ОКЕАНОЛОГИЯ, 2016, том 56, № 6, с. 959–971

МЕТОДЫ И ПРИБОРЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

УДК 551.465

ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ НЕГИДРОСТАТИЧЕСКОЙ МОРСКОЙ ДИНАМИКИ, ОСНОВАННАЯ НА МЕТОДАХ ИСКУССТВЕННОЙ СЖИМАЕМОСТИ И МНОГОКОМПОНЕНТНОГО РАСЩЕПЛЕНИЯ

© 2016 г. В. Б. Залесный[1], А. В. Гусев[1, 2], В. В. Фомин[3]

[1]*Институт вычислительной математики РАН, Москва*

[2]*Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Москва*

[3]*Государственный океанографический институт им. Н.Н. Зубова, Москва*

e-mail: vzalesny@yandex.ru, anatoly.v.gusev@gmail.com

Поступила в редакцию 27.03.2015 г.

Представляется алгоритм решения трехмерных уравнений гидродинамики океана без приближения гидростатики и традиционного упрощения ускорения Кориолиса. Он основан на методе многокомпонентного расщепления модифицированной модели с искусственной сжимаемостью. Исходная система расщепляется на две подсистемы, описывающие перенос трех компонентов скорости и адаптацию полей плотности и течений. На этапе адаптации горизонтальные компоненты скорости представляются в виде суммы средних по вертикали и отклонений от них, и выделяются две соответствующие подсистемы. Для баротропной динамики эффект сжимаемости входит за счет граничного условия на свободной поверхности. Для бароклинной – вводится как ε-регуляризация уравнения неразрывности. Бароклинные уравнения далее расщепляются на две подсистемы, описывающие гидростатическую и негидростатическую динамику. Расчет негидростатической динамики проводится на отдельном этапе расщепления. Алгоритм включается в разработанную в ИВМ РАН модель, основанную на “примитивных” уравнениях, и испытывается на решении задачи гидродинамики Мраморного моря.

DOI: 10.7868/S0030157416050178

ВВЕДЕНИЕ

К настоящему времени разработано большое количество алгоритмов решения уравнений гидродинамики несжимаемой жидкости. Развиты методы как для классических трехмерных постановок задач: Эйлера, Навье-Стокса, Рейнольдса, так и для уравнений гидродинамики океана и атмосферы с учетом вращения и стратификации [2, 5, 15, 16, 19, 24, 25, 27]. Один из наиболее сложных аспектов решения этих задач связан с наличием стационарного уравнения неразрывности. При аппроксимации уравнений импульса в современных алгоритмах стали использоваться квазимонотонные схемы высокого порядка аппроксимации [11], что повысило качество получаемых результатов. Однако это значительно усложняет методы расчета давления, если требуется построить алгебраически точный аналог разностной краевой задачи для давления. Несогласованная аппроксимация уравнений импульса и давления приводит к потере закона сохранения и к медленной сходимости итерационного процесса для достижения баланса массы.

Один из наиболее эффективных методов вычисления давления основан на идее искусственной сжимаемости – введении в уравнение неразрывности производной по времени с малым параметром ε. Впервые этот подход был использован в [1, 14]. В первой работе в уравнении неразрывности вводилась производная по времени от суммы давления и четверти квадрата модуля скорости, во второй – от давления. Данный прием позволяет проводить “параллельные расчеты” без итераций полей скорости и давления, а также использовать для решения задач неявные схемы расщепления [10, 13]. К настоящему времени разработан ряд новых схем, основанных на идее искусственной сжимаемости для решения стационарных и нестационарных задач гидродинамики [12, 20, 21, 23, 26]. Метод развит в направлении поиска значений параметра регуляризации [20], применения эффективных схем расщепления и т.д.

Особенностью уравнений крупномасштабной циркуляции океана является то, что они описывают бароклинную динамику несжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости в поле силы тяжести [8, 22]. Поскольку горизонтальный масштаб океанских движений много больше вертикального, в третьем уравнении движения можно опустить производную по времени и упростить его до гидростатического баланса. Традиционная система уравнений крупномасштабной циркуляции океана называется системой “примитивных” уравнений и включает два стационарных уравнения: неразрывности и гидростатики. Однако при сведении системы к эволюционному виду за счет эффекта плотностной стратификации в модифицированном уравнении неразрывности появляется производная по времени [8, 17]. В простейшем случае, если дно океана плоское, решение разлагается в ряд по собственным функциям вертикального оператора; собственные числа при этом больше нуля [17]. Эффект сжимаемости проявляется для каждой вертикальной моды. Это говорит о том, что для трехмерных моделей бароклинного океана использование приема искусственной сжимаемости может быть оправдано.

В данной работе представлен алгоритм решения трехмерных уравнений циркуляции океана без приближения гидростатики. Он основан на методе многокомпонентного расщепления модифицированной модели с искусственной сжимаемостью. Вначале исходная система расщепляется на две подсистемы: перенос трех компонентов скорости и адаптацию полей плотности и течений. На этапе адаптации горизонтальные компоненты скорости представляются в виде суммы баротропных (средних по вертикали) и бароклинных (отклонений от среднего), и выделяются две соответствующие системы. Для баротропной динамики эффект сжимаемости входит за счет граничного условия на свободной поверхности. Для бароклинной – вводится как ε-регуляризация уравнений для отклонений негидростатических компонентов скорости и давления от средних по вертикали. Бароклинные уравнения далее расщепляются на две подсистемы, описывающие гидростатическую и негидростатическую динамику. Таким образом, развивается разработанная в ИВМ РАН модель гидродинамики океана, основанная на “примитивных” уравнениях. Расчет негидростатической динамики проводится на дополнительном этапе расщепления. Алгоритм испытывается на решении задачи гидродинамики Мраморного моря.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Уравнения гидродинамики океана. Запишем уравнения гидродинамики океана в двухполюсной ортогональной системе на сфере с произвольным расположением полюсов. Имеем:

$$
\begin{gathered}
\frac{du}{dt} - (l_{xy} + \xi_{xy})\,\mathrm{v} + \varepsilon_1 (l_{xz} + \xi_{xz})\,w = \\
= -\frac{1}{\rho_0 r_x}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + Dif_{x,y,z}u, \\
\frac{d\mathrm{v}}{dt} + (l_{xy} + \xi_{xy})\,u + \varepsilon_1 (l_{yz} + \xi_{yz})\,w = \\
= -\frac{1}{\rho_0 r_y}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + Dif_{x,y,z}\mathrm{v}, \\
\varepsilon_1\left[\frac{dw}{dt} - (l_{xz} + \xi_{xz})\,u - (l_{yz} + \xi_{yz})\,\mathrm{v}\right] = \\
= -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} - g\rho\right) + Dif_{x,y,z}w, \\
\frac{1}{r_x r_y}\left[\frac{\partial}{\partial x}(r_y u) + \frac{\partial}{\partial y}(r_x \mathrm{v})\right] + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\
\frac{d\rho}{dt} = \tilde{D}if_{x,y,z}\rho.
\end{gathered} \tag{1}
$$

Здесь t – время; x, y – обобщенные ортогональные координаты по горизонтали на сфере, z – направленная вдоль радиуса сферы вертикальная координата; u, v, w – компоненты скорости вдоль координат x, y, z соответственно, $\tilde{p}$ – давление, ρ – потенциальная плотность, l_{xy}, l_{xz}, l_{yz} – параметры Кориолиса для трех координатных плоскостей; $\rho_0 = \mathrm{const}$ – отсчетная плотность, g – гравитационное ускорение, r_x, r_y – метрические коэффициенты по координатам x, y соответственно, $Dif_{x,y,z}, \tilde{D}if_{x,y,z}$ – операторы диссипации и диффузии. При произвольном задании ортогональных координат по горизонтали имеем:

$$
\begin{gathered}
\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{r_x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\mathrm{v}}{r_y}\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}, \\
l_{xy} = 2\Omega\sin\phi, \quad l_{xz} = \pm 2\Omega\cos\phi\cos\psi, \\
l_{yz} = \mp 2\Omega\cos\phi\sin\psi, \\
\xi_{xy} = \frac{1}{r_x r_y}\left(\mathrm{v}\frac{\partial r_y}{\partial x} - u\frac{\partial r_x}{\partial y}\right), \\
\xi_{xz} = \frac{u}{r_x}\frac{\partial r_x}{\partial z}, \quad \xi_{yz} = \frac{\mathrm{v}}{r_y}\frac{\partial r_y}{\partial z},
\end{gathered} \tag{2}
$$

