Ануприенко Денис Валерьевич

Эффективные методы решения задач фильтрации и пороупругости на неструктурированных сетках

Специальность 1.2.2 —
«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2023

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте вычислительной математики им. Г.И.Марчука Российской академии наук и федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук.

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук
Капырин Иван Викторович

Официальные оппоненты: **Савенков Евгений Борисович,**
доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник федерального государственного учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша Российской академии наук»

Колдоба Александр Васильевич,
доктор физико-математических наук,
профессор МФТИ,
заведующий кафедрой моделирования и технологий разработки нефтяных месторождений МФТИ

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук

Защита состоится 28 июня 2023 г. в 14:00 на заседании диссертационного совета 24.1.455.01 при федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте вычислительной математики им. Г.И.Марчука Российской академии наук по адресу: 119333, г. Москва, ул. Губкина, д. 8, ауд. 727.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИВМ РАН и на сайте `https://www.inm.ras.ru`.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 119333, г. Москва, ул. Губкина, д. 8, ауд. 727, ИВМ РАН, ученому секретарю диссертационного совета 24.1.455.01.

Автореферат разослан ______________________ 2023 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
24.1.455.01,
д. ф.-м. н. Бочаров Геннадий Алексеевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Математическое моделирование на основе начально-краевых задач для уравнений в частных производных широко используется при изучении множества процессов, протекающих в геологических средах. Такое моделирование является необходимым при изучении состояния подземных вод, при разработке месторождений углеводородов, при планировании закачки углекислого газа в подземные хранилища, а также при оценке безопасности пунктов захоронения радиоактивных отходов. В данной работе рассматриваются модели течения подземных вод (фильтрации) в условиях переменной насыщенности в упруго деформируемых пористых средах.

Типичные для гидрогеологических задач неструктурированные сетки налагают ограничения на методы дискретизации уравнений в частных производных. Популярным вариантом является метод конечных объемов, не привязанный к типам ячеек и обеспечивающий локальную консервативность на ячейках. При переходе к задачам пороупругости, связывающим фильтрацию с упругой деформацией пористой среды, возникает необходимость дискретизации уравнений упругости. Наиболее развитые подходы для таких задач, такие как метод конечных элементов, как правило, работают на сетках с фиксированными типами ячеек. В то же время, существуют и подходы, работающие на сетках с произвольными многогранными ячейками, примером которых является метод виртуальных элементов. В настоящее время имеется опыт решения задач пороупругости в случае полной насыщенности с помощью метода конечных объемов и метода виртуальных элементов [1]. В данной работе такой подход обобщается на случай переменной насыщенности.

Расширение спектра учитываемых физических процессов и рассмотрение практических задач с неоднородными средами приводит к усложнению систем нелинейных алгебраических уравнений, возникающих после дискретизации. Построение эффективных методов решения этих систем является актуальной задачей. При этом растущая детализация моделей объектов требует параллелизации разрабатываемых вычислительных технологий.

Целью диссертационного исследования является разработка методов решения задач, возникающих при моделировании процесса течения подземных вод в условиях переменной насыщенности, а также при моделировании этого процесса совместно с упругой деформацией пористой среды.

[1] Coulet J. et al. A fully coupled scheme using virtual element method and finite volume for poroelasticity //Computational Geosciences. – 2020. – Т. 24. – С. 381-403.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Изучить математические модели течения подземных вод в пористых средах и деформации этих сред, определить постановку задач для отдельного и совместного моделирования;
2. Выбрать численные методы для дискретизации полученной системы уравнений и проанализировать их свойства;
3. Разработать методы решения возникающих систем нелинейных алгебраических уравнений, в том числе: специальный метод решения стационарных задач течения подземных вод в условиях переменной насыщенности;
4. Программно реализовать описанные подходы, обеспечить возможность их применения в параллельном режиме и проанализировать эффективность параллелизации.

