но отличающиеся от численных результатов для телесного крыла и экспериментальных данных. При этом отличие от численных результатов для телесного крыла и экспериментальных данных невелико (до 5 дБ в небольшом диапазоне углов).

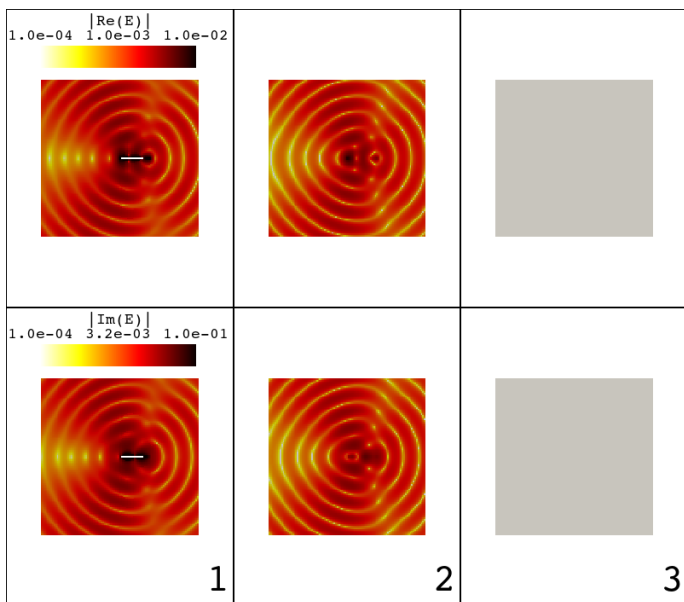


Рис. 8 — Параметры ближнего поля для угла облучения 0° : 1 – прямой метод, 2 – предлагаемый метод, 3 – прямой метод для экрана

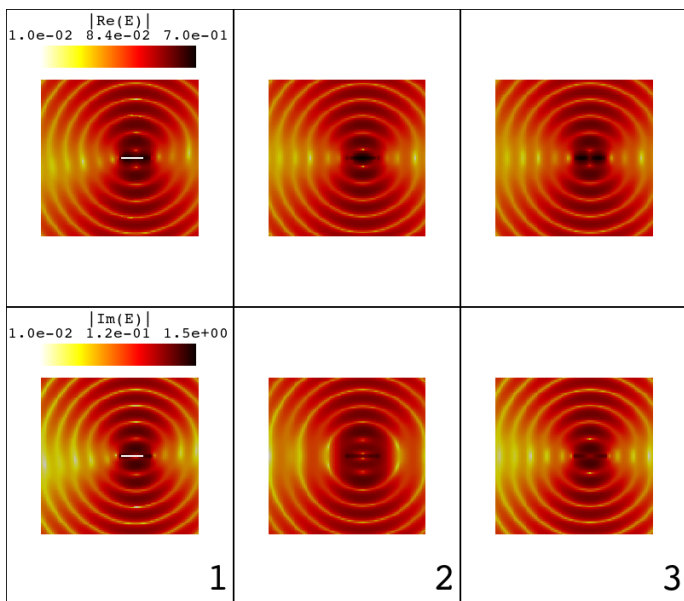


Рис. 9 — Параметры ближнего поля для угла облучения 90° : 1 – прямой метод, 2 – предлагаемый метод, 3 – прямой метод для экрана

6. При рассмотрении диаграмм прямого рассеяния выявлено, что при всех углах облучения тонкий экран не рассеивает в плоскости в которой лежит (ЭПР в направлениях вектора наблюдения, параллельных плоскости экрана практически нулевая), а при решении задачи в прямой постановке для телесного объекта такое рассеяние наблюдается. Предложенный метод позволяет учесть это рассеяние.

Таким образом, проведенное тестирование показало, что предложенный метод позволяет учесть телесность облучаемого объекта при решении граничного интегрального уравнения на срединной поверхности тела. Существуют диапазоны углов облучения, для которых простая замена тела тонким экранам не работает, в то время как предложенный метод дает правильные значения ЭПР. В то же время предложенный метод позволяет получать правильные результаты на более грубых сетках и следовательно при меньших вычислительных затратах, чем при решении методом граничных интегральных уравнений краевой задачи на исходной поверхности.

В заклЮчении приведены основные результаты работы.

ЗаклЮчение

1. Разработан метод моделирования рассеяния монохроматической электромагнитной волны на идеально-проводящих телах малой толщины, основанный на переносе граничного условия на срединную поверхность и сведении задачи к граничным интегро-дифференциальным уравнениям с сильно сингулярными интегралами.

2. Построена численная схема решения системы граничных интегро-дифференциальных уравнений с применением методов кусочно-постоянных аппроксимаций и коллокаций.

3. Построена квадратурная формула аппроксимации поверхностной дивергенции векторной функции, заданной на поверхности в узлах структурированной сетки.

4. Разработан комплекс программ, реализующий разработанный численный алгоритм и предназначенный для численного решения задач рассеяния монохроматической электромагнитной волны на идеально-проводящих телах малой толщины.

5. Проведена верификация разработанного метода путем сравнения с результатами физического эксперимента.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Фетисов, С. Н.* Особенности применения метода граничных интегральных уравнений в задаче дифракции электромагнитных волн на идеально проводящих телах малой толщины / С. Н. Фетисов, А. В. Сетуха // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии. — 2016. — Т. 17, № 4. — С. 460—473.
2. Учёт радиолокационных характеристик при формировании облика перспективных силовых установок летательных аппаратов на основе математического моделирования / С. Н. Фетисов [и др.] // Всероссийская научно-техническая конференция АВИАДВИГАТЕЛИ XXI ВЕКА. Москва 24-27 ноября г. Сборник тезисов докладов. — 2015. — С. 174—176.
3. *Фетисов, С. Н.* Метод снесения граничного условия в задачах рассеяния электромагнитных волн на объектах малой толщины / С. Н. Фетисов, А. В. Сетуха // Девятнадцатая ежегодная научная конференция ИТПЭ РАН, Москва 14-18 мая, сборник тезисов докладов. — 2018. — С. 48—49.
4. *Фетисов, С. Н.* Решение задач дифракции электромагнитных волн на идеально проводящих телах малой толщины / С. Н. Фетисов, А. В. Сетуха // Ломоносовские чтения: Научная конференция, Москва, факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова, 17-26 апреля г. Сборник тезисов докладов. — 2017. — С. 107—108.
5. *Fetisov, S. N.* Numerical method for solving the problem of electromagnetic wave scattering by a perfectly conducting object of small thickness / S. N. Fetisov, A. V. Setukha // International Conference Days on diffraction 2018, St. Petersburg June 4-8. — 2018. — P. 96—97.
6. *Fetisov, S. N.* Numerical solution of problem of electromagnetic wave diffraction by a perfectly conducting body of small thickness / S. N. Fetisov, A. V. Setukha // Progress In Electromagnetics Research Symposium. — 2017. — P. 2721—2727.
7. *Fetisov, S. N.* The method of relocation of boundary condition for the problem of electromagnetic wave scattering by perfectly conducting thin objects / S. N. Fetisov, A. V. Setukha // Journal of Computational Physics. — 2018. — Vol. 373. — P. 631—647.

Фетисов Сергей Николаевич

Метод снесения граничного условия в задаче рассеяния электромагнитных волн
на идеально проводящих объектах малой толщины

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать _____.____._____. Заказ № _____

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Типография _____