Ω – угловая скорость вращения Земли, ϕ – географическая широта, ψ – угол между координатными линиями географической и модельной систем координат. В случае, если прямая, соединяющая полюса, проходит через центр сферы, система координат является сферической, и ее метрические коэффициенты равны $r_x = r\cos y$,

$r_y = r$, где r – расстояние от центра сферы, которое обычно считается постоянным и равным среднему радиусу Земли. Наконец, если ось сферы совпадает с осью вращения Земли, то $\phi = y$. В выражениях для параметров Кориолиса в вертикальных плоскостях верхний знак используется в случае правой системы координат (x, y, z) и нижний – в противном случае. Параметр ε_1 используется для перехода от системы "примитивных" уравнений (с приближением гидростатики) к негидростатической постановке задачи. Если глубина и горизонтальный размер океана – соответственно H и L, то

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} 0, & H \ll L \\ 1, & H \sim L \end{cases}. \tag{3}$$

Отметим, что в задачах крупномасштабной циркуляции океана слагаемыми с параметром ε_1 обычно пренебрегают из-за малости вертикального размера океана H по сравнению с горизонтальным L.

Система (1) рассматривается в области $\tilde{D}$, ограниченной твердой боковой поверхностью $\tilde{S}$, верхней подвижной границей $z = \zeta(t, x, y)$ (ζ – отклонение уровня моря от невозмущенной поверхности $z = 0$) и дном $z = H(x, y)$. Сформулируем кинематические условия, пренебрегая слагаемыми, описывающими диссипацию и диффузию: $D_{x,y,z} = 0, \tilde{D}_{x,y,z} = 0$.

На боковой поверхности $\tilde{S}$ поставим условие непротекания:

$$(u_h, n) = 0, \tag{4}$$

где $u_h \equiv (u, \mathrm{v})$ – горизонтальный вектор скорости, n – вектор нормали к $\tilde{S}$.

На верхней невозмущенной поверхности $z = 0$ поставим линеаризованное условие:

$$w = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \tag{5}$$

на нижней границе $z = H(x, y)$ – полное кинематическое условие:

$$w = \frac{dH}{dt}. \tag{6}$$

Представим $\tilde{p}$ как сумму гидростатического давления p_H и отклонения от него p:

$$\begin{gathered} \tilde{p}(t, x, y, z) = p_h(t, x, y, z) + p(t, x, y, z), \\ p_h(t, x, y, z) = \tilde{p}(t, x, y, 0) + \int_0^z g\rho\, dz_1. \end{gathered} \tag{7}$$

Отметим, что по определению (7):

$$p(t, x, y, 0) = 0. \tag{8}$$

Замечание. Формально в области $\tilde{D}$ вертикальная координата изменяется в пределах $\zeta \le z \le H$, однако граничное условие ставится на невозмущенной поверхности $z = 0$.

Постановка задачи в сигма-системе координат. Введем новую систему координат:

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad \sigma = \frac{z - \zeta}{H - \zeta}, \quad t_1 = t. \tag{9}$$

Тогда

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{Z_{x_1}}{Z_\sigma}\frac{\partial}{\partial \sigma}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{Z_{y_1}}{Z_\sigma}\frac{\partial}{\partial \sigma}, \\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{Z_\sigma}\frac{\partial}{\partial \sigma}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_1} - \frac{Z_{t_1}}{Z_\sigma}\frac{\partial}{\partial \sigma}, \\ Z = (H - \zeta)\sigma + \zeta. \end{gathered} \tag{10}$$

Преобразование координат (9) переводит исходную область решения задачи $\tilde{D}$ при $H \ge H_0 > \zeta$ в цилиндр единичной высоты $D(x, y, \sigma)$ с твердой границей S. Если $H \gg \zeta$, то можно использовать традиционные приближения [28]:

$$\begin{gathered} Z \equiv (H - \zeta)\sigma + \zeta \approx \sigma H, \\ Z_t \equiv \frac{\partial Z}{\partial t} = (1 - \sigma)\frac{\partial \zeta}{\partial t}, \\ Z_x \equiv \frac{\partial Z}{\partial x} \approx \sigma \frac{\partial H}{\partial x}, \\ Z_y \equiv \frac{\partial Z}{\partial y} \approx \sigma \frac{\partial H}{\partial y}, \quad Z_\sigma \equiv \frac{\partial Z}{\partial \sigma} \approx H. \end{gathered} \tag{11}$$

Тогда уравнения (1) в новых координатах в отсутствие диссипации и диффузии примут вид (нижние индексы у независимых переменных опущены):

$$
\begin{gathered}
\frac{du}{dt}-\left(l_{xy}+\xi_{xy}\right)\mathrm{v}+\varepsilon_1\left(l_{xz}+\xi_{xz}\right)w=-\frac{1}{\rho_0 r_x}\left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}}_{1}-\underbrace{\frac{Z_x}{Z_\sigma}\frac{\partial}{\partial\sigma}}_{4}\right)\left(p_h+p\right),\\
\frac{d\mathrm{v}}{dt}+\left(l_{xy}+\xi_{xy}\right)u+\varepsilon_1\left(l_{yz}+\xi_{yz}\right)w=-\frac{1}{\rho_0 r_y}\left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}}_{2}-\underbrace{\frac{Z_y}{Z_\sigma}\frac{\partial}{\partial\sigma}}_{5}\right)\left(p_h+p\right),\\
\varepsilon_1\left(\frac{dw}{dt}-\left(l_{xz}+\xi_{xz}\right)u-\left(l_{yz}+\xi_{yz}\right)\mathrm{v}\right)=-\frac{1}{\rho_0}\left(\underbrace{\frac{1}{Z_\sigma}\frac{\partial}{\partial\sigma}}_{3}\left(p_h+p\right)-\underbrace{g\rho}_{6}\right),\\
\underbrace{\frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{\partial Z}{\partial t}}_{9}+\frac{1}{r_x r_y}\left[\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(Z_\sigma r_y u\right)}_{1}+\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\left(Z_\sigma r_x \mathrm{v}\right)}_{2}\right]+\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\underbrace{w}_{3}-\underbrace{Z_t}_{9}-\underbrace{\frac{Z_x}{r_x}u}_{4}-\underbrace{\frac{Z_y}{r_y}\mathrm{v}}_{5}\right)=0,\\
\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\left(Z_\sigma\rho\right)}_{10}+\frac{1}{r_x r_y}\left[\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(Z_\sigma r_y u\rho\right)}_{7}+\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\left(Z_\sigma r_x \mathrm{v}\rho\right)}_{8}\right]+\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\underbrace{w\rho}_{6}-\underbrace{Z_t\rho}_{10}-\underbrace{\frac{Z_x}{r_x}u\rho}_{7}-\underbrace{\frac{Z_y}{r_y}\mathrm{v}\rho}_{8}\right)=0,
\end{gathered}
\tag{12}
$$

где $\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{u}{r_x}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\mathrm{v}}{r_y}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\omega}{Z_\sigma}\frac{\partial}{\partial\sigma}$.

Граничные условия в новых координатах будут следующими.