Научная новизна: Для решения систем уравнений, возникающих при дискретизации стационарного уравнения Ричардса, применен метод продолжения по параметру со специальной параметризацией относительной проницаемости. Показано, что метод представим в виде процедуры типа предиктор–корректор, исследованы различные предикторы и корректоры с точки зрения влияния на время решения задач. Для задачи пороупругости в условиях переменной насыщенности среды водой построена дискретизация на основе методов конечных объемов и виртуальных элементов, для возникающих систем алгебраических уравнений наряду с монолитным подходом применен метод итерационного расщепления.

Практическая значимость работы состоит в создании программного комплекса, реализующего предложенные в работе методы с помощью платформы INMOST[2,3]. Это позволяет встроить их в программный комплекс GeRa, применяемый рядом организаций для оценки безопасности проектируемых пунктов захоронения радиоактивных отходов и других влияющих на подземные воды объектов. Метод продолжения в GeRa доведен до практического применения и доступен для пользователей; с его помощью удалось значительно сократить время расчета для ряда практических задач.

Методология и методы исследования. Методы, использованные в данной работе, включают в себя численные методы решения систем нелинейных уравнений в частных производных, а также методологию построения численного эксперимента.

[2]Integrated Numerical Modelling and Object-oriented Supercomputing Technologies, Интегрированные объектно-ориентированные суперкомпьютерные технологии для численного моделирования

[3]Vassilevski Y. et al. Parallel finite volume computation on general meshes. – New York: Springer International Publishing, 2020.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Разработан метод продолжения по параметру с параметризацией относительной проницаемости для решения стационарных задач ненасыщенной фильтрации на основе уравнения Ричардса. Метод внедрен в программный комплекс GeRa, что в сравнении с ранее реализованным методом уставновления позволило расширить круг решаемых практических задач и существенно ускорить время расчетов (до двух порядков);
2. Метод продолжения представлен в виде процедуры типа предиктор–корректор, исследовано влияние различных предикторов и корректоров на время решения;
3. Построена схема дискретизации уравнений пороупругости на сетках из многогранников в случае неполной насыщенности среды водой, использующая методы конечных объемов и виртуальных элементов;
4. Созданы параллелизованные комплексы программ на основе платформы INMOST, реализующие описанные подходы.

Достоверность полученных результатов обеспечивается использованием устоявшихся подходов к описанию физических процессов на основе уравнений в частных производных, опорой на известные численные методы дискретизации и решения систем уравнений, а также сравнением результатов, полученных разработанным комплексом программ, с аналитическими решениями и результатами, полученными аттестованными программными средствами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на конференции «Ломоносовские чтения» (г. Москва, 2019 г.), конференции «The Week of Applied Mathematics and Mathematical Modelling» (г. Владивосток, 2019 г.), XX и XIX научных конференциях «Школа молодых учёных ИБРАЭ РАН» (г. Москва, 2019 и 2022 гг.), 64-й Всероссийской научной конференции МФТИ (г. Москва, 2019 г.), Международных научных конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (г. Москва, 2020, 2021, 2022 гг.), международных конференциях «Вычислительная математика и приложения» (пгт. Сириус, 2021 и 2022 гг.), международной конференции «Суперкомпьютерные дни в России» (г. Москва, 2022 г.).

Личный вклад. В работе [1] автором предложен и программно реализован метод продолжения по нелинейности, проведены численные эксперименты. В работе [2] автором реализован метод Ньютона и проведены численные эксперименты. Работа [3] полностью выполнена лично автором, предложены и программно реализованы различные корректоры в методе продолжения, проведены численные эксперименты. Работа [4] полностью выполнена лично автором, предложен и программно реализован новый предиктор в методе продолжения, выполнены численные эксперименты. Работа [5] полностью выполнена лично автором: программно реализована схема для пороупругости и проведены численные эксперименты на высокопроизводительной вычислительной системе.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 5 работ [1–5], из них 5 работ [1–5] индексируются в международных базах данных Scopus или Web of Science и входят в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание учёной степени кандидата наук.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, излагается научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

Первая глава посвящена построению математической модели течения подземных вод в деформируемых пористых средах, основанной на уравнениях в частных производных.