На боковой границе S:

$$\left(u_h,n\right)=0. \tag{13}$$

На поверхности $\sigma=0$ и дне $\sigma=1$:

$$w-\left(Z_t+\frac{1}{r_x}Z_x u+\frac{1}{r_y}Z_y\mathrm{v}\right)=0. \tag{14}$$

Здесь

$$\omega\equiv w-\left(Z_t+\frac{1}{r_x}Z_x u+\frac{1}{r_y}Z_y\mathrm{v}\right), \tag{15}$$

$$
\begin{gathered}
\tilde{p}\equiv p_h+p,\quad p_h\equiv p_{h0}+gZ_\sigma\int_0^\sigma\rho\,d\sigma_1,\\
p_{h0}\equiv-g\rho_0\zeta\left(t,x,y\right).
\end{gathered}
\tag{16}
$$

Умножим (12) скалярно на вектор $\left(Z_\sigma\rho_0 u, Z_\sigma\rho_0\mathrm{v}, Z_\sigma\rho_0 w, p_h+p, -gZ\right)$ и проинтегрируем по частям с учетом граничных условий (13)–(14) по области D. Слагаемые, обозначенные внизу одинаковыми цифрами от (1) до (10), являются энергетически нейтральными и взаимно сокращаются. Выполняется следующий закон сохранения полной энергии:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial t}\int_D\left(\rho_0 Z_\sigma\frac{u^2+\mathrm{v}^2+\varepsilon_1 w^2}{2}+\right.\\
\left.+\frac{g\rho_0}{2}\zeta^2-gZZ_\sigma\rho\right)dD=0.
\end{gathered}
\tag{17}
$$

Система (12) описывает невязкую циркуляцию стратифицированной вращающейся жидкости в поле силы тяжести. Ее особенность состоит в том, что это модель частично сжимаемой жидкости. Эффект сжимаемости присутствует лишь для средней по вертикали циркуляции – только для нее в уравнении неразрывности (в четвертом уравнении (12)) появляется производная по времени. Для отклонения движения от среднего по вертикали производной по времени в уравнении неразрывности нет.

Замечание. Можно отказаться от условия $H\gg\zeta$ и приближений (11). Формулировка задачи в сигма-системе и все последующие рассуждения формально будут сохранять свой вид, если поставить условие $w=\frac{d\zeta}{dt}$ при $z=0$. В этом случае, однако, при малых значениях толщины жидкости $H-\zeta$ спектр движений может включать сверхзвуковые режимы [6].

Метод многокомпонентного расщепления

Для решения (12) используем метод многокомпонентного расщепления [7]. На каждом интервале по времени $t_j<t<t_{j+1}$ расщепим (12) по физическим процессам на две подсистемы. Под-

системы решаются на каждом интервале поочередно по времени, решение предыдущей системы при $t = t_{j+1}$ используется в качестве начального условия при $t = t_j$ для последующей [7]. Первая подсистема описывает перенос компонентов скорости вдоль траекторий с учетом метрических слагаемых и вертикальных компонентов силы Кориолиса:

$$\begin{gathered}\frac{du}{dt} - \xi_{xy}\mathrm{v} + \varepsilon_1(l_{xz} + \xi_{xz})w = 0,\\ \frac{d\mathrm{v}}{dt} + \xi_{xy}u + \varepsilon_1(l_{yz} + \xi_{yz})w = 0,\\ \varepsilon_1\left[\frac{dw}{dt} - (l_{xz} + \xi_{xz})u - (l_{yz} + \xi_{yz})\mathrm{v}\right] = 0.\end{gathered} \tag{18}$$

Отметим, что скорость переноса по вертикали ω при этом равна

$$\omega = \int_\sigma^1 \frac{1}{r_x r_y}\left[\frac{\partial}{\partial x} Z_\sigma r_y \left(u - \int_0^1 u d\sigma\right) + \frac{\partial}{\partial y} Z_\sigma r_x \left(\mathrm{v} - \int_0^1 \mathrm{v} d\sigma\right)\right] d\sigma.$$

Вторая подсистема описывает адаптацию полей течений и плотности:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} - l_{xy}\mathrm{v} = -\frac{1}{\rho_0 r_x}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{Z_x}{Z_\sigma}\frac{\partial}{\partial \sigma}\right)(p_h + p),\\ \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} - l_{xy}u = -\frac{1}{\rho_0 r_y}\left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{Z_y}{Z_\sigma}\frac{\partial}{\partial \sigma}\right)(p_h + p),\\ \varepsilon_1\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0 Z_\sigma}\frac{\partial}{\partial \sigma}(p_h + p) + \frac{g\rho}{\rho_0},\\ \frac{\partial}{\partial \sigma}\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{1}{r_x r_y}\left[\frac{\partial}{\partial x}(Z_\sigma r_y u) + \frac{\partial}{\partial y}(Z_\sigma r_x \mathrm{v})\right] + \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(w - Z_t - \frac{Z_x}{r_x}u - \frac{Z_y}{r_y}\mathrm{v}\right) = 0,\\ \frac{\partial}{\partial t}(Z_\sigma \rho) + \frac{1}{r_x r_y}\left[\frac{\partial}{\partial x}(Z_\sigma r_y u\rho) + \frac{\partial}{\partial y}(Z_\sigma r_x \mathrm{v}\rho)\right] + \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(w\rho - Z_t\rho - \frac{Z_x}{r_x}u\rho - \frac{Z_y}{r_y}\mathrm{v}\rho\right) = 0.\end{gathered} \tag{19}$$

Видно, что, согласно (16), третье уравнение (19) распадается на два:

$$\varepsilon_1\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0 Z_\sigma}\frac{\partial p}{\partial \sigma}, \quad \frac{1}{\rho_0 Z_\sigma}\frac{\partial p_h}{\partial \sigma} = g\rho. \tag{20}$$

Данный алгоритм расщепления справедлив и в случае использования приближения гидростатики. Если положить $\varepsilon_1 = 0$, то первый этап расщепления сохраняет свой вид (третье уравнение (18) исключается). На втором этапе, в силу (8), $p(t, x, y, \sigma) \equiv 0$, и уравнения (19) сводятся к гидростатическому случаю. С учетом (20) из системы можно исключить функции p_h, w. Таким образом, данный алгоритм является естественным расширением многокомпонентного расщепления системы примитивных уравнений гидродинамики океана [29].

Выделение среднего по вертикали движения. Рассмотрим метод решения (19) с соответствующими граничными и начальными условиями. Пользуясь тем, что в уравнении неразрывности слагаемое с производной по времени не зависит от вертикальной координаты:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}\frac{\partial Z}{\partial t} \equiv -\frac{\partial \zeta}{\partial t}, \tag{21}$$

введем следующее представление:

$$\begin{gathered}u = u' + \int_0^1 u d\sigma \equiv u' + \overline{u},\\ \mathrm{v} = \mathrm{v}' + \int_0^1 \mathrm{v} d\sigma \equiv \mathrm{v}' + \overline{\mathrm{v}},\\ p = p' + \int_0^1 p d\sigma \equiv p' + \overline{p}.\end{gathered} \tag{22}$$

С учетом (16), (21), (22) и граничных условий (14) система (19) распадается на две подсистемы. Первая подсистема описывает среднее по вертикали ("баротропное") движение и имеет вид (далее положим для простоты $l \equiv l_{xy}$):

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - l\bar{v} - \frac{g}{r_x}\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0 r_x}\int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{Z_x}{Z_\sigma}\frac{\partial}{\partial \sigma}\right) p d\sigma = \bar{f}_1,$$
$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + l\bar{u} - \frac{g}{r_y}\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0 r_y}\int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{Z_y}{Z_\sigma}\frac{\partial}{\partial \sigma}\right) p d\sigma = \bar{f}_2, \quad (23)$$
$$-\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{r_x r_y}\left[\frac{\partial}{\partial x}(Z_\sigma r_y \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(Z_\sigma r_x \bar{v})\right] = 0,$$

где

$$f_1 = -\frac{g}{\rho_0 r_x}\left(Z_\sigma \frac{\partial}{\partial x} - Z_x \frac{\partial}{\partial \sigma}\right)\left(\int_0^\sigma \rho d\sigma_1\right),$$
$$f_2 = -\frac{g}{\rho_0 r_y}\left(Z_\sigma \frac{\partial}{\partial y} - Z_y \frac{\partial}{\partial \sigma}\right)\left(\int_0^\sigma \rho d\sigma_1\right). \quad (24)$$

Вторая подсистема описывает "бароклинное" движение (отклонение от среднего по вертикали):

$$\frac{\partial u'}{\partial t} - l v' + \frac{1}{\rho_0 r_x}\frac{\partial p'}{\partial x} =$$
$$= \frac{1}{\rho_0 r_x Z_\sigma}\left[Z_x \frac{\partial p'}{\partial \sigma} - \int_0^1 \left(Z_x \frac{\partial p'}{\partial \sigma}\right) d\sigma\right] + f_1 - \bar{f}_1,$$
$$\frac{\partial v'}{\partial t} + l u' + \frac{1}{\rho_0 r_y}\frac{\partial p'}{\partial y} =$$
$$= \frac{1}{\rho_0 r_y Z_\sigma}\left[Z_y \frac{\partial p'}{\partial \sigma} - \int_0^1 \left(Z_y \frac{\partial p'}{\partial \sigma}\right) d\sigma\right] + f_2 - \bar{f}_2, \quad (25)$$
$$\varepsilon_1 \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0 Z_\sigma}\frac{\partial p'}{\partial \sigma} = 0,$$
$$\frac{1}{r_x r_y}\left[\frac{\partial}{\partial x}(Z_\sigma r_y u') + \frac{\partial}{\partial y}(Z_\sigma r_x v')\right] +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial \sigma}\left[w - \left(\frac{(1-\sigma)}{r_x r_y} \times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times \left[\frac{\partial}{\partial x}(Z_\sigma r_y \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(Z_\sigma r_x \bar{v})\right] + \frac{1}{r_x} Z_x u + \frac{1}{r_y} Z_y v\right)\right] = 0.$$

Видно, что системы (23) и (25) связаны. Однако, если считать, что правые части в (23) известны и берутся с предыдущего шага по времени $t = t_j$, то (23) можно решить с помощью стандартного алгоритма [27].

Для решения (25) используем дальнейшее расщепление на две подсистемы, описывающие гидростатический и негидростатический компоненты. Гидростатическая динамика описывается уравнениями:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} - l v' = f_1 - \bar{f}_1,$$
$$\frac{\partial v'}{\partial t} + l u' = f_2 - \bar{f}_2, \quad (26)$$
$$\varepsilon_1 \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{\partial p'}{\partial t} = 0.$$

Для описания негидростатической динамики имеем:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0 r_x}\left(\frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{Z_x}{Z_\sigma}\frac{\partial p'}{\partial \sigma} - \overline{\frac{Z_x}{Z_\sigma}\frac{\partial p'}{\partial \sigma}}\right),$$
$$\frac{\partial v'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0 r_y}\left(\frac{\partial p'}{\partial y} - \frac{Z_y}{Z_\sigma}\frac{\partial p'}{\partial \sigma} - \overline{\frac{Z_y}{Z_\sigma}\frac{\partial p'}{\partial \sigma}}\right),$$
$$\varepsilon_1 \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0 Z_\sigma}\frac{\partial p'}{\partial \sigma} = 0,$$
$$\frac{1}{r_x r_y}\left[\frac{\partial}{\partial x}(Z_\sigma r_y u') + \frac{\partial}{\partial y}(Z_\sigma r_x v')\right] + \quad (27)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial \sigma}\left[w - \left(\frac{(1-\sigma)}{r_x r_y} \times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times \left[\frac{\partial}{\partial x}(Z_\sigma r_y \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(Z_\sigma r_x \bar{v})\right] + \frac{1}{r_x} Z_x u + \frac{1}{r_y} Z_y v\right)\right] = 0.$$

Решение уравнений негидростатической динамики. Методы решения подсистем (18), (23), (26) достаточно подробно описаны ранее [9, 18, 29]. Они включают симметризацию уравнений (18) и (26) и дальнейшее расщепление по отдельным координатам. Рассмотрим решение подсистемы (27). Это линейная задача для трех компонентов скорости и негидростатического отклонения давления, дополненная граничными условиями (13)–(14). Выпишем неявную схему аппроксимации первых трех уравнений (27) по времени и подставим выражения для компонентов скорости в уравнение неразрывности. На интервале $t_j < t < t_{j+1}$ для компонентов скорости имеем:

$$u' = u'^j - \frac{\tau}{\rho_0 r_x}\left[\frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{Z_x}{Z_\sigma}\frac{\partial p'}{\partial \sigma} + \left.\left(\frac{Z_x}{Z_\sigma} p'\right)\right|_{\sigma=1}\right],$$
$$v' = v'^j - \frac{\tau}{\rho_0 r_y}\left[\frac{\partial p'}{\partial y} - \frac{Z_y}{Z_\sigma}\frac{\partial p'}{\partial \sigma} + \left.\left(\frac{Z_y}{Z_\sigma} p'\right)\right|_{\sigma=1}\right], \quad (28)$$
$$w = w^j - \frac{\tau}{\varepsilon_1 \rho_0 Z_\sigma}\frac{\partial p'}{\partial \sigma}.$$

Подставляя (28) в последнее уравнение (27), получим:

$$
-\frac{1}{r_x r_y}\frac{\partial}{\partial x}\frac{Z_\sigma r_y}{r_x}\left[\frac{\partial p'}{\partial x}-\frac{Z_x}{Z_\sigma}\frac{\partial p'}{\partial\sigma}+\left(\frac{Z_x}{Z_\sigma}p'\right)\Big|_{\sigma=1}\right]-
$$

$$
-\frac{1}{r_x r_y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{Z_\sigma r_x}{r_y}\left[\frac{\partial p'}{\partial y}-\frac{Z_y}{Z_\sigma}\frac{\partial p'}{\partial\sigma}+\left(\frac{Z_y}{Z_\sigma}p'\right)\Big|_{\sigma=1}\right]-
$$

$$
-\frac{\partial}{\partial\sigma}\left[\frac{1}{\varepsilon_1 Z_\sigma}\frac{\partial p'}{\partial\sigma}-\frac{Z_x}{r_x^2}\left(\frac{\partial p'}{\partial x}-\frac{Z_x}{Z_\sigma}\frac{\partial p'}{\partial\sigma}\right)-\frac{Z_y}{r_y^2}\left(\frac{\partial p'}{\partial y}-\frac{Z_y}{Z_\sigma}\frac{\partial p'}{\partial\sigma}\right)\right]=\frac{\rho_0}{\tau}F, \tag{29}
$$

$$
F=-\frac{1}{r_x r_y}\left(\frac{\partial}{\partial x}Z_\sigma r_y u'^j+\frac{\partial}{\partial y}Z_\sigma r_x \mathrm{v}'^j\right)-
$$

$$
-\frac{\partial}{\partial\sigma}\left\{w^j-\frac{(1-\sigma)}{r_x r_y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(Z_\sigma r_y\overline{u}^j\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(Z_\sigma r_x\overline{\mathrm{v}}^j\right)\right]-\frac{Z_x}{r_x}u^j-\frac{Z_y}{r_y}\mathrm{v}^j\right\}.
$$

Пусть для простоты область решения уравнения (29) составлена из прямоугольников. Тогда граничные условия (13)–(14) в терминах давления будут иметь вид:

на отрезках границ, параллельных оси Ox:

$$
\frac{\partial p'}{\partial y}-\frac{Z_y}{Z_\sigma}\frac{\partial p'}{\partial\sigma}+\left(\frac{Z_y}{Z_\sigma}p'\right)\Big|_{\sigma=1}=0, \tag{30}
$$

на отрезках границ, параллельных оси Oy:

$$
\frac{\partial p'}{\partial x}-\frac{Z_x}{Z_\sigma}\frac{\partial p'}{\partial\sigma}+\left(\frac{Z_x}{Z_\sigma}p'\right)\Big|_{\sigma=1}=0, \tag{31}
$$

при $\sigma=0$

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{\varepsilon_1 Z_\sigma}\frac{\partial p'}{\partial\sigma}-\frac{Z_x}{r_x^2}\left(\frac{\partial p'}{\partial x}-\frac{Z_x}{Z_\sigma}\frac{\partial p'}{\partial\sigma}\right)-\\
-\frac{Z_y}{r_y^2}\left(\frac{\partial p'}{\partial y}-\frac{Z_y}{Z_\sigma}\frac{\partial p'}{\partial\sigma}\right)=\\
=-\frac{\rho_0}{\tau}\left\{\frac{1}{r_x r_y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(Z_\sigma r_y\overline{u}^j\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(Z_\sigma r_x\overline{\mathrm{v}}^j\right)\right]+\right.\\
\left.+\frac{Z_x}{r_x}u^j+\frac{Z_y}{r_y}\mathrm{v}^j\right\},
\end{gathered} \tag{32}
$$

при $\sigma=1$

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{\varepsilon_1 Z_\sigma}\frac{\partial p'}{\partial\sigma}-\frac{Z_x}{r_x^2}\left(\frac{\partial p'}{\partial x}-\frac{Z_x}{Z_\sigma}\frac{\partial p'}{\partial\sigma}\right)-\\
-\frac{Z_y}{r_y^2}\left(\frac{\partial p'}{\partial y}-\frac{Z_y}{Z_\sigma}\frac{\partial p'}{\partial\sigma}\right)=-\frac{\rho_0}{\tau}\left(\frac{Z_x}{r_x}u^j+\frac{Z_y}{r_y}\mathrm{v}^j\right).
\end{gathered} \tag{33}
$$