В *разделах 1.1 – 1.4* приводятся общие предположения о пористых средах, описывается подход Ричардса для описания течения подземных вод в условиях переменной насыщенности среды водой, пренебрегающий движением воздуха, формулируется закон Дарси, приводятся используемые замыкающие соотношения.

В *разделе 1.5* приводится вывод уравнения Ричардса, описывающего течение подземных вод в условиях переменной насыщенности:

$$\phi\frac{\partial S}{\partial t} + S\cdot s_{stor}\frac{\partial h}{\partial t} - \nabla\cdot(K_r(S)\mathbb{K}\nabla h) = Q,$$

где h – напор воды (основная переменная в фильтрационных уравнениях), S – насыщенность водой, ϕ – пористость среды, s_{stor} – коэффициент упругой емкости, $K_r(S)$ – относительная проницаемость, $\mathbb{K}$ – тензор фильтрации, Q – удельные объемные источники и стоки.

В *разделах 1.6 и 1.7* описывается подход к детальному описанию напряженно-деформированного состояния среды на основе уравнений упругости

В *разделе 1.8* приводится вывод уравнений модели пороупругости, связывающей течение подземных вод с напряженно-деформированным состоянием пористой среды:

$$\phi\frac{\partial S}{\partial t} + S\cdot s_{stor}\frac{\partial h}{\partial t} + \alpha S\nabla\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right) - \nabla\cdot(K_r(S)\mathbb{K}\nabla h) = Q,$$

$$-\mathrm{div}\left(\mathbb{C}:\frac{\nabla\mathbf{u}+(\nabla\mathbf{u})^T}{2}-\alpha SP\mathbb{I}\right)=\mathbf{f}.$$

В эту систему добавились следующие величины: $\mathbf{u}$ – вектор перемещений (основная переменная в уравнениях упругости), $\mathbb{C}$ – тензор упругости, $\mathbb{I}$ – единичный тензор, P – связанное с напором давление воды, $\mathbf{f}$ – вектор внешних сил, α – коэффициент Био.

В *разделе 1.9* приводится постановка начальных и граничных условий. Для фильтрационных задач возможна постановка граничных условий первого и второго рода, а также условия просачивания. Для задач упругости возможна постановка граничных условий первого и второго рода, а также задание нулевого нормального перемещения на границе.

Вторая глава посвящена построению методов дискретизации начально-краевых задач для рассмотренных уравнений в частных производных.

В *разделе 2.1* формулируются характерные для гидрогеологических задач свойства расчетных сеток:

– неструктурированность вследствие сложной формы областей;
– уплощенность ячеек и распространенность призматических сеток;
– измельчение к объектам малого масштаба;
– наличие ячеек произвольной многогранной формы вследствие выклинивания слоев, учета трещин.

Раздел 2.2 посвящен дискретизации уравнений фильтрации. Для дискретизации по времени используется неявная схема Эйлера первого порядка. Эта схема абсолютно устойчива, но приводит к системам нелинейных алгебраических уравнений на каждом шаге по времени. Для дискретизации по пространству приводится обзор подходов, а также описание выбранных вариантов – метода конечных объемов и метода опорных операторов, работающих на многогранных ячейках и являющихся локально консервативными. В методе конечных объемов доступны следующие аппроксимации потока:

– линейная двухточечная (TPFA);
– линейные многоточечные (MPFA-O, MPFA-L);
– нелинейные двухточечная (NTPFA-B) и многоточечная (NMPFA-B).

Схема метода опорных операторов располагает неизвестные напоры в ячейках, а также вводит дополнительные неизвестные потоки на гранях расчетной сетки, вследствие чего порождает системы алгебраических уравнений большего размера.