Умножая (29) скалярно на p', можно убедиться, что оператор задачи (29)–(33) симметричный, положительно определенный. Отсюда следует, что краевая задача для эллиптического уравнения (29) с граничными условиями (30)–(33) имеет единственное решение. После нахождения p', используя (8), можно найти $\overline{p}$:

$$
\overline{p}=-p'(t,x,y,0). \tag{34}
$$

Метод искусственной сжимаемости и расщепление уравнений негидростатической динамики. Решение трехмерной системы(29)–(33) включает решение на каждом шаге по времени системы алгебраических уравнений большой размерности. В отличие от классических задач гидродинамики, уравнение для давления (29) включает смешанные производные по координатам (x,σ), (y,σ), что значительно усложняет вычислительный алгоритм. Чтобы обойти эту сложность, можно использовать идею искусственной сжимаемости и затем расщепить уравнения по отдельным координатам x,y,σ [1, 13]. Можно также расщепить уравнения (28)–(29) по двум координатным плоскостям (x,σ), (y,σ) и вертикальной координате σ, выделив на третий этап члены с коэффициентом $1/\varepsilon_1$. Введение искусственной сжимаемости осуществляется введением в четвертое уравнение (27) слагаемого с производной по времени от давления [1, 13, 14]. В нашем случае эффект сжимаемости уже присутствует в баротропном компоненте, а уравнение для давления записано для отклонения от среднего по вертикали. Поэтому новое слагаемое запишем в виде $\varepsilon_1\varepsilon_2\dfrac{\partial p'}{\partial t}$, $\varepsilon_2\ll 1$. Тогда четвертое уравнение (27) будет таким:

$$
\begin{gathered}
\varepsilon_1\varepsilon_2\frac{\partial p'}{\partial t}+\frac{1}{r_x r_y}\left[\frac{\partial}{\partial x}(Z_\sigma r_y u')+\frac{\partial}{\partial y}(Z_\sigma r_x \mathrm{v}')\right]+\\
+\frac{\partial}{\partial\sigma}\left[w-\left(\frac{(1-\sigma)}{r_x r_y}\times\right.\right.\\
\left.\left.\times\left[\frac{\partial}{\partial x}(Z_\sigma r_y\overline{u})+\frac{\partial}{\partial y}(Z_\sigma r_x\overline{\mathrm{v}})\right]+\frac{1}{r_x}Z_x u+\frac{1}{r_y}Z_y \mathrm{v}\right)\right]=0.
\end{gathered} \tag{35}
$$

С модифицированным уравнением неразрывности (35) система (27) становится эволюционной. Еще раз отметим, что в данном случае ε-регуляризация введена для отклонения от средней величины негидростатического компонента дав-

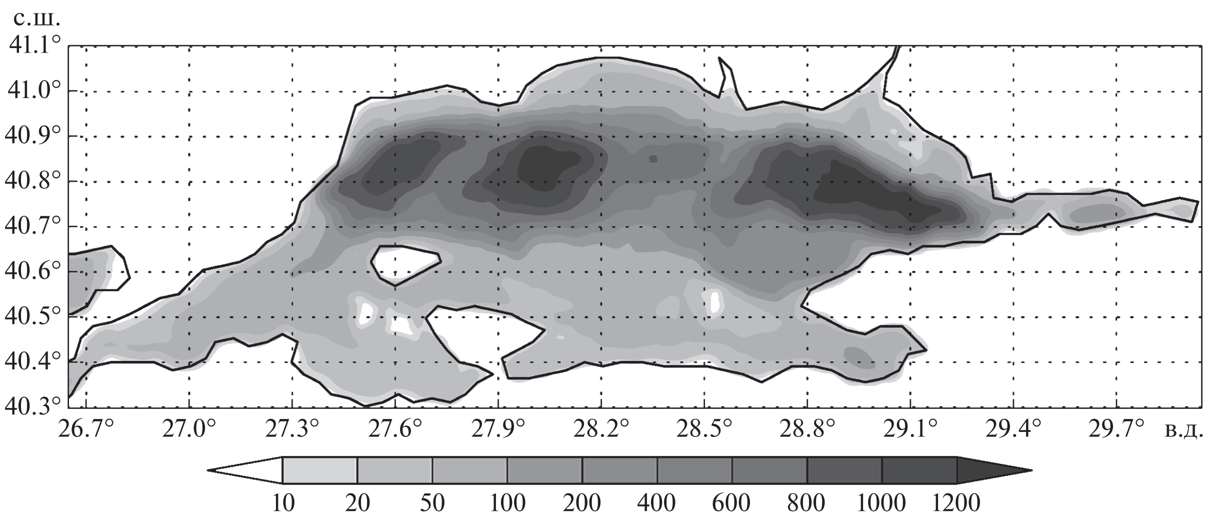

Рис. 1. Модельная топография дна Мраморного моря, м. Шкала градаций глубины – под рисунком.

ления. Ее можно рассматривать как регуляризацию исходной системы (12). При этом плоское уравнение неразрывности и алгоритмы решения систем (23) и (26), описывающие гидростатическое приближение, не изменяются. Меняется только метод решения задачи негидростатической динамики. Для ее решения можно использовать либо одну из схем расщепления, либо полунеявную схему по времени, отнеся на неявный шаг по времени слагаемые с производными по вертикали.

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Рассмотренный алгоритм включен в разработанную ранее в ИВМ РАН гидростатическую модель гидродинамики океана INMOM [3, 29]. Ниже приводятся результаты испытания негидростатической версии модели INMOM_NH для акватории Мраморного моря. При решении уравнений на этапе негидростатической динамики использована полунеявная схема по времени.

Мраморное море – самое маленькое море, его горизонтальные размеры ~270 × 80 км, а наибольшая глубина ~1.36 км. Шаги сетки по горизонтали выбраны около 1 км. Для аппроксимации береговой линии использован программный комплекс Generic Mapping Tools (GMT), доступный на сайте http://gmt.soest.hawaii.edu. Топография дна подготовлена по данным GEBCO с исходным разрешением 30′ по долготе и широте (рис. 1), которые доступны на сайте http://www.gebco.net.

Для начальных и граничных условий на поверхности и на открытых границах использовались данные по температуре и солености, расположенные на сайте http://www.myocean.eu, которые представляют собой результаты расчета глобальной модели за 2013 г. с разрешением 1/12° по долготе и широте, 36 уровнями по вертикали и периодичностью по времени 1 сутки. В качестве начальных условий использовались среднесуточные поля температуры и солености за 01.01.2013, компоненты скорости и отклонение уровня моря были заданы нулем. На открытых границах в проливах Босфор и Дарданелла задавались температура и соленость. Для расчета атмосферного воздействия использовались синоптические атмосферные характеристики, полученные по негидростатической модели WRF [24] с пространственным разрешением 5 км и периодичностью 1 ч.

Численный эксперимент включал 4 варианта расчета на один, 2013 г. Вариант 1 – гидростатическая модель INMOM, шаг по времени Δt = = 120 с; вариант 2 – негидростатическая модель INMOM_NH, Δt = 120 с; вариант 3 – INMOM, Δt = 6 с; вариант 4 – INMOM_NH, Δt = 6 с. Суммируя результаты расчетов, можно отметить следующее.

Расчеты с шагом Δt = 120 с показали, что негидростатическая модель более диссипативна по кинетической энергии, чем гидростатическая. С малым шагом по времени, Δt = 6 с, кинетическая энергия примерно одинакова для обеих версий. Этот эффект хорошо известен и наблюдается при моделировании волновых процессов с использованием неявных схем по времени. Особенность неявных схем состоит в том, что при увеличении шага по времени из решения отфильтровываются быстро осциллирующие процессы.

Анализ результатов расчетов с малым шагом по времени Δt = 6 с показал, что обе модели воспроизводят основные крупномасштабные особенности циркуляции Мраморного моря [4]. На рис. 2, 3 приведены поля уровня моря и течений

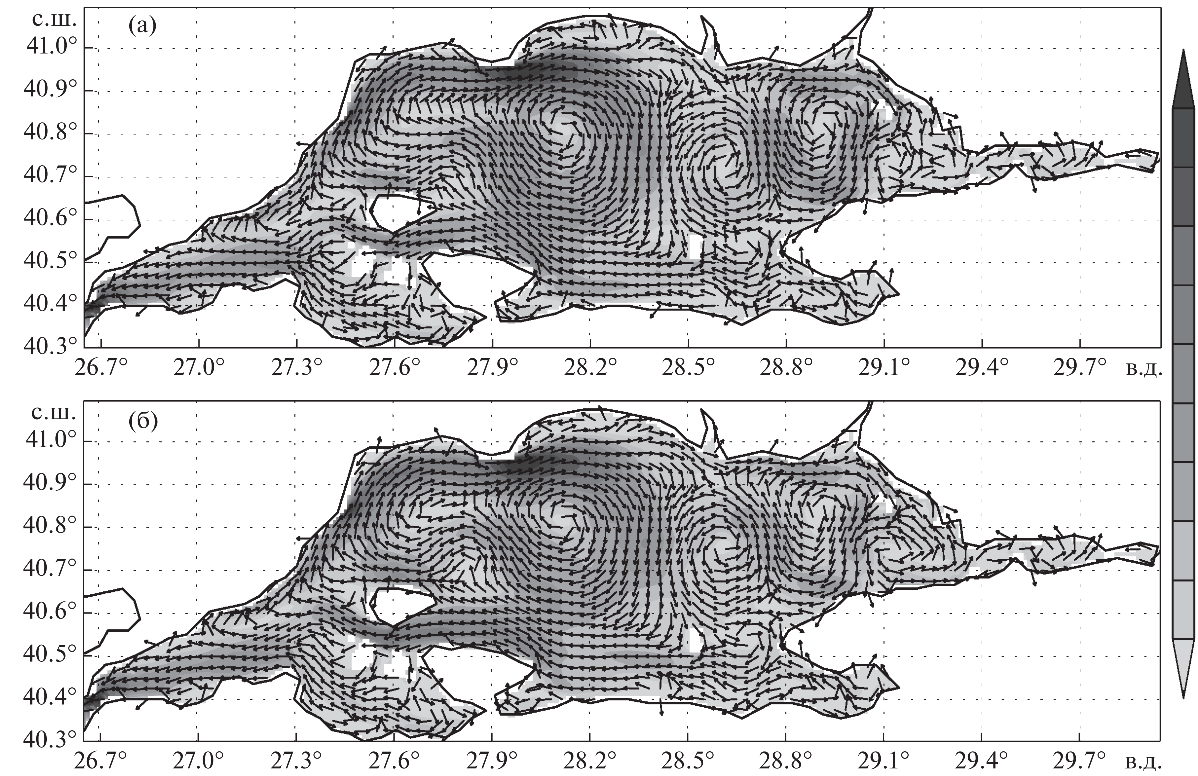

Рис. 2. Среднее за сентябрь 2013 г. поле скорости, см/с, на глубине 5 м: гидростатическая модель (а), негидростатическая модель (б). Стрелками указано направление скорости, заливкой – величина. Шкала заливки – справа от рисунка.

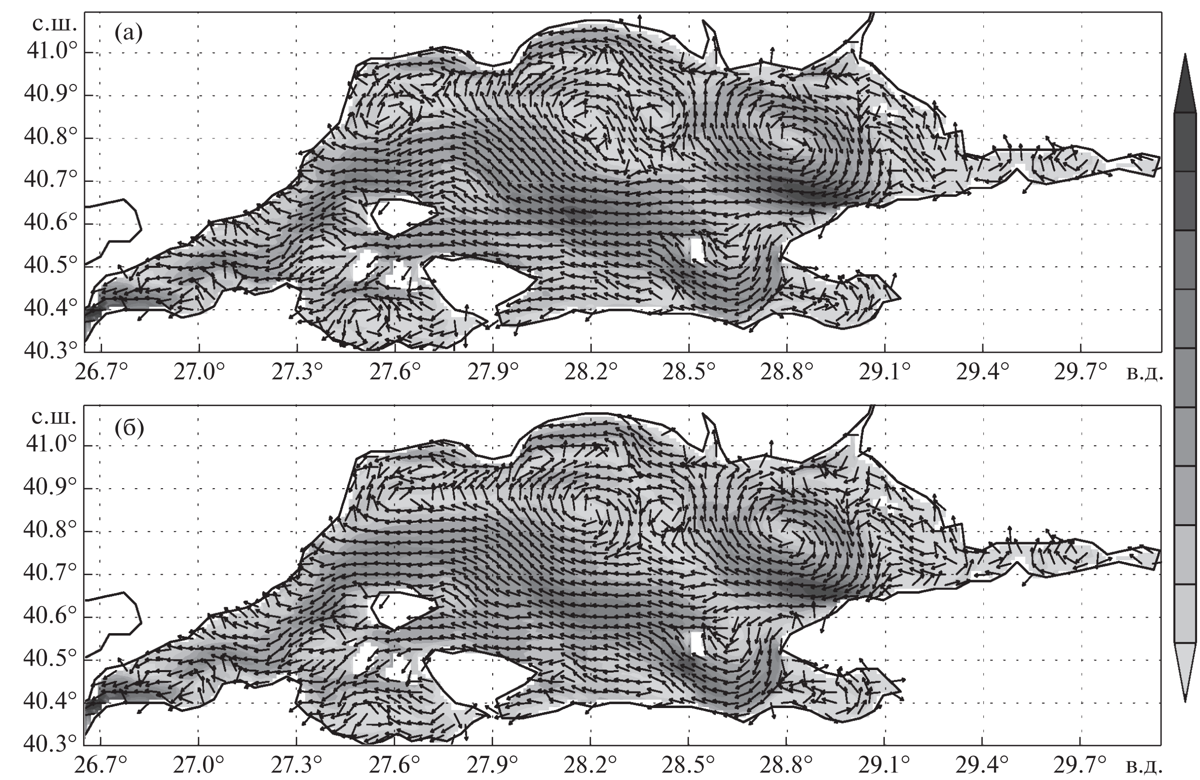

Рис. 3. Среднее за декабрь 2013 г. поле скорости, см/с, на глубине 5 м: гидростатическая модель (а), негидростатическая модель (б). Стрелками указано направление скорости, заливкой – величина. Шкала заливки – справа от рисунка.