В *разделе 2.3* описывается дискретизация уравнений упругости. Приводится обзор существующих методов, работающих на сетках с многогранными ячейками. Обосновывается выбор метода виртуальных элементов для дискретизации уравнений упругости и пороупругости. Построение этого метода схоже с методом конечных элементов, располагающим неизвестные перемещения в узлах. Отличие заключается в специальном выборе аппроксимационных пространств и замене билинейной формы, используемой для нахождения локальных матриц жесткости, на дискретную аппроксимацию, вычисляемую только с использованием значений базисных функций в узлах. Вследствие такого построения метод виртуальных элементов способен работать на сетках с разнообразными ячейками, включая невыпуклые и вырожденные.

В *разделе 2.4* формулируется схема дискретизации уравнений пороупругости, использующая метод конечных объемов для фильтрационной подзадачи и метод виртуальных элементов для подзадачи упругости.

В **третьей главе** рассматриваются методы решения систем нелинейных алгебраических уравнений, возникающих после дискретизации выбранных уравнений в частных производных.

Раздел 3.1 посвящен применению метода продолжения по параметру к стационарному уравнению Ричардса. В начале раздела приводятся общие сведения о системах нелинейных алгебраических уравнений, которые возникают при дискретизации уравнения Ричардса. В общем случае эта система имеет вид

$$F(x) = 0,$$

где F – вектор-функция, а x – вектор неизвестных, содержащий сеточные значения напора в случае метода конечных объемов и сеточные значения напора и потоков в случае метода опорных операторов. Для метода конечных объемов также допустимо представление системы в виде

$$F(h) \equiv A(h)h - b(h) = 0.$$

Описываются распространенные итерационные методы, применяемые для решения таких систем – методы Ньютона и Пикара (простой итерации), а также комбинированный решатель на их основе. Приводится алгоритм линейного поиска, заключающийся в подборе множителя для вектора поправки, обеспечивающего достаточное падение нормы невязки в соответствии с правилом Армихо. Затем описываются трудности, возникающие при решении задач для стационарного уравнения Ричардса

$$-\nabla \cdot (K_r(h)\mathbb{K}\nabla h) = Q$$

и подходы к их преодолению. Рассматривается метод установления, основанный на решении нестационарной задачи до достижения стационарного состояния. Далее формулируется предлагаемый в работе метод продолжения по параметру. В этом методе автор предлагает параметризацию функции относительной проницаемости K_r, вносящей нелинейность в стационарное уравнение Ричардса. Вводится параметр продолжения q, и относительная проницаемость заменяется на функцию продолжения

$$\mathcal{K}(h,q): \quad \mathcal{K}(h,1) \equiv K_r(h), \mathcal{K}(h,0) \equiv 1,$$

а уравнение Ричардса – на уравнение

$$-\nabla \cdot (\mathcal{K}(h,q)\mathbb{K}\nabla h) = Q.$$

Примерами функций продолжения служат степенная функция $\mathcal{K}_{pow}(h,q) = K_r^q(h)$ и линейная функция $\mathcal{K}_{lin} = 1 + q(K_r(h) - 1)$. Из свойств $\mathcal{K}(h,q)$ следует, что при $q = 1$ задача является исходной, а при $q = 0$ становится линейной. Решив линейную задачу, можно затем двигаться к решению исходной, повышая q. Задача с очередным q решается итерационным методом, а ранее полученное решение используется для установки начального приближения. Приводится подробный алгоритм такого метода продолжения и его представление в виде процедуры типа предиктор–корректор (см. алгоритм 1). Формулируются предикторы нулевого и первого порядков.