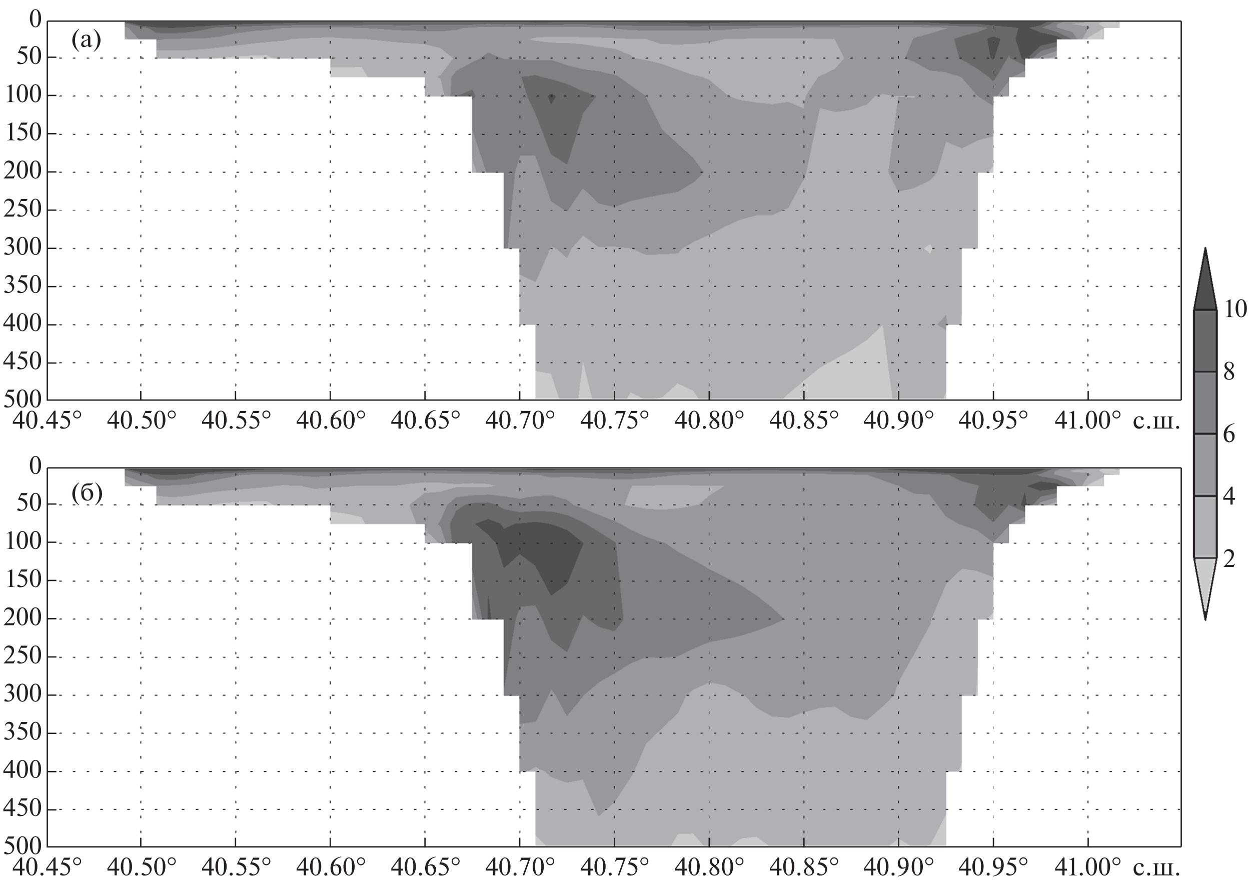

Рис. 4. Среднее за сентябрь 2013 г. среднеквадратичное отклонение зональной скорости, см/с. Разрез вдоль долготы 28° в.д.: гидростатическая модель – (а), негидростатическая модель – (б). Шкала заливки – справа от рисунка.

на глубине 5 м, средние за сентябрь и декабрь. На рисунках отчетливо проявляется трехвихревая структура циркуляции "антициклон–циклон–антициклон", в которой время от времени происходит перераспределение размеров вихрей. Форма вихрей согласована с топографией, но их центры смещены по отношению к центрам соответствующих котловин. Общий перепад уровня моря реалистичен и составляет около 5 см, а согласованные с ним скорости течений достигают 30 см/с. Это, очевидно, связано с малым размером Мраморного моря.

Расчеты показывают, что на склонах дна в негидростатической модели увеличивается интенсификация течений и их временна́я изменчивость. Это заметно проявляется в сентябре (рис. 4) и в декабре. Поля температуры и солености в двух версиях модели довольно близки. Некоторые отличия наблюдаются только в полях температуры в холодный период, в декабре (рис. 5). В области струйного течения вдоль южного берега гидростатическая модель дает небольшую инверсию температуры, а негидростатическая – нет.

Общая структура гидрофизических полей Мраморного моря, рассчитанная по гидростатической и негидростатической моделям, практически одинакова. Это связано, во-первых, с тем, что отношение характерного горизонтального масштаба Мраморного моря к вертикальному остается достаточно большим: $L/H \sim 100$. Это позволяет реалистично описывать его динамику в рамках приближения "мелкого моря" на основе "примитивной" системы уравнений, негидростатические эффекты малы. Во-вторых, Мраморное море расположено в теплом климатическом поясе, льдом не покрывается. Процессы глубокой конвекции не оказывают значительного влияния на его динамику, и крупномасштабная структура гидрофизических полей может быть описана в рамках гидростатического приближения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан алгоритм решения трехмерных уравнений циркуляции океана без приближения гидростатики, основанный на методе многокомпонентного расщепления модифицированной

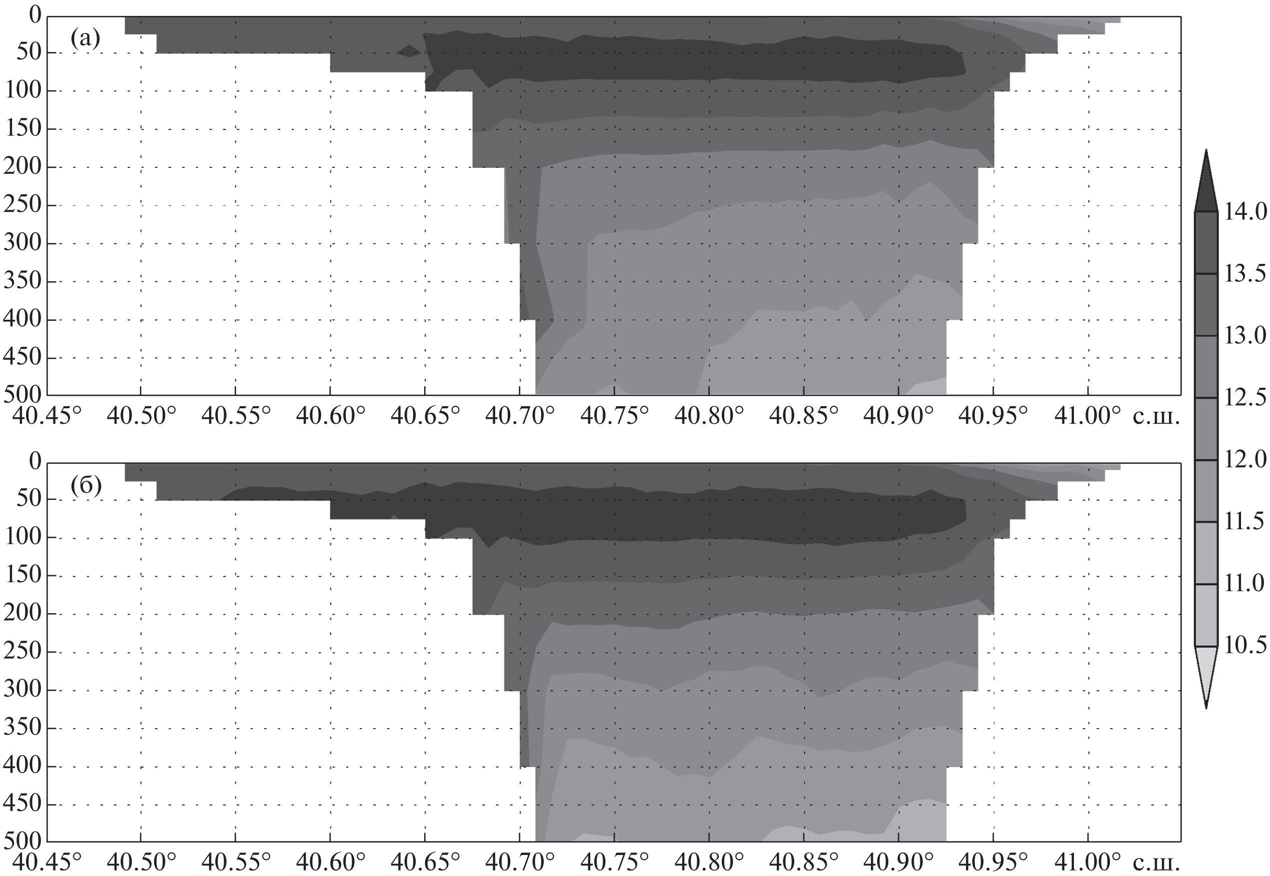

Рис. 5. Средняя за декабрь 2013 г. температура моря, °С. Разрез вдоль долготы 28° в.д.: гидростатическая модель – (а), негидростатическая модель – (б). Шкала заливки – справа от рисунка.

модели с искусственной сжимаемостью. Эффект искусственной сжимаемости вводится с помощью дополнительного члена с производной по времени в уравнении неразрывности. Дополнительный член с малым весом ε записывается для отклонения негидростатической составляющей давления от среднего по вертикали. Это связано с тем, что рассматривается модель динамики океана со свободной поверхностью, т.е. эффект сжимаемости уже присутствует в баротропном компоненте, а уравнение для давления записано для отклонения от среднего по вертикали.

Алгоритм многокомпонентного расщепления включает несколько последовательных процедур расщепления. Вначале исходная система расщепляется на две больших подсистемы: перенос трех компонентов скорости и адаптацию полей плотности и течений. На этапе переноса используется дальнейшее расщепление по отдельным координатам. На этапе адаптации горизонтальные компоненты скорости представляются в виде суммы баротропных и бароклинных и выделяются две соответствующие системы. Бароклинные уравнения далее расщепляются на две подсистемы, описывающие гидростатическую и негидростатическую динамику. Таким образом, в рамках метода расщепления развивается разработанная ранее численная модель гидродинамики океана, основанная на примитивных уравнениях. Расчет негидростатической динамики проводится на дополнительном этапе расщепления.

Численные эксперименты, проведенные для акватории Мраморного моря, показывают близость структур гидрофизических полей, рассчитанных в режимах гидростатической и негидростатической динамики. Это вызвано тем, что отношение горизонтального размера моря к вертикальному еще достаточно велико: $L/H \sim 100$, и крупномасштабная динамика хорошо описывается в рамках приближения “мелкого моря” на основе системы “примитивных” уравнений. Эффекты негидростатической динамики проявляются на склонах дна, где увеличивается интенсификация течений и их временная изменчивость. Некоторые отличия наблюдаются в полях температуры в холодный период. В области струйного течения вдоль южного берега негидростатическая модель не приводит к инверсии температуры, наблюдаемой в гидростатическом случае.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 14-05-31181 и № 15-05-00557).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Владимирова Н.Н., Кузнецов Б.Г., Яненко Н.Н.* Численный расчет симметричного обтекания пластинки плоским потоком вязкой несжимаемой жидкости // Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск: Наука, 1966. С. 186–192.
2. *Вольцингер Н.Е., Андросов А.А.* Негидростатическая динамика региона с подводной горой // Океанология. 2016. Т. 55. № 4.
3. *Гусев А.В., Дианский Н.А.* Воспроизведение циркуляции Мирового океана и ее климатической изменчивости в 1948–2007 гг. // Изв. РАН. Физ. атм. и океана. 2014. Т. 50. № 1. С. 3–15.
4. *Демышев С.Г., Довгая С.В., Иванов В.А.* Численное моделирование влияния обмена через проливы Босфор и Дарданеллы на гидрофизические поля Мраморного моря // Изв. РАН. Физ. атм. и океана. 2012. Т. 48. № 4. С. 471–480.
5. *Залесный В.Б., Тамсалу Р.Э., Куллас Т.* Негидростатическая модель морской циркуляции // Океанология. 2004. Т. 44. № 4. С. 495–506.
6. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973. 416 с.
7. *Марчук Г.И.* Методы расщепления. М.: Наука, 1989. 263 с.
8. *Марчук Г.И., Дымников В.П., Залесный В.Б.* Математические модели в геофизической гидродинамике и численные методы их реализации. Л.: Гидрометеоиздат, 1987. 296 с.
9. *Марчук Г.И., Залесный В.Б.* Моделирование циркуляции Мирового океана с четырехмерной вариационной ассимиляцией полей температуры и солености // Изв. РАН. Физ. атм. и океана. 2012. Т. 48. № 1. С. 21–36.
10. *Русанов А.В., Косьянов Д.Ю.* Численное моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости с использованием неявной квазимонотонной схемы Годунова повышенной точности // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2009. Т. 5. № 4(41). С. 4–7.
11. *Русанов А.В., Косьянов Д.Ю.* Использование неявной схемы расщепления для моделирования течений невязкой несжимаемой жидкости // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2012. Т. 2. № 4(56). С. 67–71.
12. *Яковенко С.Н., Чан К.С.* Аппроксимация потока объемной фракции в течении двух жидкостей // Теплофизика и аэромеханика. 2008. Т. 15. № 2. С. 181–199.
13. *Яненко Н.Н.* Метод дробных шагов. Новосибирск: Наука, 1967. 196 с.
14. *Chorin A.J.* A numerical method for solving incompressible viscous flow problems // J. Comp. Phys. 1967. V. 2. № 1. P. 12–26.
15. *Giraldo F.X., Restelli M.* A study of spectral element and discontinuous Galerkin methods for the Navier–Stokes equations in nonhydrostatic mesoscale atmospheric modeling: Equation sets and test cases // J. Comp. Phys. 2008. V. 227. № 8. P. 3849–3877.
16. *Kanarska Y., Maderich V.* A non-hydrostatic numerical model for calculating free-surface stratified flows // Ocean Dynamics. 2003. V. 53. № 3. P. 176–185.
17. *LeBlond P.H., Mysak L.A.* Waves in the Ocean. Amsterdam–Oxford–New York: Elsevier S.P. Company, 1978. 617 p.
18. *Marchuk G.I., Rusakov A.S., Zalesny V.B., Diansky N.A.* Splitting Numerical Technique with Application to the High Resolution Simulation of the Indian Ocean Circulation // Pure Appl. Geophys. 2005. V. 162. № 8. P. 1407–1429.
19. *Marshall J., Jones H., Hill C.* Efficient Ocean Modeling Using Non-Hydrostatic Algorithms // J. Marine Systems. 1998. V. 18. № 1–3. P. 115–134.
20. *Muldoon F., Acharya S.* A modification of the artificial compressibility algorithm with improved convergence characteristics // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2007. V. 55. № 4. P. 307–345.
21. *Nithiarasu P., Bevan R.L.T., Murali K.* An artificial compressibility based fractional step method for solving time dependent incompressible flow equations. Temporal accuracy and similarity with a monolithic method // Comput. Mech. 2013. V. 51. № 3. P. 255–260.
22. *Reznik G.M., Zeitlin V.* Asymptotic methods with application to the fast-slow splitting and the geostrophic adjustment // Edited Series on Advances in Nonlinear Science and Complexity. 2007. V. 2. P. 47–120.
23. *Tang H.S., Sotiropoulos F.* Fractional step artificial compressibility schemes for the unsteady incompressible Navier-Stokes equations // Computers & Fluids. 2007. V. 36. № 5. P. 974–986.
24. *Skamarock W.C., Klemp J.B., Dudhia J. et al.* A description of the Advanced Research WRF version 3 // NCAR Tech. Note. 2008. 125 p.
25. *Vil'fand R.M., Rivin G.S., Rozinkina I.A.* COSMO-RU system of nonhydrostatic mesoscale short-range weather forecast of the Hydrometcenter of Russia: The first stage of realization and development // Russian Meteorology and Hydrology, 2010. V. 35. № 8. P. 503–514.
26. *Vrahliotis S., Pappou T., Tsangaris S.* Artificial compressibility 3-D Navier-Stokes solver for unsteady incompressible flows with hybrid grids // Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics. 2012. V. 6. № 2. P. 248–270.
27. *Zalesny V.B.* Mathematical model of sea dynamics in a σ-coordinate system // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2005. V. 20. № 1. P. 97–113.
28. *Zalesny V.B., Gusev A.V.* Mathematical model of the World ocean dynamics with algorithms of variational assimilation of temperature and salinity fields // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2009. V. 24. № 2. P. 171–190.
29. *Zalesny V.B., Marchuk G.I., Agoshkov V.I. et al.* Numerical simulation of large-scale ocean circulation based on the multicomponent splitting method // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2010. V. 2. № 6. P. 581–609.

Numerical Model of Non-Hydrostatic Marine Dynamics Based on the Methods of Artificial Compressibility and Multicomponent Splitting

V. B. Zalesny, A. V. Gusev, V. V. Fomin

The algorithm is proposed for solving three-dimensional equations of ocean hydrodynamics without hydrostatic approximation and traditional simplification of Coriolis acceleration. It is based on the technique of multicomponent splitting of the modified model with artificial compressibility. The original system is split into two subsystems, one describes transport of three velocity components, another describes adaptation of density and velocity fields. At the adaptation stage, the horizontal velocity components are presented as a sum of depth-means and deviations from them, and two respective subsystems are deduced. For barotropic dynamics, the compressibility effect is presented through the boundary condition at free surface, while for baroclinic subsystem it is introduced as ε-regularization of continuity equation. The baroclinic equations are further split into two subsystems describing hydrostatic and non-hydrostatic dynamics. The computation of non-hydrostatic dynamics is performed at separate stage of the splitting. The algorithm is included in the INM RAS model based on "primitive" equations, and verified by solving Marmara Sea hydrodynamics problem.