В *разделе 3.2* рассматриваются подходы к решению систем алгебраических уравнений, возникающих при дискретизации задач пороупругости: монолитный подход (применение метода Ньютона к полной системе) и схема расщепления с фиксированными деформациями. В схеме расщепления происходит итерирование между решением подзадач упругости и фильтрации, при этом при решении подзадачи переменные второй подзадачи фиксированы. Сходимость такого итерационного процесса определяется соотношением параметров материалов. Тем не менее, схема имеет ряд плюсов, среди которых работа с системами меньшего размера, возможность использования специализированных решателей или даже отдельных программных комплексов для подзадач.

Четвертая глава содержит результаты численных экспериментов.

В *разделе 4.1* проводится сравнение метода продолжения с методом установления на ряде задач, описывающих течение подземных вод в теле дамбы, вблизи двух пунктов захоронения радиоактивных отходов и на полигоне твердых бытовых отходов. За исключением задачи о дамбе, эти задачи характеризуются многослойностью и неоднородностью областей, анизотропией материалов, наличием озер и рек. Число ячеек в расчетной сетке достигало 12 млн. В качестве корректора в методе продолжения использовался метод Ньютона. Характеристики расчета (общее время, число успешных и неудачных шагов, а также число итераций) для двух задач приведены в таблицах 1 и 2. Влияние линейного поиска на сходимость метода Ньютона продемонстрировано на рисунке 1.

Результаты расчетов показали следующее:

– снижение времени расчета вследствие использования метода продолжения может достигать 94 раз;

$q = 0$;
$x = \text{const}$;
Найти x: $F(x,0) = 0$ итерационным решателем;
$\Delta q_{last} = 1$;
до тех пор, пока $q < 1$ **выполнять**
    $\Delta q = \min(1 - q\ , 2 \cdot \Delta q_{last})$;
    до тех пор, пока $\Delta q > 10^{-4}$ **выполнять**
        1. Шаг предиктора:
        установить начальное приближение к $x_{q+\Delta q}$;

        2. Шаг корректора:
        Найти $x_{q+\Delta q}$: $F(x_{q+\Delta q}, q + \Delta q) = 0$ итерационным решателем;

        если *итерационный решатель сошелся* **тогда**
            $x = x_{q+\Delta q}$;
            $q = q + \Delta q$;
            $\Delta q_{last} = \Delta q$;
            завершить шаг;
        иначе
            $\Delta q = \Delta q/2$;
        конец
    конец
    если Δq *не найден* **тогда**
        метод продолжения не сработал;
        завершение;
    конец
конец

Алгоритм 1: Метод продолжения по нелинейности в терминах предиктор–корректор

	T_{comp}, с	# успеш. (неуд.) шагов	# итераций
М. уст-я, TPFA	868,4	65(10)	377
М. прод-я, TPFA	124,4	1(0)	10
М. прод-я, MPFA-O	444,3	1(0)	13

Таблица 1 — Сравнение методов установления и продолжения на задаче о пункте захоронения радиоактивных отходов

	T_{comp}, с	# успеш. (неуд.) шагов	# итераций
М. уст-я, TPFA	3126	358(72)	6273
М. прод-я, TPFA	33,1	3(2)	57

Таблица 2 — Сравнение методов установления и продолжения на задаче о полигоне твердых бытовых отходов

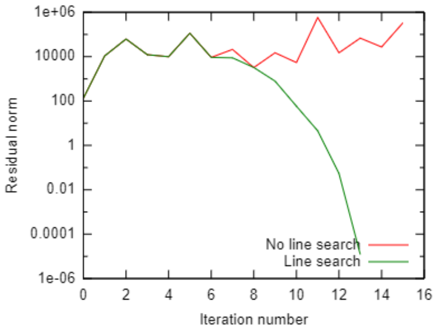


Рис. 1 — Влияние линейного поиска на сходимость метода Ньютона: однократное его применение на итерации 7 позволяет достичь сходимости

– даже при использовании более сложной схемы дискретизации MPFA-O метод продолжения быстрее метода установления со схемой TPFA;
– линейный поиск является важным инструментом, способным существенно менять сходимость итерационных решателей.

В *разделе 4.2* проводится сравнение различных корректоров в методе продолжения. Примеры сходимости различных корректоров приведены на рисунке 2. Использование метода Пикара оказалось нецелесообразно вследствие низкой скорости сходимости. Для задач со слабой нелинейностью комбинированный решатель с фиксированным малым параметром релаксации на первых итерациях может обеспечить сходимость метода продолжения за один шаг, когда остальным корректорам это не удается. Для задач с более сильной нелинейностью предпочтительнее применение метода Ньютона, поскольку этот решатель, как правило, быстро сходится или быстро расходится, что дает меньшее число впустую потраченных итераций при большом числе шагов продолжения.

В *разделе 4.3* проводится сравнение различных предикторов в методе продолжения. Для расчетов выбраны две задачи с сильной нелинейностью и характеристиками сред, приводящими к образованию капиллярных барьеров. Такие задачи отличаются большим числом шагов в методе продолжения. Расчеты показали, что использование линейной функции продолжения $\mathcal{K}_{lin}(h,q)$ в таких задачах бессмысленно, поскольку такая

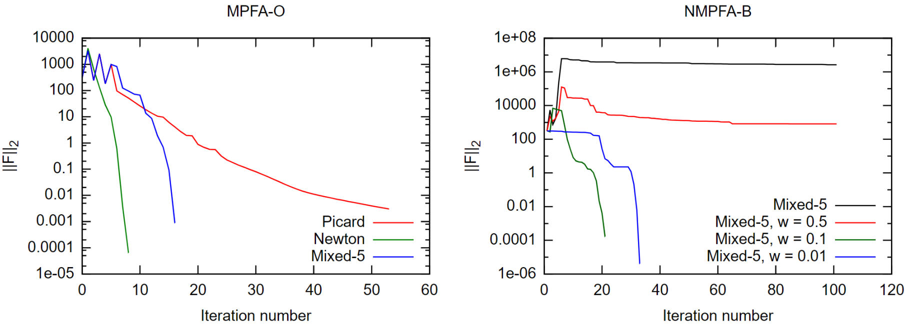


Рис. 2 — Сходимость корректоров в методе продолжения: слева – успешное завершение для всех трех методов, справа – зависимость работы комбинированного решателя от фиксированного параметра релаксации

	T_{comp}, с	# успеш. (неуд.) шагов	# итер.
TPFA, 0	89.7	33 (35)	829
1	51.9	27 (28)	463
MPFA-O, 0	375.0	31 (33)	667
1	281.5	24 (25)	432
NTPFA-B, 0	48.7	35 (37)	409
1	29.3	26 (27)	265
NMPFA-B, 0	63.0	32 (34)	493
1	63.2	25 (27)	413
М. опор. опер., 0	35.8	13 (14)	117
1	57.0	23 (24)	198

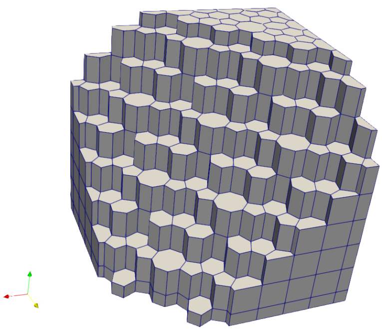
Таблица 3 — Сравнение предикторов нулевого и первого порядков на задаче о капиллярном барьере

функция не при всех значениях q сохраняет соотношение проницаемостей, необходимое для образования капиллярного барьера. Результаты расчетов для двух задач приведены в таблицах 3 и 4. Для первой задачи предиктор первого порядка снизил число шагов продолжения, а также общее число итераций для всех схем, кроме метода опорных операторов. Примечательно, что решение при использовании метода опорных операторов было получено быстрее всех, несмотря на то, что системы уравнений имели значительно больший размер. Метод опорных операторов также оказался единственным вариантом, кроме схемы TPFA, при использовании которого удалось решить вторую задачу. На этой задаче с использованием предиктора первого порядка удалось достичь ускорения на 45–55%.

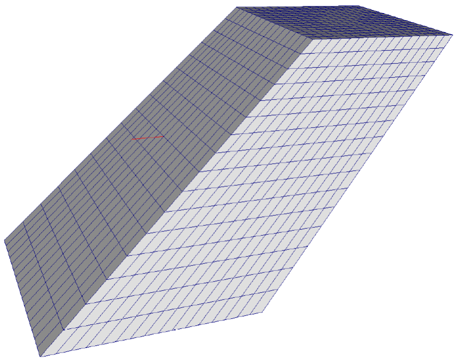
	T_{comp}, с	# успеш. (неуд.) шагов	# итер.
TPFA, 0	47.2	17 (36)	383
1	20.1	11 (23)	186
М. опор. опер., 0	335.5	18 (39)	510
1	185.5	19 (41)	312

Таблица 4 — Сравнение предикторов нулевого и первого порядков в задаче о приповерхностном пункте хранения радиоактивных отходов

В *разделе 4.4* экспериментально исследуется сходимость численного решения, получаемого в задачах пороупругости схемой на основе методов конечных объемов и виртуальных элементов, к аналитическому. Для расчетов выбраны два типа сеток (приведены на рисунке 3): первый тип содержит призматические ячейки с многоугольным основанием, а второй тип представляет собой искаженные кубические сетки. Сетки обоих типов не являются $\mathbb{K}$-ортогональными. Полученные графики ошибки численного решения в специальной норме приведены на рисунке 4 и показывают, что при использовании линейной двухточечной аппроксимации потока сходимость отсутствует, но присутствует при использовании более сложных многоточечных схем аппроксимации.



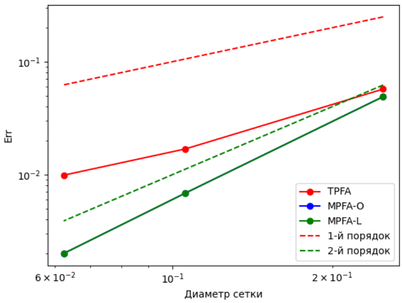
а) Призматические (в разрезе)



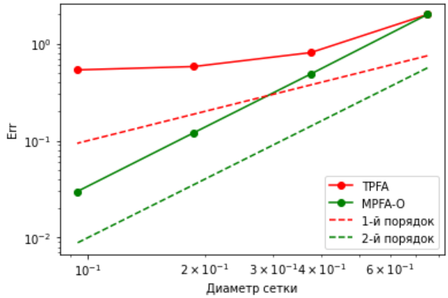
б) Искаженные кубические

Рис. 3 — Сетки, используемые для оценки сходимости

В *разделе 4.5* проводится сравнение эффективности параллелизации монолитного подхода и схемы расщепления для задач пороупругости. Было выдвинуто предположение, что схема расщепления продемонстрирует лучшую масштабируемость при использовании линейного решателя общего назначения вследствие работы с матрицами меньшего размера и более простой структуры. Расчеты, проведенные для двух задач с неоднородными областями, содержащих от 1,7 до 5,5 млн неизвестных, не подтвердили



а) Для призматических сеток



б) Для искаженных кубических сеток

Рис. 4 — Графики ошибки

эту гипотезу. На рисунке 5 приведены графики ускорения для одной из задач при использовании от 40 до 600 вычислительных ядер. Полученное сверхлинейное ускорение объясняется работой линейного решателя. Задание параметров по умолчанию привело к тому, что применяемый переобуславливатель MPTILUC оказался близок к построению полного LU-разложения для диагональных подблоков, что и привело к его сверхлинейному ускорению. При этом неидеальное разбиение сетки между ядрами определило сублинейное ускорение сборки систем. Поскольку построение переобуславливателя занимает бóльшую, а сборка систем – меньшую долю в работе монолитного подхода, этот метод продемонстрировал лучшую масштабируемость.

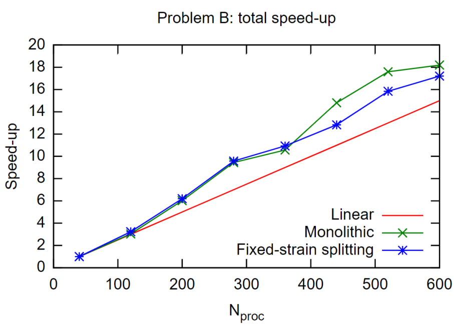


Рис. 5 — Общее ускорение в задаче пороупругости

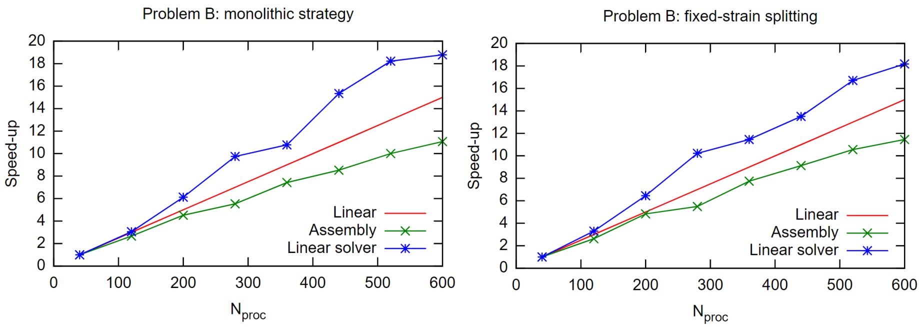


Рис. 6 — Ускорение отдельных этапов решения задачи пороупругости для монолитного подхода и схемы расщепления

Заключение

Основные результаты работы состоят в следующем:

1. Разработан метод продолжения по параметру для стационарного уравнения Ричардса со специальной параметризацией относительной проницаемости, являющийся процедурой типа предиктор–корректор;
2. С помощью метода продолжения удалось значительно (до 94 раз) снизить время решения ряда важных практических задач;
3. В методе продолжения исследованы различные предикторы и корректоры и установлены предпочтительные варианты для применения в случае кусочно-линейных и нелинейных замыкающих соотношений;
4. Предложена схема дискретизации уравнений пороупругости в ненасыщенном случае на неструктурированных сетках с многогранными ячейками, экспериментально установлена сходимость численного решения;
5. Разработанные технологии реализованы в виде параллелизованных программных комплексов, для задач пороупругости исследована эффективность параллелизации.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Anuprienko D.V., Kapyrin I.V.* Nonlinearity continuation method for steady-state groundwater flow modeling in variably saturated conditions // *Journal of Computational and Applied Mathematics.* — 2021. — Vol. 393. — P. 113502.

2. *Anuprienko D.V., Kapyrin I.V.* Modeling groundwater flow in unconfined conditions: numerical model and solvers' efficiency // *Lobachevskii Journal*

of Mathematics. — 2018. — Vol. 39, no. 7. — Pp. 867–873.

3. *Anuprienko D.V.* Comparison of nonlinear solvers within continuation method for steady-state variably saturated groundwater flow modelling // *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling.* — 2021. — Vol. 36, no. 4. — Pp. 183–195.

4. *Anuprienko D.V.* First-order continuation method for steady-state variably saturated groundwater flow modeling // *Lobachevskii Journal of Mathematics.* — 2022. — Vol. 43, no. 4. — Pp. 924–934.

5. *Anuprienko D.V.* Parallel Efficiency of Monolithic and Fixed-strain Solution Strategies for Poroelasticity Problems // *Supercomputing: 8th Russian Supercomputing Days.* — 2022. — Pp. 225–236.

Ануприенко Денис Валерьевич

Эффективные методы решения задач фильтрации и пороупругости на неструктурированных сетках

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать ___.___._____. Заказ № ____________
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.
Типография ______________________________________